Sull'equilibrio dei poligoni articolati in connessione col problema delle configurazioni.

(*Memoria del prof.* G. JUNG, *a Milano.*)

Le configurazioni investigate per la prima volta da S. KANTOR (*) e poi generalizzate da VERONESE agli spazi di n dimensioni (**) si presentano spontaneamente anche nella Statica, quando si studiino in tutta la generalità le condizioni d'equilibrio dei sistemi piani di forze, le condizioni d'equilibrio dei poligoni articolati, ecc. Gli è in questo studio che sia considerando direttamente le linee d'azione delle forze equilibrate e delle loro risultanti parziali sia applicando e generalizzando un elegante teorema di CREMONA (***) io avevo a mia volta trovato quelle configurazioni fin da quando SCHELL (****) richiamava l'attenzione dei geometri sulla questione.

Ora, dopo che REYE in una breve Nota (*****) inserita nel tomo I degli *Acta Mathematica* ha messo in maggior rilievo l'importanza del problema delle configurazioni, considerato in sè stesso e nei suoi rapporti con varî rami di Analisi e di Geometria, stimo non inutile di raccogliere e pubblicare i risultati

(*) *Wiener Sitzungsbericht,* B. 80, 2e Abth., (pag. 715-723).

(**) *Mathem. Annalen,* t. 19, (pag. 161-234).

(***) Cfr. *Le figure reciproche nella Statica Grafica,* 3a ediz. Milano, Hoepli, 1879.

(****) v. *Theorie der Bewegung und der Kräfte.* Il sig. SCHELL, stabilita, col metodo delle sezioni, la configurazione d'equilibrio del *quadrangolo articolato* (1a ediz., 1870, pagina 632) ha aggiunto nella 2a edizione (1880, t. II, pag, 74) alcune proprietà geometriche della configurazione stessa, concludendo: « Auf den Zusammenhang dieser Untersuchungen mit Sätzen der neueren synthetischen Geometrie soll hier ganz besonders aufmerksam gemacht werden. » Nella presente Memoria dò, fra altro, la *configurazione d' equilibrio di un poligono articolato di quantisivogliano vertici* (§ 2), come caso particolare della *configurazione di un sistema piano di forze equilibrate* (§ 1, n.i 6-9).

(*****) *Das Problem der Configurationen.*

del mio studio, come modesto contributo alle ricerche sull'interessante argomento; tanto più che il problema delle configurazioni, a quanto so, non è stato ancora esaminato dal punto di vista della Statica. Sopprimo naturalmente la parte che nel frattempo è stata pubblicata da altri Autori (e che si riferisce a proprietà puramente geometriche), rimandando per questa alle belle Memorie dei signori Veronese ed S. Kantor.

PARTE I.

§ 1.

Cfz. F_m di m forze equilibrate nel piano. Cfz. $F_{m,n}$ di m forze equilibrate connesse da n poligoni funicolari. Loro reciproche.

1. Col simbolo Cfz. $(q, p)_\mu^\nu$ dinoteremo una configurazione piana contenente μ punti (*fondamentali*) e ν rette (*fondamentali*) disposte in modo che per ogni punto passino p rette della Cfz. e su ogni retta si trovino q punti della medesima.

Quando $p=q$ epperò $\mu=\nu$ la Cfz. è *duale* e la si può indicare più semplicemente col simbolo μ_p adottato da Reye.

Due Cfz.[i] $(q, p)_\mu^\nu$, $(q', p')_{\mu'}^{\nu'}$ sono *della stessa specie* quando $p=p'$, $q=q'$, $\mu=\mu'$, $\nu=\nu'$; le due Cfz.[i] sono *identiche* quando hanno le stesse rette e gli stessi punti fondamentali.

2. Date in un piano m forze in equilibrio e fissatone l'ordine (*ordine ciclico*) intenderemo rispettivamente per *risultanti cicliche binarie, ternarie,... i-narie* le risultanti di 2, 3,... i forze prese *consecutivamente* fra le date, considerate in quell'ordine.

Le linee d'azione di *tutte* le risultanti cicliche sono in generale $\frac{m(m-3)}{2}$ rette distinte.

3. Due poligoni funicolari connettenti le stesse forze equilibrate nel dato ordine ciclico individuano una retta (*asse*) sulla quale s'incontrano i rispettivi lati omologhi (teorema di Culmann).

Tre poligoni funicolari determinano in tal modo altrettanti assi, i quali o sono tre rette distinte e *concorrenti in un punto* (n.° 5) o coincidono in una sola retta. Nel primo caso diremo che i tre poligoni sono ad assi differenti; e per brevità chiameremo *differenti* n poligoni funicolari connettenti nello stesso ordine ciclico un medesimo sistema di forze, quando siano ad assi differenti tutte le terne di poligoni formate con quegli n, ed inoltre per nessun punto passino più di tre assi.

4. Se in un piano m forze sono in equilibrio sotto la condizione che, per $m > 3$, più di due forze non concorrano mai in uno stesso punto (*); e si connettono in un ordine prestabilito con n poligoni funicolari differenti, si ottiene una configurazione

$$F_{m,n} \equiv \text{Cfz. } (q, p)^{\nu}_{\mu}$$

nella quale

$$\mu = \binom{m+n}{3}, \qquad \nu = \binom{m+n}{2}$$

$$p = 3, \qquad q = m + n - 2.$$

Questa $F_{m,n}$, dell'ordine $m+n$, si dirà la configurazione corrispondente ad m forze equilibrate e ad n poligoni funicolari.

Oltre ai lati di tutti i poligoni funicolari ed agli assi da questi determinati, le rette della Cfz. sono le linee d'azione delle m forze e delle loro risultanti cicliche di tutti gli ordini.

I punti della Cfz. sono:

gli $\frac{mn(m-1)}{2}$ vertici e punti diagonali degli n poligoni funicolari;

le $\frac{mn(n-1)}{2}$ intersezioni di lati omologhi di questi poligoni, distribuite sugli assi che dai medesimi sono determinati;

gli $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ punti comuni alle terne degli assi anzidetti;

gli $\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$ punti fondamentali della Cfz. F_m, corrispondente alle forze, e definiti al n.° 6.

Infatti, generalizzando un teorema di Cremona (l. c., § 22), le m linee d'a-

(*) Ove non si dica espressamente il contrario, i sistemi piani di forze considerati nel corso di questa Memoria s'intenderanno sempre vincolati da questa condizione.

zione delle forze equilibrate si possono riguardare come projezioni degli spigoli laterali di un m-edro semplice Π; quelle delle loro risultanti cicliche come projezioni degli spigoli diagonali di Π; i lati, i vertici e i punti diagonali dei poligoni funicolari come projezioni dei lati, vertici e punti diagonali dei poligoni determinati sulle facce di Π da n piani seganti $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ (tre qualunque dei quali supporremo non passanti per una retta e non più di tre concorrenti in un punto); finalmente gli assi degli n poligoni funicolari come projezioni delle rette comuni ai piani σ_i presi due a due. Le facce dell'm-edro e i piani σ_i sono $m+n$ piani i quali determinano nello spazio $\binom{m+n}{3}$ punti ed $\binom{m+n}{2}$ rette: per ogni punto passano 3 rette, comuni ai tre piani che lo determinano; ogni retta, come individuata da due piani, contiene $m+n-2$ punti, intersezioni sue coi piani rimanenti; onde ecc.

5. Se nella Cfz. corrispondente ad m forze equilibrate e ad n poligoni funicolari si sopprimono, oltre i lati di questi, tutte le linee d'azione delle forze e delle loro risultanti cicliche, si ha il teorema: Gli assi di n poligoni funicolari *differenti* che connettono un sistema piano di forze equilibrate sono, indipendentemente dal numero e dalla posizione delle medesime, le rette di una Cfz. $(n-2,\ 3)^{\binom{n}{2}}_{\binom{n}{3}}$ dell'ordine n. Infatti quegli assi son projezioni degli spigoli dell'n-edro completo avente per facce i piani seganti σ_i.

Se gli n poligoni non sono *differenti,* nel senso indicato al n.° 3, i loro assi possono ancora riguardarsi come projezioni delle rette comuni ad n piani σ_i; ma questi piani non formano più un n-edro completo, cosicchè gli assi possono anche concorrere in un punto, o coincidere in una retta, e via dicendo. Nel caso di $n=3$ i piani σ_i appartengono ad un fascio o individuano un triedro; onde la proposizione relativa a tre poligoni funicolari enunciata al n.° 3.

6. Per $n=0$ il teorema del n.° 4 somministra il seguente:

Dato un sistema piano di m forze in equilibrio (tre qualunque delle quali non concorrenti in un punto, quando $m>3$) le loro linee d'azione e quelle delle loro risultanti cicliche sono le rette di una configurazione F_m, contenente $\binom{m}{3}$ punti ed $\binom{m}{2}$ rette, in ogni punto della quale concorrono 3 rette e su ogni retta della quale si trovano $m-2$ punti fondamentali.

Questa

$$F_m \equiv \text{Cfz}\ \left(m-2,\ 3\right)^{\binom{m}{2}}_{\binom{m}{3}}$$

dell'ordine m si dirà la configurazione corrispondente alle m forze equilibrate.

In generale, se il numero i è primo con m, le m risultanti i-narie formano un unico sistema equilibrato di forze. In questo caso le loro linee d'azione, prese nell'ordine ciclico, sono i lati di un m-gono semplice (poligono delle risultanti i-narie) i cui vertici appartengono alla Cfz. F_m.

Ma se i è un divisore di m, cosicchè $i \cdot j = m$, le risultanti i-narie costituiscono i gruppi di j forze equilibrate ciascuno. Onde, se $j > 3$, le loro linee d'azione, prese ciclicamente in ciascun gruppo, formano in generale i j-goni semplici i cui m vertici appartengono alla Cfz., epperò il poligono delle risultanti i-narie si spezza in più poligoni; se $j=3$ esse formano $\frac{m}{3}$ terne di rette, concorrenti in altrettanti punti della Cfz.; se $j=2$ esse formano un $\frac{m}{2}$—latero i cui vertici *non* appartengono alle Cfz. In questi due ultimi casi si può dire che il poligono delle risultanti i-narie degenera in $\frac{m}{3}$ punti fondamentali (centri di fasci di raggi) o rispettivamente in $\frac{m}{2}$ rette fondamentali della Cfz.

D'altra parte, secondo che m è pari o dispari, i assume i valori 2, 3, 4,... $\frac{m}{2}$, o rispettivamente i valori 2, 3, 4,... $\frac{m-1}{2}$. Dunque in generale:

Oltre ai vertici del poligono-forze (*) e dei poligoni di tutte le risultanti cicliche (inclusi quelli che eventualmente riuscissero spezzati o degeneri) la Cfz. F_m corrispondente ad m forze equilibrate contiene altri φ punti, intersezioni di risultanti i-narie con risultanti cicliche d'ordine differente (incluso l'ordine $i=1$

(*) Per *poligono-forze* intendiamo qui l'm-gono semplice avente per lati le linee d'azione delle m forze prese nell'ordine fissato. Non dovendoci occupare in questo scritto delle intensità delle forze, non può nascere ambiguità fra il poligono-forze ora definito e il solito poligono delle forze, i cui lati misurano le intensità delle medesime. Del resto il nostro poligono-forze potrebbe anche riguardarsi come il poligono di risultanti i-narie corrispondente al caso $i=1$ e chiamarsi perciò *poligono primario.*

che corrisponde alle forze date); essendo

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{m(m-4)(m-2)}{6} \quad \text{se } m \text{ pari} \\ \varphi &= \frac{m(m-5)(m-1)}{6} \quad \text{„ } m \text{ dispari}\end{aligned}\right\} \text{ ed } m \text{ non } \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{m(m-4)(m-2)}{6} + \frac{2m}{3} \quad \text{se } m \text{ pari} \\ \varphi &= \frac{m(m-5)(m-1)}{6} + \frac{2m}{3} \quad \text{„ } m \text{ dispari} \\ &= \frac{m(m-3)^2}{6}\end{aligned}\right\} \text{ ed } m \equiv 0 \pmod{3}.$$

7. La Cfz. F_m, corrispondente a un dato sistema di forze in equilibrio, può riguardarsi in altri $\left\{\frac{(m-1)!}{2} - 1\right\}$ modi diversi come Cfz. di m forze equilibrate; in altri termini esistono, compreso il dato, $\frac{(m-1)!}{2}$ differenti (*) sistemi equilibrati di m forze, a ciascun dei quali corrisponde una Cfz. identica alla F_m (n.° 1).

Infatti un m-edro completo contiene $\frac{(m-1)!}{2}$ m-edri semplici; se le linee d'azione delle m forze date sono projezioni degli spigoli laterali di uno di questi, gli spigoli laterali dei rimanenti danno in projezione le linee d'azione di altrettanti sistemi equilibrati di m forze ciascuno.

8. La configurazione di m forze in equilibrio contiene $m-3$ Cfz.i F_r (d'ordine inferiore ad m) corrispondenti ad $r = 3, 4, \ldots (m-1)$ forze in equilibrio, e le contiene ciascuna più volte; precisamente la F_r vi è contenuta $\binom{m}{r}$ volte. [Tanti sono infatti gli r-edri (completi) contenuti in un m-edro (completo); e se questo dà in projezione la F_m, quelli in projezione somministrano le anzidette configurazioni F_r]. È poi evidente che ad ogni F_r è accoppiata una figura complementare contenuta pure nella F_m. D'altra parte si riconosce dai n.i 4 e 6 che, quando $m = m' + n'$, la Cfz. $F_{m',n'}$ corrispondente ad m' forze connesse da n' poligoni funicolari e la Cfz. F_m di m forze equilibrate sono della stessa specie (n.° 1). Dunque:

(*) Non riguardiamo qui come differenti due sistemi di forze aventi le stesse linee d'azione e le intensità proporzionali.

Le linee d'azione di m forze in equilibrio e delle loro risultanti cicliche si possono separare in due figure complementari per modo, che riguardate le rette di una figura come linee d'azione di r forze equilibrate e delle rispettive risultanti cicliche, quelle della figura complementare siano i lati e gli assi di $m-r$ differenti poligoni funicolari connettenti le dette r forze. Per ogni valore r vi è una serie di $\binom{m}{r}$ gruppi di tali figure; con le rette della Cfz. si possono formare $m-3$ serie differenti, le quali ordinatamente corrispondono ai valori 3, 4,... $(m-1)$ di r. (v. Esempi nel § 3.)

Tenuto presente il n.° 7, si può in altri termini concludere: la Cfz. F_m, che corrisponde ad m forze in equilibrio, si può riguardare in $\frac{(r-1)!}{2}\binom{m}{r}$ modi diversi come la Cfz. $F_{r,m-r}$, corrispondente ad r forze equilibrate e a $m-r$ poligoni funicolari; r essendo uno qualunque dei numeri 3, 4,... $(m-1)$.

9. Nel piano il solo sistema generale di forze in equilibrio cui corrisponde una Cfz. duale è quello di 5 forze, pel quale si ha $F_5=(3,\ 3)_{10}^{10}\equiv 10_3$.

Dal numero precedente risulta però che la F_m, corrispondente ad $m>5$ forze equilibrate, senza essere duale, contiene sempre parecchie Cfz.ⁱ duali del tipo μ_3 (v. § 6). Dal § 3 si rileva poi che al crescere di m queste Cfz. duali diventano vieppiù numerose e si aggruppano secondo il valore di μ. Così la Cfz. di 6 forze contiene 6 Cfz. 10_3; quella di 7 forze contiene 21 Cfz. 10_3 e 120 Cfz. 21_3; quella di 8 forze contiene 56 Cfz. 10_3 e 960 Cfz. 21_3; quella di 9 forze contiene 126 Cfz. 10_3, 4320 Cfz. 21_3 e 280 Cfz. 27_3; ecc. ecc.

10. Al sistema di 4 forze equilibrate e 1 poligono funicolare, e al sistema di 3 forze equilibrate e 2 poligoni funicolari, corrispondono Cfz.ⁱ $F_{4,1}$ ed $F_{3,2}$ di specie non diversa dalla $F_5\equiv 10_3$. Essi sono i soli sistemi generali di m forze equilibrate connesse da n differenti poligoni funicolari, ai quali corrisponda una Cfz. duale. Ma, se $m+n>5$, ogni $F_{m,n}$, contiene Cfz.ⁱ duali del tipo μ_3 (n.° 8).

11. La figura reciproca (nel senso di Maxwell e di Cremona) della Cfz. $F_{m,n}$, corrispondente ad m forze in equilibrio e ad n poligoni funicolari, è un $(m+n)$-gono piano completo, avente i lati paralleli uno ad uno a tutte le rette della configurazione.

§ 2.

a. Configurazione generale d'equilibrio dei poligoni piani articolati (*).

12. È nota la condizione necessaria e sufficiente perchè un poligono articolato Q_m si trovi in equilibrio sotto l'azione di m forze poste nel suo piano e passanti pei suoi vertici: bisogna che Q_m coincida con un poligono funicolare delle forze (**) date ossia in altri termini bisogna che queste si possano scomporre in $2m$ forze, due a due eguali e contrarie, e agenti lungo i lati di Q_m. Sono appunto tali componenti che rappresentano le tensioni o pressioni dei varî lati.

Questa condizione permette di risolvere in modo generale il problema dell'equilibrio di qualsivoglia poligono piano articolato. Infatti in base ai teoremi precedentemente esposti si può enunciare senz'altro la proposizione:

Se un poligono articolato Q_m è tenuto in equilibrio da m forze poste nel suo piano, passanti pei suoi vertici e delle quali tre qualunque non concorrenti in un punto; le linee d'azione di quelle forze, prese nell'ordine ciclico dei vertici cui sono applicate, le linee d'azione delle loro risultanti cicliche binarie, ternarie, ecc. e i lati di Q_m costituiscono, qualunque sia m, una Cfz.

$$F_{m\,1} = (m-1,\ 3)_{\binom{m+1}{3}}^{\binom{m+1}{2}} \equiv F_{m+1}$$

(dell'ordine $m+1$).

Oltre ai vertici e ai punti diagonali del poligono articolato Q_m questa configurazione contiene tutt'i punti appartenenti alla Cfz. F_m (n.° 6) che corrisponde alle m forze equilibrate.

