Sul sistema di due coniche.

(*Del dott.* Francesco Gerbaldi, *a Roma.*)

I. Formole fondamentali.

Siano due forme ternarie quadratiche in notazione simbolica

$$a_x^2 = a'^2_x = \cdots = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 = \Sigma a_{ik} x_i x_k$$

$$b_x^2 = b'^2_x = \cdots = (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 = \Sigma b_{ik} x_i x_k.$$

Se ne considerino le seguenti forme invariantive fondamentali

$$\begin{array}{ll} u_\alpha^2 = u_{\alpha'}^2 = \cdots = (a a' u)^2 & A_1 = (a a' a'')^2 = a_\alpha^2 \\ u_\tau^2 = u_{\tau'}^2 = \cdots = (a b u)^2 & \Theta_1 = (a a' b)^2 = b_\alpha^2 = a_\tau^2 \\ u_\beta^2 = u_{\beta'}^2 = \cdots = (b b' u)^2 & \Theta_2 = (a b b')^2 = a_\beta^2 = b_\tau^2 \\ f_x^2 = f'^2_x = \cdots = (\alpha \beta x)^2 & A_2 = (b b' b'')^2 = b_\beta^2, \end{array}$$

e si ricordino inoltre le relazioni:

$$(\alpha \alpha' x)^2 = \frac{4}{3} A_1 a_x^2 = \bar{a}_x^2 \qquad (1) \qquad (\beta \beta' x)^2 = \frac{4}{3} A_2 b_x^2 = \bar{b}_x^2 \qquad (2)$$

$$(\alpha \alpha' \alpha'')^2 = \frac{4}{3} A_1^2 = \overline{A_1} \qquad (3) \qquad (\beta \beta' \beta'')^2 = \frac{4}{3} A_2^2 = \overline{\Theta_2} \qquad (4)$$

$$(\alpha \alpha' \beta)^2 = \frac{4}{3} A_1 \Theta_2 = f_\alpha^2 = \overline{\Theta_1} \qquad (5) \qquad (\alpha \beta \beta')^2 = \frac{4}{3} A_2 \Theta_1 = f_\beta^2 = \overline{A_2}. \qquad (6)$$

Si introduca ora l'operazione

$$\delta = \Sigma \frac{\partial}{\partial a_{ik}} b_{ik},$$

per la quale si ha:

$$\begin{array}{llll} \delta a_x^2 = b_x^2 & \delta b_x^2 = 0 & & \\ \delta u_\beta^2 = 2 u_\tau^2 & \delta u_\tau^2 = u_\beta^2 & \delta u_\beta^2 = 0 & \\ \delta A_1 = 3 \Theta_1 & \delta \Theta_1 = 2 \Theta_2 & \delta \Theta_2 = A_2 & \delta A_2 = 0, \end{array}$$

e la si applichi successivamente ai due membri della (1), si deduce:

$$(\alpha\tau x)^2 = \Theta_1 a_x^2 + \frac{1}{3} A_1 b_x^2 \tag{7}$$

$$t_x^2 = (\tau\tau' x)^2 = \Theta_2 a_x^2 + \Theta_1 b_x^2 - \frac{1}{2} f_x^2 \tag{8}$$

$$(\beta\tau x)^2 = \frac{1}{3} A_2 a_x^2 + \Theta_2 b_x^2. \tag{9}$$

Si applichi ancora l'operazione ∂ successivamente ai due membri della (3), e si avrà:

$$(\alpha\alpha'\tau)^2 = \frac{4}{3} A_1 \Theta_1 \tag{10}$$

$$(\alpha\tau\tau')^2 = \frac{1}{3}(A_1\Theta_2 + 3\Theta_1^2) \qquad (\alpha\tau\tau')^2 = t_\alpha^2 = (aa't)^2 \tag{11}$$

$$2(\tau\tau'\tau'')^2 + 2(\alpha\beta\tau)^2 = \frac{1}{3} A_1 A_2 + 5\Theta_1\Theta_2 \tag{12}$$

$$(\beta\tau\tau')^2 = \frac{1}{3}(A_2\Theta_1 + 3\Theta_2^2) \qquad (\beta\tau\tau')^2 = t_\beta^2 = (bb't)^2 \tag{13}$$

$$(\beta\beta'\tau)^2 = \frac{4}{3} A_2\Theta_2. \tag{14}$$

Dalla (8) ponendo $x_i = \tau_i$ si ha:

$$(\tau\tau'\tau'')^2 = 2\Theta_1\Theta_2 - \frac{1}{2}(\alpha\beta\tau)^2,$$

e da questa combinata colla (12) si ricava:

$$(\alpha\beta\tau)^2 = \frac{1}{3}(A_1A_2 + 3\Theta_1\Theta_2) \qquad (\alpha\beta\tau)^2 = f_\tau^2 = (abf)^2 \tag{15}$$

$$(\tau\tau'\tau'')^2 = \frac{1}{6}(9\Theta_1\Theta_2 - A_1A_2) \qquad (\tau\tau'\tau'')^2 = t_\tau^2 = (abt)^2. \tag{16}$$

Le formole che corrispondono per dualità alle (7) (8) (9) sono:

$$(\bar{a} f u)^2 = \overline{\Theta_1} u_\alpha^2 + \frac{1}{3}\overline{A_1} u_\beta^2$$

$$(ff'u)^2 = \overline{\Theta_2} u_\alpha^2 + \overline{\Theta_1} u_\beta^2 - \frac{1}{2}(\bar{a}\bar{b}u)^2$$

$$(\bar{b} f u)^2 = \frac{1}{3}\overline{A_2} u_\alpha^2 + \overline{\Theta_2} u_\beta^2,$$

e da queste, in virtù delle relazioni (1), (2),..., (6), si deduce:

$$(afu)^2 = \Theta_2 u_\alpha^2 + \frac{1}{3} A_1 u_\beta^2 \tag{17}$$

$$u_\varphi^2 = (ff'u)^2 = \frac{4}{3} A_2 \Theta_1 u_\alpha^2 - \frac{8}{9} A_1 A_2 u_\tau^2 + \frac{4}{3} A_1 \Theta_2 u_\beta^2 \tag{18}$$

$$(bfu)^2 = \frac{1}{3} A_2 u_\alpha^2 + \Theta_1 u_\beta^2. \tag{19}$$

Nella (18) si ponga successivamente

$$u_i = a_i, \qquad b_i, \qquad t_i, \qquad f_i,$$

e si tengano presenti le formole (5), (6), (11), (13), (15), (16), si avrà:

$$a_\varphi^2 = (aff')^2 \ = \frac{4}{9} A_1 (3\Theta_2^2 + A_2 \Theta_1) \tag{20}$$

$$f_\varphi^2 = (ff'f'')^2 = \frac{8}{27} A_1 A_2 (9\Theta_1\Theta_2 - A_1 A_2) \tag{21}$$

$$b_\varphi^2 = (bff')^2 \ = \frac{4}{9} A_2 (3\Theta_1^2 + A_1 \Theta_2) \tag{22}$$

$$t_\varphi^2 = (ff't)^2 \ = \frac{4}{27} (9 A_1 \Theta_2^3 + 9 A_2 \Theta_1^3 + A_1^2 A_2^2 - 3 A_1 A_2 \Theta_1 \Theta_2). \tag{23}$$

II. Fascio e schiera di coniche.

Le equazioni $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$ rappresentano due coniche C_1 e C_2 in coordinate di punti, e le equazioni $u_\alpha^2 = 0$, $u_\beta^2 = 0$ rappresentano le stesse in coordinate di rette. L'equazione $u_\tau^2 = 0$ rappresenta una conica le cui tangenti tagliano armonicamente C_1 e C_2: e l'equazione $f_x^2 = 0$ rappresenta una conica i cui punti proiettano armonicamente C_1 e C_2.

Le coniche C_1 e C_2 determinano un fascio ed una schiera di coniche. Le equazioni:

$$a_x^2 + \theta b_x^2 \ = 0 \tag{24}$$

$$u_\alpha^2 + 2\theta u_\tau^2 + \theta^2 u_\beta^2 = 0, \tag{24'}$$

rappresentano una conica qualunque del fascio, la prima in coordinate di punti, la seconda in coordinate di rette. Così pure le equazioni:

$$u_\alpha^2 + \eta u_\beta^2 = 0 \tag{25}$$

$$\overline{a}_x^2 + 2\eta f_x^2 + \eta^2 \overline{b}_x^2 = 0, \tag{25'}$$

rappresentano una conica qualunque della schiera; la prima in coordinate di rette, la seconda in coordinate di punti.

Nel fascio vi sono tre coniche degenerate in coppie di rette; i valori corrispondenti del parametro θ sono le radici dell'equazione

$$A_1 + 3\Theta_1\theta + 3\Theta_2\theta^2 + A_2\theta^3 = 0, \tag{26}$$

e li denoteremo con θ', θ'', θ'''; per questi valori di θ la (24') rappresenta i vertici del triangolo autoconiugato comune a C_1 e C_2 contati ciascuno due volte.

Nella schiera vi sono tre coniche degenerate in coppie di punti; i valori corrispondenti del parametro η sono le radici dell'equazione

$$\overline{A}_1 + 3\overline{\Theta}_1\eta + 3\overline{\Theta}_2\eta^2 + \overline{A}_2\eta^3 = 0,$$

e li denoteremo con η', η'', η'''; per questi valori di η la (25') rappresenta i lati del triangolo autoconiugato comune a C_1 e C_2, contati ciascuno due volte.

In virtù delle formole (3), (4), (5), (6) si hanno le relazioni

$$\eta' = \frac{A_1}{A_2\theta'} \qquad \eta'' = \frac{A_1}{A_2\theta''} \qquad \eta''' = \frac{A_1}{A_2\theta'''}\,. \tag{27}$$

In ciò che segue, quando le coniche C_1 e C_2 si suppongono non degeneri e quindi A_1 ed A_2 diversi da zero, porremo per ragioni di semplicità e di simmetria

$$X_1 = \frac{4}{3}A_2 a_x^2 \qquad X_2 = 2f_x^2 \qquad X_3 = \frac{4}{3}A_1 b_x^2$$

$$U_1 = u_\alpha^2 \qquad U_2 = 2u_\gamma^2 \qquad U_3 = u_\beta^2.$$

Allora le equazioni dei lati del triangolo autoconiugato (contati ciascuno due volte) si scrivono:

$$\theta^2 X_1 + \theta X_2 + X_3 = 0 \qquad [\theta = \theta',\ \theta'',\ \theta'''], \tag{28}$$

e le equazioni dei vertici (contati ciascuno due volte) si scrivono:

$$U_1 + \theta U_2 + \theta^2 U_3 = 0 \qquad [\theta = \theta',\ \theta'',\ \theta''']. \tag{29}$$

Il discriminante dell'equazione di 3.° grado (26) è

$$R = A_1^2 A_2^2 - 3\Theta_1^2\Theta_2^2 - 6A_1A_2\Theta_1\Theta_2 + 4A_2\Theta_1^3 + 4A_1\Theta_2^3, \tag{30}$$

e quando esso si annulla le due coniche C_1 e C_2 si toccano.

III. Le coniche invariantive.

Siccome il sistema di due forme ternarie quadratiche ha soltanto tre covarianti di second'ordine, così tutte le coniche che hanno relazioni invariantive colle coniche date C_1 e C_2 formano una rete, di cui l'equazione è

$$l a_x^2 + 2 m f_x^2 + n b_x^2 = 0. \tag{31}$$

Siccome poi il sistema di tre forme ternarie quadratiche ha soltanto tre contravarianti di 2.ª classe, così tutte le coniche che hanno relazioni invariantive colle C_1 e C_2 formano un tessuto, di cui l'equazione è

$$\lambda u_\alpha^2 + 2\mu u_\tau^2 + \nu u_\beta^2 = 0. \tag{32}$$

Le coniche invariantive di C_1 e C_2 formano adunque una serie che è ad un tempo *rete* e *tessuto;* cioè ve ne è sempre una ed una sola che passa per due punti dati, e così pure ve ne è sempre una ed una sola che tocca due rette date; le coniche d'un siffatto sistema hanno tutte, come è noto, uno stesso triangolo autoconiugato.

