Ueber die Zusammensetzung ganzzahliger linearer Substitutionen von der Determinante Eins aus einer geringsten Anzahl fundamentaler Substitutionen.

(*Von* A. Krazer, *in Würzburg.*)

1.

Ein System von n linearen Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante von der Form:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \cdots + a_{1n}\, y_n\,, \\ x_2 = a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \cdots + a_{2n}\, y_n\,, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = a_{n1}\, y_1 + a_{n2}\, y_2 + \cdots + a_{nn}\, y_n\,, \end{array}\right\} \qquad (A)$$

wird eine lineare Substitution n^{ter} Ordnung genannt, wenn vermittelst desselben die in irgend welchen Ausdrücken vorkommenden Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch die n angegebenen linearen Functionen der Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ersetzt werden sollen. Eine solche Substitution (A) ist bestimmt, sobald die Werthe der Coefficienten a gegeben sind, und es möge daher gestattet sein, dieselbe durch das Symbol:

$$A = \left| \begin{array}{lll} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{array} \right|$$

zu fixiren.

Im Folgenden sollen nur solche Substitutionen betrachtet werden, bei denen die Coefficienten a ganze Zahlen sind, und für die zudem die Determinante

$\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ den Werth Eins besitzt. Mit Rücksicht darauf sollen auch von jetzt an mit dem Worte « Substitutionen » ausschliesslich solche bezeichnet werden, deren Coefficienten a den beiden genannten Bedingungen genügen. Sind aber diese Bedingungen erfüllt, so erhält man aus dem Gleichungensysteme (A) durch Auflösung das System:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{21} x_2 + \cdots + \alpha_{n1} x_n, \\ y_2 = \alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \cdots + \alpha_{n2} x_n, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n = \alpha_{1n} x_1 + \alpha_{2n} x_2 + \cdots + \alpha_{nn} x_n, \end{array}\right\} \qquad (A^{-1})$$

bei welchem allgemein $\alpha_{\mu\nu}$ die zu $a_{\mu\nu}$ gehörige Unterdeterminante ist, und es wird daher durch das Gleichungensystem (A^{-1}) ebenfalls eine Substitution in eben definirtem Sinne bestimmt, welche die zu A inverse genannt und symbolisch mit A^{-1} bezeichnet werden soll.

Bezeichnet B eine von A verschiedene Substitution, definirt durch das Gleichungensystem:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = b_{11} z_1 + b_{12} z_2 + \cdots + b_{1n} z_n, \\ y_2 = b_{21} z_1 + b_{22} z_2 + \cdots + b_{2n} z_n, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n = b_{n1} z_1 + b_{n2} z_2 + \cdots + b_{nn} z_n, \end{array}\right\} \qquad (B)$$

und ersetzt man dann in dem Gleichungensysteme (A) die Grössen y durch die auf den rechten Seiten der Gleichungen (B) stehenden linearen Functionen der Grössen z, so erhält man ein neues Gleichungensystem:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = p_{11} z_1 + p_{12} z_2 + \cdots + p_{1n} z_n, \\ x_2 = p_{21} z_1 + p_{22} z_2 + \cdots + p_{2n} z_n, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n = p_{n1} z_1 + p_{n2} z_2 + \cdots + p_{nn} z_n, \end{array}\right\} \qquad (P)$$

für welches:

$$p_{\mu\nu} = a_{\mu 1} b_{1\nu} + a_{\mu 2} b_{2\nu} + \cdots + a_{\mu n} b_{n\nu}, \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2, \dots,\ n)$$

$$\Sigma \pm p_{11} p_{22} \dots p_{nn} = (\Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}) \times (\Sigma \pm b_{11} b_{22} \dots b_{nn})$$

ist, und welches daher ebenfalls eine Substitution bestimmt. Man kann also aus zwei gegebenen Substitutionen:

$$A = \left| \begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{array} \right| \qquad B = \left| \begin{array}{llll} b_{11} & b_{12} \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots & b_{2n} \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ b_{n1} & b_{n2} \dots & b_{nn} \end{array} \right|$$

immer eine neue Substitution:

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

bilden, wenn man die Coefficienten p der letzteren mit Hülfe der Gleichungen:

$$p_{\mu\nu} = a_{\mu 1} b_{1\nu} + a_{\mu 2} b_{2\nu} + \cdots + a_{\mu n} b_{n\nu} \qquad (\mu, \ \nu = 1, \ 2, \ldots, \ n)$$

aus den Coefficienten a, b zusammensetzt. Diese Substitution P soll die aus der Substitution A und der Substitution B zusammengesetzte Substitution genannt und als solche mit

$$P = AB$$

bezeichnet werden. Dieselbe ist im Allgemeinen von der aus der Substitution B und der Substitution A zusammengesetzten Substitution $Q = BA$ verschieden, denn die Coefficienten der letzteren werden, wenn man sie mit q bezeichnet, durch die Gleichungen:

$$q_{\mu\nu} = b_{\mu 1} a_{1\nu} + b_{\mu 2} a_{2\nu} + \cdots + b_{\mu n} a_{n\nu} \qquad (\mu, \ \nu = 1, \ 2, \ldots, \ n)$$

geliefert.

