Sulla definizione di integrale.

(*Di* G. Peano, *a Torino.*)

Il prof. G. Ascoli nel suo articolo, avente lo stesso titolo (Annali di Matematica, a. 1895, pag. 67), rimette sul tappeto questa questione importantissima.

Egli giustamente rivendica la priorità degli integrali superiori ed inferiori, che trovansi nella sua Nota *Sul concetto di integrale definito* (Atti dell'Acc. dei Lincei, a. 1875, pag. 863). Però per esattezza conviene notare che contemporaneamente il sig. Darboux, nella sua Memoria *Sur les fonctions discontinues* (Annales de l'École Normale Supérieure, a. 1875, pag. 57) considera gli stessi enti, e dimostra teoremi simili. Anzi, se invece della data del volume si bada alla data della Memoria, il lavoro del Darboux (19 marzo 1873) e 28 gennaio 1874) precede quello dell'Ascoli (6 giugno 1875).

Io intendo qui richiamare l'attenzione del lettore su alcune mie idee sopra questo soggetto, le quali credo portino una semplificazione nella questione, e che non veggo ancora adottate da alcuno.

Il concetto, che informa alcuni miei lavori, sta nella sostituzione del limite superiore (o inferiore) d'un gruppo di numeri, al posto del limite verso cui converge una funzione. Ritengo difficile l'affermare chi pel primo abbia distinti questi due concetti simili, e che tuttora si confondono spesso da chi non usa un linguaggio preciso. Si suole ciò attribuire al Weierstrass (v. Pincherle, Giornale di Matematiche, a. 1880, pag. 242); si trovano questi limiti superiore ed inferiore nei lavori citati di Darboux e Ascoli, e si possono dire entrati nel dominio comune. La definizione contenuta nel « Formulario di Matematica », parte V, § 3, prop. 1 è:

$$1.\ u \varepsilon \mathrm{Kq} \cdot u \sim = \Lambda \cdot x \varepsilon \mathrm{q} \cdot \supset \therefore$$

$$x = \mathrm{l}' u \cdot = : u \frown (x + \mathrm{Q}) = \Lambda : y \varepsilon x - \mathrm{Q} \cdot \supset_y \cdot u \frown (y + \mathrm{Q}) \sim = \Lambda$$

che si legge: « Essendo u una classe di numeri reali, classe non nulla (poichè

« in logica matematica compaiono anche classi nulle), e se x è un numero « finito, allora dire che x è il limite superiore degli u equivale a dire che:

« 1.° non esistono numeri del sistema u maggiori di x;

« 2.° e dato ad arbitrio un numero y minore di x, esistono numeri « del sistema u maggiori di y. »

Introdotto poi il limite superiore infinito, la cui definizione (Formulario, parte V, § 3, prop. 5) non vogliamo qui riportare, si ha la proprietà fondamentale (id., prop. 6):

$$2.\ \mathrm{Hyp}\,1 \cdot \supset \cdot \mathrm{l}'\,u \,\varepsilon\, \mathrm{q} \smile \iota\infty.$$

« Ogni classe u ha sempre un limite superiore, finito o infinito. »

E non sarà inutile l'osservare che la dimostrazione di questo teorema è semplicemente una trasformazione della definizione di numero irrazionale.

Riesce più complicata la definizione del limite verso cui tende una funzione. Questa funzione può dipendere da una o più variabili indipendenti, e può anche avvenire che sia variabile il numero delle variabili indipendenti, come appunto succede nelle proposizioni di cui ci occupiamo. Il concetto comune di limite d'una funzione, limitandoci ad una variabile indipendente, e supponendo che questa tenda all'infinito, caso a cui possiamo sempre ridurci, viene espresso dalla seguente proposizione (Formulario, parte VII, § 2, prop. 1):

$$3.\ u \,\varepsilon\, \mathrm{Kq} \cdot \mathrm{l}'\,u = \infty \cdot f \,\varepsilon\, \mathrm{q f} u \cdot y \,\varepsilon\, \mathrm{q} \cdot \supset ::$$