Una conica di equazione tangenziale (32), che chiameremo *conica* (λ, μ, ν), ha per equazione locale

$$\begin{gathered}\lambda^2(\alpha\alpha' x)^2 + 4\mu^2(\tau\tau' x)^2 + \nu^2(\beta\beta' x)^2 \\ + 4\mu\nu(\beta\tau x)^2 + 2\lambda\nu(\alpha\beta x)^2 + 4\lambda\mu(\alpha\tau x)^2 = 0,\end{gathered}$$

e questa, in virtù delle formole (1), (2), (7), (8), (9), si riduce precisamente alla forma (31), avendosi:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{4}{3}\left[A_1\lambda^2 + 3\Theta_1\lambda\mu + 3\Theta_2\mu^2 + A_2\mu\nu\right] \\ m &= \lambda\nu - \mu^2 \\ n &= \frac{4}{3}\left[A_1\lambda\mu + 3\Theta_1\mu^2 + 3\Theta_2\mu\nu + A_2\nu^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Analogamente una conica di equazione locale (31), che chiameremo *conica* (l, m, n), ha per equazione tangenziale

$$\begin{gathered} l^2(aa'u)^2 + 4m^2(ff'u)^2 + n^2(bb'u)^2 \\ + 4mn(bfu)^2 + 2ln(abu)^2 + 4lm(afu)^2 = 0,\end{gathered}$$

e questa, in virtù delle formole (17), (18), (19) si riduce precisamente alla forma (32), avendosi

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= l^2 + 4\Theta_2 lm + \frac{16}{3} A_2 \Theta_1 m^2 + \frac{4}{3} A_2 mn \\ \mu &= ln - \frac{16}{9} A_1 A_2 m^2 \\ \nu &= n^2 + 4\Theta_1 mn + \frac{16}{3} A_1 \Theta_2 m^2 + \frac{4}{3} A_1 lm. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

In ciò che segue, fino a tanto che le coniche C_1 e C_2 si suppongono non degeneri, scriveremo le equazioni locale e tangenziale d'una conica invariantiva sotto la forma:

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + l_3 X_3 = 0 \tag{31'}$$

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0, \tag{32'}$$

e allora le relazioni precedenti tra i *parametri locali* $l_1\ l_2\ l_3$ ed i *parametri tangenziali* $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ acquistano maggior simmetria e diventano:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{A_2} [A_1 \lambda_1^2 + 3\Theta_1 \lambda_1 \lambda_2 + 3\Theta_2 \lambda_2^2 + A_2 \lambda_2 \lambda_3] \\ l_2 &= \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2 \\ l_3 &= \frac{1}{A_1} [A_2 \lambda_3^2 + 3\Theta_2 \lambda_2 \lambda_3 + 3\Theta_1 \lambda_2^2 + A_1 \lambda_1 \lambda_2] \end{aligned}\right\} \tag{33'}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{A_1} [A_2 l_1^2 + 3\Theta_2 l_1 l_2 + 3\Theta_1 l_2^2 + A_1 l_2 l_3]. \\ \lambda_2 &= l_1 l_3 - l_2^2 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{A_2} [A_1 l_3^2 + 3\Theta_1 l_2 l_3 + 3\Theta_2 l_2^2 + A_2 l_1 l_2]. \end{aligned}\right\} \tag{34'}$$

Dalle (33') si passa alle (34') e viceversa dalle (34') si ritorna alle (33') cogli scambi di l_1 con λ_3, di l_2 con λ_2, e di l_3 con λ_1.

Il discriminante di una conica di equazione (32) è:

$$\begin{aligned} &(\alpha\alpha'\alpha'')^2\lambda^3 + 8(\tau\tau'\tau'')^2\mu^3 + (\beta\beta'\beta'')^2\nu^3 + 12(\alpha\beta\tau)^2\lambda\mu\nu \\ &+ 6(\alpha\alpha'\tau)^2\lambda^2\mu + 3(\alpha\alpha'\beta)^2\lambda^2\nu + 12(\alpha\tau\tau')^2\mu^2\lambda \\ &+ 12(\beta\tau\tau')^2\mu^2\nu + 3(\alpha\beta\beta')^2\lambda\nu^2 + 6(\beta\beta'\tau)^2\mu\nu^2, \end{aligned}$$

donde, tenendo presenti le formole (3), (4), (5), (6), (10)... (16) si ha che il discriminante della conica $(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3)$ è:

$$\left.\begin{aligned}&A_1^2\lambda_1^3+(9\Theta_1\Theta_2-A_1A_2)\lambda_2^3+A_2^2\lambda_3^3+3(A_1A_2+3\Theta_1\Theta_2)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\ &+6A_1\Theta_1\lambda_1^2\lambda_2+6A_2\Theta_2\lambda_2\lambda_3^2+3A_1\Theta_2\lambda_1^2\lambda_3+3A_2\Theta_1\lambda_1\lambda_3^2\\ &+3(A_1\Theta_2+3\Theta_1^2)\lambda_1\lambda_2^2+3(A_2\Theta_1+3\Theta_2^2)\lambda_2^2\lambda_3.\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

In modo analogo si potrebbe ottenere il discriminante della conica $(l_1\ l_2\ l_3)$; ma esso si deduce immediatamente dalla formola precedente scambiando λ_1, λ_2, λ_3 rispettivamente con l_3, l_2, l_1; ed è:

$$\left.\begin{aligned}&A_2^2l_1^3+(9\Theta_1\Theta_2-A_1A_2)l_2^3+A_1^2l_3^3+3(A_1A_2+3\Theta_1\Theta_2)l_1l_2l_3\\ &+6A_2\Theta_2l_1^2l_2+6A_1\Theta_1l_2l_3^2+3A_2\Theta_1l_1^2l_3+3A_1\Theta_2l_1l_3^2\\ &+3(A_2\Theta_1+3\Theta_2^2)l_1l_2^2+3(A_1\Theta_2+3\Theta_1^2)l_2^2l_3.\end{aligned}\right\}\quad(36)$$

Infine, se della conica si conoscono ad un tempo i parametri locali ed i tangenziali, il suo discriminante è:

$$\begin{aligned}&a_\alpha^2l\lambda+4f_\gamma^2m\mu+b_\beta^2n\nu+a_\beta^2l\nu+b_\alpha^2n\lambda\\ &+2a_\gamma^2l\mu+2f_\alpha^2m\lambda+2b_\gamma^2n\mu+2f_\beta^2m\nu,\end{aligned}$$

ossia:

$$\left.\begin{aligned}&A_1A_2(l_1\lambda_1+l_3\lambda_3)+2A_2\Theta_1(l_1\lambda_2+l_2\lambda_3)+2A_1\Theta_2(l_2\lambda_1+l_3\lambda_2)\\ &+(3\Theta_1\Theta_2+A_1A_2)l_2\lambda_2+A_1\Theta_1l_3\lambda_1+A_2\Theta_2l_1\lambda_3.\end{aligned}\right\}\quad(37)$$

A due terne proporzionali $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3::\lambda'_1:\lambda'_2:\lambda'_3$ di parametri tangenziali corrisponde evidentemente una stessa conica. La proposizione inversa non è evidente, ed infatti vi è un caso in cui essa non è vera, e questo caso avviene quando le due coniche C_1 e C_2 hanno doppio contatto.

Se la conica $(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3)$ coincide colla conica $(\lambda'_1\ \lambda'_2\ \lambda'_3)$, denotando con k un incognito fattore, deve essere identicamente per tutti i valori di u_1, u_2, u_3

$$(\lambda_1-k\lambda'_1)u_\alpha^2+2(\lambda_2-k\lambda'_2)u_\gamma^2+(\lambda_3-k\lambda'_3)u_\beta^2=0,\qquad(a)$$

donde, ponendo successivamente $u_i=a_i,\ b_i,\ f_i$ e tenendo presenti le formole (5) e (15), si deduce:

$$\begin{aligned}A_1(\lambda_1-k\lambda'_1)+2\Theta_1(\lambda_2-k\lambda'_2)+\Theta_2(\lambda_3-k\lambda'_3)&=0\\ \Theta_1(\lambda_1-k\lambda'_1)+2\Theta_2(\lambda_2-k\lambda'_2)+A_2(\lambda_3-k\lambda'_3)&=0\\ 2A_1\Theta_2(\lambda_1-k\lambda'_1)+(3\Theta_1\Theta_2+A_1A_2)(\lambda_2-k\lambda'_2)+2A_2\Theta_1(\lambda_3-k\lambda'_3)&=0.\end{aligned}$$

Il determinante di queste tre equazioni omogenee di 1.° grado rispetto ai binomii $\lambda_i-k\lambda'_i$ è $-R$. Dunque se R non è zero, cioè se le coniche C_1 e C_2

non si toccano, le coniche $(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3)$ e $(\lambda'_1\ \lambda'_2\ \lambda'_3)$ coincideranno soltanto quando si abbia:

$$\lambda_1 - k\lambda'_1 = 0 \qquad \lambda_2 - k\lambda'_2 = 0 \qquad \lambda_3 - k\lambda'_3 = 0,$$

quando cioè le due terne di parametri sono proporzionali.

Se poi si ha $R = 0$, la terza delle precedenti equazioni è conseguenza delle prime due, le quali, denotando con h un fattore incognito, dànno:

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_1 - k\lambda'_1 = 2h(\Theta_2^2 - A_2\Theta_1), \qquad \lambda_2 - k\lambda'_2 = h(A_1 A_2 - \Theta_1\Theta_2), \\ \lambda_3 - k\lambda'_3 = 2h(\Theta_1^2 - A_1\Theta_2),\end{array}\right\} \quad (38)$$

e mercè queste la identità (a) diventa:

$$h\left[(\Theta_2^2 - A_2\Theta_1)u_\alpha^2 + (A_1 A_2 - \Theta_1\Theta_2)u_\gamma^2 + (\Theta_1^2 - A_1\Theta_2)u_\beta^2\right] = 0;$$

dunque: o è h nullo, e allora dalle (38) segue nuovamente la proporzionalità fra le due terne di parametri; oppure deve annullarsi identicamente la forma:

$$u_\omega^2 = (\Theta_2^2 - A_2\Theta_1)u_\alpha^2 + (A_1 A_2 - \Theta_1\Theta_2)u_\gamma^2 + (\Theta_1^2 - A_1\Theta_2)u_\beta^2. \quad (39)$$

In quest'ultimo caso le coniche C_1 e C_2 (come è noto) hanno doppio contatto, ed in questo solo caso possono due coniche $(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3)$ e $(\lambda'_1\ \lambda'_2\ \lambda'_3)$ coincidere, senza che si abbia $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 :: \lambda'_1 : \lambda'_2 : \lambda'_3$; bastando allora per la coincidenza le relazioni (38), qualunque siano i valori delle costanti h e k, con k diverso da 0.

Analogamente si dimostra che due coniche $(l_1\ l_2\ l_3)$ ed $(l'_1\ l'_2\ l'_3)$ coincidono allora soltanto, quando si abbia $l_1 : l_2 : l_3 :: l'_1 : l'_2 : l'_3$; eccettuato il caso, in cui si ha per identità:

$$(\overline{\Theta}_2^2 - \overline{\Theta}_1\overline{A}_2)\overline{a}_x^2 + (\overline{A}_1\overline{A}_2 - \overline{\Theta}_1\overline{\Theta}_2)f_x^2 + (\overline{\Theta}_1^2 - \overline{A}_1\overline{\Theta}_2)\overline{b}_x^2 = 0,$$

nel qual caso si annulla identicamente la forma:

$$\Omega_x^2 = \frac{4}{3}A_2(\Theta_1^2 - A_1\Theta_2)a_x^2 + (A_1 A_2 - \Theta_1\Theta_2)f_x^2 + \frac{4}{3}A_1(\Theta_2^2 - A_2\Theta_1)b_x^2, \quad (40)$$

e le coniche C_1 e C_2 hanno doppio contatto.

IV. Alcune notevoli coniche invariantive.

L'annullarsi dell'invariante Θ_1 significa (come è noto) che esistono infiniti triangoli iscritti in C_1 ed autoconiugati rispetto a C_2, ed infiniti triangoli circoscritti a C_2 ed autoconiugati rispetto a C_1; in questo caso diremo per brevità che la conica C_1 è *armonicamente iscritta* rispetto a C_2, ovvero che la conica C_2 è *armonicamente circoscritta* rispetto a C_1. Analogo significato ha l'annullarsi dell'invariante Θ_2, basta scambiare le veci delle due coniche C_1 e C_2. Quando son nulli tutti e due gli invarianti Θ_1 e Θ_2 è scambievole l'ufficio dell'una conica rispetto all'altra, e noi diremo *involutorie* due coniche siffatte.

Le due coniche involutorie di un fascio o d'una schiera (*). — In un fascio di coniche ve ne sono sempre due involutorie. Infatti si considerino nel fascio determinato da C_1 e C_2 due coniche di parametri $\theta = r$ $\theta = s$; i loro invarianti simultanei sono:

$$A_1 + (2s + r)\Theta_1 + s(2r + s)\Theta_2 + rs^2 A_2$$
$$A_1 + (2r + s)\Theta_1 + r(2s + r)\Theta_2 + r^2 s A_2.$$

Se le due coniche sono involutorie, essi si annullano, e se ne deducono le equazioni:

$$(r - s)[A_1 + (r + s)\Theta_1 + rs\Theta_2] = 0$$
$$(r - s)[\Theta_1 + (r + s)\Theta_2 + rsA_2] = 0.$$

Escludendo quindi le soluzioni che corrispondono ad $r = s$, per cui si otterrebbero le coniche degeneri del fascio, si ha che i parametri r s delle due coniche involutorie del fascio sono le radici dell'equazione di 2.° grado

$$\begin{vmatrix} x^2 & -x & 1 \\ A_1 & \Theta_1 & \Theta_2 \\ \Theta_1 & \Theta_2 & A_2 \end{vmatrix} = (\Theta_1 A_2 - \Theta_2^2)x^2 + (A_1 A_2 - \Theta_1\Theta_2)x + (\Theta_2 A_1 - \Theta_1^2) = 0, \quad (41)$$

la quale è l'Hessiana dell'equazione di 3.° grado (26) da cui dipendono le coniche degeneri del fascio, ed ha R per discriminante. Se $R > 0$, la (41) ha radici reali, e quindi le coniche involutorie del fascio sono reali, perchè nel caso di $R > 0$ tutte le coniche del fascio, che corrispondono a valori reali del parametro, sono reali. Se $R < 0$, le coniche involutorie sono imaginarie, perchè le radici della (41) sono imaginarie. Se $R = 0$, le coniche C_1 e C_2 si toccano; in questo caso la (41) ha una radice doppia, e questa è radice doppia della (26); quindi le due coniche involutorie coincidono in una conica degenere costituita dalla retta tangente a C_1 e C_2 nel loro punto di contatto e dalla corda per gli altri due punti comuni.