Unter allen Substitutionen gibt es eine, I, welche durch Zusammensetzung mit einer beliebigen Substitution A, sei es in der Form AI oder in der Form IA, immer wieder die Substitution A erzeugt. Diese Substitution besitzt die Coefficienten:

$$i_{11} = i_{22} = \cdots = i_{nn} = 1, \qquad i_{\mu\nu} = 0, \quad (\mu \gtrless \nu)$$

und wird die identische Substitution genannt; kommt sie in Verbindung mit anderen Substitutionen vor, so kann sie als wirkungslos stets unterdrückt werden. Sie tritt immer auf, wenn man eine beliebige Substitution A mit ihrer inversen A^{-1} zusammensetzt; man hat nämlich:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Unter wiederholter Anwendung desselben Verfahrens, durch welches soeben aus zwei gegebenen Substitutionen A, B eine neue Substitution AB gebildet wurde, kann man nun auch beliebig viele Substitutionen A, B, $C, \ldots, K$ in der gegebenen Reihenfolge zu einer neuen Substitution zusammensetzen, indem man zunächst aus A und B die Substitution AB, dann aus AB und C eine neue mit ABC zu bezeichnende Substitution zusammensetzt und so fortfährt, bis man zur Substitution $ABC\ldots K$ gelangt ist. Man erkennt leicht, dass das Endresultat dasselbe bleibt, wenn man zunächst die gegebenen Substitutionen ohne Aenderung ihrer Reihenfolge in Gruppen zusammenfasst, hierauf die Substitutionen einer jeden Gruppe in angegebener Weise zu einer einzigen Substitution vereinigt und endlich die auf diese Weise an Stelle der Gruppen getretenen neuen Substitutionen in derselben Weise zusammensetzt.

Die bisherigen Betrachtungen über die Zusammensetzung von Substitutionen bleiben ungeändert, wenn die Substitutionen A, B, $C,\ldots$ theilweise oder alle einander gleich sind. Die aus gleichen Substitutionen A zusammengesetzten Substitutionen AA, $AAA,\ldots$ sollen abgekürzt mit A^2, $A^3,\ldots$ beziehlich bezeichnet werden, auch soll unter A^1 die Substitution A selbst, unter A^0 die identische Substitution I verstanden werden. Entsprechend sollen die Substitutionen $A^{-1}A^{-1}$, $A^{-1}A^{-1}A^{-1},\ldots$ mit A^{-2}, $A^{-3},\ldots$ beziehlich bezeichnet werden. Von den beiden Substitutionen A^{μ} und $A^{-\mu}$ ist dann jede die inverse der anderen, d. h. es ist $A^{\mu}A^{-\mu}=A^{-\mu}A^{\mu}=I$.

Die Möglichkeit, durch Zusammensetzung gegebener Substitutionen neue zu erhalten, gibt nun zunächst zu der Frage Anlass, ob eine endliche Anzahl von Substitutionen S_1, $S_2,\ldots$, S_ν gefunden werden kann, aus denen jede beliebige Substitution S sich zusammensetzen lässt in der Form:

$$S=S_1^{\alpha_1}S_2^{\alpha_2}\ldots S_\nu^{\alpha_\nu}S_1^{\beta_1}\ldots S_2^{\beta_2}S_\nu^{\beta_\nu}\ldots S_1^{\rho_1}S_2^{\rho_2}\ldots S_\nu^{\rho_\nu},$$

wobei die α, $\beta,\ldots$, ρ positive ganze Zahlen, die Null nicht ausgeschlossen, bezeichnen. Ist diese Frage zu bejahen, so schliesst sich daran naturgemäss die weitere an, welches die geringste Anzahl ν von Substitutionen ist, die als ergeugende die Rolle der Substitutionen S_1, $S_2,\ldots$, S_ν übernehmen können.

Die erste Frage hat Herr Kronecker in seiner Arbeit « Ueber bilineare Formen » (Monatsber. d. kgl. preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1866, pag. 597) beantwortet, indem er dort n, nur die Zahlen 0, $+1$, -1 als Elemente enthaltende und von ihm als elementare bezeichnete Substitutionen aufgestellt hat, aus denen jede beliebige Substitution in oben angegebener Weise zusammengesetzt werden kann. Die betreffende Untersuchung soll unter Anwendung der im Vorigen eingeführten Bezeichnung im folgenden Artikel zunächst kurz reproducirt werden.

2.

Herr KRONECKER beginnt in seiner Untersuchung damit, dass er zwei Processe angibt, durch welche man aus einer gegebenen Substitution:

$$S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} \cdots & s_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ s_{n1} & s_{n2} \cdots & s_{nn} \end{vmatrix}$$

eine neue herleiten kann.

Der erste dieser Processe besteht darin, dass man die Glieder irgend einer, etwa der σ^{ten} Verticalreihe der Substitution S durch neue ersetzt, welche aus den ursprünglichen durch Subtraction der entsprechenden Glieder irgend einer anderen, etwa der ρ^{ten} Verticalreihe hervorgehen, sodass also allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, n$, $s_{\mu\sigma}$ durch $s_{\mu\sigma} - s_{\mu\rho}$ ersetzt wird. Die auf diese Weise aus S hervorgehende neue Substitution entsteht aber auch, wenn man die Substitution S und die Substitution

$$A_{\rho\sigma}^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & (\rho) & (\sigma) & \end{array} & \\ \begin{vmatrix} 1 \ldots & 0 \ldots & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 \ldots & 1 \ldots & -1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 \ldots & 0 \ldots & 1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 \ldots & 0 \ldots & 0 \ldots & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (\rho) \\ \\ (\sigma) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

bei der $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$, $a_{\rho\sigma} = -1$ ist, während alle übrigen Coefficienten a den Werth Null besitzen, zu der Substitution $SA_{\rho\sigma}^{-1}$ zusammensetzt.