Di qui si rileva che la Cfz. di $m+1$ forze equilibrate, e la Cfz. di un poligono articolato, in equilibrio sotto l'azione di m forze applicate ai suoi vertici, sono della stessa specie e dello stesso ordine; cosicchè trovata la prima configurazione si può ritener nota anche l'altra. Per es. nel § 3 abbiamo dato le Cfz.ⁱ di 4, 5, 6,... forze equilibrate; le Cfz.ⁱ stesse corrispondono all'equilibrio del *triangolo, quadrangolo, pentagono,...* articolati.

(*) Cfr. *Appendice*, § 9.
(**) v. Levy, *La Statique Graphique*. Paris, 1874, § 61.

b. Reciprocità fra il poligono articolato e la Cfz. delle forze ai vertici che lo tengono in equilibrio.

13. Il poligono articolato Q_m e la Cfz. F_m sono figure dotate di proprietà reciproche. Questa contiene $\frac{m(m-1)}{2}$ rette, linee d'azione delle m forze e delle rispettive risultanti cicliche, quello, considerato come un poligono semplice, contiene $\frac{m(m-1)}{2}$ punti, cioè m vertici ed $\frac{m(m-3)}{2}$ punti diagonali.

14. Distinguendo i punti diagonali di un m-latero semplice in binarî, ternarî, ecc., intenderemo in generale per punto diagonale i-nario il punto comune a due lati del poligono fra i quali se ne trovano altri $i-1$; e per poligono diagonale i-nario il poligono semplice conlatero al dato e avente per vertici tutti i suoi punti diagonali dell'ordine i. (Definizioni correlative si possono dare per le diagonali dell'm-gono semplice).

15. Siccome Q_m è sezione ed F_m è projezione di un medesimo m-edro Π, ad ogni retta di F_m si può far corrispondere *un* punto di Q_m, assumendo per es. che quella sia projezione e questo sezione di uno stesso spigolo. Ad ogni forza corrisponde così il vertice cui è applicata; ad ogni risultante i-naria il punto diagonale i-nario in essa situato; al poligono forze il poligono articolato; al poligono delle risultanti i-narie il poligono diagonale i-nario. Se il poligono delle risultanti i-narie è un m-gono semplice i cui vertici appartengono alla Cfz. F_m, il poligono diagonale i-nario è un m-gono semplice avente per lati i lati di Q_m; se quello si spezza in i j-goni semplici o rispettivamente degenera in $\frac{m}{3}$ terne di rette concorrenti in punti della Cfz. (n.° 6), questo si spezza in i j-goni semplici o rispettivamente degenera in $\frac{m}{3}$ triangoli aventi per lati i lati di Q_m; se quello degenera in $\frac{m}{2}$ rette, le cui intersezioni non appartengono alla Cfz., questo degenera in $\frac{m}{2}$ punti le cui congiungenti non sono lati di Q_m. È poi facile vedere che non solo a ogni retta di F_m corrisponde un punto di Q_m, ma inoltre a ogni punto di F_m corrisponde un triangolo di Q_m, a ogni Cfz. F_r contenuta in F_m, un r-latero di Q_m, ecc. ecc.

Ed è evidente che il poligono diagonale i-nario di Q_m, considerato come poligono articolato, è in equilibrio sotto l'azione delle risultanti i-narie delle m forze applicate ai vertici di Q_m; e ove esso si spezzi in i j-goni distinti, questi son tenuti in equilibrio dai corrispondenti i gruppi di j risultanti i-narie.

§ 3.

Applicazione a casi particolari. Notazione.

16. Si dinotino ordinatamente con a, b, c, d, e,... le m forze equilibrate; con ab, bc, cd, de,... le risultanti cicliche binarie; con abc, bcd, cde... le risultanti cicliche ternarie;...; e con le segnature $a \cdot b$, $ab \cdot c$, $a \cdot bcd$, $ab \cdot cd$,... s'indichino rispettivamente i punti di concorso delle forze a e b, ab e c, a e bcd, ab e cd,...; è evidente che per questi punti passano ordinatamente le forze ab, abc, $abcd$, $abcd$,... Si esprimerà questo fatto scrivendo $ab \equiv a \cdot b$, $abc \equiv ab \cdot c$, $abcd \equiv a \cdot bcd \equiv ab \cdot cd$,...

17. Insieme a questa notazione non omogenea è opportuno di adoperarne un'altra, nella quale le linee d'azione delle forze e rispettive risultanti cicliche, ossia *tutte* le rette fondamentali della corrispondente Cfz., sono rappresentate da simboli della stessa forma, cioè da combinazioni binarie, e *tutti* i punti fondamentali della Cfz. da simboli pure della stessa forma, cioè da combinazioni ternarie, di m simboli o indici 1, 2, 3,... m.

Due rette passano per un punto se i loro simboli hanno un indice comune; per es. le rette rs, rt, st concorrono nel punto rst. Queste tre rette si potranno anche rappresentare col simbolo (r, s, t).

Tutti i punti i cui simboli differiscono per un solo indice giacciono in una retta, il simbolo della quale contiene i due indici comuni.

Con questa notazione, se le linee d'azione delle m forze, prese nell'ordine ciclico dato, hanno i simboli: 12, 23, 34,... $m1$; quelle delle risultanti cicliche binarie avranno i simboli: 13, 24, 35,...; quelle delle ternarie i simboli: 14, 25, 36,...; e, in generale, le linee d'azione delle risultanti cicliche i-narie i simboli: $1\overline{1+i}$, $2\overline{2+i}$, $3\overline{3+i}$,...

18. La Cfz. F_m (corrispondente ad m forze equilibrate) potrà quindi rappresentarsi col simbolo

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m)$$

ove α_1, α_2,... α_m sono m indici differenti, che conviene di considerare come corrispondenti ad altrettanti piani ξ_{α_1}, ξ_{α_2},... ξ_{α_m}, formanti un m-edro completo (v. § 8).

Col simbolo

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_m$$

senza parentesi dinoteremo in generale il poligono *semplice* avente per lati *successivi* le seguenti m rette della Cfz.:

$$\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_2\alpha_3, \quad \alpha_3\alpha_4, \ldots \quad \alpha_m\alpha_1$$

e per vertici *successivi* i seguenti m punti della Cfz.:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad \alpha_2\alpha_3\alpha_4, \ldots \quad \alpha_m\alpha_1\alpha_2;$$

e riguarderemo sempre $\alpha_1\alpha_2$ come il primo lato ed $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ come il primo vertice del poligono.

Coi simboli

$$\alpha_m \cdot (\alpha_1, \ \alpha_2, \ldots \ \alpha_{m-1})$$

$$\alpha_m \cdot \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{m-1}$$

dinoteremo rispettivamente l'$\overline{m-1}$-latero completo e l'$\overline{m-1}$-latero semplice aventi per lati le rette:

$$\alpha_m\alpha_1, \quad \alpha_m\alpha_2, \ldots \quad \alpha_m\alpha_{m-1};$$

cosicchè mentre il primo di questi simboli esclude, il secondo include l'idea dell'ordine col quale gli $m-1$ lati si succedono; e mentre il primo, oltre ai lati, rappresenta $\frac{m-1 \cdot m-2}{2}$ punti fondamentali (vertici dell'$\overline{m-1}$-latero) il secondo ne rappresenta soltanto $m-1$.

Valendoci promiscuamente delle due notazioni accennate, daremo in questo paragrafo le Cfz.[i] relative ai sistemi di m forze equilibrate (cfr. n.° 12), per alcuni valori particolari di m: cioè per $m=3, 4, 5, \ldots 11$.

Es. 1.° Configurazione di 3 forze in equilibrio.

$m=3$ $\qquad\qquad$ $F_3 \equiv (1, \ 3)_1^3 \equiv (1, \ 2, \ 3)$.

19. Le tre rette r (*) della Cfz. $F_3 \equiv (1, \ 2, \ 3)$ sono:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{le linee d'azione} \ldots & 12 & 23 & 31 \\ \text{delle forze date} \ldots\ldots & a & b & c \end{array}\right\};$$

esse concorrono nel punto $G \equiv 123$, il solo appartenente alla Cfz. F_3, *la quale consiste in una semplice terna* (1, 2, 3) *di rette concorrenti* (fascio di raggi).

(*) In questo e in tutti gli esempi seguenti si rappresenteranno genericamente con r e con G le rette e i punti fondamentali della Cfz. corrispondente al sistema delle forze date.

Es. 2.° Configurazione di 4 forze equilibrate nel piano. Equilibrio del triangolo.

$$m=4 \qquad\qquad F_4 \equiv (2,\ 3)_4^6 \equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

20. Le sei rette r della Cfz. $F_4 \equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4)$ sono:

$$\left.\begin{array}{lcccc} \text{le linee d'azione} \dots & 12 & 23 & 34 & 41 \\ \text{delle forze date} \dots & a & b & c & d \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{lcc} \text{le linee d'azione} \dots & 13 & 24 \\ \text{delle ris. binarie} \dots & ab \equiv cd & bc \equiv da \end{array}\right\};$$

i quattro punti fondamentali G sono:

$$123 \qquad 234 \qquad 341 \qquad 412.$$

Il poligono delle forze è il quadrangolo semplice (n.° 18)

$$P_1 \equiv 1234;$$

quello P_2 delle risultanti cicliche binarie degenera in due rette (diagonali di P_1) il cui punto comune non appartiene alla Cfz.

Onde *la Cfz. F_4 consiste in un quadrangolo completo.* Essa corrisponde a tre diversi sistemi di 4 forze: i relativi poligoni-forze sono i quadrangoli semplici 1234, 1324, 1243, le corrispondenti risultanti binarie coincidono con le diagonali di questi quadrangoli.

La F_4 si scinde in quattro modi in una terna di rette concorrenti e in un corrispondente triangolo inscritto, epperò in quattro modi si può essa riguardare come la *Cfz. $F_{3,1}$ corrispondente all'equilibrio del triangolo,* cioè:

sistema forze:	(1, 2, 3);	triangolo equilibrato:	$4 \cdot 123$
»	(2, 3, 4);	»	$1 \cdot 234$
»	(1, 3, 4);	»	$2 \cdot 134$
»	(1, 2, 4);	»	$3 \cdot 124$.

Es. 3.° Configurazione di 5 forze equilibrate nel piano. Equilibrio del quadrangolo articolato.

$$m=5 \qquad\qquad F_5 \equiv (3,\ 3)_{10}^{10} \equiv 10_3.$$

21. Le dieci rette r della Cfz. $F_5 \equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ sono:

$$\left.\begin{array}{lccccc} \text{le linee d'azione} \dots & 12 & 23 & 34 & 45 & 51 \\ \text{delle forze} \dots\dots & a & b & c & d & e \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{llllll}\text{le linee d'azione} \ldots & 13 & 35 & 52 & 24 & 41 \\ \text{delle ris. binarie} \ldots & ab & cd & ea & bc & de\end{array}\right\};$$

Il poligono P_1 delle forze è il pentagono semplice

$$P_1 \equiv 12345,$$

quello P_2 delle risultanti binarie è il pentagono semplice

$$P_2 \equiv 13524.$$

Oltre ai vertici 123, 234,... 512 e 135, 352,... 413 di questi due poligoni la Cfz. non contiene altri punti fondamentali ($\varphi = 0$, n.° 6).

I lati di P_2 passano ordinatamente pei vertici alternati I III V II IV di P_1, e i lati di P_1 pei vertici alternati IV II V I III di P_2; infatti per es. il primo lato 13 di P_2 passa pel primo vertice 123 di P_1, e il primo lato 12 di P_1 pel quarto vertice 241 di P_2. Onde *i pentagoni P_1 e P_2 sono simultaneamente inscritti l'uno nell'altro.*

22. La stessa F_5 corrisponde a dodici sistemi differenti di 5 forze equilibrate (incluso il dato) ossia può in dodici modi riguardarsi come Cfz. di 5 forze in equilibrio. Contiene dodici pentagoni analoghi a P_1 (poligoni-forze) e altrettanti analoghi a P_2 (poligoni di risultanti binarie), i quali però si riducono a soli dodici differenti e si separano in due distinti gruppi di sei pentagoni:

$$P_1 \equiv A_1;\quad A_2;\quad A_3;\quad A_4;\quad A_5;\quad A_6$$
$$P_2 \equiv B_1;\quad B_2;\quad B_3;\quad B_4;\quad B_5;\quad B_6;$$

ovvero anche in sei coppie

$$(A_i,\ B_i) \qquad i = 1,\ 2, \ldots\ 6$$

di pentagoni, associati per modo, che ogni A_i è simultaneamente inscritto e circoscritto all'associato B_i, e che se A_i (o B_i) si riguarda come poligono delle forze, l'associato B_i (o A_i) è il corrispondente poligono delle risultanti cicliche binarie. Queste sei coppie di pentagoni associati sono:

$$\begin{array}{ll}(A_i, & B_i) \\ (12345, & 13524) \\ (12354, & 13425) \\ (12435, & 14523) \\ (12453, & 14325) \\ (12534, & 15423) \\ (12543, & 15324).\end{array}$$

23. La Cfz. si scinde in cinque maniere diverse in un quadrangolo completo e in un corrispondente quadrilatero completo *inscritto*, cioè avente i vertici opposti situati sui lati opposti del quadrangolo. I cinque quadrangoli $F_4^{(i)}$ coi corrispondenti quadrilateri $Q_4^{(i)}$ sono i seguenti:

$F_4^{(i)}$	$Q_4^{(i)}$
(1, 2, 3, 4)	5·(1, 2, 3, 4)
(1, 2, 3, 5)	4·(1, 2, 3, 5)
(1, 2, 4, 5)	3·(1, 2, 4, 5)
(1, 3, 4, 5)	2·(1, 3, 4, 5)
(2, 3, 4, 5)	1·(2, 3, 4, 5).

Ognuno di questi quadrangoli completi corrisponde a tre diversi sistemi equilibrati di 4 forze (per es. il primo corrisponde ai tre sistemi, descritti nell'Es. 2.°, n.° 20, e i cui poligoni-forze sono i quadrangoli semplici 1234, 1324, 1243); si hanno così quindici Cfz.[i] $F_{4,1}^{(i)}$ contenute nella F_5 e delle quali *ciascuna corrisponde all' equilibrio di un quadrangolo articolato.* (Cfr. Schell, l. c., 2ª ediz., pag. 73).

24. La F_5 in dieci modi si scinde in una terna di rette concorrenti e in due triangoli inscritti (prospettivi), ossia contiene le dieci Cfz. $F_{3,2}$ corrispondenti ad altrettanti sistemi equilibrati di 3 forze, connessi ciascuno da 2 differenti poligoni funicolari, cioè:

sistema forze	triangoli funicolari	sistema forze	triangoli funicolari.
(1, 2, 3)	4·123 e 5·123	(1, 3, 5)	2·135 e 4·135
(2, 3, 4)	5·234 » 1·234	(3, 5, 2)	4·352 » 1·352
(3, 4, 5)	1·345 » 2·345	(5, 2, 4)	1·524 » 3·524
(4, 5, 1)	2·451 » 3·451	(2, 4, 1)	3·241 » 5·241
(5, 1, 2)	3·512 » 4·512	(4, 1, 3)	5·413 » 2·413.

Es. 4.° Configurazione di 6 forze equilibrate nel piano. Equilibrio del pentagono articolato.

$m = 6$ $\qquad\qquad F_6 \equiv (4, 3)_{20}^{15}$

25. Le quindici rette r della Cfz. $F_6 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ sono:

$$\left.\begin{array}{lcccccc} \text{le linee d'azione} \ldots & 12 & 23 & 34 & 45 & 56 & 61 \\ \text{delle forze date} \ldots\ldots & a & b & c & d & e & f \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{llllllll} \text{le linee d'azione} \ldots & 13 & 35 & 51; & 24 & 46 & 62 \\ \text{delle ris. binarie} \ldots & ab & cd & ef; & bc & de & fa \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{llll} \text{le linee d'azione} \ldots & 14 & 25 & 36 \\ \text{delle ris. ternarie} \ldots & abc \equiv def & bcd \equiv efa & cde \equiv fab \end{array}\right\}.$$

Il poligono-forze P_1 coincide con l'esagono semplice

$$P_1 \equiv 123456 \equiv E_{1,23}; \tag{1}$$

il poligono P_2 delle risultanti binarie degenera nelle due terne conjugate di rette concorrenti

$$P_2 \equiv \{(1,\ 3,\ 5);\quad (2,\ 4,\ 6)\}, \tag{2}$$

la prima delle quali projetta i vertici di posto dispari, la seconda quelli di posto pari di P_1 (n.° 18); il poligono P_3 delle risultanti ternarie degenera nel trilatero

$$P_3 \equiv 14 \cdot 25 \cdot 36 \equiv \Delta \tag{3}$$

del quale i lati, 14, 25, 36, sono rette r, ma i vertici sono punti estranei alla Cfz.

26. Oltre ai vertici 123, 234, 345, 456, 561, 612 del poligono-forze e ai centri 135, 246 delle due terne di risultanti binarie, la Cfz. contiene altri $\varphi = 12$ punti (n.° 6) che sono intersezioni scambievoli di risultanti cicliche d'ordine i differente (incluso l'ordine $i = 1$ che corrisponde alle forze date) cioè

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{i punti} & \left\{\begin{array}{llll} 124 & 134 & 145 & 146 \\ a\cdot bc & ab\cdot c & d\cdot ef & de\cdot f \end{array}\right. & \text{situati sulla retta} & \left\{\begin{array}{c} 14 \\ abc \equiv def \end{array}\right. \\ \text{"} & \left\{\begin{array}{llll} 125 & 235 & 245 & 256 \\ ef\cdot a & b\cdot cd & bc\cdot d & e\cdot fa \end{array}\right. & \text{"} \quad \text{"} & \left\{\begin{array}{c} 25 \\ bcd \equiv efa \end{array}\right. \\ \text{"} & \left\{\begin{array}{llll} 136 & 236 & 346 & 356 \\ f\cdot ab & fa\cdot b & c\cdot de & cd\cdot e \end{array}\right. & \text{"} \quad \text{"} & \left\{\begin{array}{c} 36 \\ cde \equiv fab. \end{array}\right. \end{array}\right\} \tag{4}$$

La Cfz. F_6 *è della stessa specie* (n.° 1) *di quella che presentano le rette e i punti di* Steiner *nell'esagrammo di* Pascal (v. § 7).