(*) Cfr. Battaglini, *Sulle forme ternarie quadratiche*. Giornale di Matematiche, Vol. VIII, pag. 134.

Analogamente, nella schiera determinata da C_1 e C_2 vi sono due coniche involutorie, i parametri delle quali sono gli inversi delle radici della (41) moltiplicati per $\frac{A_1}{A_2}$.

La conica combinante del fascio o della schiera (*). — Osserviamo che quando si scambia b_x^2 con $a_x^2 + r b_x^2$ bisogna scambiare

$$\left.\begin{array}{lll} u_\alpha^2 & \text{con} & u_\alpha^2 + r u_\tau^2 \\ u_\beta^2 & \text{con} & u_\alpha^2 + 2 r u_\tau^2 + r^2 u_\beta^2 \\ f_x^2 & \text{con} & (\alpha\alpha' x)^2 + 2r(\alpha\tau x)^2 + r^2(\alpha\beta x)^2 \\ & & = \left(\frac{4}{3} A_1 + 2r\Theta_1\right) a_x^2 + r^2 f_x^2 + \frac{2}{3} A_1 r b_x^2 \\ \Theta_1 & \text{con} & A_1 + r\Theta_1 \\ \Theta_2 & \text{con} & A_1 + 2r\Theta_1 + r^2\Theta_2. \end{array}\right\} \tag{42}$$

Quindi se

$$u_\alpha^2 + y u_\tau^2 + z u_\beta^2,$$

è un combinante del fascio, si deve avere identicamente per tutti i valori di r e di $u_1\ u_2\ u_3$

$$k(u_\alpha^2 + y u_\tau^2 + z u_\beta^2) = u_\alpha^2 + y(u_\alpha^2 + r u_\tau^2) + z(u_\alpha^2 + 2 r u_\tau^2 + r^2 u_\beta^2),$$

donde ponendo successivamente $u_i = a_i,\ b_i$ si deducono le equazioni:

$$k(A_1 + y\Theta_1 + z\Theta_2) = A_1 + y(A_1 + r\Theta_1) + z(A_1 + 2r\Theta_1 + r^2\Theta_2)$$

$$k(\Theta_1 + y\Theta_2 + zA_2) = \Theta_1 + y(\Theta_1 + r\Theta_2) + z(\Theta_1 + 2r\Theta_2 + r^2 A_2),$$

le quali devono essere soddisfatte per valori fissi di y e z qualunque sia il valore di r; tali equazioni si possono scrivere:

$$(k-1)(A_1 + y\Theta_1 + z\Theta_2) = r[(y+2z)\Theta_1 + rz\Theta_2]$$

$$(k-1)(\Theta_1 + y\Theta_2 + zA_2) = r[(y+2z)\Theta_2 + rzA_2],$$

donde si ricava:

$$rz[(A_1A_2 - \Theta_1\Theta_2) + (\Theta_1 A_2 - \Theta_2^2)y] + (y+2z)[(A_1\Theta_2 - \Theta_1^2) + (\Theta_2^2 - A_2\Theta_1)z] = 0,$$

e, dovendo questa essere verificata per tutti i valori di r, si deduce:

$$y = \frac{A_1A_2 - \Theta_1\Theta_2}{\Theta_2^2 - A_2\Theta_1} \qquad z = \frac{\Theta_1^2 - A_1\Theta_2}{\Theta_2^2 - A_2\Theta_1}.$$

(*) Cfr. Battaglini, l. c., pag. 143. — Mertens. *Ueber einen Kegelschnitt, welcher die Combinanteneigenschaft in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel hat.* Sitzungsberichte der Mat. Classe der K. Akademie. Wien, Bd. 91; S. 637-640.

Dunque, se vi è una conica combinante del fascio, questa non può essere altro che $u_\omega^2 = 0$, essendo u_ω^2 la forma definita dalla (39).

Volendo l'equazione di questa conica in coordinate di punti, basta far capo alle relazioni (33), e sostituire in esse

$$\lambda = \Theta_2^2 - A_2 \Theta_1, \qquad \mu = \frac{1}{2}(A_1 A_2 - \Theta_1 \Theta_2), \qquad \nu = \Theta_1^2 - A_1 \Theta_2,$$

fatti i calcoli si ha:

$$l = \frac{R}{3}\Theta_2, \qquad m = -\frac{R}{4}, \qquad n = \frac{R}{3}\Theta_1,$$

dunque, se $R \gtrless 0$, *l'equazione locale della conica* $u_\omega^2 = 0$ *è*

$$2\Theta_2 a_x^2 - 3 f_x^2 + 2\Theta_1 b_x^2 = 0. \tag{43}$$

Tenendo presenti le formole (42) è facile verificare che questa equazione non si altera quando si scambia b_x^2 con $a_x^2 + r b_x^2$; dunque *la conica* $u_\omega^2 = 0$ *è effettivamente un combinante del fascio.*

In modo analogo si dimostra che *per la schiera di coniche determinata da* C_1 *e* C_2 *vi è una sola conica combinante, ed è* $\Omega_x^2 = 0$, essendo Ω_x^2 la forma definita dalla (40). L'equazione tangenziale di questa conica, è (se $R \gtrless 0$)

$$A_2 \Theta_1 u_\alpha^2 - 2 A_1 A_2 u_\gamma^2 + A_1 \Theta_2 u_\beta^2 = 0. \tag{44}$$

La conica $u_\omega^2 = 0$ *è armonicamente circoscritta a tutte le coniche del fascio;* infatti si calcoli $a_\omega^2 + r b_\omega^2$ si ha:

$$a_\omega^2 = (\Theta_2^2 - A_2 \Theta_1) A_1 + (A_1 A_2 - \Theta_1 \Theta_2)\Theta_1 + (\Theta_1^2 - A_1 \Theta_2)\Theta_2 = 0$$
$$b_\omega^2 = (\Theta_2^2 - A_2 \Theta_1)\Theta_1 + (A_1 A_2 - \Theta_1 \Theta_2)\Theta_2 + (\Theta_1^2 - A_1 \Theta_2) A_2 = 0,$$

e quindi $a_\omega^2 + r b_\omega^2 = 0$.

Analogamente *la conica* $\Omega_x^2 = 0$ *è armonicamente iscritta rispetto a tutte le coniche della schiera.* Di qui segue facilmente che *la conica* $\Omega_x^2 = 0$ *è la conica dei* 14 *punti rispetto al quadrilatero in cui sono iscritte le coniche della schiera*, se si tien presente che il triangolo diagonale di questo quadrilatero è il triangolo autoconiugato rispetto a tutte le coniche invariantive, e che una coppia di vertici opposti del quadrilatero costituisce una conica degenere della schiera.

Le tangenti di $u_\omega^2 = 0$ *tagliano armonicamente le due coniche involutorie del fascio, ed i punti di* $u_\omega^2 = 0$ *proiettano armonicamente queste stesse.* Infatti, se $h_x^2 = a_x^2 + r b_x^2 = 0$ e $k_x^2 = a_x^2 + s b_x^2 = 0$ sono le coniche involutorie del fascio, la conica avviluppata dalle rette che le tagliano armonicamente è:

$$(hku)^2 = u_\alpha^2 + (r+s)u_\tau^2 + rsu_\beta^2 = 0,$$

e questa coincide con $u_\omega^2 = 0$, perchè r ed s sono radici della (41). Inoltre, se per due coniche gli invarianti Θ_1 e Θ_2 sono nulli, le loro coniche invariantive $u_\tau^2 = 0$ e $f_x^2 = 0$, in virtù delle formole (8) e (18), coincidono in una sola.

Analogamente *i punti di $\Omega_x^2 = 0$ proiettano armonicamente le due coniche involutorie della schiera, e le tangenti di $\Omega_x^2 = 0$ tagliano armonicamente le medesime.*

Ciascuna delle due coniche involutorie del fascio è involutoria colla conica combinante del fascio. Infatti, assumendo come date le due coniche involutorie del fascio, si ha $\Theta_1 = 0$ $\Theta_2 = 0$, ed $u_\omega^2 = 0$ si riduce a $u_\tau^2 = 0$; inoltre per le (11) e (13) si ha $t_\alpha^2 = 0$, $t_\beta^2 = 0$. Quindi *le due coniche involutorie e la conica combinante di un fascio formano una notevole terna di coniche (terna coniugata), che hanno uno stesso triangolo autoconiugato, e sono due a due involutorie.* Lo stesso dicasi per le due coniche involutorie e per la conica combinante di una schiera.

V. Coniche polari reciproche.

Sia Γ la polare reciproca di C_1 rispetto a C_2; se la retta u $(u_1\, u_2\, u_3)$ è tangente a Γ, il polo di u rispetto a C_2 sta su C_1; ma quel polo ha per coordinate $u_\beta\, \beta_i$, dunque sarà $a_\beta\, a_{\beta'}\, u_\beta\, u_{\beta'} = 0$.

Se il punto x sta su Γ, la polare di x rispetto a C_2 è tangente a C_1; ma quella polare ha per coordinate $b_x\, b_i$, dunque si avrà: $b_\alpha\, b'_\alpha\, b_x\, b'_x = 0$.

Pertanto la conica Γ avrà per equazioni locale e tangenziale

$$b_\alpha b'_\alpha b_x b'_x = 0 \qquad a_\beta a_{\beta'} u_\beta u_{\beta'} = 0.$$

Osserviamo, che si ha:

$$f_x^2 = (\alpha\beta x)^2 = (bb',\ \alpha x)^2 = (b_\alpha b'_x - b_x b'_\alpha)^2 = 2b_\alpha^2 b'^2_x - 2b_\alpha b'_\alpha b_x b'_x$$

$$\frac{4}{3} A_2 (abu)^2 = (au,\ \beta\beta')^2 = (a_\beta u_{\beta'} - a_{\beta'} u_\beta)^2 = 2a_\beta^2 u_\beta^2 - 2a_\beta a_{\beta'} u_\beta u_{\beta'};$$

donde le equazioni locale e tangenziale di Γ si possono scrivere:

$$\Theta_1 b_x^2 - \frac{1}{2} f_x^2 = 0 \qquad \Theta_2 u_\beta^2 - \frac{2}{3} A_2 u_\tau^2 = 0. \tag{45}$$

Analogamente la polare reciproca Γ' di C_2 rispetto a C_1 ha per equazioni:

$$\Theta_2 a_x^2 - \frac{1}{2} f_x^2 = 0 \qquad \Theta_1 u_\alpha^2 - \frac{2}{3} A_1 u_\tau^2 = 0.$$

Vogliamo ora trovare una conica, rispetto a cui le due coniche date sono polari reciproche l'una dell'altra (*). L'equazione della conica domandata ha la forma:

$$r_x^2 = l_1 X_1 + l_2 X_2 + l_3 X_3 = 0, \qquad u_\rho^2 = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0.$$