Der zweite Process dagegen besteht darin, dass man die Glieder irgend einer, etwa der ρ^{ten} Verticalreihe der Substitution S mit den Gliedern irgend einer anderen, etwa der σ^{ten} Verticalreihe beziehlich vertauscht, nachdem man zuvor diese letzteren sämmtlich mit -1 multiplicirt hat, sodass also allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, n$, $s_{\mu\rho}$ durch $-s_{\mu\sigma}$, $s_{\mu\sigma}$ dagegen durch $s_{\mu\rho}$ ersetzt wird. Die auf diese Weise aus S hervorgehende neue Substitution entsteht aber auch, wenn man die Substitution S und die Substitution

$$B_{\rho\sigma}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & (\rho) & (\sigma) & \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 1\dots & 0\dots & 0\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\dots & 0\dots & 1\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\dots & -1\dots & 0\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\dots & 0\dots & 0\dots & 1 \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ (\rho) \\ \\ (\sigma) \\ \\ \\ \end{array}$$

bei der $b_{11} = \cdots = b_{\rho-1\,\rho-1} = b_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = b_{\sigma-1\,\sigma-1} = b_{\sigma+1\,\sigma+1} = \cdots = b_{nn} = 1$, $b_{\rho\sigma} = 1$, $b_{\sigma\rho} = -1$ ist, während alle übrigen Coefficienten b den Werth Null besitzen, zu der Substitution $SB_{\rho\sigma}^{-1}$ zusammensetzt.

Ieder der beiden genannten Processe umfasst, entsprechend den $n(n-1)$ verschiedenen Zahlenpaaren, die an Stelle von ρ, σ treten können, $n(n-1)$ verschiedene specielle Processe. Mit Hülfe dieser $2n(n-1)$ Processe kann man nun, wie Herr Kronecker gezeigt hat, aus jeder gegebenen Substitution S eine endliche Reihe von Substitutionen ableiten, die dadurch charakterisirt ist, dass allgemein die μ^{te} Substitution in der Reihe aus der $\mu-1^{\text{ten}}$ durch einen der genannten Processe hervorgeht, und dass die letzte Substitution in der Reihe die identische I ist. Dieses Resultat lässt sich aber mit Rücksicht auf das vorher Bemerkte auch so aussprechen, dass man aus einer Substitution S durch Zusammensetzung derselben mit einer endlichen Anzahl m von Substitutionen $S_1^{-1}, S_2^{-1}, \dots, S_{m-1}^{-1}, S_m^{-1}$, von denen eine jede unter den $2n(n-1)$ Substitutionen $A_{\rho\sigma}^{-1}$, $B_{\rho\sigma}^{-1}$ enthalten ist, die identische Substitution I erzeugen kann in der Form:

$$SS_1^{-1}S_2^{-1}\dots S_{m-1}^{-1}S_m^{-1} = I.$$

Beachtet man nun, dass aus dieser Gleichung unmittelbar die Gleichung:

$$SS_1^{-1}S_2^{-1}\dots S_{m-1}^{-1}S_m^{-1}S_mS_{m-1}\dots S_2S_1 = IS_mS_{m-1}\dots S_2S_1$$

hervorgeht, und dass diese letztere unter Anwendung der Relationen $S_m^{-1}S_m = I$, $S_{m-1}^{-1}S_{m-1} = I, \dots, S_2^{-1}S_2 = I$, $S_1^{-1}S_1 = I$ mit jedesmaliger Unterdrückung des aufgetretenen I in die Gleichung:

$$S = S_mS_{m-1}\dots S_2S_1$$

übergeführt werden kann, so erhält man zunächst das Resultat, dass man jede beliebige Substitution S aus einer endlichen Anzahl von Substitutionen zusammensetzen kann, die in den Formen:

$$A_{\rho\sigma} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & (\rho) & & (\sigma) & & & \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccccccc} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ (\rho) \\ \\ (\sigma) \\ \\ \\ \end{array} \qquad B_{\rho\sigma} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & (\rho) & & (\sigma) & & & \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccccccc} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & -1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ (\rho) \\ \\ (\sigma) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$(\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, n;\ \rho \gtrless \sigma)$$

— wobei in der ersten Form $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 1$, $a_{\rho\sigma} = 1$, in der zweiten Form

$$a_{11} = \cdots = a_{\rho-1\,\rho-1} = a_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = a_{\sigma-1\,\sigma-1} = a_{\sigma+1\,\sigma+1} = \cdots = a_{nn} = 1, \quad a_{\rho\sigma} = -1,$$

$a_{\sigma\rho} = 1$ ist, während die übrigen, nicht genannten Elemente der beiden Formen den Werth Null besitzen — enthalten sind.

Die auf diese Weise gewonnenen $2n(n-1)$ erzeugenden Substitutionen können ohne Mühe auf eine geringere Anzahl reducirt werden. Es lassen sich nämlich auf mehrere Weisen n unter ihnen auswählen, aus denen die übrigen zusammengesetzt werden können. Wie eine einfache Ueberlegung zeigt, bestehen zwischen den $2n(n-1)$ Substitutionen $A_{\rho\sigma}$, $B_{\rho\sigma}$ die Relationen:

$$A_{\rho\sigma} = B_{1\rho} B_{2\sigma} A_{12} B_{\sigma 2} B_{\rho 1}, \tag{1}$$

$$B_{\rho\sigma} = B^3_{\sigma\rho}, \tag{2}$$

$$B_{\rho\sigma} = B^3_{\rho\,\rho+1} B^3_{\rho+1\,\rho+2} \ldots B^3_{\sigma-2\,\sigma-1} B_{\sigma-1\,\sigma} B_{\sigma-2\,\sigma-1} \ldots B_{\rho+1\,\rho+2} B_{\rho\,\rho+1}, \qquad (\rho < \sigma) \tag{3}$$

die übrigens auch leicht durch direkte Zusammensetzung der auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehenden Substitutionen verificirt werden können. Mit Hülfe der Relation (1) kann man die sämmtlichen $n(n-1)$ Substitutionen A aus einer einzigen unter ihnen, A_{12}, — wofür unter entsprechender Abänderung der Relation auch jede andere genommen werden kann — und den Substitutionen B zusammensetzen. Mit Hülfe der Relation (2) kann man dann jede der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Substitutionen B, bei denen der erste Index grösser ist als der zweite, durch je eine der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Substitutionen B ausdrücken, bei denen der erste Index kleiner ist als der zweite, und endlich lassen sich diese letzten $\frac{1}{2}n(n-1)$ Substitutionen B mit Hülfe der Relation (3) aus den $n-1$ Substitutionen B_{12}, B_{23}, $B_{34}, \ldots$, $B_{n-1\,n}$ zusammensetzen.