$$y = \lim_{x,\,u,\,\infty} fx \cdot = \therefore h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \cdot \supset_h : a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \cdot f[u \frown (a + \mathrm{Q})] \supset (y - h) \quad (y + h) \cdot$$

$$\sim = {}_a\Lambda \cdot$$

« Sia u una classe di numeri, il cui limite superiore sia l'infinito. Sia f « la caratteristica d'una funzione reale definita pei numeri del gruppo u; « e sia y un numero finito. Allora dire che y è il limite verso cui tende la « funzione fx, ove x, variando nella classe u, tenda all'infinito, significa dire « che, comunque si prenda la quantità positiva h, si può sempre determinare « un numero a, in guisa che i valori assunti dalla funzione fx, ove la va- « riabile assuma nella classe u i soli valori maggiori di a, appartengano tutti « all'intervallo da $y - h$ a $y + h$. »

Si vede chiaramente che la definizione 3 è più complicata della 1. Esaminandole nella scrittura simbolica, si ha che nella 1 figura il solo concetto di classe (in simboli K); la 3 contiene inoltre il concetto di funzione o corrispondenza (in simboli f).

Inoltre non sussiste la proposizione analoga alla 2; mentre ogni classe ha un limite superiore, non ogni funzione converge verso un limite. Si potrebbe, è vero, stabilire una certa analogia modificando il concetto di limite d'una funzione, secondo le idee da me esposte nella « Rivista di Matematica » a. 1892, e sviluppate nell' « American Journal of Mathematics » a. 1895, ritornando così ai concetti di CAUCHY e di ABEL, secondo cui ogni funzione ha dei valori limiti. Ma non vogliamo dilungarci su questo punto.

In conseguenza chi definisce i limiti superiori dei gruppi di punti, e concetti analoghi, mediante i limiti verso cui tendono le funzioni, esprime un'idea semplice mediante altre più complicate; inoltre si espone ad altri inconvenienti; e credo utile l'esporne uno preso dal classico libro del JORDAN, *Cours d'Analyse,* 2.ª éd., a. 1892, pag. 19 del 1.° vol. Questi dice:

« On nomme point limite d'un ensemble tout point qui est la limite « d'une suite de points de l'ensemble. »

Detto u il gruppo, questa definizione in simboli si esprime:

$$(z \varepsilon \text{ punto limite di } u) = (f \varepsilon u f \mathrm{N} \cdot z = \lim fx \cdot \sim =_f \Lambda).$$

Ora siccome si può considerare una successione di numeri eguali, ossia una funzione può ridursi ad una costante, ne risulta che ogni punto del gruppo ne è un punto limite, poichè è il limite d'una successione di punti coincidenti con esso. In conseguenza l'insieme dei punti limiti di u non è la classe derivata di u (indicata nel Formulario con Du), ma bensì la classe u resa chiusa (nel Formulario Cu) (*). Le definizioni delle classi Du e Cu sono date nel « Formulario » parte V, § 5, prop. 1 e § 7, prop. 1.

Così visto che il concetto di limite superiore (o inferiore) d'una classe è in sè più semplice di quello di limite verso cui tende una funzione, esaminiamo quali semplificazioni apporti la sostituzione del primo al secondo concetto in alcune questioni di analisi.

Si definisce comunemente la lunghezza d'un arco di curva come il limite verso cui converge la lunghezza d'una poligonale inscritta, i cui lati decrescano indefinitamente. E questa definizione richiede si dimostri che, sotto certe

(*) Qui la parola *chiuso* corrisponde al *fermé, abgeschlossen* del G. CANTOR; e al *parfait* del JORDAN; il CANTOR al *perfect* attribuisce altro significato.

condizioni, quel limite esiste, e la dimostrazione è lunga. Inoltre si presenta un'altra difficoltà che esamineremo nel libro del JORDAN. La lunghezza della poligonale inscritta nell'arco è funzione del modo in cui si scompone l'arco, cioè a dire dei valori $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dati alla variabile indipendente, e queste variabili $t_1, \ldots, t_n$ variano anche in numero, che cresce indefinitamente. Ora l'Autore a pag. 8 definisce solamente il limite « d'une suite illimitée de valeurs $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ » cioè di una qfN; in altri termini x_n è una quantità che dipende dal numero intero positivo n; e non è definito il limite d'una quantità che dipende dal modo con cui si scompone un intervallo. Però tale lacuna si può colmare, con opportuna definizione (*).

