Sulle equazioni della elasticità.

(*Di* C. Somigliana, *a Pavia*.)

Mi propongo di dimostrare come per le funzioni che rappresentano gli integrali delle equazioni della elasticità, nel caso della isotropia e dell'equilibrio, si possa stabilire una teoria analoga sotto molti rapporti alla teoria delle funzioni potenziali, e che ne costituisce in certo modo una estensione. Un teorema fondamentale per la teoria, di cui trattiamo, fu dimostrato dal signor prof. Betti (Annali di Matematica, S. II, T. VI); esso fa lo stesso ufficio che il teorema di Green per le funzioni potenziali. Nel presente lavoro io trovo alcune formule che corrispondono a quella di Green, e che servono a rappresentare gli spostamenti nei diversi punti del corpo mediante: 1.° le forze che agiscono sopra tutta la massa; 2.° le forze che agiscono sulla superficie; 3.° gli spostamenti dei punti della superficie.

Con queste formule molti dei metodi usati nello studio delle funzioni potenziali possono essere applicati anche agli integrali delle equazioni della elasticità. Io me ne servo per trovare: 1.° certe relazioni che devono sussistere fra i valori che, alla superficie di un corpo in equilibrio, assumono le forze esterne e gli spostamenti, e dalla cui risoluzione si può dire dipenda il problema dell'equilibrio; 2.° gli sviluppi generali per serie, mediante i quali si possono rappresentare gli spostamenti di una deformazione qualsiasi nell'*intorno* di un punto interno al corpo, quando si intenda per intorno di un punto una sfera che abbia il centro in esso e sia tutta contenuta nell'interno del corpo. Questi sviluppi corrispondono agli sviluppi per funzioni *armoniche* (secondo la denominazione usata da Thomson e Tait) che si hanno per le funzioni che soddisfano alla equazione $\Delta_2 = 0$. Se il corpo è indefinitamente esteso, secondo tutte le direzioni, sviluppi analoghi si hanno per lo spazio esterno ad una sfera di raggio arbitrario, che racchiuda le superficie che possono formare il contorno del corpo a distanza finita.

Infine dimostro che le considerazioni precedenti si possono estendere a certi sistemi di n equazioni differenziali contenenti n funzioni incognite di n variabili, le quali nel caso di $n=3$ si riducono appunto a quelle della elasticità.

Indicherò: 1.° con u_1, u_2, u_3 le componenti secondo tre assi ortogonali dello spostamento di un punto del corpo S, la cui superficie sia σ, e supporrò sempre, quando non dirò espressamente il contrario, che u_1, u_2, u_3 siano in tutto S funzioni finite, continue e ad un valore, insieme alle loro derivate prime e seconde; 2.° con Θ la dilatazione cubica $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$, e con $\frac{1}{2}R_1$, $\frac{1}{2}R_2$, $\frac{1}{2}R_3$ le componenti della rotazione elementare, $R_1=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}$, ecc.; 3.° con X_1, X_2, X_3 le componenti delle forze che agiscono sulla massa del corpo, e con L_1, L_2, L_3 quelle delle forze che agiscono sulla superficie.

Le equazioni che devono essere soddisfatte, perchè vi sia equilibrio, sono:

$$\delta X_i+(2\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x_i}+\mu\Delta_2 u_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{1}$$

per tutti i punti del corpo, ove δ indica la densità, che supporremo costante, e λ, μ sono costanti che dipendono dalla natura del corpo. Sulla superficie σ poi si deve avere:

$$L_i+2\mu\frac{\partial u_i}{\partial n}+2\lambda\Theta\gamma_i+\mu S_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{2}$$

ove n indica la direzione della normale a σ diretta verso l'interno; e si è posto $\gamma_i=\frac{\partial x_i}{\partial n}$,

$$S_1=R_3\gamma_2-R_2\gamma_3 \qquad S_2=R_1\gamma_3-R_3\gamma_1 \qquad S_3=R_2\gamma_1-R_1\gamma_2.$$

Indicherò infine con U_1, U_2, U_3 i valori che u_1, u_2, u_3 assumono nei punti della superficie σ, e con (1') le equazioni (1) quando $X_1=0$ $X_2=0$ $X_3=0$.

Se in un corpo si considerano due deformazioni diverse, e si segnano con uno o due apici le lettere, il cui significato fu ora stabilito, secondo che corrispondono all'una o all'altra, il teorema di Betti, a cui ho accennato, è espresso dalla seguente uguaglianza:

$$\sum_{i=1}^{3}\left\{\delta\int_S X'_i u''_i dS+\int_\sigma L'_i U''_i d\sigma\right\}=\sum_{i=1}^{3}\left\{\delta\int_S X''_i u'_i dS+\int_\sigma L''_i U'_i d\sigma\right\}.$$

§ 1.

Siano F_1, F_2, F_3 tre funzioni delle variabili x_1, x_2, x_3, le quali soddisfino alla equazione

$$\Delta_2\Delta_2 F = 0,$$

dentro un certo campo, e siano in questo monodrome, finite e continue colle loro derivate, eccettuati al più alcuni punti isolati in numero finito. Poniamo

$$G_1 = \Delta_2 F_1 \qquad G_2 = \Delta_2 F_2 \qquad G_3 = \Delta_2 F_3$$

$$S = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3},$$

e avremo:

$$\Delta_2 S = \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2} + \frac{\partial G_3}{\partial x_3}.$$

Prendiamo per componenti u_1, u_2, u_3 dello spostamento di un punto i valori

$$u_1 = \alpha \frac{\partial S}{\partial x_1} + G_1 \qquad u_2 = \alpha \frac{\partial S}{\partial x_2} + G_2 \qquad u_3 = \alpha \frac{\partial S}{\partial x_3} + G_3, \tag{3}$$

ove α è una costante; avremo:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = (\alpha + 1)\Delta_2 S \qquad \Delta_2 u_i = \alpha \frac{\partial \Delta_2 S}{\partial x_i},$$

e quindi le equazioni (1′), saranno soddisfatte, prendendo

$$\alpha = -\frac{2\lambda + \mu}{2(\lambda + \mu)}.$$

Se le funzioni F_1, F_2, F_3 non soddisfano alla equazione $\Delta_2\Delta_2 F = 0$, gli spostamenti (3) soddisfano le equazioni (1), se

$$X_1 = -\frac{\mu}{\delta}\Delta_2 G_1 \qquad X_2 = -\frac{\mu}{\delta}\Delta_2 G_2 \qquad X_3 = -\frac{\mu}{\delta}\Delta_2 G_3.$$

Posto ora:

$$r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2},$$

si ha $\Delta_2\Delta_2 r = 0$, e quindi possiamo prendere per F_1, F_2, F_3 i seguenti valori

$$F_1 = \frac{r}{2} \qquad F_2 = 0 \qquad F_3 = 0;$$

avremo:

$$G_1 = \frac{1}{r} \qquad G_2 = 0 \qquad G_3 = 0,$$

e gli spostamenti (3) divengono:

$$u'_1=\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}+\frac{1}{r}\qquad u'_2=\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1\,\partial x_2}\qquad u'_3=\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1\,\partial x_3}\,. \tag{4}$$

Si abbia ora un corpo che occupi uno spazio S, a cui il punto (x'_1, x'_2, x'_3) è esterno, e che in esso avvenga la deformazione (4). Le forze superficiali L'_1, L'_2, L'_3 che manterranno in questo caso l'equilibrio sono:

$$\left.\begin{aligned}
L'_1 &= -2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2\frac{r}{2}}{\partial x_1^2}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\gamma_1\right)-\mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\\
L'_2 &= -2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2\frac{r}{2}}{\partial x_1\,\partial x_2}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\gamma_2\right)-\mu\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_2}\gamma_1-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\gamma_2\right)\\
L'_3 &= -2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2\frac{r}{2}}{\partial x_1\,\partial x_3}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\gamma_3\right)-\mu\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_3}\gamma_1-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\gamma_3\right).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Supponiamo ora che il punto (x'_1, x'_2, x'_3) sia interno ad S e consideriamo il nuovo corpo, che si ottiene da S, escludendo questo punto con una superficie chiusa ω, che lo comprenda nell'interno e sia tutta a distanza finita da σ. Applicando il teorema di Betti al nuovo corpo S', ed ai due sistemi di spostamenti u_1, u_2, u_3; u'_1, u'_2, u'_3 abbiamo:

$$\sum_{i=1}^{3}\left\{\delta\int_{S'}X_i u'_i\,dS'+\int_\sigma L_i U'_i\,d\sigma-\int_\sigma L'_i U_i\,d\sigma\right\}=\sum_{i=1}^{3}\int_\omega L'_i U_i\,d\sigma.$$

Gli spostamenti u'_1, u'_2, u'_3 hanno un punto di discontinuità in (x'_1, x'_2, x'_3), che è anche punto di infinito per u'_1; però la somma $\sum_{i=1}^{3}\delta\int_{S'}X_i u'_i\,dS'$, quando lo spazio S' tende a diventare lo spazio S, ha un limite determinato e finito che è $\sum_{i=1}^{3}\delta\int_{S}X_i u_i\,dS$. Avremo quindi:

$$\sum_{i=1}^{3}\left\{\delta\int_{S}X_i u'_i\,dS+\int_\sigma L_i U'_i\,d\sigma-\int_\sigma L'_i U_i\,d\sigma\right\}=\lim\sum_{i=1}^{3}\int_\omega L'_i U_i\,d\omega. \tag{6}$$