Man ist auf diese Weise zu dem von Herrn KRONECKER in etwas anderer Form ausgesprochenen Resultate gelangt, dass sich jede beliebige Substitution S aus den n Substitutionen:

$$A_{12},\quad B_{12},\quad B_{23},\quad B_{34},\ldots,\quad B_{n-1\,n}$$

als erzeugenden zusammensetzen lässt; auch erkennt man aus dem Gange der vorigen Entwicklung unmittelbar, dass sich die $n-1$ Substitutionen B_{12}, B_{23}, $B_{34},\ldots$, $B_{n-1\,n}$ auf mehrere Weisen durch $n-1$ andere der Substitutionen B ersetzen lassen.

3.

Die weitere Frage ist jetzt die, ob nicht ein System von weniger als n Substitutionen gefunden werden kann, aus denen als erzeugenden sich jede beliebige Substitution S zusammensetzen lässt. Diese Frage muss bejaht werden; ich will nämlich jetzt unter Benutzung des am Schlusse des vorigen Artikels angeführten KRONECKER'schen Endresultates zeigen, dass alle Substitutionen S aus drei bestimmten Substitutionen als erzeugenden zusammengesetzt werden können. Diese drei im Folgenden aufgestellten Substitutionen lassen sich natürlich, wie aus dem Gange der Untersuchung erhellen wird, auf mehrere Weisen durch drei andere ersetzen.

Um das erwähnte System von drei erzeugenden Substitutionen zu erhalten, bilde ich zunächst aus den $n-1$ Substitutionen B_{12}, $B_{23},\ldots$, $B_{n-1\,n}$ durch Zusammensetzung die Substitution:

$$C = B_{12}B_{23}\ldots B_{n-1\,n};$$

es ist dann:

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\ldots & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

wo ε die Grösse $(-1)^{n-1}$ vertritt.

Setzt man diese Substitution C, bei der $c_{21}=c_{32}=\cdots=c_{n\,n-1}=1$, $c_{1n}=\varepsilon=(-1)^{n-1}$ ist, während alle übrigen Coefficienten c den Werth Null besitzen, mit irgend einer Substitution S zusammen zur Substitution SC, so ist für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ die ν^{te} Verticalreihe dieser neuen Substitution mit der $\nu+1^{\text{ten}}$ Verticalreihe von S identisch, während die Glieder der n^{ten} Verticalreihe von SC sich von den entsprechenden Gliedern der ersten Verticalreihe von S nur durch den Factor ε unterscheiden; entsprechend wird daher die aus S und $C^{\rho-1}$, wobei ρ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ bezeichnet, zusammengesetzte Substitution $SC^{\rho-1}$ zur Substitution S in der Beziehung stehen, dass ihre $1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, 3^{\text{te}}, \ldots, n-\rho+1^{\text{te}}$ Verticalreihe beziehlich identisch ist mit der $\rho^{\text{ten}}, \rho+1^{\text{ten}}, \rho+2^{\text{ten}}, \ldots, n^{ten}$ Verticalreihe von S, während die Glieder der $n-\rho+2^{\text{ten}}, n-\rho+3^{\text{ten}}, \ldots, n^{ten}$ Verticalreihe von $SC^{\rho-1}$ sich von den entsprechenden Gliedern der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots, \rho-1^{\text{ten}}$ Verticalreihe von S beziehlich nur durch den Factor ε unterscheiden. Endlich wird dann die aus $SC^{\rho-1}$ und B_{12} zusammengesetzte Substitution $SC^{\rho-1}B_{12}$ zur Substitution S in der Beziehung stehen, dass ihre 1^{te} Verticalreihe mit der $\rho+1^{\text{ten}}$ Verticalreihe von S identisch ist, die Glieder ihrer zweiten Verticalreihe sich von den entsprechenden Gliedern der ρ^{ten} Verticalreihe von S durch den Factor -1 unterscheiden, während, ebenso wie bei der Substitution $SC^{\rho-1}$, ihre $3^{\text{te}}, \ldots, n-\rho+1^{\text{te}}$ Verticalreihe mit der $\rho+2^{\text{ten}}, \ldots, n^{ten}$ Verticalreihe von S beziehlich identisch ist, die Glieder der $n-\rho+2^{\text{ten}}, n-\rho+3^{\text{ten}}, \ldots, n^{ten}$ Verticalreihe dagegen sich von den entsprechenden Gliedern der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots, \rho-1^{\text{ten}}$ Verticalreihe von S beziehlich nur durch den Factor ε unterscheiden. Die so entstandene Substitution $SC^{\rho-1}B_{12}$ kann aber, wie man leicht erkennt, auch dadurch erhalten werden, dass man zunächst aus der Substitution S und der Substitution $B_{\rho\,\rho+1}$ die Substitution $SB_{\rho\,\rho+1}$ und hierauf aus dieser und der Substitution $C^{\rho-1}$ die Substitution $SB_{\rho\,\rho+1}C^{\rho-1}$ zusammensetzt, d. h. es besteht die Gleichung:

$$SB_{\rho\,\rho+1}C^{\rho-1} = SC^{\rho-1}B_{12}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich nun successive die Gleichungen:

$$B_{\rho\,\rho+1}C^{\rho-1} = C^{\rho-1}B_{12}, \qquad B_{\rho\,\rho+1}C^{2n} = C^{\rho-1}B_{12}C^{2n-\rho+1},$$

und man erhält schliesslich, indem man berücksichtigt, dass $C^{2n} = I$ ist, die Relation:

$$B_{\rho\,\rho+1} = C^{\rho-1}B_{12}C^{2n-\rho+1}, \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Mit Hülfe dieser Relation kann man nun in dem Systeme der n Substitutionen:

$$A_{12}, \quad B_{12}, \quad B_{23}, \quad B_{34}, \ldots, \quad B_{n-1\,n},$$

aus denen als erzeugenden, wie im vorigen Artikel auseinandergesetzt wurde, jede beliebige Substitution S sich zusammensetzen lässt, die $n-2$ letzten Substitutionen $B_{23}, B_{34}, \ldots, B_{n-1\,n}$ aus den beiden Substitutionen B_{12} und C zusammensetzen, und man erhält so schliesslich, wenn man noch beachtet, dass für $n=2$ die Substitution C mit der Substitution B_{12} identisch wird, das Endresultat:

Jede ganzzahlige lineare Substitution n^{ter} Ordnung von der Determinante Eins lässt sich im Falle $n>2$ immer aus den drei fundamentalen Substitutionen:

$$A_{12}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & 1 \end{vmatrix} \qquad B_{12}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0\ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & 1 \end{vmatrix} \qquad C=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\ldots & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

wo $\varepsilon=(-1)^{n-1}$ ist, als erzeugenden zusammensetzen; im Falle $n=2$ aus den zwei Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4.

Unter den ganzzahligen linearen Substitutionen von der Determinante Eins nehmen diejenigen eine ausgezeichnete Stellung ein, welche bei der linearen Transformation der allgemeinen Thetafunctionen von p Variablen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, der dadurch darstellbaren sogenannten Abel'schen Functionen auftreten. Alle diese Substitutionen sind in der Form:

$$S=\left|\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11}\ldots & & \alpha_{1p} & \beta_{11}\ldots & & \beta_{1p} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \alpha_{p1}\ldots & & \alpha_{pp} & \beta_{p1}\ldots & & \beta_{pp} \\ \hline \gamma_{11}\ldots & & \gamma_{1p} & \delta_{11}\ldots & & \delta_{1p} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \gamma_{p1}\ldots & & \gamma_{pp} & \delta_{p1}\ldots & & \delta_{pp} \end{array}\right|$$

enthalten, bei der die $4p^2$ Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als ganze Zahlen den

$p(2p-1)$ Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}(\alpha_{\nu\varepsilon}\gamma_{\nu\varepsilon'}-\alpha_{\nu\varepsilon'}\gamma_{\nu\varepsilon})=0,\qquad \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}(\beta_{\nu\varepsilon}\delta_{\nu\varepsilon'}-\beta_{\nu\varepsilon'}\delta_{\nu\varepsilon})=0,\\ \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}(\alpha_{\nu\varepsilon}\delta_{\nu\varepsilon'}-\beta_{\nu\varepsilon'}\gamma_{\nu\varepsilon})=\begin{array}{l}0,\ \text{wenn}\ \varepsilon'\gtrless\varepsilon,\\ 1,\ \text{wenn}\ \varepsilon'=\varepsilon,\end{array}\end{array}\right\}\quad (\varepsilon,\varepsilon'=1,2,\dots,p)$$

oder den damit äquivalenten:

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu'\varepsilon}-\alpha_{\nu'\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon})=0,\qquad \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\gamma_{\nu\varepsilon}\delta_{\nu'\varepsilon}-\gamma_{\nu'\varepsilon}\delta_{\nu\varepsilon})=0,\\ \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\nu\varepsilon}\delta_{\nu'\varepsilon}-\beta_{\nu\varepsilon}\gamma_{\nu'\varepsilon})=\begin{array}{l}0,\ \text{wenn}\ \nu'\gtrless\nu,\\ 1,\ \text{wenn}\ \nu'=\nu,\end{array}\end{array}\right\}\quad (\nu,\nu'=1,2,\dots,p)$$

unterworfen sind, und bei der zugleich in Folge dieser Beziehungen die Determinante der Coefficienten α, β, γ, δ den Werth Eins besitzt. Umgekehrt entspricht aber auch jeder ganzzahligen linearen Substitution, deren Coefficienten den angegebenen Bedingungen genügen, eine lineare Transformation der Thetafunctionen. Eine solche Substitution S soll nun in der Folge zur Unterscheidung von den bisher betrachteten allgemeineren Substitutionen eine kanonische genannt und der Raumersparniss wegen auch durch das einfachere Symbol:

$$S=\left|\begin{array}{c|c}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ \hline \Gamma & \Delta\end{array}\right|$$

bezeichnet werden.

Setzt man aus irgend zwei kanonischen Substitutionen S_1, S_2 in der in Art. 1 angegebenen Weise die Substitution S_1S_2 zusammen, so zeigt sich, dass dieselbe ebenfalls eine kanonische ist; daraus folgt dann unmittelbar, dass immer auch die Substitution $S_1S_2\dots S_m$ eine kanonische ist, wenn die einzelnen Substitutionen $S_1, S_2,\dots, S_m$ kanonische sind. Mit Rücksicht darauf kann man ebenso, wie es früher bei den allgemeineren Substitutionen geschehen ist, hier für die kanonischen Substitutionen die Frage aufwerfen, ob eine endliche Anzahl ν kanonischer Substitutionen gefunden werden kann, aus denen als erzeugenden jede beliebige kanonische Substitution S sich zusammensetzen lässt in der Form:

$$S=S_1^{\alpha_1}S_2^{\alpha_2}\dots S_\nu^{\alpha_\nu}S_1^{\beta_1}S_2^{\beta_2}\dots S_\nu^{\beta_\nu}\dots S_1^{\rho_1}S_2^{\rho_2}\dots S_\nu^{\rho_\nu},$$

wobei die α, β,..., ρ positive ganze Zahlen, die Null nicht ausgeschlossen, bezeichnen, und auch hier schliesst sich, wenn diese Frage zu bejahen ist, daran die weitere an, welches die geringste Anzahl ν von kanonischen Substitutionen ist, die als erzeugende die Rolle der Substitutionen S_1, S_2,..., S_ν übernehmen können.