Scrivasi l'equazione tangenziale della polare reciproca di $u_\alpha^2 = 0$ rispetto ad $u_\rho^2 = 0$; essa è:

$$a_\rho^2 u_\rho^2 - \frac{2}{3} r_\rho^2 (a r u)^2 = 0.$$

Si osservi che si ha:

$$\begin{aligned}
a_\rho^2 &= \lambda_1 A_1 + 2\lambda_2 \Theta_1 + \lambda_3 \Theta_2 \\
\frac{4}{3} r_\rho^2 (a r u)^2 &= \frac{4}{3} A_2 l_1 u_\alpha^2 + 2 l_2 (f a u)^2 + \frac{4}{3} A_1 l_3 u_\tau^2 \\
&= \left(\frac{4}{3} A_2 l_1 + 2\Theta_2 l_2\right) u_\alpha^2 + \frac{4}{3} A_1 l_3 u_\tau^2 + \frac{2}{3} A_1 l_2 u_\beta^2 \\
&= \left(\frac{4}{3} A_1 \lambda_1^2 + 2\Theta_2 \lambda_2^2 + \frac{4}{3} A_2 \lambda_2 \lambda_3 + 2\Theta_2 \lambda_3 \lambda_1 + 4\Theta_1 \lambda_1 \lambda_2\right) u_\alpha^2 \\
&+ \left(\frac{4}{3} A_2 \lambda_3^2 + 4\Theta_2 \lambda_2 \lambda_3 + 4\Theta_1 \lambda_2^2 + \frac{4}{3} A_1 \lambda_1 \lambda_2\right) u_\tau^2 \\
&+ \frac{2}{3} A_1 (\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2) u_\beta^2,
\end{aligned}$$

per cui l'equazione precedente diventa:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{3} A_1 \lambda_1^2 - \Theta_2 \lambda_2^2 - \frac{2}{3} A_2 \lambda_2 \lambda_3\right) U_1 \\
&+ \left(\frac{2}{3} A_1 \lambda_1 \lambda_2 + \Theta_1 \lambda_2^2 - \frac{1}{3} A_2 \lambda_3^2\right) U_2 \\
&+ \left(\frac{2}{3} A_1 \lambda_1 \lambda_3 + \frac{1}{3} A_1 \lambda_2^2 + 2\Theta_1 \lambda_2 \lambda_3 + \Theta_2 \lambda_3^2\right) U_3 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Restano ora a determinare $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ in modo che questa equazione coincida con $u_\beta^2 = 0$; bisognerà perciò risolvere le equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{3} A_1 \lambda_1^2 - \Theta_2 \lambda_2^2 - \frac{2}{3} A_2 \lambda_2 \lambda_3 &= 0 \\
- \Theta_1 \lambda_2^2 + \frac{1}{3} A_2 \lambda_3^2 - \frac{2}{3} A_1 \lambda_1 \lambda_2 &= 0,
\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

(*) Cfr. BATTAGLINI, *Nota intorno alla conica rispetto alla quale due coniche date sono polari reciproche fra di loro.* Atti della R. Acc. dei Lincei, 1872; pag. 195-202.

ossia, posto $\lambda_2 = 1$,

$$\left.\begin{aligned} 2A_2\lambda_3 &= A_1\lambda_1^2 - 3\Theta_2 \\ 2A_1\lambda_1 &= A_2\lambda_3^2 - 3\Theta_1, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

di qui si ricavano, con una facile eliminazione, due equazioni di 4.° grado l'una in λ_1 e l'altra in λ_3:

$$\left.\begin{aligned} A_1^2\lambda_1^4 - 6A_1\Theta_2\lambda_1^2 - 8A_1A_2\lambda_1 + 3(3\Theta_2^2 - 4A_2\Theta_1) &= 0 \\ A_2^2\lambda_3^4 - 6A_2\Theta_1\lambda_3^2 - 8A_1A_2\lambda_3 + 3(3\Theta_1^2 - 4A_1\Theta_2) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Ponendo:

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\,x, \qquad \lambda_3 = \sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}\,y,$$

queste equazioni diventano:

$$x^4 + 6\frac{\Theta_2}{A_2}x^2 - 8\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}\,x + \frac{3(3\Theta_2^2 - 4A_2\Theta_1)}{A_2^2} = 0$$

$$y^4 + 6\frac{\Theta_1}{A_1}y^2 - 8\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\,y + \frac{3(3\Theta_1^2 - 4A_1\Theta_2)}{A_1^2} = 0.$$

Calcolandone la risolvente di Lagrange, si trova per la prima

$$A_1 + 3\Theta_1\theta + 3\Theta_2\theta^2 + A_2\theta^3 = 0,$$

e per la seconda

$$A_2 + 3\Theta_2\zeta + 3\Theta_1\zeta^2 + A_1\zeta^3 = 0;$$

le radici della prima risolvente sono θ', θ'', θ''', e quelle della seconda sono $\frac{1}{\theta'}$, $\frac{1}{\theta''}$, $\frac{1}{\theta'''}$; quindi si ha:

$$x = \pm\sqrt{\theta'} \pm \sqrt{\theta''} \pm \sqrt{\theta'''} \qquad y = \pm\frac{1}{\sqrt{\theta'}} \pm \frac{1}{\sqrt{\theta''}} \pm \frac{1}{\sqrt{\theta'''}},$$

e così si hanno per λ_1 e per λ_3 i valori seguenti:

$$\lambda'_1 = \pm\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}(\sqrt{\theta'} + \sqrt{\theta''} + \sqrt{\theta'''}) \qquad \lambda'_3 = \pm\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta'}} + \frac{1}{\sqrt{\theta''}} + \frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)$$

$$\lambda''_1 = \pm\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}(\sqrt{\theta'} - \sqrt{\theta''} - \sqrt{\theta'''}) \qquad \lambda''_3 = \pm\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta'}} - \frac{1}{\sqrt{\theta''}} - \frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)$$

$$\lambda'''_1 = \pm\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}(-\sqrt{\theta'} + \sqrt{\theta''} - \sqrt{\theta'''}) \qquad \lambda'''_3 = \pm\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{\theta'}} + \frac{1}{\sqrt{\theta''}} - \frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)$$

$$\lambda^{\text{IV}}_1 = \pm\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}(-\sqrt{\theta'} - \sqrt{\theta''} + \sqrt{\theta'''}) \qquad \lambda^{\text{IV}}_3 = \pm\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{\theta'}} - \frac{1}{\sqrt{\theta''}} + \frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right).$$

In queste formole bisogna scegliere il segno $+$, se $A_1 A_2$ è positivo, ed il segno $-$, se $A_1 A_2$ è negativo; perchè il prodotto dei tre radicali deve avere il segno contrario al coefficiente della prima potenza dell'incognita nelle equazioni di 4.° grado (48). Inoltre i valori di λ_1 devono essere accoppiati coi valori di λ_3 in modo che siano verificate le (47'), e precisamente λ'_1 con λ'_3, λ''_1 con λ''_3, λ'''_1 con λ'''_3, λ^{IV}_1 con λ^{IV}_3. Alla condizione dei segni si soddisfa scrivendo $\frac{A_2}{A_1}\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}$ in luogo di $\pm\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}$ nelle formole che dànno λ_1, e scrivendo $\frac{A_1}{A_2}\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}$ in luogo di $\pm\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}$ nelle formole che dànno λ_3. Dunque vi sono 4 coniche rispetto a cui le coniche date sono polari reciproche, e le loro equazioni tangenziali sono:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{A_2}{A_1}\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}(\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''})U_1+U_2+\frac{A_1}{A_2}\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta'}}+\frac{1}{\sqrt{\theta''}}+\frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)U_3=0\\
&\frac{A_2}{A_1}\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}(\sqrt{\theta'}-\sqrt{\theta''}-\sqrt{\theta'''})U_1+U_2+\frac{A_1}{A_2}\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta'}}-\frac{1}{\sqrt{\theta''}}-\frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)U_3=0\\
&\frac{A_2}{A_1}\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}(-\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}-\sqrt{\theta'''})U_1+U_2+\frac{A_1}{A_2}\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\left(-\frac{1}{\sqrt{\theta'}}+\frac{1}{\sqrt{\theta''}}-\frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)U_3=0\\
&\frac{A_2}{A_1}\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}(-\sqrt{\theta'}-\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''})U_1+U_2+\frac{A_1}{A_2}\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\left(-\frac{1}{\sqrt{\theta'}}-\frac{1}{\sqrt{\theta''}}+\frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)U_3=0.
\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

Volendo ora l'equazione tangenziale complessiva delle 4 coniche in discorso, osserviamo che basta eliminare $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ fra le equazioni (47) e

$$U_1\lambda_1+U_2\lambda_2+U_3\lambda_3=0.$$

A questo scopo si considerino $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ come coordinate di un punto; allora le equazioni (47) rappresentano due coniche, e l'equazione ultima scritta rappresenta una retta. Eliminare $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ fra queste tre equazioni significa trovare l'equazione complessiva dei quattro punti comuni alle coniche (47); ora, come è noto, se $u_\alpha{}^2=0$ ed $u_\beta{}^2=0$ sono le equazioni tangenziali di due coniche, l'equazione complessiva dei 4 punti comuni è $u_\alpha{}^2\ u_\beta{}^2-\overline{u_\gamma{}^2}^2=0$. Nel nostro caso calcolando i contravarianti $u_\alpha{}^2$, $u_\beta{}^2$, $u_\gamma{}^2$ si trova:

$$\frac{1}{2}u_\alpha{}^2=-A_2^2U_1^2-3A_1\Theta_2U_3^2+2A_1A_2U_2U_3$$

$$\frac{1}{2}u_\beta{}^2=-3A_2\Theta_1U_1^2-A_1^2U_3^2+2A_1A_2U_2U_1$$

$$u_\gamma{}^2=-3A_2\Theta_2U_1^2+A_1A_2U_2^2-3A_1\Theta_1U_3^2+2A_1A_2U_1U_3,$$

e quindi il risultato dell'eliminazione è:

$$\left.\begin{aligned}
&3A_2^2(3\Theta_2^2-4A_2\Theta_1)U_1^4+A_1^2A_2^2U_2^4+3A_1^2(3\Theta_1^2-4A_1\Theta_2)U_3^4\\
+\;&8A_1A_2^3U_1^3U_2+8A_1^3A_2U_3^3U_2+12A_1A_2^2\Theta_2U_1^3U_3+12A_1^2A_2\Theta_1U_1U_3^3\\
-\;&6A_1^2A_2\Theta_1U_2^2U_3^2-18A_1A_2\Theta_1\Theta_2U_1^2U_3^2-6A_1A_2^2\Theta_2U_1^2U_2^2\\
+\;&24A_1A_2^2\Theta_1U_1^2U_2U_3-20A_1^2A_2^2U_1U_2^2U_3+24A_1^2A_2\Theta_2U_1U_2U_3^2=0,
\end{aligned}\right\}\quad(50)$$

e questa è l'equazione complessiva tangenziale delle 4 coniche, rispetto a ciascuna delle quali le due coniche date sono polari reciproche l'una dell'altra.

Volendo le equazioni locali separate, e l'equazione locale complessiva di queste quattro coniche, si parte dall'equazione locale della polare reciproca di $a_x^2=0$ rispetto ad una conica invariantiva

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{3}A_2l_1^2-\Theta_1l_2^2-\frac{2}{3}A_1l_2l_3\right)X_1\\
+&\left(-\frac{1}{3}A_1l_3^2+\Theta_2l_2^2+\frac{2}{3}A_2l_1l_2\right)X_2\\
+&\left(\frac{2}{3}A_2l_1l_3+\frac{1}{3}A_2l_2^2+2\Theta_2l_2l_3+\Theta_1l_3^2\right)X_3=0,
\end{aligned}\right\}\quad(51)$$

la quale equazione o si forma direttamente con un procedimento analogo a quello con cui si è formata l'equazione (46), o si deduce senz'altro dalla (46) cogli scambi di

$$u_\alpha^2 \text{ in } \frac{4}{3}A_1a_x^2,\qquad \text{di } u_\beta^2 \text{ in } \frac{4}{3}A_2b_x^2,\qquad \text{di } u_\gamma^2 \text{ in } f_x^2,$$

di A_1, Θ_1, Θ_2, A_2 rispettivamente in $\overline{A_1}$, $\overline{\Theta_1}$, $\overline{\Theta_2}$, $\overline{A_2}$, di λ_1, λ_2, λ_3 rispettivamente in $\frac{4}{3}A_2l_1$, l_2, $\frac{4}{3}A_1l_3$.

Bisogna poi determinare $l_1\ l_2\ l_3$ in modo che la (51) coincida con $b_x^2=0$, ed a questo scopo si hanno da risolvere le equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{3}A_2l_1^2-\Theta_1l_2^2-\frac{2}{3}A_1l_2l_3&=0\\
-\Theta_2l_2^2+\frac{1}{3}A_1l_3^2-\frac{2}{3}A_2l_1l_2&=0.
\end{aligned}\right\}\quad(52)$$

Confrontando queste colle (47) si osserva subito, che dalle (47) si passa alle (52) collo scambio di λ_1, λ_2, λ_3 rispettivamente in l_3, l_2, l_1. Dunque per le coniche rispetto a cui le coniche date sono polari reciproche tra i parametri locali ed i parametri tangenziali si ha la semplicissima relazione

$$l_1 : l_2 : l_3 : : \lambda_3 : \lambda_2 : \lambda_1, \tag{53}$$

e quindi dalle (49) si deducono immediatamente le equazioni locali delle 4 coniche in discorso

$$\frac{A_1}{A_2}\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta'}}+\frac{1}{\sqrt{\theta''}}+\frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)X_1+X_2+\frac{A_2}{A_1}\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}(\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''})X_3=0, \tag{54}$$

ecc.