Per calcolare il limite indicato nel secondo membro di questa uguaglianza prendiamo per ω una sfera col centro in (x'_1, x'_2, x'_3) e di raggio piccolissimo; introducendo un sistema di coordinate polari r, θ, φ coll'asse polare diretto secondo l'asse x_1, dalle (5) abbiamo sopra ω

$$L'_1 = -3\alpha\mu\frac{\cos^2\theta}{r^2} + (\alpha+1)\mu\frac{1}{r^2}$$

$$L'_2 = -3\alpha\mu\frac{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi}{r^2}$$

$$L'_3 = -3\alpha\mu\frac{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi}{r^2}.$$

Di qui si ha, poichè $d\omega = r^2\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\varphi$,

$$\int_\omega L'_1 d\omega = 4\pi\mu \qquad \int_\omega L'_2 d\omega = 0 \qquad \int_\omega L'_3 d\psi = 0,$$

e quindi per un procedimento noto, e per le ipotesi fatte circa la continuità delle u_1, u_2, u_3,

$$\lim \sum_{i=1}^{3}\int_\omega L'_i U_i d\omega = 4\pi\mu u_1(x'_1,\ x'_2,\ x'_3).$$

Il primo membro della (6) rappresenta quindi il valore della componente u_1 nel punto $(x'_1\ x'_2\ x'_3)$ moltiplicato per $4\pi\mu$. In modo analogo si possono ottenere altre due formule per rappresentare le componenti u_2 e u_3, e si arriva così al seguente teorema:

« Le componenti u_1, u_2, u_3 degli spostamenti in una deformazione qual-
« siasi si possono rappresentare mediante le forze X_1, X_2, X_3 che agiscono
« sopra tutta la massa, le forze L_1, L_2, L_3 che agiscono sulla superficie, e
« le componenti U_1, U_2, U_3 degli spostamenti che avvengono alla superficie,
« colle seguenti formule:

$$u_s(x'_1,\ x'_2,\ x'_3) = \frac{1}{4\pi\mu}\sum_{i=1}^{3}\left\{\partial\int_S X_i u_i^{(s)} dS + \int_\sigma (L_i U_i^{(s)} + L_i^{(s)} U_i) d\sigma\right\}, \tag{7}$$

« ove si ha

$$\left.\begin{aligned} &u_s^{(s)} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial x_s^2} + \frac{1}{r} \qquad u_i^{(s)} = \alpha\frac{\partial^2\frac{r}{2}}{\partial x_i\,\partial x_s} \qquad (i \neq s)\\ &L_s^{(s)} = 2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2\frac{r}{2}}{\partial x_s^2} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_s}\gamma_s\right) + \mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\\ &L_i^{(s)} = 2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2\frac{r}{2}}{\partial x_s\,\partial x_i} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_s}\gamma_i\right) + \mu\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_i}\gamma_s - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_s}\gamma_i\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Le formule (7) nella teoria della elasticità equivalgono alla formula di Green nella teoria delle funzioni potenziali; il sistema delle tre deformazioni (8) fa l'ufficio del potenziale elementare newtoniano $\frac{1}{r}$.

Se ora immaginiamo che il punto (x'_1, x'_2, x'_3) sia sulla superficie σ, il teorema di Betti sarà ancora applicabile allo spazio che si ottiene da S, escludendone questo punto con una superficie ω descritta attorno ad esso, la quale intercetterà una certa porzione ε di σ. Sia σ' la parte rimanente di σ quando si toglie ε, e consideriamo il nuovo corpo S' il cui contorno è formato da ω e σ'; avremo:

$$\sum_{i=1}^{3}\left\{\delta\int_{S'} X_i u'_i \, dS' + \int_{\sigma'} L\, U'_i \, d\sigma' - \int_{\sigma'} L'_i U_i \, d\sigma'\right\} = \sum_{i=1}^{3}\int_{\omega} L'_i U_i \, d\omega.$$

Ora quando lo spazio S' tende a diventare lo spazio S, si ha:

$$\lim \sum_{i=1}^{3}\int_{S-S'} X_i u'_i \, dS = 0,$$

e, se la superficie σ ha nel punto (x'_1, x'_2, x'_3) un piano tangente ordinario, si ha anche:

$$\lim\int_{\varepsilon} L_i U'_i \, d\varepsilon = 0 \qquad \lim\int_{\varepsilon} L'_i U_i \, d\varepsilon = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

quando ε tende a zero. Quindi il primo membro della equazione precedente, quando S' tende ad S, ha per limite la espressione che da esso si ottiene, estendendo ad S e σ gli integrali estesi rispettivamente ad S' e σ'. Per calcolare il limite del secondo membro immaginiamo che (x'_1, x'_2, x'_3) sia stato escluso dal corpo con una superficie sferica γ di raggio piccolissimo, col centro in questo punto; allora ω tenderà a diventare quell'emisfero, che si trova dalla parte del piano tangente, nella quale giace il corpo, o almeno giacciono i punti del corpo in vicinanza di (x'_1, x'_2, x'_3). Prendendo anche in questo caso un sistema di coordinate polari r, θ, φ coll'asse diretto secondo la direzione positiva dell'asse x_1, L'_1, L'_2, L'_3 avranno ancora i valori precedentemente considerati in funzione di r, θ, φ. Sia ora ω' quell'emisfero di γ che si trova dalla parte del piano condotto per (x'_1, x'_2, x'_3) parallelamente al piano $x_2\, x_3$, nella quale giace la direzione positiva della normale; quest'ultimo piano ed il piano tangente divideranno γ in quattro fusi sferici, di cui uno sarà comune ad ω e ω', uno non apparterrà nè ad ω nè ad ω' e dei due rimanenti, uguali fra loro, uno apparterrà unicamente ad ω, l'altro ad ω'. Ora per i valori che L'_1, L'_2, L'_3 hanno sopra γ, è facile vedere che

$$L'_1 d\omega, \qquad L'_2 d\omega, \qquad L'_3 d\omega,$$

hanno valori uguali nei punti diametralmente opposti di questi due ultimi fusi; quindi si avrà:

$$\int_\omega L'_i d\omega = \int_{\omega'} L'_i d\omega \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Ma integrando si trova:

$$\int_{\omega'} L'_1 d\omega = 2\pi\mu \qquad \int_{\omega'} L'_2 d\omega = 0 \qquad \int_{\omega'} L'_3 d\omega = 0,$$

e quindi

$$\lim \sum_{i=1}^{3} \int_\omega L'_i U_i d\omega = 2\pi\mu u_1(x'_1,\ x'_2,\ x'_3).$$

Concludiamo perciò che le formule (7) stanno anche quando il punto (x'_1, x'_2, x'_3) giace sulla superficie, quando ivi esiste un piano tangente ordinario, purchè si muti la costante $\frac{1}{4\pi\mu}$ in $\frac{1}{2\pi\mu}$.

Nelle (7) consideriamo i tre termini che dipendono dalla componente X_1, cioè:

$$\delta\int X_1 u_1^{(1)} dS, \qquad \delta\int X_1 u_1^{(2)} dS, \qquad \delta\int X_1 u_1^{(3)} dS;$$

è facile vedere che essi rappresentano le componenti di una deformazione speciale, prodotta nel corpo S da forze agenti sopra tutta la massa, le cui componenti sono X_1, 0, 0. Difatti le tre funzioni precedenti si possono porre sotto la forma dei secondi membri delle (3), prendendo:

$$F_1 = \frac{\delta}{8\pi\mu}\int X_1 r\, dS \qquad G_1 = \frac{\delta}{4\pi\mu}\int X_1 \frac{dS}{r}$$
$$F_2 = F_3 = G_2 = G_3 = 0,$$

e poichè $\Delta_2 G_1 = -\frac{\delta}{\mu} X_1$, le equazioni di equilibrio saranno soddisfatte quando le forze di massa sono X_1, 0, 0. Analogamente si può vedere che le altre due terne di termini delle (7) dipendenti dalle altre due componenti X_2, X_3 rappresentano altre due deformazioni corrispondenti a forze di massa 0, X_2, 0 e 0, 0, X_3 rispettivamente.

Osserviamo ora che essendo:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_s} = \frac{\partial^2 r}{\partial x'_i \partial x'_s} \qquad (i, s = 1, 2, 3),$$

i tre sistemi di spostamenti (8) soddisfano le equazioni (1′) anche quando si considerano come variabili indipendenti le x'_1, x'_2, x'_3, invece delle x_1, x_2, x_3; da ciò segue subito che nelle (7) i termini dipendenti da L_1, o da L_2, o da L_3 rappresentano gli spostamenti di tre deformazioni speciali che avvengono nel corpo per forze di masse nulle.