Essa può in *sessanta* modi diversi riguardarsi come sistema di 6 forze in equilibrio, con le relative risultanti cicliche binarie e ternarie, ossia corrisponde ad altrettanti sistemi differenti (incluso il dato) di 6 forze equilibrate;

perciò contiene *sessanta* esagoni semplici (poligoni-forze $P_1^{(i)}$), a ciascun dei quali corrispondono *due* terne conjugate di raggi (poligoni $P_2^{(i)}$ di ris. binarie) che ne projettano i vertici dispari e i vertici pari, ed *un* trilatero Δ (poligono $P_3^{(i)}$ di risultanti ternarie) i cui lati appartengono, ma i cui vertici non appartengono alla Cfz. — ben inteso che ognuno di questi gruppi

$$(P_1^{(i)},\ P_2^{(i)},\ P_3^{i}), \qquad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 60,$$

comprende tutte le rette, ma soltanto 8 punti della Cfz., epperò determina un corrispondente gruppo ρ_i di 12 punti residui.

27. I dodici punti (4) sono vertici di due esagoni semplici

$$E_{2,31} \equiv 125634, \qquad E_{3,12} \equiv 145236$$

che formano, insieme al $P_1 \equiv E_{1,23}$, una *tripla* T_{123} *di esagoni consociati;* consociati nel senso che *ciascuno* dei tre esagoni, considerato come poligono-forze, conduce alle stesse terne conjugate (2) di risultanti binarie, e che inoltre i dodici punti del *corrispondente* gruppo residuo ρ coincidono coi vertici degli altri due esagoni della tripla.

28. Gli stessi punti (4) sono anche vertici di tre quadrangoli semplici

$$q_{14} \equiv 2356, \qquad q_{25} \equiv 1346, \qquad q_{36} \equiv 1245$$

i quali rispettivamente corrispondono ai lati 14, 25, 36 di Δ (in quanto essi appartengono ai quadrangoli completi individuati da queste tre rette, n.° 37) e hanno per diagonali le due rette non corrispondenti; per es. q_{14} corrisponde a $r \equiv 14$ e ha per diagonali $r \equiv 25$ e $r \equiv 36$.

29. Ogni retta r, per es. 12, è lato di tre trilateri $12 \cdot 34 \cdot 56$, $12 \cdot 35 \cdot 46$, $12 \cdot 36 \cdot 45$; ma ogni trilatero contiene tre rette r, onde in tutta la Cfz. F_6 esistono $\frac{3 \cdot 15}{3} = 15$ trilateri, i vertici dei quali non coincidono con punti G. Indicandoli col simbolo Δ_{ij} (*) essi sono figurati nella seguente

TABELLA DEI TRILATERI Δ.

$\Delta_{12} \equiv 12 \cdot 34 \cdot 56$	$\Delta_{13} \equiv 16 \cdot 23 \cdot 45$	$\Delta_{14} \equiv 14 \cdot 26 \cdot 35$	$\Delta_{15} \equiv 13 \cdot 25 \cdot 46$	$\Delta_{16} \equiv 15 \cdot 24 \cdot 36$
$\Delta_{23} \equiv 14 \cdot 25 \cdot 36$	$\Delta_{24} \equiv 15 \cdot 23 \cdot 46$	$\Delta_{25} \equiv 16 \cdot 24 \cdot 35$	$\Delta_{26} \equiv 13 \cdot 26 \cdot 45$	$\Delta_{34} \equiv 13 \cdot 24 \cdot 56$
$\Delta_{35} \equiv 15 \cdot 26 \cdot 34$	$\Delta_{36} \equiv 12 \cdot 35 \cdot 46$	$\Delta_{45} \equiv 12 \cdot 36 \cdot 45$	$\Delta_{46} \equiv 16 \cdot 25 \cdot 34$	$\Delta_{56} \equiv 14 \cdot 23 \cdot 56$.

(*) I 45 punti P, vertici di questi trilateri, e i 20 punti fondamentali della Cfz. (ciascun dei quali conta per *tre*) costituiscono *tutte* le intersezioni delle rette r (v. n.° 40).

30. Non esistendo che *venti* terne di raggi concorrenti (cioè tante quanti sono i punti G) le quali sono conjugate due a due, in quantochè il simbolo dell'una, per es. (1, 3, 5), determina univocamente il simbolo complementare (2, 4, 6) dell'altra; ogni pajo di terne conjugate corrisponde a $\frac{60}{10}=6$ esagoni, che determinano altrettanti trilateri. Dunque gli esagoni delle Cfz. si distribuiscono in 6 serie π_i di 10 esagoni ai quali corrispondono differenti paja di terne conjugate, e trilateri differenti, ovvero in *dieci* serie di *sei* esagoni, ai quali corrispondono le medesime due terne conjugate di raggi, ma differenti trilateri [v. tabella I ove nella segnatura di ogni esagono (per es. **1**2**3**4**5**6) tre cifre sono scritte in caratteri più marcati delle altre, nell'intento di mettere concisamente in evidenza le due corrispondenti terne conjugate (1, 3, 5) (2 4 6)].

31. I sei esagoni appartenenti a ciascuna di queste serie si separano in due *triple* (n.° 27) *conjugate* T_{ijk}, T_{rst} (i, j, k, r, s, t rappresentano i sei indici 1, 2, 3, 4, 5, 6); i trilateri corrispondenti agli esagoni della tripla T_{ijk} sono Δ_{jk}, Δ_{ki}, Δ_{ij}, quelli corrispondenti alla tripla T_{rst} sono Δ_{st}, Δ_{tr}, Δ_{rs}. Nella F_6 vi sono evidentemente *venti triple* T_{ijk} *di esagoni consociati,* le quali si possono riguardare come univocamente corrispondenti ai *venti* punti ijk della Cfz. e sono due a due conjugate. Nella tabella I accanto a ogni esagono si trova segnato: a) il relativo trilatero Δ_{ij}; b) la tripla T_{ijk} alla quale l'esagono appartiene.

32. Poichè ogni esagono individua un trilatero, uno stesso trilatero corrisponde a $\frac{60}{15}=4$ esagoni, che determinano 4 differenti paja di terne conjugate epperò appartengono a 4 triple differenti. Dunque gli esagoni, le terne di raggi concorrenti e le triple di esagoni consociati si distribuiscono rispettivamente in *quindici* quaterne, che univocamente corrispondono ai *quindici* trilateri (v. tabella II ove accanto a ogni esagono si trova segnata e la serie π_i, n.° 30, e la tripla T_{ijk}, alle quali l'esagono appartiene).

33. Riassumendo e rappresentando i 60 sistemi equilibrati (n.° 26) mediante i relativi poligoni-forze, vale a dire mediante i 60 esagoni della Cfz., si può concludere che essi si distribuiscono in *dieci* serie di *sei* sistemi, separati in due triple conjugate, e conducenti al medesimo poligono di risultanti binarie, ma a differenti trilateri di risultanti ternarie (tab. I); oppure anche si distribuiscono in *quindici* gruppi di *quattro* sistemi, appartenenti a triple diverse, e conducenti al medesimo trilatero di risultanti ternarie ma a differenti poligoni di risultanti binarie (tab. II).

Tabella I.

π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
T_{123} **123456** Δ_{23}	T_{231} **125634** Δ_{31}	T_{312} **163254** Δ_{12}	T_{456} **125436** Δ_{56}	T_{564} **145632** Δ_{64}	T_{645} **165234** Δ_{45}
T_{145} **135264** Δ_{45}	T_{236} **136254** Δ_{36}	T_{362} **146352** Δ_{62}	T_{451} **126354** Δ_{51}	T_{514} **125463** Δ_{14}	T_{623} **135462** Δ_{23}
T_{156} **136425** Δ_{56}	T_{234} **152364** Δ_{34}	T_{342} **142563** Δ_{42}	T_{423} **156423** Δ_{23}	T_{561} **132564** Δ_{61}	T_{615} **142365** Δ_{15}
T_{146} **153624** Δ_{46}	T_{235} **163524** Δ_{35}	T_{352} **143625** Δ_{52}	T_{461} **143526** Δ_{61}	T_{523} **153426** Δ_{23}	T_{614} **152436** Δ_{14}
T_{126} **124365** Δ_{26}	T_{261} **126543** Δ_{61}	T_{345} **156243** Δ_{45}	T_{453} **124563** Δ_{53}	T_{534} **126345** Δ_{34}	T_{612} **136245** Δ_{12}
T_{136} **154236** Δ_{36}	T_{245} **153246** Δ_{45}	T_{361} **123546** Δ_{61}	T_{452} **123645** Δ_{52}	T_{524} **163542** Δ_{24}	T_{613} **153642** Δ_{13}
T_{124} **126534** Δ_{24}	T_{241} **123465** Δ_{41}	T_{356} **153462** Δ_{56}	T_{412} **153264** Δ_{12}	T_{563} **156234** Δ_{63}	T_{635} **146532** Δ_{35}
T_{134} **145326** Δ_{34}	T_{256} **135426** Δ_{56}	T_{341} **132456** Δ_{41}	T_{413} **135624** Δ_{13}	T_{562} **165324** Δ_{62}	T_{625} **145623** Δ_{25}
T_{125} **125643** Δ_{25}	T_{215} **124356** Δ_{15}	T_{346} **135642** Δ_{46}	T_{463} **134256** Δ_{63}	T_{512} **135246** Δ_{12}	T_{634} **125346** Δ_{34}
T_{135} **132546** Δ_{35}	T_{246} **154623** Δ_{46}	T_{351} **154326** Δ_{51}	T_{462} **152346** Δ_{62}	T_{513} **134625** Δ_{13}	T_{624} **134526** Δ_{24}

Tabella II.

Δ_{12}	π_3	163254	T_{123}	π_4	153264	T_{124}	π_5	135246	T_{125}	π_6	136245	T_{126}
Δ_{13}	π_2	125634	T_{132}	π_4	135624	T_{134}	π_5	134625	T_{135}	π_6	153642	T_{136}
Δ_{14}	π_2	123465	T_{142}	π_3	132456	T_{143}	π_5	125463	T_{145}	π_6	152436	T_{146}
Δ_{15}	π_2	124356	T_{152}	π_3	154326	T_{153}	π_1	126354	T_{154}	π_6	142365	T_{156}
Δ_{16}	π_2	126543	T_{162}	π_3	123546	T_{163}	π_4	143526	T_{164}	π_5	132564	T_{165}
Δ_{23}	π_1	123456	T_{231}	π_4	156423	T_{234}	π_5	153426	T_{235}	π_6	135462	T_{236}
Δ_{24}	π_1	126534	T_{241}	π_3	142563	T_{243}	π_5	163542	T_{245}	π_6	134526	T_{246}
Δ_{25}	π_1	125643	T_{251}	π_3	143625	T_{253}	π_4	123645	T_{254}	π_6	145623	T_{256}
Δ_{26}	π_1	124365	T_{261}	π_3	146352	T_{263}	π_4	152346	T_{264}	π_5	165324	T_{265}
Δ_{34}	π_1	145326	T_{341}	π_2	152364	T_{342}	π_5	126345	T_{345}	π_6	125346	T_{346}
Δ_{35}	π_1	132546	T_{351}	π_2	163524	T_{352}	π_4	124563	T_{354}	π_6	146532	T_{356}
Δ_{36}	π_1	154236	T_{361}	π_2	136254	T_{362}	π_4	134256	T_{364}	π_5	156234	T_{365}
Δ_{45}	π_1	135264	T_{451}	π_2	153246	T_{452}	π_3	156243	T_{453}	π_6	165234	T_{456}
Δ_{46}	π_1	153624	T_{461}	π_2	154623	T_{462}	π_3	135642	T_{463}	π_5	145632	T_{465}
Δ_{56}	π_1	136425	T_{561}	π_2	135426	T_{562}	π_3	153462	T_{563}	π_4	125436	T_{564}

34. Le rette della F_6 si separano nella Cfz. $F_5 \equiv 10_3 \equiv (1, 2, 3, 4, 5)$ e nel corrispondente cinquilatero completo inscritto $Q_5 \equiv 6 \cdot (1, 2, 3, 4, 5)$; la F_6 contiene sei distinte Cfz.^i $F_5^{(i)}$ coi rispettivi cinquilateri inscritti $Q_5^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots 6$, cioè:

i	$F_5^{(i)} \equiv 10_3$	$Q_5^{(i)}$
6	(1, 2, 3, 4, 5)	6·(1, 2, 3, 4, 5)
5	(1, 2, 3, 4, 6)	5·(1, 2, 3, 4, 6)
4	(1, 2, 3, 6, 5)	4·(1, 2, 3, 6, 5)
3	(1, 2, 6, 4, 5)	3·(1, 2, 6, 4, 5)
2	(1, 6, 3, 4, 5)	2·(1, 6, 3, 4, 5)
1	(6, 2, 3, 4, 5)	1·(6, 2, 3, 4, 5).

35. I pentagoni semplici $A_1 \equiv 12345$ e $B_1 \equiv 13524$, associati (n.° 22) nella Cfz. $F_5^{(6)} \equiv (1, 2, \ldots 5)$, sono rispettivamente e ordinatamente circoscritti ai pentagoni semplici $A'_1 \equiv 6 \cdot 12345$ e $B'_1 \equiv 6 \cdot 13524$, *appartenenti* al cinquilatero completo $Q_5^{(6)}$; quelli sono *ciclicamente inscritti* fra loro, cioè ciascuno è in pari tempo inscritto e circoscritto all'altro — questi sono fra loro *ciclicamente diagonali,* cioè hanno i lati comuni (sono conlateri) e ciascuno è il pentagono diagonale dell'altro (ha per vertici i punti diagonali dell'altro).

36. La Cfz. F_6 contiene 144 pentagoni semplici corrispondentisi due a due in modo che 72 pentagoni A_i (o B_i) sono circoscritti rispettivamente e ordinatamente agli altri 72 A'_i (o B'_i); essi si aggruppano in 36 paja di pentagoni (A_i, B_i) *ciclicamente inscritti* e in 36 corrispondenti paja di pentagoni (A'_i, B'_i) *ciclicamente diagonali.*

La F_6 può dunque in 72 modi riguardarsi come *la Cfz. $F_{5,1}$ corrispondente all'equilibrio del pentagono articolato.*

Le 36 paja (A_i, B_i) e le corrispondenti 36 paja (A'_i, B'_i) sono:

$(A_i$,	$B_i)$	$(A'_i$,	$B'_i)$
(12345,	13524)	(6·12345,	6·13524)
(12354,	13425)	(6·12354,	6·13425)
(12435,	14523)	(6·12435,	6·14523)
(12453,	14325)	(6·12453,	6·14325)
(12534,	15423)	(6·12534,	6·15423)
(12543,	15324)	(6·12543,	6·15324);

le altre trenta coppie di paja corrispondenti si ottengono operando successivamente, su queste sei, le sostituzioni (61); (62); (63); (64); (65).

37. La Cfz. F_6 si scinde nel quadrangolo completo

$$F_4 \equiv \mathbf{F}_{56} \equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4);$$

nella corrispondente coppia di quadrilateri completi (conjugati)

$$Q_4 \equiv \mathbf{Q}_{56} \equiv 5 \cdot (1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$Q'_4 \equiv \mathbf{Q}'_{65} \equiv 6 \cdot (1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

in esso inscritti (i vertici *opposti* dei quadrilateri completi si trovano sui lati *opposti* del quadrangolo); e nella retta

$$r \equiv a_{56} \equiv 56,$$

asse sul quale si segano i lati omologhi di Q_4 e Q'_4; la F_6 contiene quindici distinti quadrangoli completi $\mathbf{F}_{ij}$, con le corrispondenti coppie di quadrilateri *conjugati* inscritti $\mathbf{Q}_{ij}$, $\mathbf{Q}'_{ji}$, e i relativi quindici assi a_{ij}, cioè:

a_{ij}	$\mathbf{F}_{ij}$	$\mathbf{Q}_{ij}$	$\mathbf{Q}'_{ji}$
12	(3, 4, 5, 6)	1·(3, 4, 5, 6)	2·(3, 4, 5, 6)
13	(2, 4, 5, 6)	1·(2, 4, 5, 6)	3·(2, 4, 5, 6)
14	(2, 3, 5, 6)	1·(2, 3, 5, 6)	4·(2, 3, 5, 6)
15	(2, 3, 4, 6)	1·(2, 3, 4, 6)	5·(2, 3, 4, 6)
16	(2, 3, 4, 5)	1·(2, 3, 4, 5)	6·(2, 3, 4, 5)
23	(1, 4, 5, 6)	2·(1, 4, 5, 6)	3·(1, 4, 5, 6)
24	(1, 3, 5, 6)	2·(1, 3, 5, 6)	4·(1, 3, 5, 6)
25	(1, 3, 4, 6)	2·(1, 3, 4, 6)	5·(1, 3, 4, 6)
26	(1, 3, 4, 5)	2·(1, 3, 4, 5)	6·(1, 3, 4, 5)
34	(1, 2, 5, 6)	3·(1, 2, 5, 6)	4·(1, 2, 5, 6)
35	(1, 2, 4, 6)	3·(1, 2, 4, 6)	5·(1, 2, 4, 6)
36	(1, 2, 4, 5)	3·(1, 2, 4, 5)	6·(1, 2, 4, 5)
45	(1, 2, 3, 6)	4·(1, 2, 3, 6)	5·(1, 2, 3, 6)
46	(1, 2, 3, 5)	4·(1, 2, 3, 5)	6·(1, 2, 3, 5)
56	(1, 2, 3, 4)	5·(1, 2, 3, 4)	6·(1, 2, 3, 4).

A ogni retta $r \equiv ij$ corrispondono così un quadrangolo *complementare* completo $\mathbf{F}_{ij}$ e un pajo di quadrilateri completi conjugati $\mathbf{Q}_{ij}$, $\mathbf{Q}'_{ji}$.

38. Nel quadrangolo completo (3, 4, 5, 6) sono inclusi i tre quadrangoli semplici 3456, 3546, 3465; i lati dei quali passano ordinatamente pei vertici dei tre quadrilateri semplici $1\cdot3456$, $1\cdot3546$, $1\cdot3465$ contenuti in $1\cdot(3, 4, 5, 6)$ e per quelli dei tre $2\cdot3456$, $2\cdot3546$, $2\cdot3465$ contenuti in $2\cdot(3, 4, 5, 6)$.