L'equazione locale complessiva si ottiene eliminando l_1 l_2 l_3 tra le (52) e

$$l_1X_1+l_2X_2+l_3X_3=0;$$

ora, siccome le (52) possono anche immaginarsi dedotte dalle (47) sostituendo ordinatamente l_1 l_2 l_3 a λ_1 λ_2 λ_3 e scambiando A_1 con A_2 e Θ_1 con Θ_2, così l'equazione complessiva domandata si deduce dalle (50) sostituendo ad U_1 U_2 U_3 rispettivamente X_1 X_2 X_3 e scambiando inoltre A_1 con A_2 e Θ_1 con Θ_2, e però è

$$3A_1^2(3\Theta_1^2-4A_1\Theta_2)X_1^4+A_1^2A_2^2X_2^4+3A_2^2(3\Theta_2^2-4A_2\Theta_1)X_3^4+\text{ecc.}=0. \tag{55}$$

VI. Coniche bitangenti. Coniche coniugate.

Se due coniche $(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3)$ e $(\lambda'_1\ \lambda'_2\ \lambda'_3)$ del sistema invariantivo considerato sono bitangenti, chiamando y il polo di contatto, esiste un valore di ρ per cui si ha:

$$(\lambda_1+\rho\lambda'_1)U_1+(\lambda_2+\rho\lambda'_2)U_2+(\lambda_3+\rho\lambda'_3)U_3=u_y^2,$$

donde si vede che y è uno dei punti doppi del tessuto di coniche determinato da U_1, U_2, U_3, e però dev'essere:

$$u_y^2=U_1+\theta U_2+\theta^2U_3 \qquad \theta=\theta',\ \theta'',\ \theta''';$$

per conseguenza denotando con σ un coefficiente incognito si deve avere:

$$\lambda_1+\rho\lambda'_1=\sigma, \qquad \lambda_2+\rho\lambda'_2=\sigma\theta, \qquad \lambda_3+\rho\lambda'_3=\sigma\theta^2,$$

e quindi *se le due coniche hanno doppio contatto* si ha

$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3\\ 1 & \theta & \theta^2\end{vmatrix}=0 \quad \text{per} \quad \theta=\theta',\ \theta'',\ \theta'''. \tag{56}$$

Dunque data una conica del sistema vi sono tre serie di coniche bitangenti ad essa ed appartenenti al sistema; i tre lati del triangolo autoconiugato sono le corde di contatto, ed i tre vertici del medesimo sono i poli di contatto.

Similmente *la condizione perchè due coniche* $(l_1\ l_2\ l_3)$ *e* $(l'_1\ l'_2\ l'_3)$ *siano bitangenti* è:

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l'_1 & l'_2 & l'_3 \\ \theta^2 & \theta & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{per} \quad \theta = \theta',\ \theta'',\ \theta'''. \tag{57}$$

In particolare le equazioni

$$lX_1 + X_2 + \frac{1}{\theta} X_3 = 0, \qquad \lambda U_1 + U_2 + \theta U_3 = 0, \tag{58}$$

qualunque sia l o λ rappresentano coniche bitangenti a C_1; e le equazioni

$$\theta X_1 + X_2 + lX_3 = 0, \qquad \frac{1}{\theta} U_1 + U_2 + \lambda U_3 = 0, \tag{59}$$

qualunque sia l o λ rappresentano coniche bitangenti a C_2. Per conseguenza se θ_i e θ_j sono due qualunque dei tre valori θ', θ'', θ''' le equazioni:

$$\theta_i X_1 + X_2 + \frac{1}{\theta_j} X_3 = 0, \qquad \frac{1}{\theta_i} U_1 + U_2 + \theta_j U_3 = 0, \tag{60}$$

rappresentano 6 coniche bitangenti ad entrambe le coniche C_1 e C_2.

Le quattro coniche, rispetto a ciascuna delle quali le due coniche date sono polari reciproche, sono due a due bitangenti. Infatti, ponendo per semplicità

$$+\sqrt{\theta'} = p, \qquad +\sqrt{\theta''} = q, \qquad +\sqrt{\theta'''} = r,$$

e osservando che

$$\theta'\theta''\theta''' = -\frac{A_1}{A_2} \quad \text{donde} \quad \frac{A_2}{A_1}\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}} = -\frac{1}{pqr} \quad \text{e} \quad \frac{A_1}{A_2}\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}} = -pqr,$$

i parametri tangenziali delle 4 coniche suddette sono:

$$\frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} + \frac{1}{pq}, \qquad -1, \qquad qr + rp + pq$$

$$\frac{1}{qr} - \frac{1}{rp} - \frac{1}{pq}, \qquad -1, \qquad qr - rp - pq \qquad \text{ecc.}$$

Ora, per dimostrare ad esempio che la 1.ª conica è bitangente alla 2.ª, basta verificare che il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{qr}+\frac{1}{rp}+\frac{1}{pq}, & -1, & qr+rp+pq \\ \frac{1}{qr}-\frac{1}{rp}-\frac{1}{pq}, & -1, & qr-rp-pq \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix}$$

è nullo, il che si fa facilmente.

Si consideri ora una conica C di equazione $a_x^2=0$ ed una retta v di equazione $v_x=0$. Nel sistema invariantivo di a_x^2 e di v_x^2 si ha:

$$u_\alpha^2=(a\,a'u)^2 \qquad u_\tau^2=(a\,v\,u)^2 \qquad u_\beta^2=0 \qquad f_x^2=0$$

$$A_1=(a\,a'a'')^2 \qquad \Theta_1=v_\alpha^2 \qquad \Theta_2=0 \qquad A_2=0.$$

Una conica invariantiva qualsiasi ha per equazioni locale e tangenziale

$$a_x^2+k\,v_x^2=0 \qquad u_\alpha^2+2\,k\,u_\tau^2=0,$$

e tutte queste coniche invariantive formano un fascio-schiera di coniche bitangenti a C, essendo v la corda di contatto.

La polare reciproca di C rispetto ad una di queste coniche è

$$\frac{1}{3}A_1u_\alpha^2+2\left(\frac{2}{3}A_1k+\Theta_1k^2\right)u_\tau^2=0;$$

volendo che coincida colla stessa conica C, bisognerà prendere k in modo che sia:

$$\frac{2}{3}A_1k+\Theta_1k^2=0;$$

donde (trascurando la soluzione $k=0$ per cui si avrebbe la stessa conica C) si ha $k=-\frac{2}{3}\frac{A_1}{\Theta_1}\cdot$ Dunque *l'equazione in coordinate di punti*

$$c_x^2=3\,v_\alpha^2\,a_x^2-2\,A_1\,v_x^2=0, \tag{61}$$

ed in coordinate di rette

$$\frac{1}{3\,\Theta_1}u_\gamma^2=3\,v_\alpha^2\,u_\alpha^2-4\,A_1\,u_\tau^2=0, \tag{62}$$

rappresenta una conica Γ *tale, che la polare di* C *rispetto ad essa è la stessa* C.

Inversamente prendiamo la polare reciproca di Γ rispetto a C, essa è

$$a_\gamma^2\,a_x^2-\frac{1}{2}(a\,\gamma\,x)^2=0,$$

e siccome si ha:

$$a_\gamma^2 = -3\Theta_1^2 A_1, \qquad (\alpha\gamma x)^2 = -4A_1^2\Theta_1 v_x^2,$$

così l'equazione precedente coincide colla (61). Dunque la relazione tra le coniche C e Γ è scambievole; ciascuna di esse è polare reciproca di sè stessa rispetto all'altra: due coniche siffatte furono dette *coniugate* rispetto alla retta v.

Dualmente si abbia una conica C di equazione $u_\alpha^2 = 0$ ed un punto y di equazione $u_y = 0$. Nel sistema invariantivo di u_α^2 e di u_y^2 si ha:

$$f_x^2 = (\alpha y x)^2 \qquad b_x^2 = 0 \qquad u_\tau^2 = 0$$

$$\Theta_1 = 0 \qquad \Theta_2 = a_y^2 \qquad A_2 = 0.$$

Le equazioni

$$\Theta_2 a_x^2 - f_x^2 = 0 \tag{63}$$

$$3\Theta_2 u_\alpha^2 - 2A_1 u_y^2 = 0, \tag{64}$$

rappresentano una conica Γ'; la conica C e la conica Γ' sono ciascuna polare reciproca di sè stessa rispetto all'altra, e si dicono *coniugate* rispetto al punto y.

L'equazione (63), se si osserva che si ha:

$$f_x^2 = (\alpha y x)^2 = (ab,\ xy)^2 = 2a_y^2 b_x^2 - 2a_x a_y \cdot b_x b_y,$$

si può anche scrivere:

$$a_y^2 b_x^2 - 2a_x a_y\ b_x b_y = 0; \tag{65}$$

ora se il punto y e la retta v sono polo e polare rispetto a C si ha $v_x = a_y a_x$ donde $v_\alpha^2 = a_\alpha b_\alpha a_y b_y = \frac{1}{3} A_1 a_y^2$ e però la (61) coincide colla (65); dunque Γ e Γ' coincidono; ossia, *se due coniche sono coniugate rispetto ad una retta, esse sono anche coniugate rispetto al polo di questa.*

Il contravariante u_τ^2 per le coniche C e Γ' è

$$\Theta_2 u_\alpha^2 - \frac{1}{3}(fau)^2 = -\frac{1}{3} A_1 u_y^2,$$

ed il covariante f_x^2 per le coniche C e Γ è

$$3\Theta_1[3\Theta_1(\alpha\alpha' x)^2 - 4A_1(\alpha\tau x)^2] = -4A_1^2\Theta_1 v_x^2,$$

dalle quali espressioni segue che *se due coniche sono coniugate, le rette condotte per il polo di contatto le tagliano armonicamente, ed i punti della retta di contatto le proiettano armonicamente.*

Se si calcolano gli invarianti di C e Γ si trova:

$$A_1, \qquad \Theta_1 = A_1 v_\alpha^2, \qquad \Theta_2 = -3 A_1 \overline{v_\alpha^2}^2, \qquad A_2 = -27 A_1 \overline{v_\alpha^2}^3,$$

dalle quali espressioni si vede che *se due coniche* $a_x^2 = 0$ e $b_x^2 = 0$ *sono coniugate, tra i loro invarianti passano le relazioni*

$$3\Theta_1^2 + A_1\Theta_2 = 0, \qquad A_1 A_2 - 9\Theta_1\Theta_2 = 0, \qquad 3\Theta_2^2 + A_2\Theta_1 = 0, \tag{66}$$

di cui una è conseguenza delle altre due; a queste si possono sostituire le

$$R = 0, \qquad A_1 A_2 - 9\Theta_1\Theta_2 = 0, \tag{66'}$$

perchè, potendosi scrivere:

$$R = \frac{4}{3}(3\Theta_1^2 + A_1\Theta_2)(3\Theta_2^2 + A_2\Theta_1) + \frac{1}{3}(A_1 A_2 - 9\Theta_1\Theta_2)(5\Theta_1\Theta_2 + 3A_1A_2),$$

dalle (66) si deducono le (66') e viceversa.

Cerchiamo ora se nel sistema invariantivo di coniche, che stiamo studiando, ve ne siano di quelle coniugate con una di esse, ad es. con C_1.

Si consideri la polare reciproca di C_1 rispetto alla conica $(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3)$, essa ha per equazione la (46); le condizioni perchè questa polare reciproca coincida colla stessa C_1 sono:

$$\left.\begin{aligned} 2A_1\lambda_1\lambda_2 + 3\Theta_1\lambda_2^2 - A_2\lambda_3^2 = 0 \\ A_1(2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2) + 6\Theta_1\lambda_2\lambda_3 + 3\Theta_2\lambda_3^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Queste equazioni sono verificate da $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$; cioè la polare reciproca di C_1 rispetto a C_1 è la stessa C_1, cosa evidente. Escludendo questa soluzione, e ponendo $\lambda_2 = 1$, dalle (67) si ha:

$$A_1 + 3\Theta_1\lambda_3 + 3\Theta_2\lambda_3^2 + A_2\lambda_3^3 = 0,$$

dunque per λ_3 si hanno tre valori, e precisamente θ', θ'', θ'''; dalla prima delle (67) si ricavano i corrispondenti valori di λ_1, e si conchiude che nel sistema invariantivo di due coniche ve ne sono tre coniugate con una di esse, e che le equazioni tangenziali di quelle tre che sono coniugate con C_1 sono:

$$(A_2\theta^2 - 3\Theta_1)U_1 + 2A_1U_2 + 2A_1\theta U_3 = 0, \qquad \theta = \theta',\ \theta'',\ \theta'''. \tag{68}$$

Analogamente si trova che i parametri locali $l_1\ l_2\ l_3$ delle coniche coniugate di C_1 verificano le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} 2A_2 l_1 l_2 + 3\Theta_2 l_2^2 - A_1 l_3^2 = 0 \\ A_2(2l_1l_3 + l_2^2) + 6\Theta_2 l_2 l_3 + 3\Theta_1 l_3^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

le quali differiscono dalle (67) per lo scambio di A_1 con A_2 e di Θ_1 con Θ_2; le equazioni locali delle coniche coniugate di C_1 sono dunque:

$$\left(\frac{A_1}{\sigma^2} - 3\Theta_2\right)X_1 + 2A_2X_2 + \frac{2A_2}{\sigma}X_3 = 0, \qquad \sigma = \sigma', \sigma'', \sigma'''. \tag{70}$$

Le tre coniche coniugate con C_1 non solo sono bitangenti a C_1 [il che si accorda coll'essere le (68) e (70) casi particolari della (58)], *ma sono inoltre due a due bitangenti fra loro.* Se si considera infatti il determinante

$$\begin{vmatrix} A_2\sigma'^2 - 3\Theta_1 & 2A_1 & 2A_1\sigma' \\ A_2\sigma''^2 - 3\Theta_1 & 2A_1 & 2A_1\sigma'' \\ 1 & \sigma''' & \sigma'''^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2A_1A_2(\sigma' - \sigma'')\left[(\sigma' + \sigma'')\sigma'''^2 - \left(\sigma'\sigma'' + \frac{3\Theta_1}{A_2}\right)\sigma''' - \frac{2A_1}{A_2}\right],$$

e si tengono presenti le relazioni

$$3\frac{\Theta_1}{A_2} = \sigma''\sigma''' + \sigma'''\sigma' + \sigma'\sigma'', \qquad -\frac{A_1}{A_2} = \sigma'\sigma''\sigma''',$$

si vede che questo determinante è identicamente nullo.