Die erste Frage ist schon von Herrn Kronecker entschieden worden, indem er in seiner in Art. 1 erwähnten Abhandlung gezeigt hat, dass sich alle kanonischen Substitutionen aus $p+2$ bestimmten in oben angegebener Weise zusammensetzen lassen. Die betreffende Untersuchung soll im folgenden Artikel kurz reproducirt werden.

5.

Es gibt, wie Herr Kronecker gezeigt hat, vier Processe, durch welche man aus einer kanonischen Substitution:

$$S=\left|\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1p} & \beta_{11} & \dots & \beta_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pp} & \beta_{p1} & \dots & \beta_{pp} \\ \hline \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1p} & \delta_{11} & \dots & \delta_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{p1} & \dots & \gamma_{pp} & \delta_{p} & \dots & \delta_{pp} \end{array}\right|$$

eine andere herleiten kann. Bezeichnet man mit ρ, σ irgend zwei verschiedene der Zahlen $1, 2, \dots, p$, so kann man diese Processe in folgender Weise charakterisiren.

Der erste Process besteht darin, dass man die Glieder der $p+\rho^{\text{ten}}$ Verticalreihe der Substitution S durch neue ersetzt, welche aus den ursprünglichen durch Subtraction der entsprechenden Glieder der ρ^{ten} Verticalreihe hervorgehen, sodass allgemein, d. h. für $\mu=1, 2, \dots, p$, $\beta_{\mu\rho}$ durch $\beta_{\mu\rho}-\alpha_{\mu\rho}$, $\delta_{\mu\rho}$ durch $\delta_{\mu\rho}-\gamma_{\mu\rho}$ ersetzt wird. Die auf diese Weise aus S hervorgehende neue Substitution entsteht aber auch, wenn man die Substitution S und die Substitution

$$A_\rho^{-1}=\left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array}\right|,$$

bei der $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{pp} = 1$, $\beta_{\rho\rho} = -1$, $\delta_{11} = \cdots = \delta_{pp} = 1$ ist, während alle übrigen Coefficienten α, β, γ, δ den Werth Null besitzen, zur Substitution SA_{ρ}^{-1} zusammensetzt.

Der zweite Process besteht darin, dass man die Glieder der ρ^{ten} Verticalreihe der Substitution S mit den Gliedern der $p+\rho^{\text{ten}}$ Verticalreihe beziehlich vertauscht, nachdem man zuvor diese letzteren sämmtlich mit -1 multiplicirt hat, sodass also allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, p$, $\alpha_{\mu\rho}$ durch $-\beta_{\mu\rho}$, $\gamma_{\mu\rho}$ durch $-\delta_{\mu\rho}$, dagegen $\beta_{\mu\rho}$ durch $\alpha_{\mu\rho}$, $\delta_{\mu\rho}$ durch $\gamma_{\mu\rho}$ ersetzt wird. Die auf diese Weise aus S hervorgehende neue Substitution entsteht aber auch, wenn man die Substitution S und die Substitution

$$B_{\rho}^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array}\right|,$$

bei der $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{\rho-1\,\rho-1} = \alpha_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = \alpha_{pp} = 1$, $\beta_{\rho\rho} = 1$, $\gamma_{\rho\rho} = -1$, $\delta_{11} = \cdots = \delta_{\rho-1\,\rho-1} = \delta_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = \delta_{pp} = 1$ ist, während alle übrigen Coefficienten α, β, γ, δ den Werth Null besitzen, zur Substitution SB_{ρ}^{-1} zusammensetzt.

Der dritte Process besteht darin, dass man die Glieder der $p+\rho^{\text{ten}}$ Verticalreihe von S durch neue ersetzt, welche aus den ursprünglichen durch Subtraction der entsprechenden Glieder der σ^{ten} Verticalreihe hervorgehen, und gleichzeitig die Glieder der $p+\sigma^{\text{ten}}$ Verticalreihe durch neue ersetzt, welche aus den ursprünglichen durch Subtraction der entsprechenden Glieder der ρ^{ten} Verticalreihe hervorgehen, sodass allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, p$, $\beta_{\mu\rho}$ durch $\beta_{\mu\rho} - \alpha_{\mu\sigma}$, $\delta_{\mu\rho}$ durch $\delta_{\mu\rho} - \gamma_{\mu\sigma}$, und gleichzeitig $\beta_{\mu\sigma}$ durch $\beta_{\mu\sigma} - \alpha_{\mu\rho}$, $\delta_{\mu\sigma}$ durch $\delta_{\mu\sigma} - \gamma_{\mu\rho}$ ersetzt wird. Die auf diese Weise aus S hervorgehende neue Substitution entsteht aber auch, wenn man die Substitution S und die Substitution

$$C_{\rho\sigma}^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array}\right|,$$

bei der $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{pp} = 1$, $\beta_{\rho\sigma} = \beta_{\sigma\rho} = -1$, $\delta_{11} = \cdots = \delta_{pp} = 1$ ist, während alle übrigen Grössen α, β, γ, δ den Werth Null besitzen, zur Substitution $SC_{\rho\sigma}^{-1}$ zusammensetzt.