La F_6 può dunque in *quarantacinque* maniere diverse riguardarsi come la *Cfz.* $F_{4,2}$ *di 4 forze equilibrate connesse da 2 poligoni funicolari;* epperò contiene *quarantacinque* quadrangoli semplici (poligoni-forze) circoscritti rispettivamente ed ordinatamente ad altrettante corrispondenti paja di quadrilateri semplici conjugati (2 poligoni funicolari), i lati omologhi dei quali s' incontrano sulle quindici rette r (assi dei poligoni funicolari).

39. Le rette della F_6 si separano anche nella terna di triangoli prospettivi *appartenenti* alla Cfz.

$$4\cdot123, \qquad 5\cdot123, \qquad 6\cdot123$$

e nelle due terne conjugate di rette concorrenti

$$(1, 2, 3), \qquad (4, 5, 6);$$

delle quali la prima contiene i raggi d' omologia, la seconda gli assi d' omologia.

Indicando genericamente con λ i triangoli *appartenenti* alla Cfz., cioè aventi per lati rette fondamentali e per vertici punti fondamentali della medesima, la F_6 comprende *venti* terne analoghe di triangoli omologici λ, con le corrispondenti terne di assi e raggi d' omologia; e può in altrettanti modi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{3,3}$ *di 3 forze equilibrate connesse da 3 poligoni funicolari.* I punti della Cfz. sono conjugati due a due per modo, che se le tre forze concorrono in un punto, gli assi dei corrispondenti tre poligoni funicolari concorrono nel punto conjugato. Le dieci paja di punti conjugati sono

123	124	125	126	134	135	136	145	146	156
456	356	346	345	256	246	245	236	235	234;

questi stessi simboli, se racchiusi in parentesi, rappresentano anche le dieci paja di terne conjugate di raggi (n.i 30-25): per es. (1, 2, 3) e (4, 5, 6) rappresentano risp. le due terne 12, 13, 23 e 45, 46, 56.

40. È facile riconoscere che i vertici del quadrangolo completo $\mathbf{F}_{12}$ (n.° 37) sono conjugati ai quattro punti della Cfz. allineati sulla retta $r \equiv 12$. Le intersezioni di questa retta coi lati opposti di $\mathbf{F}_{12}$ sono tre paja di punti conjugati in involuzione (Desargues) e coincidono evidentemente coi vertici P dei tre trilateri Δ_{ij} aventi per lato comune la 12.

Onde ogni retta r contiene sei dei 45 punti P, i quali si separano in tre coppie conjugate in involuzione.

Es. 5.º Configurazione di 7 forze equilibrate nel piano. Equilibrio dell'esagono articolato.

$m=7$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $F_7 \equiv (5,\ 3)_{35}^{21}$.

41. Le ventuna rette r della Cfz. $F_7 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ sono:

le linee d'azione . . .	12	23	34	45	56	67	71
delle forze date	a	b	c	d	e	f	g
le linee d'azione . . .	13	35	57	72	24	46	61
delle ris. binarie . . .	ab	cd	ef	ga	bc	de	fg
le linee d'azione . . .	14	47	73	36	62	25	51
delle ris. ternarie . . .	abc	def	gab	cde	fga	bcd	efg

Il poligono-forze P_1, e i poligoni P_2, P_3 delle risultanti binarie e ternarie coincidono rispettivamente con gli ettagoni semplici:

$$P_1 \equiv 1234567 \equiv A$$
$$P_2 \equiv 1357246 \equiv B$$
$$P_3 \equiv 1473625 \equiv C$$

i quali, presi nell'ordine (A, B, C) sono *ciclicamente inscritti* fra loro, cioè A è inscritto in B, B in C e C in A: perciò (n.º 98) i vertici di questi tre ettagoni insieme alle rette r costituiscono una Cfz. 21_3, appartenente alla F_7.

42. Oltre ai vertici 123, 234,... 712; 135, 357,... 613; 147, 473,... 514 dei poligoni P_1, P_2, P_3, la Cfz. F_7 contiene altri $\varphi=14$ punti (n.º 6), che sono intersezioni scambievoli di risultanti cicliche d'ordine differente e sono distribuiti due a due sulle ventuna rette r; esse sono i seguenti:

punti	124 / $a \cdot bc$	134 / $ab \cdot c$	situati sulla retta	14 / abc
"	457 / $d \cdot ef$	467 / $de \cdot f$	" "	47 / def
"	713 / $g \cdot ab$	723 / $ga \cdot b$	" "	37 / gab

$$\text{punti}\left\{\begin{matrix} 346 & 356 \\ c\cdot de & cd\cdot e\end{matrix}\right. \quad \text{situati sulla retta}\left\{\begin{matrix} 36 \\ cde\end{matrix}\right.$$

$$\text{„}\left\{\begin{matrix} 672 & 612 \\ f\cdot ga & fg\cdot a\end{matrix}\right. \quad \text{„ \quad „}\left\{\begin{matrix} 62 \\ fga\end{matrix}\right.$$

$$\text{„}\left\{\begin{matrix} 235 & 245 \\ b\cdot cd & bc\cdot d\end{matrix}\right. \quad \text{„ \quad „}\left\{\begin{matrix} 25 \\ bcd\end{matrix}\right.$$

$$\text{„}\left\{\begin{matrix} 561 & 571 \\ e\cdot fg & ef\cdot g\end{matrix}\right. \quad \text{„ \quad „}\left\{\begin{matrix} 51 \\ efg\end{matrix}\right.$$

e costituiscono, insieme alle r, una Cfz. $(2, 3)_{14}^{21}$.

Questi *quattordici* punti sono vertici di tre (e tre soli) quatordecagoni semplici α, β, γ *appartenenti* alla Cfz. (ossia aventi tutt'i vertici e tutt'i lati appartenenti alla medesima) cioè

$$P_{23} \equiv 13726157463524 \equiv (BC) \equiv \alpha$$
$$P_{31} \equiv 14365173254762 \equiv (CA) \equiv \beta$$
$$P_{12} \equiv 12457134672356 \equiv (AB) \equiv \gamma.$$

Dei tre quatordecagoni (*associati*) α, β, γ il primo corrisponde ad A, in quanto è doppiamente inscritto in questo ettagono ed ha inoltre per lati i lati di B e di C; e nello stesso modo sono corrispondenti β e B, γ e C.

43. La medesima Cfz. F_7 corrisponde identicamente a 360 differenti sistemi di 7 forze equilibrate (compreso il dato). Essa contiene trecentosessanta ettagoni analoghi a P_1 (poligoni-forze) e altrettanti analoghi a P_2 e a P_3 (poligoni di risultanti binarie e ternarie) i quali però si riducono effettivamente a soli 360 poligoni differenti e si separano in tre distinte serie di *centoventi* ettagoni

$$\begin{matrix} A_1 & A_2\ldots & A_i\ldots & A_{120} \\ B_1 & B_2\ldots & B_i\ldots & B_{120} \\ C_1 & C_2\ldots & C_i\ldots & C_{120} \end{matrix}$$

ossia in *centoventi terne* di ettagoni *ciclicamente inscritti*

$$(A_i,\ B_i,\ C_i) \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ldots\ 120.$$

E siccome una terna (A_i, B_i, C_i) assorbe tutte quante le rette, ma soli 21 punti, della Cfz., essa individua un gruppo p_i di 14 punti residui, i quali son vertici di tre quatordecagoni $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ associati e appartenenti alla Cfz.

I 35 punti della F_7 si possono dunque in 120 maniere diverse separare in un gruppo τ_i di 21 punti e nel corrispondente gruppo ρ_i di 14 punti residui. Ogni gruppo τ_i si scinde, come s'è veduto, in tre ettagoni ciclicamente inscritti A_i, B_i, C_i e ogni gruppo ρ_i contiene tre quatordecagoni associati α_i, β_i, γ_i i quali uno ad uno corrispondono, nel senso indicato superiormente, a quegli ettagoni.

I 21 punti di ogni gruppo τ_i e le 21 rette r costituiscono una Cfz. 21_3; i 14 punti di ogni gruppo ρ_i e le 21 rette r costituiscono una Cfz. $(2, 3)_{14}^{21}$. Nella F_7 vi sono dunque 130 distinte Cfz.^{i} 21_3 ed altrettante corrispondenti Cfz.^{i} $(2, 3)_{14}^{21}$.

44. La Cfz. F_7 si scinde in 7 modi in una Cfz. $F_6 \equiv (4, 3)_{20}^{15}$ e in un corrispondente silatero completo inscritto Q_6, cioè:

$$\begin{array}{ll}
F_6^{(7)} \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6) & Q_6^{(7)} \equiv 7\cdot(1, 2, 3, 4, 5, 6) \\
F_6^{(6)} \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 7) & Q_6^{(6)} \equiv 6\cdot(1, 2, 3, 4, 5, 7) \\
F_6^{(5)} \equiv (1, 2, 3, 4, 6, 7) & Q_6^{(5)} \equiv 5\cdot(1, 2, 3, 4, 6, 7) \\
F_6^{(4)} \equiv (1, 2, 3, 5, 6, 7) & Q_6^{(4)} \equiv 4\cdot(1, 2, 3, 5, 6, 7) \\
F_6^{(3)} \equiv (1, 2, 4, 5, 6, 7) & Q_6^{(3)} \equiv 3\cdot(1, 2, 4, 5, 6, 7) \\
F_6^{(2)} \equiv (1, 3, 4, 5, 6, 7) & Q_6^{(2)} \equiv 2\cdot(1, 3, 4, 5, 6, 7) \\
F_6^{(1)} \equiv (2, 3, 4, 5, 6, 7) & Q_6^{(1)} \equiv 1\cdot(2, 3, 4, 5, 6, 7).
\end{array}$$

Essa può in 420 maniere riguardarsi come la *Cfz.* $F_{6,1}$ *corrispondente all'equilibrio dell'esagono articolato.*

Contiene 840 esagoni semplici; i quali si distribuiscono in due serie, tali che ogni esagono della prima è circoscritto a un esagono (corrispondente) della seconda, ossia si aggruppano in 420 coppie di esagoni corrispondenti. Le quattrocentoventi coppie si separano in 7 sistemi di 60 coppie, in ciascun dei quali queste si combinano in *sei* gruppi di *dieci* coppie d'esagoni corrispondenti, dotati di certe proprietà comuni, o anche si combinano in *quattro* gruppi di *quindici* coppie, ecc.

Con le rette r si formano 105 trilateri Δ (n.° 29) i cui vertici P sono punti estranei alla Cfz.; ogni trilatero è circoscritto a un triangolo $\overline{\Delta}$, che gli corrisponde univocamente, e i cui lati p sono rette estranee alla Cfz.; per es. se $\Delta \equiv 12\cdot 34\cdot 56$ il corrispondente triangolo inscritto è $\Delta \equiv 712\cdot 734\cdot 756$. Vi sono dunque nella Cfz. centocinque paja $(\Delta, \overline{\Delta})$ di *trilateri-triangoli* corrispondenti, le quali si aggruppano in 7 sistemi di 15 paja dotati di certe proprietà comuni; ecc. ecc.

Questi trilateri Δ si possono rappresentare col simbolo $\Delta_{ij}^{(\alpha 7)}$, intendendosi che nel trilatero Δ_{ij} (n.° 29) l'indice α ($\alpha = 1, 2, 3, \ldots 7$) va sostituito con l'indice fisso 7. I corrispondenti triangoli $\overline{\Delta}$ si possono analogamente rappresentare col simbolo $\overline{\Delta_{ij}^{(\alpha 7)}}$.

45. La F_7 si può anche scindere nel gruppo

$$
\begin{aligned}
F_5 &\equiv (1, 2, 3, 4, 5) \equiv 10_3 \\
Q_5 &\equiv 6.(1, 2, 3, 4, 5) \\
Q'_5 &\equiv 7.(1, 2, 3, 4, 5) \\
r &\equiv 67;
\end{aligned}
$$

nel quale i due cinquilateri completi (*conjugati*) Q_5 e Q'_5, sono ordinatamente inscritti nella Cfz. F_5 ed hanno i lati omologhi concorrenti sulla retta $r \equiv 67$. Essa contiene 21 differenti gruppi, simili a questo, i quali uno ad uno corrispondono alle 21 rette r; e può in 252 modi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{5,2}$ *corrispondente a 5 forze equilibrate connesse da 2 poligoni funicolari differenti.*

Contiene 756 pentagoni semplici, che si distribuiscono in tre serie di 252, cioè:

$$
\left.
\begin{array}{llllll}
L_1 & L_2 \ldots & L_i \ldots & L'_1 & L'_2 \ldots & L'_i \ldots \\
M_1 & M_2 \ldots & M_i \ldots & M'_1 & M'_2 \ldots & M'_i \ldots \\
N_1 & N_2 \ldots & N_i \ldots & N'_1 & N'_2 \ldots & N'_i \ldots
\end{array}
\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, 126).
$$

Ogni pentagono L_i della prima serie è circoscritto a due pentagoni M_i, N_i (*corrispondenti* ad L_i e *conjugati* fra loro) appartenenti uno alla seconda e uno alla terza serie, e i lati dei quali s'incontrano due a due sopra una retta r.

In ciascuna serie i pentagoni si aggruppano in 126 coppie. Ogni coppia (L_i, L'_i) appartenente alla prima serie è costituita di due pentagoni *ciclicamente inscritti;* ogni coppia (M_i, M'_i) o (N_i, N'_i) appartenente alle altre due serie è costituita di due pentagoni *ciclicamente diagonali.* Le coppie conjugate (M_i, M'_i), (N_i, N'_i) corrispondono alla coppia (L_i, L'_i).

Ognuna delle ventuna rette r individua *sei* coppie di pentagoni ciclicamente inscritti e le *sei* corrispondenti paja di coppie conjugate di pentagoni ciclicamente diagonali.

46. La $F_7 \equiv (5,\ 3)_{35}^{21}$ si spezza nel gruppo

$$\begin{aligned} F_4 &\equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ Q_4 &\equiv 5 \cdot (1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ Q'_4 &\equiv 6 \cdot (1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ Q''_4 &\equiv 7 \cdot (1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ F_3 &\equiv (5,\ 6,\ 7); \end{aligned}$$

nel quale i tre quadrilateri (conjugati) Q_4, Q'_4, Q''_4 sono ordinatamente inscritti nel quadrangolo completo F_4 e hanno i lati omologhi segantisi due a due sulle tre rette r, che concorrono nel punto $G \equiv 567$.

La Cfz. contiene 35 gruppi differenti analoghi a questo, i quali corrispondono uno ad uno ai 35 punti G. Essa può in 105 modi diversi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{4,3}$ *di 4 forze equilibrate connesse da 3 poligoni funicolari.*

Contiene 420 quadrangoli *semplici,* distribuiti in quattro serie di 105, cioè

$$\begin{array}{llll} k_1, & k_2, \ldots & k_i, \ldots & k_{105} \\ l_1, & l_2, \ldots & l_i, \ldots & l_{105} \\ m_1, & m_2, \ldots & m_i, \ldots & m_{105} \\ n_1, & n_2, \ldots & n_i, \ldots & n_{105}; \end{array}$$

ogni quadrangolo k_i della prima serie è circoscritto a uno l_i, a uno m_i e a uno n_i delle altre serie; i lati di questi tre quadrangoli (costituenti una *terna di quadrangoli conjugati, corrispondente* a k_i) s'incontrano due a due sopra tre rette r concorrenti in un punto G.

Ogni punto della Cfz. individua *tre* quadrangoli k e le *tre* corrispondenti terne di quadrangoli conjugati (l, m, n).

47. La Cfz. F_7 si scinde nel gruppo

$$F_3 \equiv (1,\ 2,\ 3), \qquad F_4 \equiv (4,\ 5,\ 6,\ 7)$$
$$Q_3 \equiv 4 \cdot 123, \qquad Q'_3 \equiv 5 \cdot 123, \qquad Q''_3 \equiv 6 \cdot 123, \qquad Q'''_3 \equiv 7 \cdot 123.$$

I quattro triangoli conjugati Q_3 Q'_3 Q''_3 Q'''_3 sono a due a due variamente omologici; centro comune e raggi comuni d'omologia sono il punto $G \equiv 123$ e le rette r della terna (1, 2, 3); gli assi d'omologia sono i sei lati del quadrangolo completo F_4.

La F_7 contiene 35 differenti gruppi simili a questo, i quali corrispondono uno ad uno ai 35 punti G; e può in altrettanti modi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{3,4}$ *di 3 forze equilibrate connesse da 4 poligoni funicolari.*

Contiene 140 triangoli di vertici G e lati r (*triangoli* λ), i quali si separano in 70 *paja di triangoli associati,* per esempio

$$\lambda \equiv 7 \cdot 123 \equiv 712 \cdot 713 \cdot 723$$

$$\lambda' \equiv 7 \cdot 456 \equiv 745 \cdot 746 \cdot 756.$$

Se quattro triangoli λ appartengono a uno stesso quadrangolo completo, i quattro triangoli associati sono due a due omologici e viceversa.

48. Si rileva dagli ultimi due numeri che mentre un punto G individua le *tre* rette in esso concorrenti e i *sei* lati del quadrangolo corrispondente (complementare), le rimanenti *dodici* rette r si aggruppano (in una sola maniera) sia in una terna di quadrangoli semplici conjugati, sia in una quaterna di triangoli λ conjugati; i lati omologhi di quelli s'incontrano due a due sulle tre r concorrenti in G, i lati omologhi di questi s'incontrano due a due sopra i sei lati del quadrangolo corrispondente a G.

Es. 6.° Configurazione di 8 forze equilibrate nel piano. Equilibrio dell'ettagono articolato.