Dimostreremo in seguito che le tre coniche coniugate con C_1 sono anche coniugate due a due fra loro, e però prese insieme con C_1 formano una notevole quaterna di coniche, detta *armonica;* e che *le quattro coniche rispetto a ciascuna delle quali due coniche date sono polari reciproche formano appunto una quaterna armonica.*

VII. Rappresentazione delle coniche invariantive coi punti di un piano.

Se i parametri locali (l_1 l_2 l_3) d'una conica invariantiva L si prendono come coordinate di un punto L in un piano Π, ad ogni conica della rete

$$l_1X_1 + l_2X_2 + l_3X_3 = 0,$$

corrisponde un punto del piano, e viceversa; in particolare ai vertici del triangolo coordinato corrispondono le due coniche date e la conica $f_x^2 = 0$.

Così pure se i parametri tangenziali λ_1 λ_2 λ_3 di una conica L si considerano come le coordinate di un punto L' in un piano Π', ad ogni conica del tessuto

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0,$$

corrisponde un punto del piano e viceversa; in particolare ai vertici del triangolo coordinato corrispondono le due coniche date e la conica $u_\tau^2 = 0$.

Se i punti del piano Π e i punti del piano Π' si mettono in corrispondenza per modo che due punti corrispondenti rappresentino una stessa conica del sistema, si viene a stabilire una trasformazione quadratica tra i piani Π e Π', che è determinata dalle formole (33') e (34'). I punti fondamentali di questa trasformazione nel piano Π sono:

$$A(\sigma'^2,\ \sigma',\ 1) \qquad B(\sigma''^2,\ \sigma'',\ 1) \qquad C(\sigma'''^2,\ \sigma''',\ 1), \tag{71}$$

e nel piano Π' sono:

$$A_1(1,\ \sigma',\ \sigma'^2) \qquad B_1(1,\ \sigma'',\ \sigma''^2) \qquad C_1(1,\ \sigma''',\ \sigma'''^2). \tag{71'}$$

Tenendo presenti le equazioni (28) e (29) si vede che i punti fondamentali del piano Π corrispondono alle tre rette doppie del sistema di coniche invariantive, e che i punti fondamentali del piano Π' corrispondono ai punti doppii dello stesso sistema.

Alle coniche d'un fascio contenuto nella rete corrispondono nel piano Π i punti d'una retta e nel piano Π' i punti d'una conica circoscritta al triangolo $A_1 B_1 C_1$; se

$$p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 = 0,$$

è la retta nel piano Π, la conica corrispondente nel piano Π' è

$$\frac{p_1}{A_2}(A_1\lambda_1^2 + 3\Theta_1\lambda_1\lambda_2 + \cdots) + p_2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2^2) + \frac{p_3}{A_1}(A_2\lambda_3^2 + \cdots) = 0. \tag{72}$$

Analogamente alle coniche di una schiera contenuta nel tessuto, corrispondono nel piano Π' i punti d'una retta, e nel piano Π i punti d'una conica circoscritta al triangolo $A\,B\,C$; se

$$q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 = 0,$$

è la retta nel piano Π', la conica corrispondente nel piano Π è

$$\frac{q_1}{A_1}(A_2 l_1^2 + \cdots) + q_2(l_1 l_3 - l_2^2) + \frac{q_3}{A_2}(A_1 l_3^2 + \cdots) = 0. \tag{72'}$$

Le coppie di rette, in cui degenerano le coniche della rete invariantiva, costituiscono (come è noto) tre fasci in involuzione coi centri nei vertici del triangolo autoconiugato, essendo raggi doppii i lati di questo; e dualmente le coppie di punti, in cui degenerano le coniche del tessuto invariantivo, costituiscono tre punteggiate in involuzione sui lati del triangolo autoconiugato, essendo punti doppii i vertici di questo. Di qui si capisce che i discriminanti (35) e (36) di 3.° grado l'uno in $l_1\, l_2\, l_3$ l'altro in $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$ devono potersi spezzare nel prodotto di tre fattori di 1.° grado.

Osserviamo, che se $r_x = 0$ ed $s_x = 0$ sono le equazioni di due lati del triangolo autoconiugato, l'equazione

$$r_x^2 + k s_x^2 = 0,$$

rappresenta una coppia di rette che formano con quelli un fascio armonico, e però costituiscono una conica degenere della rete. Donde, ricordando le (28), i tre fasci di coniche degeneri sono:

$$\begin{aligned}
(\sigma''^2 + k\sigma'''^2)X_1 + (\sigma'' + k\sigma''')X_2 + (1+k)X_3 &= 0\\
(\sigma'''^2 + k\sigma'^2)\, X_1 + (\sigma''' + k\sigma')\, X_2 + (1+k)X_3 &= 0\\
(\sigma'^2 + k\sigma''^2)X_1 + (\sigma' + k\sigma'')X_2 + (1+k)X_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Dunque, se $(l_1\; l_2\; l_3)$ è una conica degenere, si avrà:

$$\sigma''^2 + k\sigma'''^2 = h\,l_1, \qquad \sigma'' + k\sigma''' = h\,l_2, \qquad 1 + k = h\,l_3,$$

oppure:

$$\sigma'''^2 + k\sigma'^2 = h\,l_1, \qquad \sigma''' + k\sigma' = h\,l_2, \qquad 1 + k = h\,l_3,$$

oppure:

$$\sigma'^2 + k\sigma''^2 = h\,l_1, \qquad \sigma' + k\sigma'' = h\,l_2, \qquad 1 + k = h\,l_3.$$

Di qui, coll'eliminazione di h e k, si deducono le equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
l_1 - (\sigma'' + \sigma''')l_2 + \sigma''\sigma'''\, l_3 &= 0\\
l_1 - (\sigma''' + \sigma')\, l_2 + \sigma'''\sigma'\, l_3 &= 0\\
l_1 - (\sigma' + \sigma'')\, l_2 + \sigma'\sigma''\, l_3 &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Pertanto *queste equazioni rappresentano nel piano* Π *tre rette, i punti delle quali corrispondono a coniche degeneri della rete invariantiva, esse sono precisamente i lati del triangolo* $A\,B\,C$; noi le chiameremo *rette fondamentali* a, b, c del piano Π; a tutti i punti di ciascuna di esse corrisponde nel piano Π' uno stesso punto, che è un vertice del triangolo $A_1\, B_1\, C_1$.

Analogamente

$$\left.\begin{aligned}
\sigma''\sigma'''\lambda_1 - (\sigma'' + \sigma''')\lambda_2 + \lambda_3 &= 0\\
\sigma'''\sigma'\, \lambda_1 - (\sigma''' + \sigma')\, \lambda_2 + \lambda_3 &= 0\\
\sigma'\sigma''\, \lambda_1 - (\sigma' + \sigma'')\, \lambda_2 + \lambda_3 &= 0,
\end{aligned}\right\} \tag{73'}$$

sono *tre rette del piano* Π', *i punti delle quali corrispondono a coniche degeneri del tessuto invariantivo; esse sono precisamente i lati del triangolo* $A_1 B_1 C_1$, e noi le chiameremo *rette fondamentali* $a_1\ b_1\ c_1$ del piano Π'; a tutti i punti di ciascuna di esse corrisponde nel piano Π un solo punto che è un vertice del triangolo $A\,B\,C$.

Se si moltiplicano insieme i primi membri delle equazioni (73), e si esprimono per mezzo dei coefficienti delle (26) le funzioni simmetriche di $\theta'\ \theta''\ \theta'''$ che compaiono nel prodotto, si trova (a meno di un fattore) il discriminante (36); così pure moltiplicando i primi membri delle (73') si giunge al discriminante (35).

VIII. Rappresentazione di alcune fra le più notevoli coniche invariantive.

Dati nel piano Π due punti M, N rappresentativi di due coniche del sistema $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$, vogliamo vedere come si costruiscano i punti che rappresentano le più notevoli tra le loro coniche invariantive. Per le costruzioni che vogliam fare si può supporre, senza ledere la generalità, che $\boldsymbol{M}$ ed $\boldsymbol{N}$ siano le due coniche di date equazioni $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$; perchè ciò equivale a prendere nel piano Π come triangolo coordinato, quello di cui due vertici sono i punti M, N ed il terzo vertice è il punto F rappresentativo della conica $\boldsymbol{F}$, i cui punti proiettano armonicamente le due coniche $\boldsymbol{M}$ ed $\boldsymbol{N}$; ed a prendere nel piano Π' come triangolo coordinato, quello di cui due vertici sono i punti M' N' ed il terzo vertice è il punto T' rappresentativo della conica $\boldsymbol{T}$, le cui tangenti tagliano armonicamente le coniche $\boldsymbol{M}$ ed $\boldsymbol{N}$.

La conica $\boldsymbol{F}$. — L'equazione $l_1 l_3 - l_2^2 = 0$ è verificata dalle coordinate (71) dei punti A, B, C e però rappresenta nel piano Π una conica circoscritta al triangolo fondamentale $A\,B\,C$; questa conica tocca inoltre i lati MF, NF del triangolo coordinato rispettivamente nei punti M, N. Di qui segue che *la conica* $\boldsymbol{F}$ *i cui punti proiettano armonicamente due coniche* $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ *del sistema è rappresentata dal polo della retta* MN *rispetto alla conica* $A\,B\,C\,M\,N$.

La conica $\boldsymbol{T}$. — Dualmente nel piano Π' la conica $\boldsymbol{T}$ di equazione $u_\tau^2 = 0$ è rappresentata dal polo T' della retta $M'\,N'$ rispetto alla conica $A'\,B'\,C'\,M'\,N'$. Passando dal piano Π' al piano Π colla trasformazione quadratica, si ha che *la conica* $\boldsymbol{T}$ *le cui tangenti tagliano armonicamente due coniche* $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ *è rappresentata dal quarto punto, in cui si tagliano le due* *coniche circoscritte ad ABC e tangenti alla retta MN l'una in M e l'altra in N,* le quali coniche del piano Π hanno per equazioni:

$$\left.\begin{aligned} A_2 l_1^2 + 3\Theta_2 l_1 l_2 + 3\Theta_1 l_2^2 + A_1 l_2 l_3 = 0 \\ A_1 l_3^2 + 3\Theta_1 l_2 l_3 + 3\Theta_2 l_2^2 + A_2 l_1 l_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Le coordinate del punto T sono $\left(\frac{3\Theta_2}{A_2}, -1, \frac{3\Theta_1}{A_1}\right)$.

Le coniche armonicamente iscritte o circoscritte ad una conica data del sistema. — Se una conica $R(l_1\ l_2\ l_3)$ è armonicamente circoscritta ad una conica $S(\lambda'_1\ \lambda'_2\ \lambda'_3)$, si ha:

$$\left.\begin{aligned} & A_2 l_1(A_1\lambda'_1 + 2\Theta_1\lambda'_2 + \Theta_2\lambda'_3) \\ + \quad & l_2[2A_1\Theta_2\lambda'_1 + (3\Theta_1\Theta_2 + A_1 A_2)\lambda'_2 + 2A_2\Theta_1\lambda'_3] \\ + & A_1 l_3(\Theta_1\lambda'_1 + 2\Theta_2\lambda'_2 + A_2\lambda'_3) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Infatti ponendo per brevità

$$r_x^2 = \frac{2}{3} A_2 l_1 a_x^2 + \quad l_2 f_x^2 + \frac{2}{3} A_1 l_3 b_x^2$$

$$u_\sigma^2 = \qquad \lambda'_1 u_\alpha^2 + 2\lambda'_2 u_\gamma^2 + \lambda'_3 u_\beta^2,$$

la condizione perchè la conica R sia armonicamente circoscritta ad S è:

$$0 = r_\sigma^2 = \frac{2}{3} A_2 l_1 a_\sigma^2 + l_2 f_\sigma^2 + \frac{2}{3} A_1 l_3 b_\sigma^2,$$

donde si deduce la (75), osservando che si ha:

$$a_\sigma^2 = a_\alpha^2\lambda'_1 + 2a_\gamma^2\lambda'_2 + a_\beta^2\lambda'_3$$

$$f_\sigma^2 = f_\alpha^2\lambda'_1 + 2f_\gamma^2\lambda'_2 + f_\beta^2\lambda'_3$$

$$b_\sigma^2 = b_\alpha^2\lambda'_1 + 2b_\gamma^2\lambda'_2 + b_\beta^2\lambda'_3,$$

e tenendo presenti le (5), (6), (15).