Der vierte Process endlich besteht darin, dass man die Glieder der ρ^{ten} Verticalreihe der Substitution S mit den Gliedern der σ^{ten}, und gleichzeitig die Glieder der $p+\rho^{\text{ten}}$ Verticalreihe mit den Gliedern der $p+\sigma^{\text{ten}}$ beziehlich vertauscht, sodass also allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \dots, p$, $\alpha_{\mu\rho}$ mit $\alpha_{\mu\sigma}$, $\gamma_{\mu\rho}$ mit $\gamma_{\mu\sigma}$ und gleichzeitig $\beta_{\mu\rho}$ mit $\beta_{\mu\sigma}$, $\delta_{\mu\rho}$ mit $\delta_{\mu\sigma}$ den Platz wechselt. Die auf diese Weise aus S hervorgehende neue Substitution entsteht aber auch, wenn man die Substitution S und die Substitution

$$D_{\rho\sigma}^{-1} = \left| \begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array} \right|,$$

bei der $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{\rho-1\,\rho-1} = \alpha_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = \alpha_{\sigma-1\,\sigma-1} = \alpha_{\sigma+1\,\sigma+1} = \cdots = \alpha_{pp} = 1$, $\alpha_{\rho\sigma} = \alpha_{\sigma\rho} = 1$, $\delta_{11} = \cdots = \delta_{\rho-1\,\rho-1} = \delta_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = \delta_{\sigma-1\,\sigma-1} = \delta_{\sigma+1\,\sigma+1} = \cdots = \delta_{pp} = 1$, $\delta_{\rho\sigma} = \delta_{\sigma\rho} = 1$ ist, während alle übrigen Grössen α, β, γ, δ den Werth Null besitzen, zur Substitution $SD_{\rho\sigma}^{-1}$ zusammensetzt.

Jeder der beiden ersten Processe umfasst p, den Werthen $\rho = 1, 2, \dots, p$ entsprechende specielle Processe; jeder der beiden letzten Processe dagegen umfasst, da für ρ, σ jede aus den Zahlen $1, 2, \dots, p$ als Elementen gebildete Combination zur 2ten Classe ohne Wiederholung treten kann, $\frac{1}{2}p(p-1)$ verschiedene specielle Processe. Mit Hülfe dieser sämmtlichen $p(p+1)$ Processe kann man nun, wie Herr Kronecker gezeigt hat, aus jeder gegebenen kanonischen Substitution S eine endliche Reihe kanonischer Substitutionen ableiten, die dadurch charakterisirt ist, dass allgemein die μ^{te} Substitution in der Reihe aus der $\mu-1^{\text{ten}}$ durch einen der genannten Processe hervorgeht, und dass die letzte Substitution in der Reihe die ebenfalls zu den kanonischen Substitutionen gehörige identische Substitution I ist. Daraus folgt aber durch Schlüsse, welche den in Art. 2 an entsprechender Stelle gemachten analog sind, dass man jede kanonische Substitution zusammensetzen kann aus einer endlichen Anzahl in den Formen:

$$A_\rho = \left| \begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array} \right|, \quad B_\rho = \left| \begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array} \right|, \quad C_{\rho\sigma} = \left| \begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array} \right|, \quad D_{\rho\sigma} = \left| \begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array} \right|,$$
$$(\rho = 1, 2, \dots, p); \qquad (\rho, \sigma = 1, 2, \dots, p;\ \rho < \sigma)$$

enthaltener Substitutionen, welche Formen dadurch charakterisirt sind, dass:

1) bei A_ρ: $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{pp} = 1, \quad \beta_{\rho\rho} = 1, \quad \delta_{11} = \cdots = \delta_{pp} = 1$,

2) bei B_ρ: $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{\rho-1\,\rho-1} = \alpha_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = \alpha_{pp} = 1, \quad \beta_{\rho\rho} = -1, \quad \gamma_{\rho\rho} = 1$,
$\delta_{11} = \cdots = \delta_{\rho-1\,\rho-1} = \delta_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = \delta_{pp} = 1$;

3) bei $C_{\rho\sigma}$: $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{pp} = 1, \quad \beta_{\rho\sigma} = \beta_{\sigma\rho} = 1, \quad \delta_{11} = \cdots = \delta_{pp} = 1$:

4) bei $D_{\rho\sigma}$: $\alpha_{11}=\cdots=\alpha_{\rho-1\,\rho-1}=\alpha_{\rho+1\,\rho+1}=\cdots=\alpha_{\sigma-1\,\sigma-1}=\alpha_{\sigma+1\,\sigma+1}=\cdots=\alpha_{pp}=1$,

$$\delta_{11}=\cdots=\delta_{\rho-1\,\rho-1}=\delta_{\rho+1\,\rho+1}=\cdots=\delta_{\sigma-1\,\sigma-1}=\delta_{\sigma+1\,\sigma+1}=\cdots=\delta_{pp}=1,$$

$$\alpha_{\rho\sigma}=\alpha_{\sigma\rho}=1, \qquad \delta_{\rho\sigma}=\delta_{\sigma\rho}=1$$

ist, während bei jeder der Formen alle übrigen, nicht genannten Elemente α, β, γ, δ den Werth Null besitzen.

Die auf diese Weise gewonnenen $p(p+1)$ erzeugenden Substitutionen können ohne Mühe auf eine geringere Anzahl reducirt werden. Es lassen sich nämlich auf mehrere Weisen $p+2$ unter ihnen auswählen, aus denen die übrigen zusammengesetzt werden können. Wie eine einfache Ueberlegung zeigt, bestehen zwischen den $p(p+1)$ Substitutionen A_ρ, B_ρ, $C_{\rho\sigma}$, $D_{\rho\sigma}$ die Relationen:

$$A_\rho=D_{1\rho}A_1D_{1\rho}, \tag{1}$$

$$B_\rho=D_{1\rho}B_1D_{1\rho}, \tag{2}$$

$$C_{\rho\sigma}=D_{1\rho}D_{2\sigma}C_{12}D_{2\sigma}D_{1\rho}, \tag{3}$$

$$D_{\rho\sigma}=D_{\rho\,\rho+1}D_{\rho+1\,\rho+2}\cdots D_{\sigma-2\,\sigma-1}D_{\sigma-1\,\sigma}D_{\sigma-2\,\sigma-1}\cdots D_{\rho+1\,\rho+2}D_{\rho\,\rho+1}, \quad (\rho<\sigma) \tag{4}$$