Si eliminano ad un tempo queste difficoltà assumendo la definizione seguente: (Vedansi le mie *Applicazioni geometriche del Calcolo*, a. 1887, pag. 162.)

« Dicesi lunghezza di un arco il limite superiore delle lunghezze delle « poligonali inscritte in esso. »

Ne risulta che ogni arco ha una lunghezza finita o infinita, pel teorema 2, senza bisogno di altre dimostrazioni. Si può notare la facilità con cui si ottengono le formule per gli archi; e l'analogia, anzi coincidenza di questa definizione col postulato 2.° di Archimede (della sfera e del cilindro).

Passiamo infine alla definizione di integrale. Sia fx una funzione definita in tutto l'intervallo da a a b, avente limite superiore e inferiore finiti, cioè:

$$a,\ b\,\varepsilon\,\mathrm{q} \cdot a < b \cdot f\,\varepsilon\,\mathrm{q}\,\mathrm{f}\,a\ {}^{\sqcup}\ b \cdot \mathrm{l}'\,f(a\ {}^{\mathsf{H}}\ b),\ \mathrm{l}_1 f(a\ {}^{\mathsf{H}}\ b)\,\varepsilon\,\mathrm{q}.$$

Si considerino le somme:

$$S' = \sum_{r=0}^{r=n} (x_{r+1} - x_r)\,\mathrm{l}'\,f(x_r\ {}^{\mathsf{H}}\ x_{r+1})$$

$$S_1 = \sum (x_{r+1} - x_r)\,\mathrm{l}_1\,f(x_r\ {}^{\mathsf{H}}\ x_{r+1}),$$

ove $x_0 = a,\ x_1, \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b$ sono i punti d'una divisione dell'intervallo dato; S' è la somma dei prodotti delle ampiezze degli intervalli parziali pei limiti superiori dei valori della funzione in essi. Nella somma S_1 invece dei limiti superiori compaiono gli inferiori.

(*) D'ARCAIS, *Calcolo infinitesimale*, tom, II, pag. 3, a. 1894.

Il Darboux e l'Ascoli dimostrano amendue che sia S' che S_1, col tendere a zero degli intervalli parziali, tendono ciascuna ad un limite determinato; e che se il limite verso cui converge S' coincide col limite di S_1, allora la funzione data è integrabile.

Io trovo più semplice il presentare questo teorema sotto la forma:

« Se il limite inferiore dei valori di S' è eguale al limite superiore dei « valori di S_1, la funzione è integrabile. »

E nella mia Nota *Sull'integrabilità delle funzioni* (Atti della R. Accademia di Torino, a. 1883), diedi di questa proposizione una dimostrazione diretta. In quanto precede una funzione si disse integrabile nel senso di Riemann (Werke, pag. 226). Ma parmi si possa ottenere una semplificazione maggiore, modificando ancora la definizione di integrale; e nelle mie lezioni di Analisi infinitesimale, do le definizioni seguenti:

« Chiamo *integrale superiore* $\left(\overline{\int_a^b} fx\,dx\right)$ il limite inferiore dei valori di S'; « *integrale inferiore* il limite superiore dei valori di S_1, e lo si indica con « $\underline{\int_a^b} fx\,dx$. Se gli integrali superiore e inferiore coincidono, la funzione si « dice integrabile, e il loro valore comune dicesi $\int_a^b fx\,dx$. »

Così il limite verso cui tende una funzione è completamente sostituito, nella definizione dell'integrale, dai limiti superiori e inferiori di classi.