Se la conica R è variabile, e la conica S è fissa, la equazione (75) rappresenta nel piano Π una retta, e precisamente la polare del punto S rispetto al triangolo ABC, come si dimostra facilmente sostituendo a $\lambda'_1\ \lambda'_2\ \lambda'_3$ le loro espressioni (34') per mezzo di $l'_1\ l'_2\ l'_3$, e ricordando che l'equazione del triangolo ABC è $D = 0$, [denotando per brevità con D l'espressione (36)].

Dunque *le coniche del sistema armonicamente circoscritte ad una conica S formano un fascio, rappresentato nel piano* Π *dalla retta polare di S rispetto al triangolo fondamentale.*

Se nell'equazione (75) si sostituiscono invece ad $l_1\ l_2\ l_3$ le loro espressioni (33') per mezzo di $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$, e si osserva che essa rappresenta allora nel piano Π' la conica polare del punto S' rispetto al triangolo $A_1 B_1 C_1$, la cui equazione è $\Delta = 0$ [denotando per brevità con Δ la espressione (35)], si conchiude che *le coniche del sistema armonicamente circoscritte ad una conica **S** sono rappresentate in* Π' *dai punti della conica polare di* S' *rispetto al triangolo fondamentale.*

Dualmente *le coniche del sistema armonicamente iscritte in una conica **R** formano una schiera, e sono rappresentate sul piano* Π *dai punti della conica polare di* R *rispetto al triangolo fondamentale* ABC, *e sul piano* Π' *dai punti della retta polare di* R' *rispetto al triangolo fondamentale* $A_1 B_1 C_1$.

Data una conica R del sistema, ve ne sono due involutorie con essa, e precisamente quelle rappresentate in Π (o Π') dai punti, ove si tagliano la retta e la conica polari di R (o R') rispetto al triangolo fondamentale.

La conica combinante, e le due coniche involutorie d'un fascio o d'una schiera. — Considerando un fascio di coniche invariantive rappresentato sul piano Π da una retta p, *il polo* P *della retta* p *rispetto al triangolo fondamentale rappresenta la conica combinante del fascio,* perchè questa, come abbiamo visto, è armonicamente iscritta a tutte le coniche del fascio. Il punto P [in virtù della (43)] ha per coordinate $\left(\frac{\Theta_2}{A_2},\ -1,\ \frac{\Theta_1}{A_1}\right)$ e però cade sulla retta FT. Di qui segue, che *se si considerano due coniche qualunque di un fascio, e le due coniche, l'una luogo dei punti che le proiettano armonicamente, l'altra inviluppo delle rette che le tagliano armonicamente, il luogo delle quaterne di punti secondo cui queste due ultime si tagliano è la conica combinante del fascio.*

Le due coniche involutorie del fascio sono rappresentate sul piano Π *dai due punti* Q, R *di* p, *che sono gli Hessiani dei tre punti, in cui la retta* p *taglia il triangolo fondamentale.* Per costruire i punti Q, R basta ricordare, che le coniche involutorie del fascio sono involutorie colla conica combinante, e quindi si troverà il polo P della retta p rispetto al triangolo ABC, e poi del punto P si prenderà la conica polare π rispetto allo stesso triangolo; i punti ove questa conica taglia la retta p saranno i punti domandati. Il triangolo PQR è tale che ogni lato è la retta polare del vertice opposto rispetto al triangolo fondamentale.

Allo stesso modo si costruiscono nel piano Π' i punti che rappresentano la conica combinante e le due coniche involutorie di una schiera. Volendo restare sul piano Π, osserviamo anzitutto che le coniche della schiera sono rappresentate dai punti d'una conica π, circoscritta al triangolo ABC, e poi ricordiamo che la conica combinante è armonicamente circoscritta a tutte le coniche della schiera, ed è perciò rappresentata da un punto, in cui devono concorrere le rette polari di tutti i punti di π rispetto al triangolo ABC; concluderemo che *il polo P della conica π rispetto al triangolo ABC corrisponde alla conica combinante della schiera, rappresentata sul piano Π dalla conica π. Se poi del punto P si prende la retta polare rispetto ad ABC, questa taglia la conica π in due punti Q, R, che rappresentano le coniche involutorie della schiera.*

Coniche bitangenti. — La condizione (56) o (57), perchè due coniche del nostro sistema invariantivo siano bitangenti, fa vedere che *a due coniche bitangenti corrispondono sia nel piano Π, sia nel piano Π', due punti allineati con uno dei tre punti fondamentali.*

Quindi date due coniche M, N le 6 coniche invariantive bitangenti ad entrambe sono rappresentate dai punti in cui i raggi proiettanti A, B, C da M tagliano i raggi proiettanti A, B, C da N.

In generale in un fascio di coniche invariantive ve ne sono tre bitangenti ad una conica invariantiva M qualunque; ed i punti del piano Π che le rappresentano si ottengono proiettando i punti ABC dal punto M sulla retta p che corrisponde al fascio. Se in particolare si prende come centro di proiezione il polo P della retta p rispetto al triangolo fondamentale, la terna di punti proiezione forma (come è facile a dimostrare) il covariante cubico della terna di punti, in cui la retta p taglia il triangolo ABC, e rappresenta la terna di coniche bitangenti alla conica combinante del fascio.

Coniche polari reciproche. Coniche coniugate. — Avendo visto che quattro coniche coniugate sono due a due bitangenti, e così pure sono due a due bitangenti le quattro coniche, rispetto a cui due coniche del sistema sono polari reciproche l'una dell'altra, segue che *a tali gruppi di quattro coniche corrispondono sia nel piano Π, sia nel piano Π', quadrangoli che hanno per triangolo diagonale il triangolo fondamentale.* Quindi due coniche coniugate sono rappresentate da due punti, la cui retta va ad uno dei vertici del triangolo fondamentale, ed è divisa armonicamente da questo vertice e dal lato opposto (*).

(*) Così, data una conica M, si trovano facilmente le tre coniche del sistema N, P, Q coniugate con essa; e si osserva che il quadrangolo $MNPQ$ (ovvero $M'N'P'Q'$) ha il triangolo fondamentale per triangolo diagonale. Donde si conchiude che le coniche N, P, Q sono due a due coniugate fra loro.

Date due coniche M, N per costruire i quattro punti rappresentativi delle quattro coniche, rispetto a ciascuna delle quali quelle sono polari reciproche, basta osservare che questi quattro punti sono quelli comuni alle due coniche del piano Π (o Π') di equazioni (52) [o (48)], e che queste coniche hanno entrambe il triangolo ABC [ovvero $A_1 B_1 C_1$] come triangolo autoconiugato, e toccano inoltre la retta MN (ovvero $M'N'$) l'una in M (o M') e l'altra in N (o N').

Di qui segue pure la costruzione del punto, che rappresenta la conica polare di M rispetto ad N. Si considera il fascio di coniche, che hanno il triangolo fondamentale come triangolo autoconiugato e passano per N, a quella che passa per M si tira la tangente in questo punto, questa retta è toccata da un'altra conica del fascio considerato, ed il punto di contatto è il punto domandato.

I quattro vertici d'un quadrangolo, che abbia il triangolo fondamentale per triangolo diagonale, rappresentano un gruppo di quattro coniche del nostro sistema, rispetto a ciascuna delle quali infinite coppie di coniche sono polari reciproche; per avere i due punti, che rappresentano una di queste coppie, basta circoscrivere due coniche qualunque a quel quadrangolo e prendere i due punti di contatto su d'una loro tangente comune. E di qui si deduce che *le quattro coniche, rispetto a ciascuna delle quali due coniche sono polari reciproche fra di loro, formano una quaterna armonica.*

IX. Realità delle coniche invariantive.

Ci proponiamo ora di studiare se nel sistema di coniche invariantive ve ne siano di quelle imaginarie, ed a quali punti del piano rappresentativo (Π o Π') esse corrispondano, supposto che le equazioni delle coniche C_1 e C_2 abbiano coefficienti reali, e che reali siano i valori dei parametri $l_1\ l_2\ l_3$ e $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$.

Bisognerà distinguere tre casi, secondochè l'equazione di 3.° grado (26) ha radici reali e distinte, radici reali ed uguali, o radici imaginarie.

Se l'equazione (26) ha radici immaginarie, il triangolo autoconiugato rispetto a tutte le coniche invariantive ha di reale soltanto un lato ed il vertice opposto, e però due coniche qualunque hanno due punti comuni reali, ed esse sono tutte reali.

Se l'equazione (26) ha radici uguali, e le coniche C_1 e C_2 si toccano in un punto, tutte le coniche invariantive si toccano in quel punto e sono reali;

se poi le coniche C_1 e C_2 sono bitangenti, le coniche invariantive formano un fascio-schiera di coniche bitangenti.

È sovratutti notevole il caso in cui le radici della equazione di 3.° grado (26) sono reali e distinte. Qui giova premettere alcune considerazioni.

I punti e le rette fondamentali del piano rappresentativo, essendo reali e distinti, formano un triangolo. Questo determina nel piano quattro regioni, che sono: la porzione finita di piano limitata dalle tre rette (superficie del triangolo) e le tre porzioni infinite, occupate ciascuna da un angolo del triangolo e dal suo opposto al vertice toltane la superficie del triangolo. Dal punto di vista proiettivo, queste quattro regioni hanno la stessa importanza (*).

Considerando la retta come una linea rientrante (all'infinito), due punti A e B di essa ne limitano due segmenti; fissata una direzione sulla retta, tali segmenti si possono indicare con AB e BA, intendendo che il primo sia quello percorso da un punto, il quale muovendosi nel senso prestabilito va da A in B; e che il secondo sia quello percorso da un punto, il quale muovendosi ancora nello stesso senso va da B in A.

Ciò posto, le quattro regioni, in cui un piano è diviso da un triangolo ABC, si determinano proiettivamente come segue. Si fissa su di un lato, ad es. AB, una direzione, e si considerano i due segmenti AB, BA limitati dai vertici A e B; dal terzo vertice C si proietta un punto mobile M che percorre uno dei segmenti AB o BA; sul raggio proiettante, che rota intorno a C, si fissa una direzione e si considera costantemente l'uno o l'altro dei due segmenti CM, MC. Allora le quattro regioni in discorso sono: una descritta da CM mentre M percorre AB, un'altra descritta da CM mentre M percorre BA, una terza descritta da MC mentre M percorre BA, ed una quarta descritta da MC mentre M percorre AB.

Chiamando *contorno* d'una regione la spezzata che la limita, e che è formata da segmenti presi sulle tre rette date, è facile vedere che *una retta qualsiasi del piano* (non passante per un vertice) *o non attraversa il contorno d'una regione o lo attraversa in due punti.*

Si consideri ora una conica circoscritta al triangolo, sopra ogni lato si hanno due segmenti, l'uno interno e l'altro esterno alla conica. Se si proietta il segmento interno d'un lato dal vertice opposto, e del raggio proiettante si considera il segmento che è pure interno alla conica, quest'ultimo segmento descriverà una delle quattro regioni del triangolo, e i punti di questa saranno tutti interni alla conica.

(*) Cfr. Staudt, *Geometrie der Lage*, N. 173.

Se un triangolo è iscritto in una conica, una retta qualsiasi (che non passi per un vertice) *ne taglia i lati in tre punti, i quali sono o tutti tre esterni alla conica, ovvero due interni ed uno esterno.* Questa proprietà si dimostra facilmente, considerando quella delle quattro regioni determinate dal triangolo, che è tutta interna alla conica, e ricordando che una retta qualsiasi o non ne attraversa il contorno, o lo attraversa in due punti. Vogliamo dimostrare la stessa proprietà anche analiticamente.

Sia $a_x^2=0$ l'equazione della conica, ed $A=(a\,a'\,a'')^2$ il suo discriminante. Siano poi $p(p_1\,p_2\,p_3)$, $q(q_1\,q_2\,q_3)$ $r(r_1\,r_2\,r_3)$ i vertici d'un triangolo iscritto nella conica, si avrà:

$$a_p^2=0, \qquad a_q^2=0, \qquad a_r^2=0, \qquad (p\,q\,r)\gtrless 0, \tag{α}$$

si prendano poi tre punti x, y, z sui tre lati

$$x_i=q_i+\lambda r_i, \qquad y_i=r_i+\mu p_i, \qquad z_i=p_i+\nu q_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3);$$

se questi tre punti sono in linea retta, si ha:

$$(x\,y\,z)=(p\,q\,r)\,[1+\lambda\mu\nu]=0,$$

donde:

$$\lambda\mu\nu=-1.$$

Si considerino ora le quantità $A\,a_x^2$, $A\,a_y^2$, $A\,a_z^2$ le quali coi loro segni fanno conoscere, se i punti x, y, z siano interni o esterni alla conica; in virtù delle (α) si ha:

$$a_x^2=2\,a_q\,a_r\cdot\lambda, \qquad a_y^2=2\,a_r\,a_p\cdot\mu, \qquad a_z^2=2\,a_p\,a_q\cdot\nu,$$

donde:

$$A\,a_x^2\cdot A\,a_y^2\cdot A\,a_z^2=-\,8A^3\cdot a_q\,a_r\cdot a'_r\,a'_p\cdot a''_p\,a''_q.$$

Ed ora dalla identità

$$(a\,a'\,a'')^2\,(p\,q\,r)^2=6\begin{vmatrix} a_p^2 & a_p\,a_q & a_p\,a_r \\ a'_p\,a'_q & a'^2_q & a'_q\,a'_r \\ a''_p\,a''_r & a''_q\,a''_r & a''^2_r \end{vmatrix}.$$

in virtù delle (α), si ha:

$$12\,a_q\,a_r\cdot a'_r\,a'_p\cdot a''_p\,a''_q=A\,(p\,q\,r)^2,$$

per cui

$$A\,a_x^2\cdot A\,a_y^2\cdot A\,a_z^2=-\,\frac{4}{3}\,A^4(p\,q\,r)^2,$$

e quindi le tre quantità $A\,a_x^2$, $A\,a_y^2$, $A\,a_z^2$ devono essere o tutte tre negative, ovvero una negativa e due positive; e di qui segue che i punti x, y, z sono o tutti tre esterni alla conica, ovvero uno esterno e due interni.