Consideriamo infine le tre funzioni $L_1^{(1)}, L_1^{(2)}, L_1^{(3)}$ che compaiono sotto i segni di integrazione nei termini dipendenti da U_1. Esse, considerate come funzioni delle x'_1, x'_2, x'_3, soddisfano le equazioni (1′); difatti se si pone:

$$G_1 = \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + 2\alpha\mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1}\gamma_1, \qquad G_2 = \mu\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2}\gamma_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1}\gamma_2\right) + 2\alpha\mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2}\gamma_1,$$

$$G_3 = \mu\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_3}\gamma_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1}\gamma_3\right) + 2\alpha\mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_3}\gamma_1$$

si ha:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x'_2} + \frac{\partial G_3}{\partial x'_3} = 2 \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1} = \Delta_2 \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial x'_1},$$

ove l'operazione Δ_2 si intende eseguita rispetto alle variabili x'_1, x'_2, x'_3. Posto ora:

$$S = \mu \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial x'_1},$$

le $L_1^{(1)}, L_1^{(2)}, L_1^{(3)}$ si possono scrivere:

$$L_1^{(1)} = \alpha \frac{\partial S}{\partial x'_1} + G_1 \qquad L_1^{(2)} = \alpha \frac{\partial S}{\partial x'_2} + G_2 \qquad L_1^{(3)} = \alpha \frac{\partial S}{\partial x'_3} + G_3,$$

e rientrano quindi nella forma generale degli spostamenti rappresentati dalle (3).

Considerazioni analoghe si possono fare sopra le altre due terne di funzioni

$$L_2^{(1)}\ L_2^{(2)}\ L_2^{(3)}, \qquad L_3^{(1)}\ L_3^{(2)}\ L_3^{(3)}.$$

Dalle formule (7) risulta quindi il seguente teorema:

« Qualunque deformazione di un corpo elastico isotropo omogeneo può « essere decomposta in tre deformazioni dipendenti rispettivamente dalle forze « di massa, dalle forze superficiali e dagli spostamenti superficiali; la prima « avviene nel corpo per effetto di forze di massa uguali alle date, le altre per

« forze di massa nulle. Ciascuna di queste poi è decomponibile alla sua volta « in altre tre, dipendenti analogamente da una sola delle componenti, secondo « tre direzioni ortogonali, delle forze di massa, o delle forze superficiali o « degli spostamenti superficiali. »

È chiaro poi che una decomposizione analoga si può ottenere per gli altri elementi, che si considerano in una deformazione, come la dilatazione cubica, le componenti delle tensioni interne, ecc., che sono funzioni lineari delle derivate prime degli spostamenti, mediante le formule che per queste quantità si deducono dalle (7).

§ 2.

Formule atte a rappresentare le u_1, u_2, u_3 si possono ottenere anche col seguente procedimento, che è indipendente dal teorema di Betti.

Integrando per parti si ha:

$$\int_S \Theta \frac{dS}{r} = -\int_\sigma \left(\sum_{i=1}^3 U_i \gamma_i\right) \frac{d\sigma}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_S u_i \frac{dS}{r}$$

$$\int_S R_1 \frac{dS}{r} = -\int_\sigma (U_3\gamma_2 - U_2\gamma_3) \frac{d\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial x'_2} \int_S u_3 \frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_3} \int_S u_2 \frac{dS}{r}$$

$$\int_S R_2 \frac{dS}{r} = -\int_\sigma (U_1\gamma_3 - U_3\gamma_1) \frac{d\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial x'_3} \int_S u_1 \frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_1} \int_S u_3 \frac{dS}{r}$$

$$\int_S R_3 \frac{dS}{r} = -\int_\sigma (U_2\gamma_1 - U_1\gamma_2) \frac{d\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial x'_1} \int_S u_2 \frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_2} \int_S u_1 \frac{dS}{r};$$

di qui si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x'_1} \int_S \Theta \frac{dS}{r} + \frac{\partial}{\partial x'_3} \int_S R_2 \frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_2} \int_S R_3 \frac{dS}{r} = \Delta_2 \int_S u_1 \frac{dS}{r} +$$

$$+ \int_\sigma \left(\sum_{i=1}^3 U_i \gamma_i\right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} d\sigma + \int_\sigma (U_1\gamma_3 - U_3\gamma_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_3} d\sigma - \int_\sigma (U_2\gamma_1 - U_1\gamma_2) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} d\sigma,$$

ed altre due formule analoghe che si deducono da questa con permutazioni circolari degli indici. Quindi, se il punto (x'_1, x'_2, x'_3) è interno ad S, poichè:

$$\Delta_2 \int_S u_i \frac{dS}{r} = -4\pi u_i(x'_1, x'_2, x'_3),$$

si hanno le seguenti formule:

$$\left.\begin{aligned}
-4\pi u_1(x'_1, x'_2, x'_3) &= \frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S \Theta \frac{dS}{r} + \frac{\partial}{\partial x'_3}\int_S R_2 \frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_2}\int_S R_3 \frac{dS}{r} - \\
&\quad -\int_\sigma (U_1 \Lambda + U_3 \Lambda_2 - U_2 \Lambda_3) d\sigma \\
-4\pi u_2(x'_1, x'_2, x'_3) &= \frac{\partial}{\partial x'_2}\int_S \Theta \frac{dS}{r} + \frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S R_3 \frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_3}\int_S R_1 \frac{dS}{r} - \\
&\quad -\int_\sigma (U_2 \Lambda + U_1 \Lambda_3 - U_3 \Lambda_1) d\sigma \\
-4\pi u_3(x'_1, x'_2, x'_3) &= \frac{\partial}{\partial x'_3}\int_S \Theta \frac{dS}{r} + \frac{\partial}{\partial x'_2}\int_S R_1 \frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S R_2 \frac{dS}{r} - \\
&\quad -\int_\sigma (U_3 \Lambda + U_2 \Lambda_1 - U_1 \Lambda_2) d\sigma
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

ove per brevità si è posto:

$$\Lambda = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$$

$$\Lambda_1 = \gamma_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_3} - \gamma_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2}, \qquad \Lambda_2 = \gamma_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} - \gamma_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_3}, \qquad \Lambda_3 = \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} - \gamma_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_3}.$$

Queste formule valgono qualunque siano le funzioni u_1, u_2, u_3, purchè soddisfacenti alle note condizioni circa la continuità che sono necessarie, perchè il procedimento seguito sia applicabile. Esse possono essere considerate come una estensione della formula di Green, poichè se facciamo $u_2 = u_3 = 0$, le ultime due si riducono ad identità, e la prima si converte nella formula di Gauss, da cui risulta immediatamente quella di Green, relativa alla funzione u_1.

Se ora supponiamo che le u_1, u_2, u_3 soddisfino alle equazioni dell'equilibrio, possiamo dalle (9) eliminare le R_1, R_2, R_3, oppure la Θ, introducendo invece le forze di massa e le superficiali. Difatti colle solite trasformazioni si ha:

$$\mu\left(\frac{\partial}{\partial x'_3}\int_S R_2 \frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_2}\int_S R_3 \frac{dS}{r}\right) = -\mu\int_S \left(\frac{\partial R_3}{\partial x_2} - \frac{\partial R_2}{\partial x_3}\right)\frac{dS}{r} - \mu\int_\sigma (R_3\gamma_2 - R_2\gamma_3)\frac{d\sigma}{r},$$

ma dalle equazioni di equilibrio:

$$\mu\left(\frac{\partial R_3}{\partial x_2} - \frac{\partial R_2}{\partial x_3}\right) = 2(\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x_1} + \delta X_1,$$

e quindi, sostituendo nella prima delle (9), si ha:

$$-4\pi\mu u_1(x'_1, x'_2, x'_3) = -(2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S \Theta \frac{dS}{r} - \delta\int_S X\frac{dS}{r} +$$
$$+2(\lambda+\mu)\int_\sigma \Theta\gamma_1\frac{d\sigma}{r} - \mu\int_\sigma S_1\frac{d\sigma}{r} - \mu\int_\sigma (U_1\Lambda + U_3\Lambda_2 - U_2\Lambda_3)d\sigma.$$

Ora dalle equazioni (2) si ha, sopra la superficie σ,

$$2\lambda\Theta\gamma_1 = -L_1 - 2\mu\frac{\partial u_1}{\partial n} - \mu S_1,$$

e sostituendo nella equazione precedente:

$$4\pi\mu u_1(x'_1, x'_2, x'_3) = (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S \Theta\frac{dS}{r} + \delta\int_S X\frac{dS}{r} + \int_\sigma L\frac{d\sigma}{r} +$$
$$+2\mu\int_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial n} + S_1 - \Theta\gamma_1\right)\frac{d\sigma}{r} + \mu\int_\sigma (U_1\Lambda + U_3\Lambda_2 - U_2\Lambda_3)d\sigma,$$

ma d'altra parte si ha (*):

$$\int_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial n} + S_1 - \Theta\gamma_1\right)\frac{d\sigma}{r} = -\int_\sigma (U_3\Lambda_2 - U_2\Lambda_3)d\sigma,$$

sicchè sostituendo si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\mu u_1(x'_1, x'_2, x'_3) &= (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S \Theta\frac{dS}{r} + \delta\int_S X\frac{dS}{r} + \int_\sigma L_1\frac{d\sigma}{r} + \\ &+\mu\int_\sigma (U_1\Lambda + U_2\Lambda_3 - U_3\Lambda_2)d\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Altre due formule analoghe si possono avere per $u_2(x'_1, x'_2, x'_3)$ e $u_3(x'_1, x'_2, x'_3)$ con sostituzioni circolari degli indici.