$m = 8$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $F_8 \equiv (6,\ 3)_{56}^{28}$

49. Le ventotto rette r della Cfz. $F_8 \equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8)$ sono:

le linee d'azione . . .	12	23	34	45	56	67	78	81
delle forze date . . .	a	b	c	d	e	f	g	h
le linee d'azione . . .	13	35	57	71	24	46	68	82
delle ris. binarie . . .	ab	cd	ef	gh	bc	de	fg	ha
le linee d'azione . . .	14	47	72	25	58	83	36	61
delle ris. ternarie . . .	abc	def	gha	bcd	efg	hab	cde	fgh
la linee d'azione	15	26	37	48				
delle ris. quaternarie . . .	$abcd$	$bcde$	$cdef$	$defg$				
	$\equiv efgh$	$fgha$	$ghab$	$habc$				

Il poligono-forze P_1 coincide con l'ottagono semplice (n.° 18)

$$P_1 \equiv 12345678;$$

il poligono P_2 delle risultanti binarie si spezza nei due quadrangoli semplici (conjugati)

$$P_2 \equiv (p_2 \equiv 1357;\ \ p'_2 \equiv 2468);$$

il poligono P_3 delle risultanti ternarie coincide con l'ottagono semplice

$$P_3 \equiv 14725836;$$

il poligono P_4 delle risultanti quaternarie degenera nel quadrilatero

$$P_4 \equiv 15 \cdot 26 \cdot 37 \cdot 48 \equiv \delta$$

del quale i lati, ma non i vertici, appartengono alla Cfz. F_8.

I lati di p_2 passano pei vertici dispari di P_1 e di P_3; quelli di p'_2 pei vertici pari degli stessi due poligoni. Le diagonali di p_2 sono $r \equiv 15$ e $r \equiv 37$, quelle di p'_2 sono $r \equiv 26$ e $r \equiv 48$; cioè coincidono coi quattro lati di P_4.

Oltre ai vertici di P_1, p_2, p'_2, P_3, la Cfz. contiene altri $\varphi = 32$ punti (n.° 6), intersezioni scambievoli di risultanti cicliche d'ordine i differente (incluso $i = 1$); i due 16-goni semplici

$$P_{1,3} \equiv 1276341832547856$$

$$P'_{1,3} \equiv 1256327834761854,$$

i cui lati coincidono alternativamente con quelli di P_1 e di P_3, rappresentano coi loro vertici questi 32 punti residui.

50. La F_8 può in duemilacinquecentoventi maniere riguardarsi come la Cfz. corrispondente a un sistema equilibrato di 8 forze (incluso il dato: a, b, c,... h). I 2520 ottagoni (semplici) ch'essa contiene sono *associati* due a due per modo, che, considerato l'uno come poligono-forze, l'altro rappresenta il corrispondente poligono delle risultanti ternarie, e, considerati ambedue come poligoni-forze, ad ambedue corrisponde come poligono P_2 l'identica coppia (p_2, p'_2) di quadrangoli (semplici) conjugati, e come poligono P_4 l'identico quadrilatero δ.

Il sistema (P_1, P_2, P_3, P_4), sopra descritto, assorbendo tutte quante le rette r, ma soli 24 punti G, individua un gruppo τ_i di 24 punti fondamentali e il corrispondente gruppo ρ_i di 32 punti residui. Con le rette r si formano 1260 sistemi analoghi a quello; onde i punti G si separano in altrettanti modi in due gruppi τ_i, ρ_i di 24 e di 32 punti rispettivamente.

51. Un pajo di quadrangoli (completi) complementari (v. n.° 53, gruppo IV) contiene *nove* coppie di quadrangoli (semplici) conjugati, che appartengono ad altrettanti ottagoni P_1 (tabella I, n.° 52). Vi sono 35 paja di quadrangoli complementari (tabella II, n.° 52) epperò anche 315 coppie (p_2, p'_2) di quadrangoli (semplici) conjugati. E poichè a ogni ottagono P_1 corrisponde una di queste coppie, ogni coppia (p_2, p'_2) di quadrangoli (semplici) conjugati corri-

sponde a $\frac{2520}{315}=8$ ottagoni differenti (tabella III, n.° 52). Dunque gli ottagoni della Cfz. si separano in 8 gruppi di 315 ottagoni ciascuno, i quali, considerati come poligoni-forze, conducono a differenti poligoni $P_2 \equiv (p_2, p'_2)$ di risultanti binarie, o anche si separano in 315 gruppi di 8, conducenti a un identico $P_2 \equiv (p_2, p'_2)$.

52. Una retta r è lato comune di quindici quadrilateri δ; un quadrilatero δ contiene quattro rette r, dunque vi sono $\frac{28 \cdot 15}{4}=105$ quadrilateri δ i cui lati, ma non i vertici, appartengono alla Cfz. E poichè ogni ottagono P_1 ne individua uno, ogni δ corrisponde a $\frac{2520}{105}=24$ ottagoni differenti (tabella III). Gli ottagoni della Cfz. si separano dunque in 105 gruppi di 24 ottagoni (poligoni-forze P_1) conducenti all'identico quadrilatero δ (poligono P_4 di risultanti quaternarie) ovvero anche in 24 gruppi di 105 ottagoni P_1, conducenti a differenti quadrilateri $\delta (\equiv P_4)$.

Questi quadrilateri si possono esprimere col simbolo $\delta_{\alpha.ij} \equiv \alpha 8 \cdot \Delta_{ij}^{(\alpha 7)}$ ove $\alpha = 1, 2, \ldots 7$; purchè s'intenda che le quattro rette di $\delta_{\alpha.ij}$ siano la $r \equiv \alpha 8$ e i lati del trilatero $\Delta_{ij}^{(\alpha 7)}$ definito al n.° 44; così per esempio $\delta_{5.36} \equiv 58 \cdot 12 \cdot 37 \cdot 46$, $\delta_{7.23} \equiv 78 \cdot 14 \cdot 25 \cdot 36$, ecc.

Tabella I.

Tipo delle 9 *coppie* (p, p') *di quadrangoli* (*semplici*) *conjugati, contenute in un pajo* (1, 3, 5, 7) (2, 4, 6, 8) *di quadrangoli* (*completi*) *complementari, e dei* 9 *ottagoni cui esse appartengono.*

(1, 3, 5, 7) (2, 4, 6, 8)

(p, p')	1357, 2468	1537, 2468	1375, 2468	(p, p')
P_1	12345678	12543678	12347658	P_1
(p, p')	1357, 2648	1537, 2648	1375, 2648	(p, p')
P_1	12365478	12563478	12367458	P_1
(p, p')	1357, 2486	1537, 2486	1375, 2486	(p, p')
P_1	12345876	12543876	12347856	P_1

TABELLA II

contenente le 35 paja di quadrangoli (completi) complementari.

(1, 2, 3, 4) (5, 6, 7, 8)	(1, 2, 3, 5) (4, 6, 7, 8)	(1, 2, 3, 6) (4, 5, 7, 8)	(1, 2, 3, 7) (4, 5, 6, 8)	(1, 2, 3, 8) (4, 5, 6, 7)
(1, 2, 4, 5) (3, 6, 7, 8)	(1, 2, 4, 6) (3, 5, 7, 8)	(1, 2, 4, 7) (3, 5, 6, 8)	(1, 2, 4, 8) (3, 5, 6, 7)	(1, 2, 5, 6) (3, 4, 7, 8)
(1, 2, 5, 7) (3, 4, 6, 8)	(1, 2, 5, 8) (3, 4, 6, 7)	(1, 2, 6, 7) (3, 4, 5, 8)	(1, 2, 6, 8) (3, 4, 5, 7)	(1, 2, 7, 8) (3, 4, 5, 6)
(1, 3, 4, 5) (2, 6, 7, 8)	(1, 3, 4, 6) (2, 5, 7, 8)	(1, 3, 4, 7) (2, 5, 6, 8)	(1, 3, 4, 8) (2, 5, 6, 7)	(1, 3, 5, 6) (2, 4, 7, 8)
(1, 3, 5, 7) (2, 4, 6, 8)	(1, 3, 5, 8) (2, 4; 6, 7)	(1, 3, 6, 7) (2, 4, 5, 8)	(1, 3, 6, 8) (2, 4, 5, 7)	(1, 3, 7, 8) (2, 4, 5, 6)
(1, 4, 5, 6) (2, 3, 7, 8)	(1, 4, 5, 7) (2, 3, 6, 8)	(1, 4, 5, 8) (2, 3, 6, 7)	(1, 4, 6, 7) (2, 3, 5, 8)	(1, 4, 6, 8) (2, 3, 5, 7)
(1, 4, 7, 8) (2, 3, 5, 6)	(1, 5, 6, 7) (2, 3, 4, 8)	(1, 5, 6, 8) (2, 3, 4, 7)	(1, 5, 7, 8) (2, 3, 4, 6)	(1, 6, 7, 8) (2, 3, 4, 5)

TABELLA III.

Tipo degli 8 *ottagoni*
corrispondenti a una stessa coppia (p, p') *di quadrangoli (semplici) conjugati*
e tipo dei 24 *ottagoni corrispondenti a uno stesso quadrilatero* δ.

α	12345678	13245768	13425786
β	32547618	23546718	43528716
α'	52741638	53641728	53821746
β'	72143658	63142758	83124756
γ	12745638	13645728	13825746
ε	32147658	23146758	43128756
γ'	52341678	53241768	53421786
ε'	72543618	63542718	83524716
	$(p, p') \equiv (1357 \cdot 2468)$	$(1256 \cdot 3478)$	$(1458 \cdot 3276)$

$$\delta \equiv 15 \cdot 37 \cdot 26 \cdot 48$$

NB. In ogni colonna gli ottagoni α, α'; β, β'; γ, γ'; ε, ε' sono *associati* (n.° 50).

53. La Cfz. $F_8 \equiv (6, 3)^{28}_{56}$ contiene inoltre (n.° 8) i seguenti gruppi

$$\text{I.}\ \begin{cases} F_7 \equiv \ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \equiv (5, 3)^{21}_{35} \\ Q_7 \equiv 8 \cdot (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \end{cases}$$

$$\text{II.}\ \begin{cases} F_6 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6) \equiv (4, 3)^{15}_{20} \\ Q_6 \equiv 7 \cdot (1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ Q'_6 \equiv 8 \cdot (1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ r \equiv 78 \end{cases} \qquad \text{III.}\ \begin{cases} F_5 \equiv (1, 2, 3, 4, 5) \equiv (3, 3)^{10}_{10} \equiv 10_3 \\ Q_5 \equiv 6 \cdot (1, 2, 3, 4, 5) \\ Q'_5 \equiv 7 \cdot (1, 2, 3, 4, 5) \\ Q''_5 \equiv 8 \cdot (1, 2, 3, 4, 5) \\ F_3 \equiv (6, 7, 8) \equiv G \end{cases}$$

$$\text{IV.}\ \begin{cases} F_4 \equiv \ (1, 2, 3, 4) \\ Q_4 \equiv 5 \cdot (1, 2, 3, 4) \\ Q'_4 \equiv 6 \cdot (1, 2, 3, 4) \\ Q''_4 \equiv 7 \cdot (1, 2, 3, 4) \\ Q'''_4 \equiv 8 \cdot (1, 2, 3, 4) \\ F'_4 \equiv \ (5, 6, 7, 8) \end{cases} \qquad \text{V.}\ \begin{cases} F_3 \equiv (1, 2, 3) \equiv G \\ Q_3 \equiv 4 \cdot (1, 2, 3) \\ Q'_3 \equiv 5 \cdot (1, 2, 3) \\ Q''_3 \equiv 6 \cdot (1, 2, 3) \\ Q'''_3 \equiv 7 \cdot (1, 2, 3) \\ Q^{\text{IV}}_3 \equiv 8 \cdot (1, 2, 3) \\ F_5 \equiv (4, 5, 6, 7, 8) \equiv 10_3. \end{cases}$$

54. Vi sono *otto* differenti gruppi I. Onde la F_8 contiene 960 Cfz. 21_3 circoscritte rispettivamente ad altrettanti settilateri completi; contiene $8 \cdot 120$ terne di ettagoni (semplici) ciclicamente inscritti fra loro e ordinatamente circoscritti ad altrettante terne di ettagoni (semplici) ciclicamente diagonali, ecc., ecc.; e può in $8 \cdot 360$ maniere diverse riguardarsi come la *Cfz.* $F_{7,1}$ *corrispondente all' equilibrio dell' ettagono articolato.*

55. Vi sono 28 gruppi II, corrispondenti uno ad uno alle 28 rette r. La F_8 contiene 5040 esagoni semplici, che si separano in tre serie, ecc.; e può in 1680 maniere riguardarsi come la *Cfz.* $F_{6,2}$ *di 6 forze equilibrate connesse da 2 poligoni funicolari.*

56. Esistono 56 gruppi III, corrispondenti uno ad uno ai 56 punti G. La F_8 contiene dunque 56 Cfz.$^{\text{i}}$ 10_3, 336 coppie di pentagoni (semplici) ciclicamente inscritti fra loro e ordinatamente circoscritti ad altrettante corrispondenti terne di coppie di pentagoni (semplici) ciclicamente diagonali, e può in 672 modi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{5,3}$ *di 5 forze equilibrate connesse da 3 poligoni funicolari.*

57. Vi sono 70 gruppi IV. La F_8 può in 210 modi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{4,4}$ *di 4 forze equilibrate connesse da 4 poligoni funicolari.* — I 70 quadrangoli completi contenuti nella Cfz. F_8 si separano (v. tab. II, n.° 52) in 35 paja di quadrangoli (completi) complementari (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8). Un pajo qualsivoglia assorbe *dodici* rette r; le altre *sedici* r si aggruppano, in due maniere diverse, in una quaterna di quadrilateri completi conjugati, inscritti in uno dei due quadrangoli; i loro lati omologhi si segano due a due sui lati del quadrangolo (completo) complementare.

58. Vi sono 56 gruppi V, corrispondenti uno ad uno ai punti G. La F_8 può in altrettanti modi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{3,5}$ *di 3 forze equilibrate connesse da 5 poligoni funicolari.* Essa contiene 280 triangoli λ (triangoli i cui lati e i cui vertici appartengono alla Cfz.); ogni punto G ne determina *cinque,* i quali due a due sono variamente omologici: centro comune e raggi comuni d'omologia sono il punto G e le tre rette r ivi concorrenti; assi di omologia sono le *dieci* rette della Cfz. $F_5 \equiv 10_3$ che appartiene al gruppo V corrispondente a G. I gruppi V sono complementari uno ad uno ai gruppi III.

Es. 7.° Configurazione di 9 forze equilibrate nel piano. Equilibrio dell'ottagono articolato.

$m=9$ $\qquad\qquad\qquad F_9 \equiv (7,\ 3)^{36}_{84}.$

59. Le trentasei rette r della Cfz. $F_9 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ sono:

le linee d'azione . .	12	23	34	45	56	67	78	89	91
delle forze date . . .	a	b	c	d	e	f	g	h	i
le linee d'azione . .	13	35	57	79	92	24	46	68	81
delle ris. binarie . .	ab	cd	ef	gh	ia	bc	de	fg	hi
le linee d'azione . .	14	47	71	25	58	82	36	69	93
delle ris. ternarie . .	abc	def	ghi	bcd	efg	hia	cde	fgh	iab
le linee d'azione . .	15	59	94	48	83	37	72	26	61
delle ris. quaternarie	$abcd$	$efgh$	$iabc$	$defg$	$hiab$	$cdef$	$ghia$	$bcde$	$fghi$

Il poligono-forze P_1 e i poligoni P_2, P_4 delle risultanti binarie e quaternarie coincidono rispettivamente coi tre ennagoni semplici

$$P_1 \equiv 123456789 \equiv A$$
$$P_2 \equiv 135792468 \equiv B$$
$$P_4 \equiv 159483726 \equiv C$$

i quali, presi nell'ordine (A, B, C) sono ciclicamente inscritti fra loro: cioè A è inscritto in B, B in C e C in A; e perciò i lati e i vertici di questi ennagoni formano una Cfz. 27_3 (n.° 98). Il poligono P_3 delle risultanti ternarie degenera in una *tripla di punti conjugati* della Cfz. cioè

$$P_3 \equiv (147,\ 258,\ 369) \equiv \tau;$$

con che s'intenda che i 9 lati di P_3 si separano in tre terne (conjugate) di rette r, rispettivamente concorrenti nei detti punti.

60. Oltre alla tripla τ di punti conjugati e ai vertici dei poligoni A, B, C, la Cfz. contiene altri $\varphi = 54$ punti (n.° 6), intersezioni scambievoli di risultanti cicliche di diverso ordine, i quali si trovano sei a sei sui nove raggi concorrenti in τ. Essi sono:

$$\overbrace{\begin{matrix} 142 & 143 & 145 & 146 & 148 & 149 \\ 472 & 473 & 475 & 476 & 478 & 479 \\ 712 & 713 & 715 & 716 & 718 & 719 \end{matrix}}^{(1,\ 4,\ 7)} \qquad \overbrace{\begin{matrix} 251 & 253 & 254 & 256 & 257 & 259 \\ 581 & 583 & 584 & 586 & 587 & 589 \\ 821 & 823 & 824 & 826 & 827 & 829 \end{matrix}}^{(2,\ 5,\ 8)}$$

$$\overbrace{\begin{matrix} 361 & 362 & 364 & 365 & 367 & 368 \\ 691 & 692 & 694 & 695 & 697 & 698 \\ 931 & 932 & 934 & 935 & 937 & 938 \end{matrix}}^{(3,\ 6,\ 9)}$$

e possono anche distribuirsi, come vertici, in tre terne di esagoni semplici appartenenti alla Cfz., cioè

$$\begin{array}{llll} & 147 & 258 & 369 \\ P_{12} \equiv (& 235689; & 346791; & 124578) \\ P_{24} \equiv (& 359268; & 137946; & 572481) \\ P_{41} \equiv (& 598326; & 943761; & 154872). \end{array}$$

I tre esagoni che si trovano in un'orizzontale hanno per lati i lati di due ennagoni del gruppo (P_1, P_2, P_4); per es. quelli dell'orizzontale P_{12} hanno i lati di P_1 e di P_2. I tre esagoni che si trovano in una colonna appartengono a una stessa Cfz. $(4, 3)_{20}^{15}$ e vi formano un gruppo di esagoni *consociati* (n.° 27); ad esempio quelli della prima colonna sono consociati nella Cfz F_6 individuata dal punto 147 (n.° 67) — le altre due colonne corrispondono così ai due punti che con 147 formano la tripla $\tau \equiv 147,\ 258,\ 369$.