Premesse queste cose, ritorniamo allo studio delle coniche invariantive nel caso in cui le radici della equazione (26) sono reali e distinte. Ad un fascio di coniche preso in questo sistema corrisponde nel piano Π una retta p; le coniche degeneri del fascio sono rappresentate dai punti ove la retta p taglia il triangolo fondamentale ABC, e però hanno parametri reali; per conseguenza i quattro punti base del fascio sono tutti quattro reali o tutti quattro imaginarii. Per decidere quale di questi due casi si verifica, si formi il primo membro dell'equazione tangenziale d'una conica del fascio, poi dati alle coordinate variabili $u_1\, u_2\, u_3$ tre valori reali ad arbitrio, si sostituiscano al parametro variabile del fascio uno alla volta i parametri delle tre coniche degeneri. I risultati delle tre sostituzioni, come ho dimostrato in altro luogo (*), sono tutti tre negativi, ovvero uno negativo e due positivi, ed i quattro punti base del fascio sono tutti reali nel 1.° caso, e tutti imaginarii nel 2.° caso. Denotando con $\overline{U_1}\,\overline{U_2}\,\overline{U_3}$ i valori che assumono i polinomii $U_1\, U_2\, U_3$, quando si dànno alle variabili $u_1\, u_2\, u_3$ tre valori reali fissati ad arbitrio, dovremo dunque sostituire in

$$\Phi(l_1 l_2 l_3) = \frac{\overline{U_1}}{A_1}(A_2 l_1^2 + 3\Theta_2 l_1 l_2 + \cdots) + \overline{U_2}(l_1 l_3 - l_2^2) + \frac{\overline{U_3}}{A_1}(A_1 l_3^2 + 3\Theta_1 l_2 l_3 + \cdots),$$

ad $l_1\; l_2\; l_3$ le coordinate dei punti ove la retta p taglia il triangolo ABC, e conchiudere che i punti base del fascio sono reali quando i corrispondenti valori di Φ son tutti negativi, e tutti imaginarii, quando i corrispondenti valori di Φ sono uno negativo e due positivi. In altri termini, osservando che l'equazione $\Phi(l_1\, l_2\, l_3) = 0$ rappresenta nel piano Π una conica circoscritta al triangolo ABC, possiamo conchiudere, che *i punti base del fascio di coniche invariantive rappresentato dalla retta p sono tutti reali o tutti imaginarii, secondo che i tre punti, in cui la retta p taglia il triangolo fondamentale, sono rispettivamente tutti tre esterni, ovvero due interni ed uno esterno alla conica* $\Phi(l_1\, l_2\, l_3) = 0$ (**). Ancora, considerando nel piano Π quella tra le regioni

(*) Per quanto fu sopra dimostrato, non possono mai presentarsi i casi, che i tre punti, in cui la retta p taglia il triangolo fondamentale, siano tutti tre interni, ovvero due esterni ed uno interno alla conica $\Phi(l_1\, l_2\, l_3) = 0$.

(**) *Sulla realità dei punti e delle tangenti comuni a due coniche.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. I, pag. 327-338.

determinate dal triangolo ABC, che è tutta interna alla conica $\Phi(l_1\, l_2\, l_3) = 0$ e che noi chiameremo *regione ideale* del piano Π, possiamo conchiudere che: *se la retta p non attraversa la regione ideale del piano Π, i punti base del fascio sono tutti reali, e i punti di p corrispondono tutti a coniche reali; se poi la retta p attraversa la regione ideale del piano Π i punti base del fascio sono tutti imaginarii.* In questo secondo caso non più tutti i punti di p corrispondono a coniche reali del sistema. Siano allora D, E i punti, in cui la retta p attraversa la regione ideale di Π, ed F il terzo punto in cui p seca il triangolo ABC; le coordinate dei punti D, E sostituite nel polinomio Φ lo rendono positivo, le coordinate del punto F invece lo rendono negativo; i punti D, E rappresentano le due coppie di rette imaginarie del fascio, ed il punto F rappresenta la coppia di rette reali. Un punto M di p allora corrisponderà rispettivamente ad una conica imaginaria, ovvero ad una conica reale, secondo che M ed F separano o non separano i punti D ed E (*), cioè secondochè il punto M è interno od esterno alla regione ideale. Dunque *i punti interni alla regione ideale del piano Π corrispondono a coniche invariantive imaginarie, ed i punti esterni alla regione ideale corrispondono a coniche reali;* i punti che stanno sui lati del triangolo fondamentale rappresentano coniche degenerate in coppie di rette imaginarie o reali, secondochè quelli appartengono o no al contorno della regione ideale.

Analogamente, nel piano Π' il triangolo fondamentale $A_1\, B_1\, C_1$ determina quattro regioni, una di queste, che chiameremo *regione ideale* è tutta interna alla conica

$$\Psi(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = \frac{\overline{X_1}}{A_2}(A_1 \lambda_1^2 + 3\Theta_1 \lambda_1 \lambda_2 + \cdots) + \overline{X_2}(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2) + \frac{\overline{X_3}}{A_1}(A_2 \lambda_3^2 + 3\Theta_2 \lambda_2 \lambda_3 + \cdots).$$

I punti interni alla regione ideale del piano Π' ed i punti del suo contorno corrispondono alle coniche imaginarie del sistema, ed i punti esterni corrispondono alle coniche reali. Se si prende nel sistema una schiera di coniche, le quattro tangenti comuni sono tutte imaginarie o tutte reali, secondochè la retta q che rappresenta la schiera attraversa o no la regione ideale del piano Π'.

Dalle cose precedenti segue evidentemente che nella trasformazione quadratica tra i piani Π e Π' ai punti della regione ideale dell'uno corrispondono i punti della regione ideale dell'altro.

(*) Per la dimostrazione, vedasi la mia Nota citata, pag. 335.

Date due coniche del sistema col mezzo dei punti M, N nel piano rappresentativo Π, non solo si riconosce facilmente la realità dei punti comuni coll'osservare se la retta MN attraversa o no la regione ideale del piano Π, ma si riconosce ancora facilmente la realità delle tangenti comuni, senza ricorrere ai punti M', N' rappresentativi delle stesse coniche nel piano Π'. Siano D, E, F i punti, in cui la retta MN taglia i lati del triangolo ABC. I parametri delle coniche degeneri del fascio determinato dalle coniche M, N sono le coordinate dei punti D, E, F della retta MN, quando su questa si prendano come punti fondamentali i punti M ed N; e quindi, se quei tre parametri hanno lo stesso segno, i punti $M\,N$ non sono separati dai punti D, E, F, se poi quei tre parametri non hanno lo stesso segno, i punti M, N sono separati da due dei tre punti D, E, F. Ciò posto, ricordando il teorema dimostrato nella mia Nota citata, pag. 336, e quanto abbiamo detto sopra, possiamo formare il quadro seguente:

I. M ED N NON SONO SEPARATI DA D, E, F.

1.° *La retta MN non attraversa la regione ideale.*

Le due coniche sono reali, ed hanno reali tutti i punti e tutte le tangenti comuni.

2.° *La retta MN attraversa la regione ideale, ed i punti MN sono entrambi esterni a questa regione.*

Le due coniche sono reali, ed hanno imaginarii sia i punti sia le tangenti comuni.

3.° *La retta MN attraversa la regione ideale, ed i punti MN sono entrambi interni a questa regione.*

Le coniche sono tutte due imaginarie.

II. M ED N SONO SEPARATI DA D, E, F.

4.° *La retta MN non attraversa la regione ideale.*

Le due coniche sono reali, ed hanno reali i punti comuni ed imaginarie le tangenti comuni.

5.° *La retta MN attraversa la regione ideale, ed i punti M, N sono entrambi esterni a questa regione.*

Le due coniche sono reali, ed hanno imaginarii i punti comuni, e reali le tangenti comuni.

6.° *La retta MN attraversa la regione ideale, ed i punti M, N sono l'uno interno l'altro esterno a questa regione.*

Le due coniche sono l'una reale e l'altra imaginaria.

Per mezzo delle considerazioni che precedono riesce facile ogni questione che riguardi la realità di coniche invariantive.

Noi ci limiteremo qui ad osservare che una retta attraversa tre delle quattro regioni determinate da un triangolo, e che il polo di essa rispetto al triangolo cade nella regione non attraversata, e, distinguendo se una retta del piano Π attraversa o no la regione ideale, ne dedurremo che *in un fascio di coniche, di cui i quattro punti base sono imaginarii, la conica combinante è reale; ed in un fascio di coniche, di cui i quattro punti base sono reali, la conica combinante è imaginaria* (*).

Accenneremo da ultimo ai casi di realità delle quattro coniche, rispetto a ciascuna delle quali due coniche date C_1 e C_2 sono polari reciproche fra di loro, e che sono rappresentate nel piano Π dai punti comuni alle coniche di equazioni (52). Gli invarianti A'_1, Θ'_1, Θ'_2, A'_2 di queste sono:

$$A'_1 = -6A_1A_2^2, \qquad \Theta'_1 = -6A_1A_2\Theta_2,$$

$$\Theta'_2 = -6A_1A_2\Theta_1, \qquad A'_2 = -6A_1^2A_2,$$

per guisa che l'equazione di 3.° grado, da cui dipende la ricerca dei punti comuni alle coniche (52) si riduce alla (26).

Quindi, se le coniche C_1 e C_2 hanno soltanto due punti comuni reali, anche le coniche (52) del piano Π hanno soltanto due punti comuni reali, i quali, essendo allora $R > 0$, rappresentano coniche invariantive reali.

Se poi i punti comuni a C_1 e C_2 sono tutti quattro reali o tutti quattro imaginarii ($R < 0$, nel qual caso le radici della (26) sono tutte reali), mediante le (54) si vede facilmente che i punti comuni alle coniche (52) sono tutti imaginarii, quando le radici della (26) non sono tutte dello stesso segno, e sono tutti reali, quando le radici della (26) sono tutte dello stesso segno. In quest'ultimo caso ricordiamo che i punti comuni alle coniche (52) formano un quadrangolo reale, che ha il triangolo fondamentale per triangolo diagonale, e però in ognuna delle quattro regioni determinate da questo triangolo cade uno di quei quattro punti; e così sapremo che tre di essi rappresentano coniche reali ed uno rappresenta una conica imaginaria.

Finalmente se le coniche C_1 e C_2 si toccano ($R = 0$), anche le coniche (52) si toccano.

(*) Cfr. G. Sforza, *Condizione geometrica per la realità dei punti e delle tangenti comuni a due coniche.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. II, pag. 172-175.

Le quattro coniche rispetto a ciascuna delle quali le due coniche C_1 e C_2 sono polari reciproche fra loro sono dunque:

1.° due reali e due imaginarie (a coefficienti imaginarii), se C_1 e C_2 hanno due soli punti reali in comune;

2.° tutte imaginarie (a coefficienti imaginarii), se C_1 e C_2 hanno i quattro punti comuni reali, e le quattro tangenti comuni imaginarie, ovvero i quattro punti comuni imaginarii e le quattro tangenti comuni reali, ovvero se le coniche C_1 e C_2 sono l'una reale e l'altra imaginaria;

3.° tre reali ed una imaginaria (a coefficienti reali), se C_1 e C_2 hanno reali tutti i punti e tutte le tangenti comuni, ovvero se C_1 e C_2 hanno imaginarii tutti i punti e tutte le tangenti comuni, essendo però C_1 e C_2 entrambe reali, o entrambe imaginarie;

4.° due coincidenti, se le coniche C_1 e C_2 si toccano.

Roma, giugno 1889.

				ERRATA	CORRIGE.
Pag.	162	lin.	4	α_x^2	a_x^2
»	169	»	1	*iscritta*	*circoscritta*
»	169	»	2	*circoscritta*	*iscritta*
»	171	»	17	*circoscritta*	*iscritta*
»	171	»	22	*iscritta*	*circoscritta.*