Per eliminare invece dalle (9) la Θ, osserviamo che dalle equazioni di equilibrio si ha:

$$2(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S \Theta\frac{dS}{r} = \mu\int_S\left(\frac{\partial R_3}{\partial x_2} - \frac{\partial R_2}{\partial x_3}\right)\frac{dS}{r} + 2(\lambda+\mu)\int_\sigma \Theta\gamma_1\frac{d\sigma}{r} - \delta\int_S X_1\frac{dS}{r},$$

(*) La dimostrazione di questa formula si può trovare nel mio lavoro: *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo* (Nuovo Cimento, 1885), dove viene stabilita la formula (10) con un procedimento un po' diverso da quello ora seguito.

e sostituendo nelle (9):

$$-8\pi(\lambda+\mu)u_1(x'_1,\ x'_2,\ x'_3) = (2\lambda+\mu)\left[\frac{\partial}{\partial x'_3}\int_S R_2\frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_2}\int_S R_3\frac{dS}{r}\right] -$$

$$-\delta\int_S X_1\frac{dS}{r} + 2(\lambda+\mu)\int_\sigma \Theta\gamma_1\frac{d\sigma}{r} - \mu\int_\sigma S_1\frac{d\sigma}{r} - 2(\lambda+\mu)\int_\sigma (U_1\Lambda + U_3\Lambda_2 - U_2\Lambda_3)d\sigma,$$

ma come nel caso precedente:

$$2(\lambda+\mu)\int_\sigma \Theta\gamma_1\frac{d\sigma}{r} - \mu\int_\sigma S_1\frac{d\sigma}{r} = -\int_\sigma L_1\frac{d\sigma}{r} + 2\mu\int_\sigma (U_3\Lambda_2 - U_2\Lambda_3)d\sigma,$$

per cui finalmente si ha:

$$\left.\begin{aligned} 8\pi(\lambda+\mu)u_1(x'_1,\ x'_2,\ x'_3) = (2\lambda+\mu)\left[\frac{\partial}{\partial x'_2}\int_S R_3\frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_3}\int_S R_2\frac{dS}{r}\right] + \\ + \delta\int_S X_1\frac{dS}{r} + \int_\sigma L_1\frac{d\sigma}{r} + 2(\lambda+\mu)\int_\sigma U_1\Lambda\, d\sigma + 2\lambda\int_\sigma (U_3\Lambda_2 - U_2\Lambda_3)d\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Le altre due formule analoghe per $u_2(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$ e $u_3(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$ si ottengono da questa con sostituzioni circolari degli indici.

Sia dalle (10), che dalle (11) con derivazioni si ottengono delle formule per rappresentare la Θ e le R_1, R_2, R_3, le quali furono già trovate da Betti nel lavoro citato, e che sono di forma analoga a quella delle (7); per cui qualora nelle formule (10) e (11) si volessero esprimere i secondi membri direttamente in funzione delle X_i, L_i, U_i, sostituendo a Θ e R_1, R_2, R_3 questi valori, si otterrebbero anche integrali sestupli e quintupli, mentre nelle (7) non entrano che integrali tripli e doppi. In alcuni casi però le (10) e (11) possono essere utili.

Supponiamo per es. che si tratti di un problema di equilibrio, in cui sono date le forze X_i, e sulla superficie alcune delle sei componenti L_i, U_i. Per le (10) o (11) il problema si riduce a calcolare quelli fra i dodici integrali

$$\int_\sigma L_i\frac{d\sigma}{r}, \qquad \int_\sigma U_i\gamma_s\frac{d\sigma}{r} \qquad (i,\ s = 1,\ 2,\ 3),$$

che contengono quelle L_i od U_i che non sono date. Volendo usare delle (7) bisognerà considerare anche gli integrali

$$\int_\sigma L_i r\, d\sigma, \qquad \int_\sigma U_i\gamma_s r\, d\sigma \qquad (i,\ s = 1,\ 2,\ 3).$$

Confrontando le (7) colle (10) si ottiene:

$$2(\lambda+\mu)\int_S \Theta \frac{dS}{r} = \sum_{i=1}^{3}\left\{\partial\int_S X_i \frac{\partial \frac{r}{2}}{\partial x_i} dS + \int_\sigma L_i \frac{\partial \frac{r}{2}}{\partial x_i} d\sigma + 2\mu \int_\sigma U\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \frac{r}{2}}{\partial x_i} - \frac{\gamma_i}{r}\right) d\sigma\right\} + C,$$

ove C è una costante. Eseguendo l'operazione Δ_2 sopra i due membri si ottiene la formula di Betti per la dilatazione cubica

$$-8\pi(\lambda+\mu)\Theta = \sum_{i=1}^{3}\left\{\partial\int_S X_i \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_i} dS + \int_\sigma L_i \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_i} d\sigma + 2\mu\int_\sigma U_i \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_i} d\sigma\right\}.$$

Poniamo ora:

$$\Theta^{(1)} = -\frac{\delta}{8\pi(\lambda+\mu)}\sum_{i=1}^{3}\int_S X_i \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_i} dS \qquad \Theta^{(2)} = -\frac{\delta}{8\pi(\lambda+\mu)}\sum_{i=1}^{3}\int_\sigma L_i \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_i} d\sigma$$

$$\Theta^{(3)} = -\frac{\mu}{4\pi(\lambda+\mu)}\sum_{i=1}^{3}\int_\sigma U_i \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_i} d\sigma,$$

e consideriamo separatamente i termini che, nelle (10), dipendono dalle forze X_i, dalle L_i, e dagli spostamenti U_i. Indicando i primi con $v_1^{(1)}$, $v_2^{(1)}$, $v_3^{(1)}$, abbiamo:

$$4\pi\mu v_i^{(1)} = (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_i}\int_S \Theta^{(1)}\frac{dS}{r} + \int_S X_i \frac{dS}{r} \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (12')$$

e indicando i secondi con $v_1^{(2)}$, $v_2^{(2)}$, $v_3^{(2)}$,

$$4\pi\mu v_i^{(2)} = (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_i}\int_S \Theta^{(2)}\frac{dS}{r} + \int_\sigma L\frac{d\sigma}{r} \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (12'')$$

e finalmente per gli ultimi si ha:

$$\left.\begin{aligned}
4\pi\mu v_1^{(3)} &= (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S \Theta^{(3)}\frac{dS}{r} + \mu\int_\sigma (U_1\Lambda + U_2\Lambda_3 - U_3\Lambda_2)d\sigma \\
4\pi\mu v_2^{(3)} &= (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_2}\int_S \Theta^{(3)}\frac{dS}{r} + \mu\int_\sigma (U_2\Lambda + U_3\Lambda_1 - U_1\Lambda_3)d\sigma \\
4\pi\mu v_3^{(3)} &= (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_3}\int_S \Theta^{(3)}\frac{dS}{r} + \mu\int_\sigma (U_3\Lambda + U_1\Lambda_2 - U_2\Lambda_1)d\sigma.
\end{aligned}\right\} \quad (12''')$$

Questi tre sistemi $v_i^{(1)}$, $v_i^{(2)}$, $v_i^{(3)}$ rappresentano, come è facile verificare, tre deformazioni speciali del corpo, di cui la prima avviene per forze di massa uguali alle date, le altre due per forze di massa nulle; essi dànno quindi una decomposizione di qualsiasi deformazione, analoga a quella considerata alla fine del § 1.

Siano ora $M_1^{(3)}$, $M_2^{(3)}$, $M_3^{(3)}$ le componenti delle forze superficiali che mantengono l'equilibrio, quando avviene la deformazione $v_1^{(3)}$, $v_2^{(3)}$, $v_3^{(3)}$; e rappresentiamo $v_1^{(1)}$ mediante la (10); si ha:

$$4\pi\mu v_i^{(1)} = (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S \Theta^{(1)}\frac{dS}{r} + \delta\int_S X_1\frac{dS}{r} + \int_\sigma M_1^{(1)}\frac{d\sigma}{r} + \\ + \mu\int_\sigma (V_1^{(1)}\Lambda + V_2^{(1)}\Lambda_3 - V_3^{(1)}\Lambda_2)d\sigma,$$

e confrontando con (12′)

$$\int_\sigma M_1^{(1)}\frac{d\sigma}{r} + \mu\int_\sigma (V_1^{(1)}\Lambda + V_2^{(1)}\Lambda_3 - V_3^{(1)}\Lambda_2)d\sigma = 0. \tag{13}$$

Altre due relazioni analoghe si ottengono permutando circolarmente gli indici inferiori delle M, V, Λ.

Similmente rappresentando mediante le (10) gli spostamenti (12″) (12‴) e servendoci di notazioni analoghe alle precedenti per indicare gli spostamenti superficiali corrispondenti, si trovano le seguenti relazioni:

$$\int_\sigma L_1\frac{d\sigma}{r} = \int_\sigma M_1^{(2)}\frac{d\sigma}{r} + \mu\int_\sigma (V_1^{(2)}\Lambda + V_2^{(2)}\Lambda_3 - V_3^{(2)}\Lambda_2)d\sigma \tag{14}$$

$$\int_\sigma M_1^{(3)}\frac{d\sigma}{r} + \mu\int_\sigma (V_1^{(3)}\Lambda + V_2^{(3)}\Lambda_3 - V_3^{(3)}\Lambda_2)d\sigma = \mu\int_\sigma (U_1\Lambda + U_2\Lambda_3 - U_3\Lambda_2)d\sigma, \tag{15}$$

ed altre quattro analoghe. Queste tre terne di relazioni rappresentano le condizioni superficiali a cui soddisfano rispettivamente gli spostamenti (12′), (12″), (12‴).