61. Compreso il sistema $(a, b, c, \ldots h, i)$ che l'ha somministrata, la Cfz. F_9 corrisponde identicamente a 20160 sistemi diversi di 9 forze equilibrate; e contiene altrettanti ennagoni semplici, i quali si separano in 6720 *terne* $(A_i\ B_i\ C_i) \equiv \varepsilon_i$ di ennagoni *ciclicamente inscritti*. Se un ennagono (per es. B_i) di una terna si riguarda come poligono-forze P_1, gli altri due, presi ciclicamente (cioè C_i e A_i) rappresentano i corrispondenti poligoni P_2 e P_4 delle risultanti binarie e quaternarie; il poligono P_3 delle risultanti ternarie invece è in ogni modo rappresentato da una stessa *tripla di punti conjugati* τ_i, la quale, come ora si vedrà, non sempre varia con la terna ε_i.

Infatti ogni terna ε_i individua una tripla τ; ma poichè un punto della Cfz., per es. 789, appartiene a *dieci* τ diverse, cioè:

$$\begin{array}{ccccc} 123\cdot456\cdot789 & 124\cdot356\cdot789 & 125\cdot346\cdot789 & 126\cdot345\cdot789 & 234\cdot156\cdot789 \\ 235\cdot146\cdot789 & 145\cdot236\cdot789 & 256\cdot314\cdot789 & 246\cdot315\cdot789 & 245\cdot316\cdot789, \end{array}$$

e ogni τ contiene *tre* punti della Cfz., il numero di tutte le triple è $\frac{84\cdot10}{3}=280$, epperò una stessa tripla τ di punti conjugati corrisponde a $\frac{6720}{280}=24$ differenti terne ε di ennagoni ciclicamente inscritti (*). Ne segue che i suddetti 20160 sistemi di forze equilibrate si separano in 280 gruppi di 72 sistemi, conducenti allo stesso poligono (degenere) P_3 di risultanti ternarie. I poligoni P_2 e P_4 delle risultanti binarie e quaternarie

(*) Per es. la tripla di punti conjugati $\tau \equiv 147.258.369$ corrisponde alle seguenti 24 terne ε di ennagoni ciclicamente inscritti:

$\varepsilon_1 \equiv$	123456789	135792468	159483726	$\varepsilon_{13} \equiv$	132465798	126783459	168492735
$\varepsilon_2 \equiv$	123459786	135762498	156483729	$\varepsilon_{14} \equiv$	132495768	129783456	198462735
$\varepsilon_3 \equiv$	129453786	195762438	156489723	$\varepsilon_{15} \equiv$	192435768	123789456	138462795
$\varepsilon_4 \equiv$	129456783	195732468	153489726	$\varepsilon_{16} \equiv$	192465738	126789453	168432795
$\varepsilon_5 \equiv$	126459783	165732498	153486729	$\varepsilon_{17} \equiv$	162495738	129786453	198432765
$\varepsilon_6 \equiv$	126453789	165792438	159486723	$\varepsilon_{18} \equiv$	162435798	123786459	138492765
$\varepsilon_7 \equiv$	123756489	135492768	159783426	$\varepsilon_{19} \equiv$	132765498	126483759	168792435
$\varepsilon_8 \equiv$	123759486	135462798	156783429	$\varepsilon_{20} \equiv$	132795468	129483756	198762435
$\varepsilon_9 \equiv$	129753486	195462738	156789423	$\varepsilon_{21} \equiv$	192735468	123489756	138762495
$\varepsilon_{10} \equiv$	129756483	195432768	153789426	$\varepsilon_{22} \equiv$	192765438	126489753	168732495
$\varepsilon_{11} \equiv$	126759483	165432798	153786429	$\varepsilon_{23} \equiv$	162795438	129486753	198732465
$\varepsilon_{12} \equiv$	126753489	165492738	159786423	$\varepsilon_{24} \equiv$	162735498	123486759	138792465

relativi ad un sistema qualsivoglia, si trovano fra i 72 ennagoni del gruppo cui appartiene il poligono-forze P_1, che corrisponde a quel sistema; e completano quella delle 24 terne ε del gruppo, che è individuata da P_1.

62. Una tripla τ di punti conjugati individua tre terne conjugate di rette r e il gruppo ρ dei 54 punti che sulle medesime sono distribuiti; i 27 punti del rimanente gruppo σ costituiscono, insieme alle restanti rette r, una Cfz. 27_3 e si distribuiscono in 24 maniere diverse come vertici di tre ennagoni semplici ciclicamente inscritti. Coi punti della Cfz. $F_9 \equiv (7,\ 3)^{36}_{84}$ si formano 280 di tali gruppi $(\tau,\ \rho,\ \sigma)$; e altrettante sono le Cfz. 27_3 che si possono formare coi suoi punti e con le sue rette fondamentali.

63. La Cfz. $F_9 \equiv (7,\ 3)^{36}_{84}$ si scinde inoltre nei seguenti gruppi principali (n.° 8):

$$\text{I.}\ \left\{\begin{array}{l} F_8 \equiv \ (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8) \equiv (6,\ 3)^{28}_{56} \\ Q_8 \equiv 9\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8) \end{array}\right.$$

$$\text{II.}\ \left\{\begin{array}{l} F_7 \equiv \ (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7) \equiv (5,\ 3)^{21}_{35} \\ Q_7 \equiv 8\cdot(\qquad\qquad\qquad) \\ Q'_7 \equiv 9\cdot(\qquad\qquad\qquad) \\ r \equiv 89 \end{array}\right.$$

$$\text{III.}\ \left\{\begin{array}{l} F_6 \equiv \ (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6) \equiv (4,\ 3)^{15}_{20} \\ Q_6 \equiv 7\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6) \\ Q'_6 \equiv 8\cdot(\qquad\qquad\qquad) \\ Q''_6 \equiv 9\cdot(\qquad\qquad\qquad) \\ F_3 \equiv \ (7,\ 8,\ 9) \equiv G \end{array}\right.
\qquad
\text{VI.}\ \left\{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{F_3 \equiv (7,\ 8,\ 9) \equiv G} \\ Q_3 \equiv 1\cdot 789 & Q'''_3 \equiv 4\cdot 789 \\ Q'_3 \equiv 2\cdot 789 & Q^{\text{V}}_3 \equiv 5\cdot 789 \\ Q''_3 \equiv 3\cdot 789 & Q^{\text{V}}_3 \equiv 6\cdot 789 \\ \multicolumn{2}{l}{F_6 \equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6) \equiv (4,\ 3)^{15}_{20}} \end{array}\right.$$

$$\text{IV.}\ \left\{\begin{array}{l} F_5 \equiv \ (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \equiv 10_3 \\ Q_5 \equiv 6\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \\ Q'_5 \equiv 7\cdot(\qquad\qquad) \\ Q''_5 \equiv 8\cdot(\qquad\qquad) \\ Q'''_5 \equiv 9\cdot(\qquad\qquad) \\ F_4 \equiv \ (6,\ 7,\ 8,\ 9) \end{array}\right.
\qquad
\text{V.}\ \left\{\begin{array}{l} F_4 \equiv \ (6,\ 7,\ 8,\ 9) \\ Q_4 \equiv 1\cdot(6,\ 7,\ 8,\ 9) \\ Q'_4 \equiv 2\cdot(\qquad\qquad) \\ Q''_4 \equiv 3\cdot(\qquad\qquad) \\ Q'''_4 \equiv 4\cdot(\qquad\qquad) \\ Q^{\text{V}}_4 \equiv 5\cdot(\qquad\qquad) \\ F_5 \equiv \ (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \equiv 10_3 \end{array}\right.$$

64. Vi sono *nove* differenti gruppi del tipo I. La F_9 può dunque in 9×2520 maniere riguardarsi come la *Cfz.* $F_{8,1}$ *corrispondente all'equilibrio dell'ottagono articolato.* Essa contiene due distinte serie di 22680 ottagoni (semplici), tali che ogni ottagono della prima serie è circoscritto a un (corrispondente) ottagono della seconda; in altri termini vi sono ventiduemilaseicentottanta coppie di ottagoni corrispondenti, che a due a due sono associate, e le quali inoltre si separano in 9 sistemi di 2520 coppie, in ognun dei quali queste si combinano in 8 gruppi di 315 coppie d'ottagoni corrispondenti, ecc.

65. Le *trentasei* rette r si aggruppano in 945 quadrilateri ∂, i cui vertici P sono punti estranei alla Cfz. $(7,\ 3)_{84}^{36}$; ogni quadrilatero ∂ (per es. $12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78$) è circoscritto a un corrispondente quadrangolo $\overline{\partial}$ ($\equiv 912 \cdot 934 \cdot 956 \cdot 978$) i cui lati p sono rette estranee alla Cfz. — epperò la F_9 contiene 945 paja $(\partial,\ \overline{\partial})$ di quadrilateri-quadrangoli corrispondenti, le quali si distribuiscono in 9 sistemi di 105 paja, ecc., ecc.

I quadrilateri ∂ si possono rappresentare col simbolo $\partial_{\alpha.ij}^{(\beta 9)}$; purchè s'intenda che sul quadrilatero $\partial_{\alpha.ij}$ della Cfz. F_8 (n° 52) si operi la sostituzione $(\beta 9)$ cioè si ponga successivamente l'indice fisso 9 in luogo dell'indice $\beta = 1, 2, \ldots 9$. I corrispondenti quadrangoli $\overline{\partial}$ si possono allora rappresentare col simbolo $\overline{\partial_{\alpha.ij}^{(\beta 9)}}$.

66. I gruppi del tipo II sono *trentasei* e corrispondono univocamente alle rette r. La F_9 contiene dunque: 36 Cfz.^{i} $(5,\ 3)_{35}^{21}$; 36×120 Cfz.^{i} 21_3, circoscritte rispettivamente ad altrettante coppie di settilateri (completi) conjugati; 36×120 terne di ettagoni (semplici) ciclicamente inscritti fra loro e ordinatamente circoscritti ad altrettante corrispondenti coppie di terne conjugate d'ettagoni (semplici) ciclicamente diagonali (per es. i tre ettagoni ciclicamente inscritti

$$1234567, \qquad 1357246, \qquad 1526374$$

sono rispettivamente e ordinatamente circoscritti alle due terne conjugate

$$8 \cdot 1234567, \qquad 8 \cdot 1357246, \qquad 8 \cdot 1526374$$

e

$$9 \cdot 1234567, \qquad 9 \cdot 1357246, \qquad 9 \cdot 1526374$$

di ettagoni ciclicamente diagonali).

In 36×360 maniere la F_9 si può riguardare come la *Cfz.* $F_{7,2}$ *di 7 forze equilibrate connesse da 2 poligoni funicolari.*

67. I due gruppi III e VI sono complementari come pure la terna F_3 e la Cfz. F_6 in essi contenute. Nella F_9 vi sono 84 paja di gruppi complementari, del tipo (III, VI), le quali univocamente corrispondono agli 84 punti G.

Un punto G, per es. 789, entra in *dieci* triple τ; in altri termini esistono *dieci* paja di punti conjugati fra loro e conjugati a $G \equiv 789$: esse coincidono precisamente con le *dieci* coppie di punti che sono conjugati nella Cfz. $F_6 \equiv (4, 3)_{20}^{15} \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ corrispondente al punto $G \equiv 789$, ossia appartenente ai due gruppi (III, VI) individuati da questo punto.

Tolta la terna di raggi r concorrenti in un punto G e tolte le *quindici* rette r della Cfz. complementare F_6, le rimanenti *dieciotto* rette r si aggruppano in una sola maniera sia in una terna di silateri completi conjugati, sia in una sestupla di triangoli λ conjugati; i lati omologhi dei tre silateri s'incontrano due a due sui raggi r concorrenti in G e i loro vertici sono distribuiti sulle rette r della F_6 (i tre omologhi sopra una medesima r) — i lati omologhi dei sei triangoli λ si segano due a due sulle rette r della F_6 e i loro vertici sono distribuiti sui raggi r concorrenti in G (i sei omologhi sopra un medesimo raggio).

68. I 20160 esagoni (semplici) della F_9 si separano in una serie di 60×84 esagoni L e in una di altrettante corrispondenti terne d'esagoni conjugati; ogni esagono L è ordinatamente circoscritto ai tre esagoni della terna corrispondente.

I triangoli λ sono 504. Ogni punto G ne individua *sei* che sono due a due variamente omologici; centro e raggi comuni d'omologia sono il punto G e i tre raggi r che vi s'incrociano; assi d'omologia le *quindici* rette r della Cfz. F_6, che corrisponde a G.

La F_9 può riguardarsi in 5040 maniere come la *Cfz.* $F_{6,3}$ *di 6 forze equilibrate connesse da 3 poligoni funicolari;* e in 84 maniere come la *Cfz.* $F_{3,6}$ *di 3 forze equilibrate connesse da 6 poligoni funicolari.*

69. Anche i due gruppi IV e V sono complementari e complementari o corrispondenti la Cfz. F_5 e il quadrangolo completo F_4 in essi contenuti. Vi sono 126 paja di gruppi complementari, del tipo (IV, V); onde la F_9 contiene *centoventisei* quadrangoli completi F_4 e le *centoventisei* corrispondenti Cfz.[i] 10_3.

Un quadrangolo F_4 e la Cfz. complementare F_5 assorbono $6 + 10$ rette r. Le rimanenti 20 si distribuiscono in una sola maniera sia in una quaterna di cinquilateri (completi) conjugati, sia in una quintupla di quadrilateri (completi) conjugati; i lati omologhi dei quattro cinquilateri si segano due a due sui lati di F_4 e i loro vertici si trovano sulle rette della Cfz. F_5 — i lati omologhi dei cinque quadrilateri si segano due a due sulle rette della Cfz. F_5 e i loro vertici si trovano sui lati di F_4.

70. I pentagoni (semplici) della Cfz. F_9 si aggruppano in $6 \times 126 = 756$ coppie di pentagoni ciclicamente inscritti fra loro e ordinatamente circoscritti ad altrettante corrispondenti quaterne di coppie di pentagoni ciclicamente diagonali. I suoi quadrangoli (semplici) si separano in una serie di $3 \cdot 126 = 378$ quadrangoli K e in una serie di altrettante corrispondenti quintuple di quadrangoli conjugati. Ogni K è ordinatamente circoscritto ai cinque quadrangoli della quintupla corrispondente; i lati di questi ultimi s'incontrano due a due sulle dieci rette della Cfz. 10_3 corrispondente a K. (Ai tre quadrangoli semplici contenuti in uno completo F_4 corrisponde una medesima Cfz. 10_3, cioè la Cfz. complementare di F_4).

La F_9 può in 12×126 modi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{5,4}$ *di 5 forze in equilibrio connesse da 4 poligoni funicolari;* e in 3×126 modi come la *Cfz.* $F_{4,5}$ *di 4 forze equilibrate connesse da 5 poligoni funicolari.*

Es. 8.° Configurazione di 10 forze equilibrate nel piano. Equilibrio dell'ennagono articolato.

$m = 10$ $\qquad\qquad F_{10} \equiv (8,\ 3)^{45}_{120}.$

71. Le quarantacinque rette r della Cfz.

$$F_{10} \equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 0)\ (^*)$$

sono:

le linee d'azione . . .	12	23	34	45	56	67	78	89	90	01
delle forze date . . .	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
le linee d'azione . . .	13	35	57	79	91	24	46	68	80	02
delle ris. binarie . . .	*ab*	*cd*	*ef*	*gh*	*ij*	*bc*	*de*	*fg*	*hi*	*ja*
le linee d'azione . . .	14	47	70	03	36	69	92	25	58	81
delle ris. ternarie . . .	*abc*	*def*	*ghi*	*jab*	*cde*	*fgh*	*ija*	*bcd*	*efg*	*hij*
le linee d'azione . . .	15	59	93	37	71	26	60	04	48	82
delle ris. quaternarie .	*abcd*	*efgh*	*ijab*	*cdef*	*ghij*	*bcde*	*fghi*	*jabc*	*defg*	*hija*
le linee d'azione . . .	16	27	38	49	50					
delle ris. quinarie . . .	*abcde*	*bcdef*	*cdefg*	*defgh*	*efghi*					
	fghij	*ghija*	*hijab*	*ijabc*	*jabcd*					

(*) Qui ed in seguito ove i numeri 10, 11, 12,... hanno il significato di indici scriveremo in loro vece per brevità 0', 1', 2',...

I poligoni P_1 e P_3 delle forze e delle risultanti cicliche ternarie sono i due decagoni semplici *associati*

$$P_1 \equiv 1234567890$$

$$P_3 \equiv 1470369258;$$

quelli P_2, P_4 delle risultanti cicliche binarie e quaternarie si spezzano rispettivamente in due paja di pentagoni semplici (conjugati), cioè

$$P_2 \equiv \begin{cases} p_2 \equiv 13579 \\ p'_2 \equiv 24680 \end{cases}; \qquad P_4 \equiv \begin{cases} p_4 \equiv 15937 \\ p'_4 \equiv 26048 \end{cases};$$

il poligono P_5 delle risultanti quinarie degenera in un cinquilatero

$$P_5 \equiv 16 \cdot 27 \cdot 38 \cdot 49 \; 50 \equiv \nabla$$

del quale i lati sono rette r, mentre i vertici sono punti estranei alla Cfz.

I due pentagoni (non conjugati) p_2 e p_4, come pure i due p'_2 e p'_4, sono ciclicamente inscritti fra loro. Inoltre i lati di p_2 e di p_4 passano rispettivamente pei vertici dispari (n.° 18) di P_1 e di P_3, quelli di p'_2 e di p'_4 rispettivamente pei vertici pari degli stessi poligoni.

Vi sono, oltre ai vertici di P_1, P_2, P_3, P_4, altri $\varphi = 80$ punti G (n.° 6), intersezioni di risultanti cicliche d'ordine differente. *Quaranta* di questi si trovano distribuiti *otto* a *otto* sui lati del cinquilatero $P_5 \equiv \nabla$; gli altri *quaranta* sono i vertici dei due icosagoni (semplici)

$$P_{1,2} \equiv 12457801346790235689$$

$$P_{3,4} \equiv 14039281706958473625$$

i quali appartengono alla Cfz. (invero i lati di P_{12} coincidono alternativamente con quelli di P_1 e P_2, e i lati di P_{34} coi lati di P_3 e di P_4; epperò sono rette r) e sono doppiamente inscritti il primo in P_3, l'altro in P_1.