die übrigens auch leicht durch direkte Zusammensetzung der auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehenden Substitutionen verificirt werden können. Mit Hülfe der Relation (1) kann man die sämmtlichen p Substitutionen A, mit Hülfe der Relation (2) die p Substitutionen B aus je einer von ihnen, A_1 beziehlich B_1, — wofür jedesmal unter entsprechender Abänderung der Relationen auch jede andere genommen werden kann — und den Substitutionen D zusammensetzen. Mit Hülfe der Relation (3) kann man ferner die $\frac{1}{2}p(p-1)$ Substitutionen C aus einer einzigen unter ihnen, C_{12}, — wofür auch wieder unter entsprechender Abänderung der Relation jede andere genommen werden kann — und den Substitutionen D zusammensetzen. Endlich lassen sich die $\frac{1}{2}p(p-1)$ Substitutionen D mit Hülfe der Relation (4) aus den $p-1$ Substitutionen D_{12}, $D_{23},\ldots$, $D_{p-1\,p}$ zusammensetzen.

Man ist auf diese Weise zu dem von Herrn Kronecker in etwas anderer Form ausgesprochenen Resultate gelangt, dass sich jede beliebige kanonische Substitution S aus den $p+2$ kanonischen Substitutionen:

$$A_1, \quad B_1, \quad C_{12}, \quad D_{12}, \quad D_{23},\ldots, \quad D_{p-1\,p}$$

als erzeugenden zusammensetzen lässt; auch erkennt man aus dem Gange der vorigen Entwicklung unmittelbar, dass sich die $p-1$ Substitutionen D_{12}, $D_{23},\ldots$, $D_{p-1\,p}$ auf mehrere Weisen durch $p-1$ andere Substitutionen D ersetzen lassen.

6.

Unter Benutzung des soeben angeführten KRONECKER'schen Endresultates will ich jetzt in Beantwortung der zweiten früher gestellten Frage zeigen, dass sich alle kanonischen Substitutionen S aus nur fünf unter ihnen als erzeugenden zusammensetzen lassen, welche fünf natürlich auf mehrere Weisen gewählt werden können.

Zu dem Ende bilde ich aus den $p-1$ Substitutionen $D_{12}, D_{23}, \ldots, D_{p-1\,p}$ durch Zusammensetzung die Substitution:

$$E = D_{12} D_{23} \ldots D_{p-1\,p};$$

es ist dann die Substitution

$$E = \left| \begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array} \right|,$$

die am Ende dieses Artikels sich ausgeführt findet, dadurch charakterisirt, dass bei ihr $\alpha_{21} = \alpha_{32} = \cdots = \alpha_{p\,p-1} = \alpha_{1p} = 1$, $\delta_{21} = \delta_{32} = \cdots = \delta_{p\,p-1} = \delta_{1p} = 1$ ist, während alle übrigen Elemente α, β, γ, δ den Werth Null besitzen. Durch dieselben Schlüsse, welche in Art. 3 an entsprechender Stelle angewandt wurden, zeigt man nun leicht, dass für jede beliebige Substitution S stets die Gleichung:

$$S D_{\rho\,\rho+1} E^{\rho-1} = S E^{\rho-1} D_{12}$$

besteht, wo ρ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ bezeichnet. Aus dieser Gleichung ergeben sich aber successive die weiteren:

$$D_{\rho\,\rho+1} E^{\rho-1} = E^{\rho-1} D_{12}, \qquad D_{\rho\,\rho+1} E^{p} = E^{\rho-1} D_{12} E^{p-\rho+1},$$

und man erhält schliesslich, wenn man berücksichtigt, dass $E^p = I$ ist, die Relation:

$$D_{\rho\,\rho+1} = E^{\rho-1} D_{12} E^{p-\rho+1}, \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man nun in dem Systeme der $p+2$ Substitutionen:

$$A_1, \quad B_1, \quad C_{12}, \quad D_{12}, \quad D_{23}, \ldots, \quad D_{p-1\,p},$$

aus denen als erzeugenden, wie im vorigen Artikel auseinandergesetzt wurde, jede beliebige kanonische Substitution sich zusammensetzen lässt, die $p-2$

letzten Substitutionen $D_{23}, \ldots, D_{p-1\,p}$ aus den beiden Substitutionen D_{12} und E zusammensetzen, und man erhält so schliesslich, wenn man noch beachtet, dass für $p=2$ die Substitution E mit der Substitution D_{12} identisch wird, für $p=1$ dagegen die Substitutionen C_{12}, D_{12}, E in Wegfall kommen, das Endresultat:

Jede kanonische Substitution der $2p^{ten}$ *Ordnung lässt sich für* $p>2$ *aus den fünf fundamentalen kanonischen Substitutionen:*

$$A_1 = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0\ldots & 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 1\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ \hline 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 1 \end{array}\right| \qquad B_1 = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0\ldots & 0 & -1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 1\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ \hline 1 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 1 \end{array}\right|$$

$$C_{12} = \left|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots & 0 & 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 1 \end{array}\right| \qquad D_{12} = \left|\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 1 \end{array}\right|$$

$$E = \left|\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 \end{array}\right|$$

als erzeugenden zusammensetzen, während im Falle $p=2$ *die vier Substitutionen:*

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

im Falle $p=1$ *endlich die zwei Substitutionen:*

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right|$$

zur Erzeugung jeder beliebigen kanonischen Substitution genügen.

Dasselbe Resultat lässt sich in anderer Fassung auch so aussprechen:

Die sämmtlichen linearen Transformationen der allgemeinen Thetafunctionen mit p *Variablen lassen sich für* $p>2$ *aus fünf, für* $p=2$ *aus vier, für* $p=1$ *endlich aus zwei bestimmten unter ihnen, die in jedem Falle auf mehrere Weise ausgewählt werden können, zusammensetzen.*

Würzburg, d. 1. April 1884.