Nella (15) sostituiamo alle U_i le somme equivalenti $U_i^{(1)} + U_i^{(2)} + U_i^{(3)}$ e nella (14) ad L_1 la somma $M_1^{(1)} + M_1^{(2)} + M_1^{(3)}$; avremo:

$$\int_\sigma (M_1^{(1)} + M_1^{(3)})\frac{d\sigma}{r} = \mu\int_\sigma (V_1^{(2)}\Lambda + V_2^{(2)}\Lambda_3 - V_3^{(2)}\Lambda_2)d\sigma$$

$$\int_\sigma M_1^{(3)}\frac{d\sigma}{r} = \mu\int_\sigma [(V_1^{(1)} + V_1^{(2)})\Lambda + (V_2^{(1)} + V_2^{(2)})\Lambda_3 - (V_3^{(1)} + V_3^{(2)})\Lambda_2]d\sigma.$$

Queste due relazioni a cagione della (13) si riducono ad una sola

$$\int_\sigma M_1^{(3)} \frac{d\sigma}{r} - \mu \int_\sigma (V_1^{(2)} \Lambda + V_2^{(2)} \Lambda_3 - V_3^{(2)} \Lambda_2) d\sigma = H_1,$$

ove H_1 è una quantità che dipende unicamente dalle forze X_1, X_2, X_3, e si ha:

$$H_1 = -\int_\sigma M_1^{(1)} \frac{d\sigma}{r} = \mu \int_\sigma (V_1^{(1)} \Lambda + V_2^{(1)} \Lambda_3 - V_3^{(1)} \Lambda_2) d\sigma.$$

Analogamente si trova:

$$\int_\sigma M_2^{(3)} \frac{d\sigma}{r} - \mu \int_\sigma (V_2^{(2)} \Lambda + V_3^{(2)} \Lambda_1 + V_1^{(2)} \Lambda_3) d\sigma = H_2$$

$$\int_\sigma M_3^{(3)} \frac{d\sigma}{r} - \mu \int_\sigma (V_3^{(2)} \Lambda + V_1^{(2)} \Lambda_2 - V_2^{(2)} \Lambda_1) d\sigma = H_3,$$

ove H_2, H_3 dipendono parimente dalle forze X_1, X_2, X_3. Nelle tre relazioni precedenti le $M_i^{(3)}$, dipendono dalle U_i, e le $V_i^{(2)}$ dalle L_i, e sarebbe facile ottenere dalle (12′) (12‴) le loro espressioni mediante queste funzioni; si hanno così tre relazioni che devono essere soddisfatte in qualunque deformazione fra le forze superficiali, gli spostamenti superficiali e le forze di massa. Quando queste ultime sono nulle, si ha anche $H_1 = H_2 = H_3 = 0$, e le relazioni precedenti divengono relazioni fra le forze e gli spostamenti superficiali.

Anche le (11) dànno una decomposizione di qualsiasi deformazione analoga a quelle date dalle (7) e (10); e confrontando le (11) colle (7) si possono fare considerazioni simili alle precedenti.

§ 3.

Se in un certo spazio S_1, contenuto in S, le funzioni $u_i^{(s)}$, $L_i^{(s)}$ del § 1 sono sviluppabili in serie alle quali sia applicabile la integrazione termine a termine, dalle (7) noi potremo dedurre degli sviluppi atti a rappresentare in modo generale u_1, u_2, u_3 in S_1. Supponiamo che S_1 sia limitato da una superficie sferica ω, e proponiamoci di trovare gli sviluppi di $u_i^{(s)}$, $L_i^{(s)}$, validi nello spazio interno ed esterno ad ω, e analoghi agli sviluppi per funzioni sferiche, che si hanno per la funzione $\frac{1}{r}$.

Introduciamo un sistema di coordinate polari ρ, θ, φ col polo nell'origine delle coordinate; si avrà:

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\mu},$$

ove μ è il coseno dell'angolo dei due raggi rettori ρ, ρ'. Indicando con P_n le note funzioni di LEGENDRE, per $\rho' < \rho$ si ha:

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho'^n}{\rho^{n+1}} P_n(\mu). \tag{16}$$

Sviluppando collo stesso procedimento la funzione r, si ottiene:

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho'^n}{\rho^{n-1}} P'_n(\mu), \tag{17}$$

ove le $P'(\mu)$ sono funzioni razionali intere di μ, al pari delle $P_n(\mu)$ ed hanno con queste relazioni assai semplici.

Osserviamo infatti che facendo $\mu = 1$ nella (17), si vede che deve essere:

$$P'_0(1) = 1 \qquad P'_1(1) = -1 \qquad P'_n(1) = 0 \qquad (n > 1),$$

e derivando rispetto a μ

$$\frac{1}{r} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho'^{n-1}}{\rho^n} \frac{\partial P'_n}{\partial \mu};$$

confrontando colla (16) otteniamo:

$$\frac{\partial P'_0}{\partial \mu} = 0 \qquad \frac{\partial P_n}{\partial \mu} = -P_{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Di qui integrando, e per una formula nota della teoria delle funzioni sferiche, si ha:

$$P'_0 = 1 \qquad P'_1 = -\mu$$

$$P'_n = -\int_1^{\mu} P_{n-1} d\mu = \frac{1}{2n-1}(P_n - P_{n-2}) \qquad (n > 1).$$

Si hanno così le espressioni delle P'_n in funzione delle P_n; sostituendo nella (17), si ha per r il seguente sviluppo per funzioni P_n

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho'^2}{2n+3} - \frac{\rho^2}{2n-1}\right) \frac{\rho'^n}{\rho^{n+1}} P_n.$$

Se nella equazione

$$\Delta_2 r = \frac{2}{r},$$

sostituiamo ad r e $\frac{1}{r}$ i loro sviluppi (16) (17), uguagliando i coefficienti delle potenze di ρ' o di $\frac{1}{\rho}$ nei due membri otteniamo:

$$\Delta_2 \frac{P'_n}{\rho^{n-1}} = 2\frac{P_n}{\rho^{n+1}} \qquad \Delta'_2 \rho'_n P'_n = 2\rho'^{n-2} P_{n-2}, \tag{18}$$

ove Δ'_2 indica il parametro differenziale Δ_2 preso rispetto alle variabili ρ', θ', φ'. Per ragioni di simmetria poi si ha anche

$$\Delta_2 \rho^n P'_n = 2\rho^{n-2} P_{n-2} \qquad \Delta'_2 \frac{P'_n}{\rho'^{n-1}} = 2\frac{P_n}{\rho'^{n+1}}\,. \tag{19}$$

Di qui si vede subito che le funzioni

$$\rho^n P'_n, \qquad \frac{1}{\rho^{n-2}} P'_n,$$

soddisfano alla equazione $\Delta_2\Delta_2 = 0$.

Queste proprietà delle funzioni P'_n possono essere estese nel seguente modo. Siano Y_n, Y_{n-2} due funzioni sferiche di Laplace, contenenti, come è noto, $2n+1$ e $2n-3$ coefficienti arbitrarii rispettivamente. Mediante le equazioni, a cui soddisfano Y_n e Y_{n-2}, è facile dimostrare le uguaglianze

$$\Delta_2 \rho^n Y_{n-2} = 2(2n-1)\rho^{n-2} Y_{n-2} \qquad \Delta_2 \frac{Y_n}{\rho^{n-1}} = -2(2n-1)\frac{Y_n}{\rho^{n+1}};$$

da queste seguono le altre

$$\Delta_2\Delta_2 \rho^n (Y_{n-2} + Y_n) = 0 \qquad \Delta_2\Delta_2 \frac{1}{\rho^{n-1}}(Y_{n-2} + Y_n) = 0.$$

Ora osserviamo che la funzione razionale intera omogenea più generale di grado n nelle x_1, x_2, x_3, che soddisfa alla equazione $\Delta_2\Delta_2 = 0$ conterrà $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-3)(n-2)}{2} = 2(2n-1)$ coefficienti arbitrari; e che parimenti $Y_n + Y_{n-2}$ ne contiene $2n+1+2n-3 = 2(2n-1)$. Dunque possiamo dire: La funzione razionale intera omogenea più generale di grado n che soddisfa alla equazione $\Delta_2\Delta_2 = 0$ è $\rho^n(Y_n + Y_{n-2})$. La stessa equazione poi è soddisfatta anche dalla funzione omogenea, di grado $-(n-1)$, $\frac{1}{\rho^{n-1}}(Y_n + Y_{n-2})$.