72. I due decagoni semplici P_1 e P_3 sono *associati*, nel senso che, come P_3 è il poligono delle risultanti ternarie delle forze date, agenti secondo i lati di P_1, così, se si fanno agire dieci forze equilibrate lungo i lati di P_3, il relativo poligono delle risultanti ternarie coincide con P_1: corrispondentemente si scambiano fra loro anche i due poligoni degeneri P_2 e P_4, mentre invece le linee d'azione delle risultanti quinarie coincidono in ambo i casi coi lati del medesimo cinquilatero $P_5 \equiv \nabla$.

73. La Cfz. $F_{10} \equiv (8, 3)^{45}_{120}$ delle forze $(a, b, c, . . j)$ corrisponde identicamente a $M = 181440$ sistemi di 10 forze equilibrate, compreso il dato; e con-

tiene altrettanti decagoni semplici, che si distribuiscono in 90720 coppie di decagoni associati (P_1, P_3). E in 90720 modi i punti G si separano in tre gruppi τ, ρ, σ di 40 punti ciascuno: τ si scinde in quattro poligoni analoghi a P_1, P_2, P_3, P_4; ρ si scinde in due poligoni analoghi e $P_{1,2}$ e $P_{2,4}$; σ si scinde in cinque sistemi di otto punti collocati sui lati di un cinquilatero ∇.

Essa contiene 126 coppie di Cfz.[1] complementari (F_5, F'_5), quali per es. le

$$F_5 \equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \equiv 10_3, \qquad F'_5 \equiv (6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 0) \equiv 10_3.$$

Una di queste coppie somministra 12×12 paja di pentagoni semplici conjugati (p, p'); a ogni decagono (come poligono-forze P_1) corrisponde un pajo (p, p') di pentagoni conjugati (come poligono P_2 di risultanti binarie); onde ogni pajo di pentagoni conjugati corrisponde a $\frac{M}{126 \times 12 \times 12} = 10$ decagoni differenti. Per es. il pajo di pentagoni conjugati $(p, p') \equiv (13579,\ 24680)$ corrisponde ai seguenti dieci decagoni:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	1 2 3 0 5 8 7 6 9 4
1 4 3 6 5 8 7 0 9 2	1 4 3 2 5 0 7 8 9 6
1 6 3 8 5 0 7 2 9 4	1 6 3 4 5 2 7 0 9 8
1 8 3 0 5 2 7 4 9 6	1 8 3 6 5 4 7 2 9 0
1 0 3 2 5 4 7 6 9 8	1 0 3 8 5 6 7 4 9 2.

Dunque gli M sistemi di dieci forze equilibrate ai quali corrisponde la stessa Cfz. F_{10} si separano in 10 serie di 126×12^2 sistemi conducenti a differenti poligoni P_2 di risultanti binarie epperò anche a differenti poligoni P_4 di risultanti quaternarie.

I *dieci* decagoni cui corrisponde uno stesso pajo (p, p') sono associati a *dieci* decagoni cui corrisponde pure un medesimo altro pajo ($\overline{p}$, $\overline{p'}$) di pentagoni conjugati; le due paja sono ciclicamente inscritte fra loro, cioè ciascun pentagono dell'uno è simultaneamente inscritto ad uno (e un solo) pentagono dell'altro pajo.

Per esempio i decagoni associati ai precedenti dieci sono:

1 4 7 0 3 6 9 2 5 8	1 0 7 4 3 8 9 2 5 6
1 6 7 2 3 8 9 4 5 0	1 2 7 6 3 0 9 4 5 8
1 8 7 4 3 0 9 6 5 2	1 4 7 8 3 2 9 6 5 0
1 0 7 6 3 2 9 8 5 4	1 6 7 0 3 4 9 8 5 2
1 2 7 8 3 4 9 0 5 6	1 8 7 2 3 6 9 0 5 4

ai quali corrisponde lo stesso pajo $(\bar{p}, \bar{p'}) \equiv (17395, 40628)$ di pentagoni conjugati; il pentagono 13579 è inscritto e circoscritto al pentagono 17395, e il 24680 al 40628.

74. Si riconosce facilmente che vi sono 945 cinquilateri ∇ (i cui lati, ma non i vertici, appartengono alla Cfz. F_{10}) ognun dei quali corrisponde a 192 decagoni P_1 ossia a 96 coppie (P_1, P_3) di decagoni associati. Dunque gli M sistemi di *dieci* forze equilibrate, ai quali corrisponde la stessa Cfz. F_{10}, si separano in 945 serie di 192 ciascuna: i sistemi appartenenti a una stessa serie, sono associati due a due, e conducono tutti a un identico cinquilatero ∇ di risultanti quinarie.

75. La $F_{10} \equiv (8, 3)^{45}_{120}$ si scinde in dieci gruppi del tipo

$$F_9 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \equiv (7, 3)^{36}_{84}$$
$$Q_9 \equiv 0 \cdot (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9);$$

e si può in 201600 modi riguardare come la *Cfz.* $F_{9,1}$ *corrispondente all'equilibrio dell'ennagono articolato.*

76. Si omettono per brevità gli altri gruppi principali della Cfz. (n.° 8), perchè mentre non offrono difficoltà, presentano molta analogia coi casi precedentemente trattati. Notiamo soltanto che oltre alle 252 Cfz.^{i} 10_3 delle quali già sopra si è tenuto parola, la F_{10} contiene anche altre Cfz.^{i} duali, cioè: 14400 Cfz.^{i} 21_3 (ogni punto G ne determina *centoventi*) e 2800 Cfz.^{i} 27_3.

Es. 9.° Configurazione di 11 forze equilibrate nel piano. Equilibrio del decagono articolato.

$m = 11$ $\qquad\qquad F_{11} \equiv (9, 3)^{55}_{165}$.

77. Le cinquantacinque rette r della Cfz.

$$F_{11} \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1')$$

sono:

le linee d'azione . .	12	23	34	45	56	67	78	89	90	01'	1'1
delle forze date . . .	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
le linee d'azione . .	13	35	57	79	91'	1'2	24	46	68	80	01
delle ris. binarie . .	ab	cd	ef	gh	ij	ka	bc	de	fg	hi	jk
le linee d'azione . .	14	47	70	02	25	58	81'	1'3	36	69	91
delle ris. ternarie . .	abc	def	ghi	jka	bcd	efg	hij	kab	cde	fgh	ijk

le linee d'azione . .	15	59	92	26	60	03	37	71'	1'4	48	81
delle ris. quaternarie	*abcd*	*efgh*	*ijka*	*bcde*	*fghi*	*jkab*	*cdef*	*ghij*	*kabc*	*defg*	*hijk*
le linee d'azione . .	16	61'	1'5	50	04	49	93	38	82	27	71
delle ris. quinarie . .	*abcde*	*fghij*	*kabcd*	*efghi*	*jkabc*	*defgh*	*ijkab*	*cdefg*	*hijka*	*bcdef*	*ghijk*

I poligoni delle forze e delle risultanti cicliche binarie, ternarie,... quinarie coincidono rispettivamente coi seguenti endecagoni semplici:

$$P_1 \equiv 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,0\,1'$$
$$P_2 \equiv 1\,3\,5\,7\,9\,1'\,2\,4\,6\,8\,0$$
$$P_3 \equiv 1\,4\,7\,0\,2\,5\,8\,1'\,3\,6\,9$$
$$P_4 \equiv 1\,5\,9\,2\,6\,0\,3\,7\,1'\,4\,8$$
$$P_5 \equiv 1\,6\,1'\,5\,0\,4\,9\,3\,8\,2\,7$$

i quali, presi nell'ordine ($P_1\ P_2\ P_4\ P_3\ P_5$) formano un gruppo di endecagoni ciclicamente inscritti (cioè P_1 è inscritto in P_2, P_2 in P_4, P_4 in P_3, P_3 in P_5 e P_5 in P_1) epperò i loro vertici e i loro lati costituiscono (n.° 98) una Cfz. 55_3.

78. Oltre ai 55 vertici di questi poligoni, la Cfz. contiene (n.° 6) altri $\varphi = 110$ punti (intersezioni scambievoli di risultanti cicliche d'ordine differente) che si separano in cinque distinti gruppi di ventidue punti. Invero essi sono vertici dei seguenti 22-goni semplici:

$$P_{1,2} \equiv 1\,2\,4\,5\,7\,8\,0\,1'\,2\,3\,5\,6\,8\,9\,1'\,1\,3\,4\,6\,7\,9\,0 \equiv \pi_3$$
$$P_{2,4} \equiv 1\,3\,7\,9\,2\,4\,8\,0\,3\,5\,9\,1'\,4\,6\,0\,1\,5\,7\,1'\,2\,6\,8 \equiv \pi_5$$
$$P_{4,3} \equiv 1\,5\,2\,6\,3\,7\,4\,8\,5\,9\,6\,0\,7\,1'\,8\,1\,9\,2\,0\,3\,1'\,4 \equiv \pi_1$$
$$P_{3,5} \equiv 1\,4\,0\,2\,8\,1'\,6\,9\,4\,7\,2\,5\,1'\,3\,9\,1\,7\,0\,5\,8\,3\,6 \equiv \pi_2$$
$$P_{5,1} \equiv 1\,6\,5\,0\,9\,3\,2\,7\,6\,1'\,0\,4\,3\,8\,7\,1\,1'\,5\,4\,9\,8\,2 \equiv \pi_4$$

i quali *appartengono* alla Cfz. F_{11} e corrispondono ordinatamente ai cinque endecagoni P_3, P_5, P_1, P_2, P_4. Il doppio suffisso di $P_{1,2}$ significa che questo poligono ha per lati le stesse ventidue rette r che limitano P_1 e P_2; similmente $P_{2,4}$ ha per lati tutt'i lati di P_2 e di P_4, ecc.

Ogni 22-gono π_i è *doppiamente inscritto* nell'endecagono corrispondente P_i; in ciascun lato di P_3, per es., si trovano *due* vertici di $P_{1,2} \equiv \pi_3$.

79. La Cfz. $F_{11} \equiv (9, 3)_{165}^{55}$ delle forze $a, b, c, \ldots j, k$ corrisponde identicamente a $\frac{10!}{2} = N$ sistemi di 11 forze equilibrate (compreso il dato) e contiene altrettanti endecagoni (semplici) differenti. Questi si aggruppano in 9! cinquine di endecagoni ciclicamente inscritti, ciascuna delle quali contenendo *tutte* le rette r e un gruppo τ di soli *cinquantacinque* punti G, individua un gruppo (corrispondente) ρ di *centodieci* punti residui; i quali a loro volta si distribuiscono come vertici in una cinquina di 22-goni semplici. Onde i punti G si separano in 9! maniere in due gruppi τ e ρ di 55 e di 110 punti; e ogni gruppo (τ, ρ) si spezza in due cinquine $(P_1 P_2 P_3 P_4 P_5)$, $(\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5)$ di endecagoni e di 22-goni corrispondenti, dotate delle proprietà sopra descritte. E conseguentemente alla F_{11} appartengono 9! Cfz.^{i} 55_3.

80. La F_{11} si scinde in undici sistemi del tipo

$$\text{I.} \left\{ \begin{array}{l} F_{10} \equiv \quad (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0) \equiv (8, 3)_{120}^{45} \\ Q_{10} \equiv 1' \cdot (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0) \end{array} \right.$$

e quindi *può in* $\frac{9! \times 11}{2}$ *maniere riguardarsi come la Cfz.* $F_{10,1}$ *corrispondente all'equilibrio del decagono articolato.*

Senza fermarci alle altre proprietà deducibili dallo studio del tipo I, osserviamo che le *cinquantacinque* rette r si aggruppano in 10395 cinquilateri ∇, i cui vertici sono punti estranei alla Cfz. Ogni ∇ (per es. $12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78 \cdot 90$) è circoscritto a *un* corrispondente pentagono $\overline{\nabla}$ $(\equiv 121' \cdot 341' \cdot 561' \cdot 781' \cdot 901')$, i cui lati sono rette estranee alla Cfz. Nella F_{11} si trovano 10395 paja $(\nabla, \overline{\nabla})$ di tali cinquilateri-pentagoni corrispondenti, le quali sono distribuite in 11 gruppi di 945 paja, ecc., ecc.

Omettendo gli altri gruppi principali, notiamo solamente che oltre alle 9! Cfz.^{i} 55_3, la F_{11} contiene altre Cfz.^{i} duali, cioè: 55×280 Cfz.^{i} 27_3 (ogni retta r ne determina 280); 330×120 Cfz.^{i} 21_3 e 462 Cfz.^{i} 10_3.

PARTE II.

§ 4.

Cfz. $\Phi_{m,n}$ del poligono articolato e di n sistemi (di m forze) capaci di tenerlo in equilibrio. Sua reciproca.

81. La Cfz. W ch'è determinata nello spazio ordinario da n m-edri circoscritti a uno stesso m-latero piano σ_m contiene:

$$\mu = \binom{m+n}{m-2} \text{ punti}$$

$$\nu = \binom{m+n}{m-1} \text{ rette}$$

$$\varpi = \binom{m+n}{m} \text{ piani;}$$

per ogni punto passano $n+2$ rette ed $\binom{n+2}{2}$ piani, in ogni retta si segano $n+1$ piani e giaciono $m-1$ punti, su ogni piano si trovano m rette ed $\binom{m}{2}$ punti.

È facile dimostrare direttamente queste e le altre proprietà della W; ma noi le riterremo note senz'altro, in quanto che W è la Cfz. reciproca (per dualità) di quella (n.° 85) studiata da S. Kantor nella Nota: *Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume* (*) e da Veronese nella Memoria: *Behandlung d. projectiv. Verhältnisse d. Räume von verschiedenen Dimensionen,* ecc. (**).

82. Projettata la Cfz. W sopra un piano, si riguardi l'm-latero (semplice) Q_m, projezione di σ_m, come un poligono articolato, e le projezioni degli spigoli laterali degli m-edri si considerino come forze applicate ai vertici di Q_m e costituenti n sistemi, ciascun dei quali capace di tenere in equilibrio il poligono.

(*) *Wiener Sitzungsberichte,* B. 80, 2^e Abth., l. c.
(**) *Mathem. Annalen,* t. 19, l. c.

Diremo corrispondenti od omologhe negli n sistemi le forze applicate a un medesimo vertice di Q_m; omologhe le risultanti di forze corrispondenti, omologhi i punti comuni a forze omologhe; onde non solamente ai vertici del poligono-forze e del poligono di risultanti i-narie relativi a un sistema corrispondono univocamente i vertici dei poligoni-forze e di risultanti i-narie degli altri $n-1$ sistemi, ma in generale si viene così a stabilire una corrispondenza univoca fra gli elementi omogenei (punti e punti; rette e rette) delle n Cfz.ⁱ F_m individuate da quegli n sistemi di forze (n.° 6).

83. Ciò posto, le $\binom{n}{2}\binom{m}{3}$ rette, diciamole a_2, che congiungono due a due i punti omologhi di queste Cfz.ⁱ F_m, sono projezioni di altrettante rette di W: e come tali esse concorrono quattro a quattro in punti, $m-3$ dei quali si trovano su ogni retta a_2; onde le a_2 determinano $\binom{n}{2}\binom{m}{4}$ nuovi punti che diremo A_4.

Questi sono projezioni di altrettanti punti di W, e son perciò distribuiti tre a tre su rette, $n-2$ delle quali passano per ogni punto A_4; onde i punti A_4 determinano $\binom{n}{3}\binom{m}{4}$ nuove rette a_3.

Le a_3 sono projezioni di altrettante rette di W; onde cinque a cinque concorrono in punti, $m-4$ dei quali sono situati in ogni a_3; epperò le rette a_3 determinano $\binom{n}{3}\binom{m}{5}$ nuovi punti A_5, che sono projezioni di altrettanti punti di W.

E così, tenute sempre presenti le proprietà della Cfz. W, si riconosce che questi punti A_5 determinano altre $\binom{n}{4}\binom{m}{5}$ nuove rette a_4, ciascuna delle quali ne contiene appunto quattro; che queste rette a_4 determinano altri $\binom{n}{4}\binom{m}{6}$ nuovi punti A_6 per ciascun dei quali ne passano precisamente sei; e via dicendo, la legge essendo ben manifesta.

Si ha dunque il teorema:

Se nel piano di un poligono articolato Q sono dati n differenti sistemi di forze (*) applicate ai suoi m vertici, e tali, che ogni sistema sia da solo capace di tenere in equilibrio il poligono, e che in ciascuno l'ordine ciclico sia dato dall'ordine col quale si

(*) v. Note al n.° 4 e al n.° 7.

succedono i vertici di Q, si ottiene in generale una configurazione

$$\Phi_{m,n} \equiv (q, p)_{\mu}^{\nu}$$

ove

$$p = n + 2 \qquad \mu = \binom{m+n}{n+2} \qquad m \geqq 3$$

$$q = m - 1 \qquad \nu = \binom{m+n}{n+1} \qquad n \geqq 1.$$

Le rette r della Cfz. $\Phi_{m,n}$ sono:

gli m lati del poligono articolato;

le $n \times \binom{m}{2}$ linee d'azione delle forze e risultanti cicliche di tutt'i sistemi;

le $\binom{n}{2}\binom{m}{3}$ rette a_2, che congiungono 2 a 2 i punti omologhi delle Cfz.[i] F_m corrispondenti agli n sistemi di forze;

le $\binom{n}{3}\binom{m}{4}$ rette a_3, sulle quali si trovano 3 a 3 i punti A_4, determinati dalle a_2;

le $\binom{n}{4}\binom{m}{5}$ rette a_4, sulle quali si trovano 4 a 4 i punti A_5, determinati dalle a_3;

. . . .

e i punti G della stessa $\Phi_{m,n}$ sono:

gli m vertici e gli $\frac{m(m-3)}{2}$ punti diagonali del poligono articolato;

gli $n\binom{m}{3}$ punti delle Cfz.[i] F_m corrispondenti agli n sistemi di forze (cioè i vertici degli n poligoni-forze, i vertici dei poligoni di tutte le risultanti i-narie e i punti comuni a risultanti cicliche di ordini diversi, in ogni sistema);

gli $\binom{n}{2}\binom{m}{4}$ punti A_4, nei quali concorrono 4 a 4 le rette a_2, determinate dai punti omologhi delle Cfz.[i] F_m;

gli $\binom{n}{3}\binom{m}{5}$ punti A_5, nei quali concorrono 5 a 5 le rette a_3, determinate dai punti A_4;

gli $\binom{n}{4}\binom{m}{6}$ punti A_6, nei quali concorrono 6 a 6 le rette a_4, determinate dai punti A_5;

. . . .