Per ottenere ora gli sviluppi degli spostamenti (8) introdurremo le seguenti notazioni:

$$U'_n = \frac{P'_n}{\rho^{n-1}} \qquad U_n = \frac{P_n}{\rho^{n+1}} \qquad \overline{U'_n} = \frac{P'_n}{\rho'^{n-1}} \qquad \overline{U_n} = \frac{P_n}{\rho'^{n+1}}$$

$$V'_n = \rho^n P'_n \qquad V_n = \rho^n P_n \qquad \overline{V'_n} = \rho'^n P'_n \qquad \overline{V_n} = \rho'^n P_n.$$

Avremo allora per $\rho' < \rho$

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n U'_n \qquad \frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n U_n.$$

Le U'_n sono funzioni omogenee di grado $-(n-1)$ nelle x_1, x_2, x_3, e le U_n invece di grado $-(n+1)$; inoltre per le (18)

$$\Delta_2 U'_n = 2 U_n \qquad \Delta_2 U_n = 0.$$

Se invece $\rho < \rho'$ abbiamo:

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho'^{n-1}} V'_n \qquad \frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho'^{n+1}} V_n,$$

ove V'_n, V_n sono funzioni omogenee, razionali, intere di grado n delle x_1, x_2, x_3, e si ha (19)

$$\Delta_2 V'_n = 2 V_{n-2} \qquad \Delta_2 V_n = 0.$$

Per ciò che segue è utile di stabilire anche le seguenti relazioni. Si ha $\frac{\partial r}{\partial x i} = -\frac{\partial r}{\partial x' i}$; quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n \frac{\partial U'_n}{\partial x i} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \overline{V'_n}}{\partial x' i} \frac{1}{\rho^{n-1}}.$$

Ora $\frac{\partial U'_n}{\partial x i}$ è funzione omogenea di grado $-n$, e si può porre sotto la forma $\frac{F_n}{\rho^n}$, ove F_n è indipendente da ρ e da ρ'; analogamente $\frac{\partial \overline{V'_n}}{\partial x'_n}$ si può porre sotto la forma $\rho'^{n-1} G_{n-1}$, ove G_{n-1} è indipendente da ρ e da ρ'. L'equazione precedente allora si può scrivere:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho'^n}{\rho^n} F_n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho'^n}{\rho^n} G_n,$$

quindi $F_n = -G_n$, ossia:

$$\left.\begin{aligned} \rho^n \frac{\partial U'_n}{\partial x i} &= -\frac{1}{\rho'^n} \frac{\partial \overline{V'_{n+1}}}{\partial x' i}. \\ \text{Analogamente si trova:} \\ \rho^{n+1} \frac{\partial^2 U'_n}{\partial x i \partial x_s} &= \frac{1}{\rho'^n} \frac{\partial^2 \overline{V'_{n+2}}}{\partial x' i \partial x'_s}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Per le funzioni U_n, V_n in modo simile, considerando gli sviluppi di $\frac{1}{r}$, si ottengono le relazioni:

$$\left.\begin{aligned}\rho^{n+2}\frac{\partial U_n}{\partial x_i} &= -\frac{1}{\rho'^n}\frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_i}\\ \rho^{n+3}\frac{\partial^2 U_n}{\partial x_i \partial x_s} &= \frac{1}{\rho'^n}\frac{\partial^2 \overline{V_{n+2}}}{\partial x'_i \partial x'_s}\,.\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

In queste poi, e nelle precedenti, si possono scambiare le x_1, x_2, x_3 nelle x'_1, x'_2, x'_3 ed ottenere altrettante relazioni fra le derivate delle $\overline{U'_n}$, $\overline{U_n}$ e le derivate delle V'_n, V_n.

Riprendiamo ora a considerare gli spostamenti (8) del § 1; supposto $\rho' < \rho$, dagli sviluppi precedenti di r e $\frac{1}{r}$ si ricava:

$$u_s^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n \left(\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 U'_n}{\partial x_s^2} + U_n\right) \qquad u_i^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 U'_n}{\partial x_i \partial x_s}\,,$$

e questi sviluppi, per le (20) (21), si possono scrivere anche

$$u_s^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n+1}} \left\{\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 \overline{V'_{n+2}}}{\partial x'^2_s} + \overline{V_n}\right\} \qquad u_i^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 \overline{V'_{n+2}}}{\partial x'_i \partial x'_s}\,.$$

Di qui si vede che, se si considerano i tre termini corrispondenti ad un dato valore di n negli sviluppi di $u_1^{(1)}$, $u_1^{(2)}$, $u_1^{(3)}$, essi costituiscono un sistema di spostamenti soddisfacenti alle equazioni di equilibrio, quando le forze di massa sono nulle, tanto considerati come funzioni delle x_1, x_2, x_3, quanto considerati come funzioni delle x'_1, x'_2, x'_3.

Ciò posto, supponiamo che l'origine delle coordinate sia nell'interno del corpo, e ρ' non sia maggiore della distanza minima dell'origine dalla superficie; consideriamo i termini che nelle (7) dipendono dalla forza superficiale L_1, e indichiamoli con u_{11}, u_{12}, u_{13}. Poichè ρ sulla superficie σ è sempre maggiore di ρ', potremo alle $u_i^{(s)}$ in questi termini applicare gli sviluppi (22), e integrando termine a termine avremo:

$$u_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{\alpha}{2}\int_\sigma L_1 \frac{\partial^2 \overline{V_{n+2}}}{\partial x'^2_1}\frac{d\sigma}{\rho^{n+1}} + \int_\sigma L_1 \overline{V_n}\frac{d\sigma}{\rho^{n+1}}\right\}$$

$$u_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{2}\int_\sigma L_1 \frac{\partial^2 \overline{V_{n+2}}}{\partial x'_1 \partial x'_2}\frac{d\sigma}{\rho^{n+1}}$$

$$u_{13} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{2}\int_\sigma L_1 \frac{\partial^2 \overline{V_{n+2}}}{\partial x'_1 \partial x'_3}\frac{d\sigma}{\rho^{n+1}}\,.$$

In questi sviluppi i termini corrispondenti ad uno speciale valore di n sono funzioni omogenee razionali intere di x'_1, x'_2, x'_3 e soddisfano, considerati come spostamenti, alle equazioni di equilibrio (1'); difatti essi rientrano nella forma generale di spostamenti rappresentati dalle (3). Considerazioni analoghe si possono fare circa i termini dipendenti da L_1, e da L_2.

Indichiamo ora con v_{11}, v_{12}, v_{13} i termini che nelle (7) dipendono da U_1. Le espressioni $L_1^{(1)}$, $L_1^{(2)}$, $L_1^{(3)}$ che moltiplicano U_1 sotto i segni di integrazione si possono sviluppare in serie mediante gli sviluppi di r e $\frac{1}{r}$. Si trova così:

$$L_1^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n \left\{ \alpha\mu \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 U'_n}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial U_n}{\partial x_1} \gamma_1 \right) + \mu \frac{\partial U_n}{\partial n} \right\}$$

$$L_1^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n \left\{ \alpha\mu \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 U'_n}{\partial x_1 \partial x_2} - 2 \frac{\partial U_n}{\partial x_2} \gamma_1 \right) + \mu \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_1} \gamma_2 - \frac{\partial U_n}{\partial x_2} \gamma_1 \right) \right\}$$

$$L_1^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n \left\{ \alpha\mu \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 U'_n}{\partial x_1 \partial x_3} - 2 \frac{\partial U_n}{\partial x_3} \gamma_1 \right) + \mu \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_1} \gamma_3 - \frac{\partial U_n}{\partial x_3} \gamma_1 \right) \right\},$$

ossia per le (20) (21)

$$L_1^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \alpha\mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial \overline{V'_{n+2}}}{\partial x'^2_1} \right) + \frac{2\sigma\mu}{\rho^{n+2}} \frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_1} \gamma_1 + \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\overline{V_n}}{\rho^{n+1}} \right) \right\}$$

$$L_1^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \alpha\mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial^2 \overline{V'_{n+2}}}{\partial x'_1 \partial x'_2} \right) + \frac{2\alpha\mu}{\rho^{n+2}} \frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_2} \gamma_1 + \frac{\mu}{\rho^{n+2}} \left(\frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_2} \gamma_1 - \frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_1} \gamma_2 \right) \right\}$$

$$L_1^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \alpha\mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial^2 \overline{V'_{n+2}}}{\partial x'_1 \partial x'_3} \right) + \frac{2\alpha\mu}{\rho^{n+2}} \frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_3} \gamma_1 + \frac{\mu}{\rho^{n+2}} \left(\frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_3} \gamma_1 - \frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_2} \gamma_3 \right) \right\}.$$

Sotto questa forma è facile vedere che anche in questo caso i termini dei secondi membri corrispondenti ad uno stesso valore di n, costituiscono un sistema di spostamenti, che soddisfano alle equazioni (1'), e sono funzioni omogenee razionali intere di grado n delle x'_1, x'_2, x'_3. Perciò anche negli sviluppi dei termini

$$v_{11} = \int_\sigma L_1^{(1)} U_1 d\sigma \qquad v_{12} = \int_\sigma L_1^{(2)} U_1 d\sigma \qquad v_{13} = \int_\sigma L_1^{(3)} U_1 d\sigma,$$

i gruppi corrispondenti ad uno stesso valore di n godono della stessa proprietà.

Considerazioni analoghe si possono fare rispetto agli altri termini dipendenti da U_2, U_3.

Se ora osserviamo che l'origine può essere un punto arbitrario del corpo, da ciò che precede risulta il teorema seguente:

« Se attorno ad un punto (a_1, a_2, a_3) interno al corpo descriviamo una « sfera, il cui raggio sia minore della distanza minima di questo punto dalla « superficie, qualsiasi deformazione, quando le forze di massa sono nulle, è rap- « presentabile dentro tale sfera mediante la somma di infinite deformazioni, i « cui spostamenti sono funzioni omogenee razionali intere delle differenze « $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2$, $x_3 - a_3$. I coefficienti in queste funzioni sono esprimibili « mediante i valori delle forze e degli spostamenti alla superficie del corpo. »

Tre polinomii $u_1^{(n)}$, $u_2^{(n)}$, $u_3^{(n)}$ omogenei di grado n nelle variabili x_1, x_2, x_3, contengono complessivamente $\frac{3(n+1)(n+2)}{2}$ coefficienti; e se scriviamo che, considerati come spostamenti, soddisfano alle equazioni (1′) dell'equilibrio, otteniamo $\frac{3n(n-1)}{2}$ relazioni fra i coefficienti. Perciò la n-esima delle deformazioni del teorema precedente si può rappresentare in generale mediante tre polinomii omogenei di grado n delle differenze $x_1 - a_1$, $x_1 - a_2$, $x_1 - a_3$, fra i cui coefficienti sussistono $\frac{3n(n-1)}{2}$ relazioni. Se poi poniamo:

$$u_1^{(n)} = \rho^n X_n \qquad u_2^{(n)} = \rho^n Y_n \qquad u_3^{(n)} = \rho^n Z_n,$$

ove ρ indica il raggio vettore del punto $(x_1\ x_2\ x_3)$, le X_n, Y_n, Z_n saranno funzioni unicamente degli angoli θ, φ che determinano la direzione di ρ, e inoltre dovendo le $u_i^{(n)}$ soddisfare alla equazione $\Delta_2 \Delta_2 = 0$, per quanto abbiamo visto, saranno la somma di due funzioni sferiche di ordine n ed $n-2$.

Mediante le equazioni dell'equilibrio in coordinate polari si possono facilmente stabilire le equazioni differenziali, a cui soddisfano le terne di funzioni X_n, Y_n, Z_n, considerate come dipendenti dalle variabili θ, φ, analogamente a quanto si fa per le funzioni Y_n di Laplace.

Per lo spazio S' esterno ad una sfera ω, si può dimostrare un teorema analogo al precedente, supponendo: 1.° che il corpo si estenda all'infinito, e che occupi tutto lo spazio S'; 2.° che i valori di U_1, U_2, U_3, L_1, L_2, L_3 sopra una sfera ω' di raggio grandissimo, concentrica ad ω, siano tali che si annullino gli integrali delle (7), in cui compariscono queste quantità, quando si prenda per σ la superficie ω'. Gli sviluppi che così si ottengono procedono per funzioni omegenee fratte di ordine negativo.

Mediante queste due serie infinite di spostamenti, gli uni rappresentati da funzioni omogenee razionali intere, gli altri da funzioni omogenee fratte, è possibile rappresentare le deformazioni che avvengono in uno spazio limitato da due sfere concentriche, ed anche, in certi casi, nello spazio limitato da un numero finito di porzioni di superficie sferiche, analogamente a quanto si può fare per le funzioni che soddisfano alla equazione $\Delta_2 = 0$ (*). In quest'ultimo caso gli sviluppi procedono per somme di funzioni omogenee delle differenze $(x_1 - a_1,\ x_2 - a_2,\ x_3 - a_3)$, $(x_1 - b_1,\ x_2 - b_2,\ x_3 - b_3)$, ecc., se (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), ecc., sono le coordinate dei centri delle diverse sfere, a cui appartengono le regioni del contorno.

§ 4.

Consideriamo un sistema di n funzioni $u_1, u_2, \ldots u_n$ di n variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, le quali in uno spazio S_n debbano soddisfare le n equazioni

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_{is}}{\partial x_i} = X_s \qquad (s = 1,\ 2, \ldots\ n), \tag{22}$$

ove le T_{is} sono funzioni lineari delle derivate prime delle u, ossia indicando con $A_{(l,m)}^{(i,s)}$ delle costanti, si ha:

$$T_{is} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} A_{(l,m)}^{(i,s)} \frac{\partial u_l}{\partial x_m},$$

e le X_s sono funzioni date. Inoltre nello spazio S_{n-1}, limite di S_n, debbano essere soddisfatte le equazioni

$$\sum_{i=1}^{n} T_{is} \gamma_{is} = L_s \qquad (s = 1,\ 2, \ldots\ n), \tag{23}$$

ove le L_s sono funzioni date nello spazio S_{n-1}, e le γ_s sono definite dalle equazioni

$$\gamma_s = \frac{d x_s}{d n},$$

essendo dn l'elemento della normale ad S_{n-1} diretta verso l'*interno* di S_n, e dx_s l'incremento che x_s riceve lungo dn.

Supposto *euclideo* lo spazio che si considera, si ha la formula (**)

$$\int_{S_n} \frac{\partial U}{\partial x_s} d S_n = - \int_{S_{n-1}} U \gamma_s d S_{n-1},$$

(*) V. Appell: *Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation différentielle* $\Delta F = 0$ (Acta Mathematica 4 : 4).

(**) V. Beltrami: *Sulla teorica generale dei parametri differenziali*, § 4.

ammettendo per la funzione U le condizioni analoghe a quelle necessarie per la validità di questa formula nello spazio ordinario; e dalle equazioni (22), (23), se si considerano due sistemi di funzioni $u'_1, u'_2, \ldots u'_n$ e $u''_1, u''_2, \ldots u''_n$ che le soddisfino quando X_s, L_s hanno rispettivamente i valori X'_s, L'_s, e X''_s, L''_s, si deduce:

$$\sum_{s=1}^{n} \left\{ \int_{S_n} X'_s u''_s \, dS_n + \int_{S_{n-1}} L'_s u''_s \, dS_{n-1} \right\} = - \sum_{l,\,m,\,i,\,s} \int_{S_n} A_{(l,\,m)}^{(i,\,s)} \frac{\partial u'_l}{\partial x_m} \frac{\partial u''_s}{\partial x_i} \, dS_n$$

$$\sum_{s=1}^{n} \left\{ \int_{S_n} X''_s u'_s \, dS_n + \int_{S_{n-1}} L''_s u'_s \, dS_{n-1} \right\} = - \sum_{l,\,m,\,i,\,s} \int_{S_n} A_{(l,\,m)}^{(i,\,s)} \frac{\partial u''_l}{\partial x_m} \frac{\partial u'_s}{\partial x_i} \, dS_n,$$

ove gli indici l, m, i, s nei secondi membri debbono percorrere tutti i valori di 1 ad n. Quindi se per qualsiasi valore di l, m, i, s

$$A_{(l,\,m)}^{(i,\,s)} = A_{(s,\,i)}^{(m,\,l)}, \tag{24}$$

si avrà:

$$\sum_{s=1}^{n} \left\{ \int_{S_n} X'_s u''_s \, dS_n + \int_{S_{n-1}} L'_s u''_s \, dS_{n-1} \right\} = \sum_{s=1}^{n} \left\{ \int_{S_n} X''_s u'_s \, dS_n + \int_{S_{n-1}} L''_s u'_s \, dS_{n-1} \right\}. \tag{25}$$

Le condizioni (24) sono soddisfatte se

$$T_{ii} = -2\left(\lambda \Theta + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) \qquad T_{is} = -\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_i}\right),$$

ove $\Theta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, e λ, μ sono costanti. Le equazioni (22) in questo caso divengono:

$$(2\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_s} + \mu \Delta_2 u_s + X_s = 0 \qquad (s = 1,\ 2, \ldots\ n), \tag{26}$$

e le (23)

$$L_s + 2\lambda \Theta \gamma_s + \mu \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_s}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_s}\right) \gamma_i = 0. \tag{27}$$

Se ora si pone:

$$r = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x - x'_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

e si introduce un sistema di coordinate polari $r, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-1}$ (*) col polo in

(*) Le relazioni che legano queste coordinate alle $x_1, x_2, \ldots x_n$ sono:

$$x_s - x'_s = r \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}\theta_{s-1} \cos\theta_s \qquad (s = 1,\ 2, \ldots\ n-1)$$

$$x_n - x'_n = r \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-1}.$$

$(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)$, il secondo parametro differenziale di una funzione $V(r)$ della sola r è

$$\Delta_2 V = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1} \frac{\partial V}{\partial r}\right).$$

Perciò si ha, per $n > 2$,

$$\Delta_2\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = 0 \qquad \Delta_2\left(-\frac{r^{-n+4}}{2(n-4)}\right) = \frac{1}{r^{n-2}}.$$

Di qui segue subito che le equazioni (26) sono soddisfatte, quando $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$, dai valori

$$u'_1 = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{1}{r^{n-2}}$$

$$u'_2 = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u'_n = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n},$$

ove

$$v = -\frac{r^{-n+4}}{2(n-4)}, \qquad \alpha = -\frac{2\lambda+\mu}{2(\lambda+\mu)}.$$

Per le L_s, quando si prendano per le u i valori precedenti, dalle equazioni (27) risultano le seguenti espressioni:

$$L'_1 = -2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x_1}\gamma_1\right) - \mu \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial n},$$

e per $s > 1$

$$L'_s = -2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_s} - \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x_1}\gamma_s\right) - \mu\left(\frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x_s}\gamma_1 - \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x_1}\gamma_s\right).$$

Osserviamo ora che, quando r tende a zero, si ha $\lim r^{n-1} u'_i = 0$, e colle coordinate $r, \theta_1, \ldots \theta_n$

$$dS_n = r^{n-1}(\operatorname{sen}\theta_1)^{n-2}(\operatorname{sen}\theta_2)^{n-3}\ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, dr\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1},$$

quindi, applicando la formula (25) ai due sistemi $u_1, \ldots u_n$, $u'_1, \ldots u'_n$ e allo spazio che si ottiene da S_n togliendone la porzione definita dalla condizione

$$\sum_{r=1}^{n}(x_r - x'_r)^2 \leqq \varepsilon^2,$$

ove ε è una costante piccolissima, si ha:

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\int_{S_n} X_s u'_s\, dS + \int_{S_{n-1}} L_s u'_s\, dS_{n-1} - \int_{S_{n-1}} L'_s u_s\, dS_{n-1}\right\} = \lim_{\varepsilon=0}\sum_{s=1}\int_{\varpi_{n-1}} L'_s u_s\, d\varpi_{n-1}, \quad (28)$$

indicando con ϖ_{n-1} lo spazio $\sum_{r=1}^{n}(x_r - x'_r)^2 = \varepsilon^2$; colle coordinate r_1, $\theta_1, \ldots \theta_n$ si ha inoltre:

$$d\varpi_{n-1} = \varepsilon^{n-1}(\operatorname{sen}\theta_1)^{n-2}(\operatorname{sen}\theta_2)^{n-3}\ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1},$$

e per estendere la integrazione a ϖ_{n-1} si deve far variare θ_1, $\theta_2, \ldots \theta_{n-2}$ fra 0 e π, e θ_{n-1} tra 0 e 2π.

Osserviamo ora che in ϖ_{n-1} si ha:

$$\frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial n} = \frac{n-2}{r^{n-1}}, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x_s}\gamma_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\gamma_s = 0,$$

e inoltre, ponendo per brevità $\overline{x_s} = x_s - x'_s$,

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x_1}\gamma_1 = \frac{n-2}{2}\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{n(n-2)}{2}\frac{\overline{x}_1^2}{r^{n+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_s} - \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x_1}\gamma_s = -\frac{n(n-2)}{2}\frac{\overline{x_1}\,\overline{x_s}}{r^{n+1}} \qquad (s = 2,\ 3, .,.\ n).$$

Mediante questi valori possiamo avere le espressioni delle L'_s in ϖ_{n-1}, e quindi calcolare il limite del secondo membro della (28). Ora per $s > 1$, si ha:

$$\frac{\overline{x_1}\,\overline{x_s}}{r^{n+1}}\, d\varpi_{n-1} =$$

$$= \cos\theta_1(\operatorname{sen}\theta_1)^{n-1}(\operatorname{sen}\theta_2)^{n-2}\ldots(\operatorname{sen}\theta_{s-1})^{n-s+1}\cos\theta_s(\operatorname{sen}\theta_s)^{n-s-1}\ldots \operatorname{sen}\theta_{s-2}\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1}$$

e quindi:

$$\int_{\varpi_{n-1}} \frac{\overline{x_1}\,\overline{x_s}}{r^{n+1}}\, d\varpi_{n-1} = 0, \qquad (a)$$

poichè $\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta_1)^{n-1}\cos\theta_1\, d\theta_1 = 0$. Si ha poi

$$\frac{\overline{x}_1^2}{r^{n+1}}\, d\varpi_{n-1} = \cos^2\theta_1(\operatorname{sen}\theta_1)^{n-2}(\operatorname{sen}\theta_2)^{n-3}\ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{n-2},$$

e poichè:

$$\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta_1)^{n-2}\cos^2\theta_1\,d\theta_1 = \frac{1}{n-1}\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta_1)^n\,d\theta_1,$$

si avrà:

$$\int_{\varpi_{n-1}} \frac{\overline{x_1}^2}{r^{n+1}}\,d\varpi_{n-1} = \frac{2\pi Z_{n-1}}{n-1}\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^n\,d\theta, \tag{b}$$

introducendo il numero Z_n definito da

$$Z_n = \int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^{n-2}\,d\theta \int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^{n-3}\,d\theta \ldots \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\,d\theta.$$

Infine si ha:

$$\int_{\varpi_{n-1}} \frac{d\varpi_{n-1}}{r^{n+1}} = 2\pi Z_n. \tag{c}$$

Applicando ora il solito procedimento si ottiene dalle (*a*), (*b*), (*c*)

$$\lim\left\{\int_{\varpi_{n-1}} u_1 \frac{d\varpi_{n-1}}{r^{n+1}} - n\int_{\varpi_{n-1}} u_1 \frac{\overline{x_1}^2}{r^{n+1}}\,d\varpi_{n-1}\right\} =$$

$$= 2\pi\left(Z_n - \frac{n}{n-1} Z_{n-1}\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^n\,d\theta\right) u_1(x'_1,\ x'_2, \ldots\ x'_n)$$

$$\lim\int_{\varpi_{n-1}} u_s \frac{\overline{x_1}\,\overline{x_s}}{r^{n+1}}\,d\varpi_{n-1} = 0.$$

Ma si ha (*):

$$Z_{n-1}\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^n\,d\theta = \frac{n-1}{n} Z_n,$$

e quindi, riassumendo,

$$\lim \sum_{s=1}^{n} \int_{\varpi_{n-1}} L'_s u_s\,d\varpi_{n-1} = 2\pi\mu(n-2) Z_n u_1(x'_1,\ x'_2, \ldots\ x'_n).$$

(*) Questa uguaglianza si dimostra osservando che

$$\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^n\,d\theta = \begin{cases} \pi\dfrac{1.3\ldots(n-1)}{2.4\ldots n} & \text{quando } n \text{ è pari} \\[2ex] 2\dfrac{2.4\ldots(n-1)}{3.5\ldots n} & \text{quando } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Sostituendo questa espressione nella (28) si ottiene una formula che dà la rappresentazione della funzione u_1 in tutti i punti interni di S_n, mediante i valori delle X_s, delle L_s, ed i valori delle u_s in S_{n-1}.

Considerazioni simili naturalmente si possono fare per qualunque altra delle funzioni u_s, e si può quindi concludere che il sistema delle funzioni u_1, $u_2, \ldots u_n$ è rappresentabile in tutti i punti interni di S_n colle formule:

$$\left.\begin{aligned} u_s(x'_1, x'_2, \ldots x'_n) = \frac{1}{2\pi\mu(n-2)Z_n} \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \int_{S_n} X_i u_i^{(s)} dS_n + \\ + \int_{S_{n-1}} (L_i u_i^{(s)} + L_i^{(s)} u_i) dS_{n-1} \Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

dove, posto

$$V = -\frac{r^{-n+4}}{2(n-4)}, \qquad \alpha = \frac{2\lambda+\mu}{2(\lambda+\mu)},$$

si ha:

$$u_s^{(s)} = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x_s^2} + r^{-n+2} \qquad u_s^{(i)} = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x_s \partial x_i}$$

$$L_s^{(s)} = 2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_s^2} - \frac{\partial r^{-n+2}}{\partial x_s}\gamma_s\right) + \mu\frac{\partial r^{-n+2}}{\partial n} \qquad (s \neq i)$$

$$L_s^{(i)} = 2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_s \partial x_i} - \frac{\partial r^{-n+2}}{\partial x_i}\gamma_s\right) + \mu\left(\frac{\partial r^{-n+2}}{\partial x_s}\gamma_i - \frac{\partial r^{-n+2}}{\partial x_i}\gamma_s\right).$$

Pel numero Z_n poi si ha:

$$Z_n = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}}{2 \cdot 4 \ldots (n-2)} & \text{quando } n \text{ è pari} \\[2ex] \dfrac{2(2\pi)^{\frac{n-3}{2}}}{3 \cdot 5 \ldots (n-2)} & \text{quando } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Queste formule sono analoghe a quella di Green generalizzata alle funzioni di n variabili (v. Beltrami, Memoria citata, § 5). È poi facile vedere che anche quelle trovate nel § 2 possono essere estese ai sistemi di n funzioni di n variabili.

Le considerazioni precedenti non sono applicabili nel caso di $n=2$; però si può seguire un procedimento identico prendendo la funzione $\lg \frac{1}{r}$ |ove

$r = [(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2]^{\frac{1}{2}}\}$ invece di r^{-n+2}, e ponendo

$$V = \frac{r^2}{4} \lg \frac{1}{r} - \frac{r^2}{4},$$

poichè si ha:

$$\Delta_2 \left(\frac{r^2}{4} \lg \frac{1}{r} - \frac{r^2}{4} \right) = \lg \frac{1}{r} \qquad \Delta_2 \lg \frac{1}{r} = 0.$$

Nelle (29) in questo caso la costante $\frac{1}{2\pi\mu(n-2)Z_n}$ deve essere sostituita da $\frac{1}{2\pi}$.

Queste formule possono essere utili nello studio delle deformazioni di un cilindro indefinito, quando non avvengono spostamenti nel senso delle direttrici, od anche di un cilindro di lunghezza finita, quando si suppongono applicate alle basi forze normali, che impediscano tali spostamenti.

Dicembre, 1888.