In questo teorema si suppone $m \geqq 3$, $n \geqq 1$; se $n = 1$ la $\Phi_{m,1}$ coincide naturalmente con la $F_{m,1}$.

84. La reciproca (nel senso di Maxwell e di Cremona) della Cfz. $\Phi_{m,n}$, è projezione della figura che corrisponde alla W in un *Nullsystem;* e perciò è una Cfz.

$$\Phi'_{m,n} \equiv (q_1, p_1)^{\nu}_{\varpi}$$

nella quale

$$q_1 = n + 1, \qquad p_1 = m$$

e ϖ, ν hanno il significato già detto (n.° 81).

85. In generale la Cfz. V determinata nello spazio ordinario da n' m'-goni inscritti in uno stesso angolo m'-spigolo $S_{m'}$ contiene

$$\left.\begin{aligned} \mu' &= \binom{m'+n'}{m'} \text{ punti} \\ \nu' &= \binom{m'+n'}{m'-1} \text{ rette} \\ \varpi' &= \binom{m'+n'}{m'-2} \text{ piani;} \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

per ogni punto passano m' rette e $\binom{m'}{2}$ piani, in ogni retta si segano $m'-1$ piani e giaciono $n'+1$ punti, su ogni piano si trovano $n'+2$ rette ed $\binom{n'+2}{2}$ punti. [È questa la Cfz. cui si allude al n.° 81; cfr. Kantor e Veronese, l. c.]

86. Indicando con $\varphi_{m'n'}$ la Cfz. che si ottiene projettando la V sopra un piano, si trova

$$\varphi_{m'n'} \equiv (q', p')^{\nu'}_{\mu'}$$

ove

$$q' = n' + 1, \qquad p' = m'$$

e μ', ν' hanno i valori (a).

Se $m' = m$ ed $n' = n$, la $\varphi_{m',n'}$ e la $\Phi'_{m,n}$ reciproca (secondo Maxwell-Cremona) della $\Phi_{m,n}$ sono evidentemente Cfz.$^{\text{i}}$ della stessa specie (n.° 1); ciò che si può esprimere scrivendo:

$$\varphi_{m,n} = \Phi'_{m,n}.$$

Invece, se $m' = n + 2$ ed $n' = m - 2$, si trova

$$\Phi_{m,n} = \varphi_{n+2,\,m-2}$$

dunque la $\Phi_{m,n}$, projezione di una figura W determinata da n m-edri circoscritti a uno stesso poligono piano σ_m, si può anche riguardare come projezione di una figura V determinata da $m-2$ poligoni gobbi inscritti in uno stesso angolo $n+2$-gono S_{n+2}. Il medesimo risultato si può interpretare altrimenti così:

La Cfz. $\Phi_{m,n}$, corrispondente a un poligono articolato Q_m e ad n sistemi di forze capaci di tenerlo in equilibrio, e la reciproca (secondo Maxwell-Cremona) della $\Phi_{n+2,\,m-2}$, corrispondente a un poligono articolato Q_{n+2} e ad $m-2$ sistemi di forze capaci di tenerlo in equilibrio, sono configurazioni della stessa specie.

87. Se ne ricava il seguente corollario:

La Cfz. $\Phi_{m,n}$ contiene:

1) $\binom{m+n}{m}$ m-lateri completi inscritti in altrettanti sistemi di n Cfz.^{i} F_m; epperò può in $\frac{(m-1)!}{2}\binom{m+n}{m}$ modi diversi riguardarsi come la Cfz. di un poligono articolato Q_m e di n differenti sistemi di forze capaci di tenerlo in equilibrio;

2) $\binom{m+n}{n+2}$ fasci di $n+2$ raggi circoscritti ad altrettanti sistemi di $m-2$ $\overline{n+2}$-goni completi; epperò si può in $\frac{(n+1)!}{2}\binom{m+n}{n+2}$ modi diversi riguardare come la reciproca (secondo Maxwell-Cremona) della Cfz. corrispondente a un poligono articolato Q_{n+2} e ad $m-2$ sistemi di forze capaci di tenerlo in equilibrio.

88. Se $m - n = 2$, hanno luogo le relazioni

$$q' = q = n + 1, \qquad p' = p = n + 2, \qquad \varpi = \mu = \binom{m+n}{n+2},$$

cosicchè

$$\Phi_{m,n} = \varphi_{m,n} = \Phi'_{m,n};$$

ossia la Cfz. $\Phi_{m,n}$ e la sua reciproca $\Phi'_{m,n}$ (secondo Maxwell-Cremona) sono Cfz.^{i} della stessa specie, quando $m - n = 2$.

Esempi:

$$\Phi_{4,2} = \Phi'_{4,2} = (3,\ 4)^{20}_{15}$$

$$\Phi_{5,3} = \Phi'_{5,3} = (4,\ 5)^{70}_{56}$$

ecc.

89. Se $m-n=3$, si verificano le identità

$$p=q=m-1, \qquad \mu=\nu=\binom{2p-1}{p},$$

epperò:

$$\Phi_{m,n}\equiv\mu_p;$$

se invece $m-n=1$, hanno luogo le identità

$$p_1=q_1=m, \qquad \varpi=\nu=\binom{2p_1-1}{p_1},$$

epperò

$$\Phi'_{m,n}\equiv\varpi_{p_1}.$$

Dunque la Cfz. $\Phi_{m,n}$, corrispondente a un poligono articolato Q_m e ad n sistemi di forze capaci di tenerlo in equilibrio, è duale quando $m-n=3$, mentre invece la sua reciproca $\Phi'_{m,n}$ è duale quando $m-n=1$. Per conseguenza se una Cfz. $\Phi_{m,n}$ è duale, la sua reciproca (secondo Maxwell-Cremona) è una Cfz. $\Phi'_{m,n}$ di specie differente (n.° 1).

Per esempio sono duali le seguenti Cfz.ⁱ (a sinistra)

$$\begin{array}{ll}
\Phi_{4,1}=10_3 \;\;=\varphi_{3,2} & \Phi'_{4,1}=(2,\;4)_5^{10} \;=\varphi_{4,1}\\
\Phi_{5,2}=35_4 \;\;=\varphi_{4,3} & \Phi'_{5,2}=(3,\;5)_{21}^{35} \;=\varphi_{5,2}\\
\Phi_{6,3}=126_5=\varphi_{5,4} & \Phi'_{6,3}=(4,\;6)_{84}^{126}=\varphi_{6,3}\\
\Phi_{7,4}=462_6=\varphi_{6,5} & \Phi'_{7,4}=(5,\;7)_{330}^{462}=\varphi_{7,4}\\
\dots\dots & \dots\dots
\end{array}$$

le quali, come indicano i simboli della prima verticale (a sinistra), rispettivamente corrispondono

a un quadrangolo articol.° Q_4 e ad 1 sistema di forze capace di tenerlo in equilibrio,
» pentagono Q_5 e a 2 sistemi capaci ecc.
» esagono Q_6 » 3 » »
» ettagono Q_7 » 4 » »
. . . .

e, come indicano i simboli della terza verticale, esse sono (n.° 86) anche le reciproche (secondo Maxwell-Cremona) delle Cfz.ⁱ che rispettiv. corrispondono

a un triangolo Q_3 e a 2 sistemi capaci ecc.
» quadrangolo Q_4 » 3 » »

a un pentagono Q_5 e a 4 sistemi capaci ecc.
» esagono Q_6 » 5 » »
. . . .

Le Cfz.[i] a destra sono le reciproche (secondo MAXWELL-CREMONA) di quelle segnate in corrispondenza nella prima verticale a sinistra.

§ 5.

Simbolica e applicazione ad alcuni esempi.

90. Tenute presenti le ricerche di VERONESE (l. c.) si riconosce che la Cfz. piana $\Phi_{m,n}$ si può ottenere come sezione della figura determinata da

$$N = p + q - 1 = m + n$$

punti arbitrarî di uno spazio a $q = m - 1$ dimensioni.

Quest'osservazione permette di rappresentare tutti gli elementi della Cfz. mediante combinazioni di N soli indici $1, 2, \ldots N$: il simbolo di un punto G contiene $q - 1 = m - 2$ indici differenti; il simbolo di una retta r ne contiene $q (= N - p + 1 = m - 1)$; e questa rappresentazione pone in rilievo certe corrispondenze esistenti fra gli elementi della Cfz. Per esempio:

a. Se la Cfz. $\Phi_{m,n}$ è duale ($p = q$; $m - n = 3$) fra i punti e le rette della Cfz. ha luogo una corrispondenza univoca; è chiaro infatti che in questo caso un punto G e una retta r i cui simboli siano complementari [come per es. il punto $G \equiv 123 \ldots (q-1)$ e la retta $r \equiv q(q+1) \ldots N$] si corrispondono univocamente in quanto l'uno determina l'altra e viceversa.

b. Se la Cfz. $\Phi_{m,n}$ e la sua reciproca secondo MAXWELL-CREMONA $\Phi'_{m,n}$ sono della stessa specie ($m - n = 2$, $p = q + 1$) i simboli delle r sono due a due complementari [come per es. $r \equiv 12 \ldots q$, $r' \equiv (q+1) \ldots 2q$] e quindi le rette r si corrispondono o sono conjugate due a due.

c. Se $p = q - 1$ epperò $m - n = 4$ i punti G della Cfz. $\Phi_{m,n}$ si corrispondono o sono conjugati due a due; come per es. $G \equiv 12 \ldots (q-1)$, $G \equiv q(q+1) \ldots 2(q-1)$. Ecc. ecc.

91. Con la notazione in discorso i simboli di tutte le r passanti per uno stesso punto $123 \ldots (q-1)$ contengono il simbolo di questo punto; e i simboli di tutti i punti G situati in una stessa retta $12 \ldots (q-1)q$ sono contenuti nel simbolo di questa retta. Ma non è altrettanto semplice la rappresentazione delle

altre figure (punteggiate, fasci, poligoni, polilateri, configurazioni F_r, ecc.) appartenenti alla $\Phi_{m,n}$; consistendo essa nell'indicare separatamente mediante i loro simboli tutt'i punti e tutte le rette della figura che si vuol considerare. Si può tuttavia con opportune convenzioni adottare una simbolica che, rendendo quella rappresentazione più semplice e compatta, permetta di meglio afferrare sia il nesso delle varie parti di una stessa figura sia i rapporti scambievoli delle varie figure contenute in una medesima configurazione.

Per maggior chiarezza spiegheremo la cosa su qualche caso particolare.

92. *Es. 1.°* Prendasi come primo esempio la Cfz. $\Phi_{5,2} \equiv 35_4$ corrispondente al pentagono articolato e a 2 sistemi di 5 forze capaci di tenerlo in equilibrio (n.° 89). Poichè qui $N = 7$ e $q - 1 = 3$ pongasi simbolicamente

$$\Phi_{5,2} = \varphi_{4,3} = 35_4 \equiv (\underline{123}\overline{4567});$$

le due lineette orizzontali, mentre mettono in evidenza un punto G $(\equiv 123)$ e la retta corrispondente r $(\equiv 4567)$, sono in pari tempo destinate a significare che (nel caso attuale) il simbolo di quello contiene *tre* indici, il simbolo di questa ne contiene *quattro*. Converremo di usare sempre la lineetta *inferiore* a dinotare il *punto*, la *superiore* a indicare la *retta*.

Rappresenteremo:

col simbolo $(\overline{12\underline{34}}\underline{5})$ un cinquilatero completo K_5 della Cfz.; i lati avranno per simboli le combinazioni *quaternarie* (lineetta superiore), i vertici le combinazioni *ternarie* (lineetta inferiore) dei cinque indici racchiusi in parentesi: cosicchè

$$K_5 \equiv (\overline{12\underline{34}}\underline{5}) \equiv \left\{ \begin{matrix} 1234 & 1235 & 1245 & 1345 & 2345 & \ldots\ldots\ldots & r \text{ (lati)} \\ 123 & 124 & 125 & 134 & 135 & 145\ 234\ 235\ 245\ 345 & G \text{ (vertici)} \end{matrix} \right\};$$

col simbolo $6 \cdot (\overline{123}\underline{45})$ una Cfz. $10_3 \equiv F_5$ contenuta nella $\Phi_{5,2}$; i simboli delle rette fondamentali si formeranno aggiungendo l'indice esterno 6 alle combinazioni *ternarie* (lineetta superiore), e i simboli dei punti fondamentali aggiungendo lo stesso indice 6 alle combinazioni *binarie* (lineetta inferiore) dei cinque indici racchiusi in parentesi; cosicchè

$$= 10_3 \equiv 6 \cdot (\overline{123}\underline{45}) \equiv \left\{ \begin{matrix} 1236 & 1246 & 1256 & 1346 & 1356 & 1456 & 2346 & 2356 & 2456 & 3456 & r \\ 126 & 136 & 146 & 156 & 236 & 246 & 256 & 346 & 356 & 456 & G \end{matrix} \right\};$$

col simbolo $67 \cdot (\overline{12}34\underline{5})$ un pentagono completo H_5 della Cfz.; i simboli dei lati si formeranno aggiungendo gl'indici esterni 67 alle combinazioni *binarie* degl'indici interni (lineetta superiore), e quelli dei vertici aggiungendo gl'indici 6 7 ai *singoli* indici interni (lineetta inferiore); cosicchè

$$H_5 \equiv 67 \cdot (\overline{12}3\underline{4}5) \equiv \left\{ \begin{array}{llllllllllll} 4567 & 3567 & 3467 & 2567 & 2467 & 2367 & 1567 & 1467 & 1367 & 1267 & & r \\ 567 & 467 & 367 & 267 & 167 & \ldots & & & & & & G \end{array} \right\}.$$

Per significare che le cinque rette di K_5 si devono prendere in un *ordine determinato* useremo il simbolo $\overline{1234}5$ o meglio 12345, senza parentesi; con la convenzione che

$$1234\dot{5}$$

rappresenti *ordinatamente* le cinque rette

$$1234 \quad 1235 \quad 1245 \quad 1345 \quad 2345,$$

che si ottengono col *sopprimere un dopo l'altro* nel simbolo $1234\dot{5}$ l'ultimo, il penultimo,... il primo indice; le quali rette si segano *ordinatamente* nei punti

$$123 \quad 125 \quad 145 \quad 345 \quad 234.$$

Così i dodici cinquilateri (o pentagoni) semplici contenuti nel cinquilatero completo

$$K_5 \equiv (\overline{12\underline{34}}5)$$

saranno espressi dai simboli:

$$1234\dot{5} \quad 1235\dot{4} \quad 1243\dot{5} \quad 1245\dot{3} \quad 1253\dot{4} \quad 1254\dot{3}$$

$$1352\dot{4} \quad 1342\dot{5} \quad 1452\dot{3} \quad 1432\dot{5} \quad 1542\dot{3} \quad 1532\dot{4}.$$

Analogamente il simbolo $67 \cdot 12345$ rappresenterà un pentagono semplice contenuto in H_5; per ottenerne *ordinatamente* i vertici

$$567 \quad 467 \quad 367 \quad 267 \quad 167$$

basterà *aggiungere successivamente* ai due indici 6 7 l'ultimo, il penultimo,... il secondo, il primo degl'indici 12345; i lati *successivi* sono evidentemente

$$4567 \quad 3467 \quad 2367 \quad 1267 \quad 1567.$$

Epperò i dodici pentagoni semplici contenuti nel pentagono completo

$$H_5 \equiv 67 \cdot (\overline{12}345)$$

saranno espressi da:

$$67\cdot12345 \quad 67\cdot1235\underset{\cdot}{4} \quad 67\cdot1243\underset{\cdot}{5} \quad 67\cdot1245\underset{\cdot}{3} \quad 67\cdot1253\underset{\cdot}{4} \quad 67\cdot1254\underset{\cdot}{3}$$

$$67\cdot1352\underset{\cdot}{4} \quad 67\cdot1342\underset{\cdot}{5} \quad 67\cdot1452\underset{\cdot}{3} \quad 67\cdot1432\underset{\cdot}{5} \quad 67\cdot15423 \quad 67\cdot1532\underset{\cdot}{4}.$$

Rappresenteremo analogamente: col simbolo $123\cdot(456\overline{7})$ le quattro rette concorrenti nel punto 123, cioè il fascio

$$g_4 \equiv 123\cdot(456\overline{7}) \equiv \left\{1234 \;\; 1235 \;\; 1236 \;\; 1237\right\};$$

col simbolo $12\cdot(\overline{45}6\underline{7})$ un quadrangolo completo della Cfz. 35_4, cioè

$$H_4 \equiv 12\cdot(\overline{45}6\underline{7}) \equiv \left\{\begin{array}{lllllll} 1245 & 1246 & 1247 & 1256 & 1257 & 1267 & \text{lati} \\ 124 & 125 & 126 & 127 & \ldots & \ldots & \text{vertici} \end{array}\right\};$$

col simbolo $1\cdot(\overline{45\underline{6}}7)$ un quadrilatero completo, cioè

$$K_4 \equiv 1\cdot(\overline{45\underline{6}}7) \equiv \left\{\begin{array}{lllllll} 1456 & 1457 & 1467 & 1567 & \ldots & \ldots & \text{lati} \\ 145 & 146 & 147 & 156 & 157 & 167 & \text{vertici} \end{array}\right\};$$

col simbolo $456\underset{\cdot}{7}$ i quattro punti G posti nella retta 4567 cioè

$$r_4 \equiv 456\underset{\cdot}{7} \equiv \left\{456 \;\; 457 \;\; 467 \;\; 567\right\}.$$

I tre quadrangoli semplici contenuti nell'anzidetto quadrangolo completo saranno similmente rappresentati da

$$12\cdot456\underset{\cdot}{7} \qquad 12\cdot465\underset{\cdot}{7} \qquad 12\cdot457\underset{\cdot}{6}$$

e i tre quadrilateri semplici contenuti nell'anzidetto quadrilatero completo da

$$1\cdot456\dot{7} \qquad 1\cdot465\dot{7} \qquad 1\cdot457\dot{6}$$

ritenuto che

$$12\cdot456\underset{\cdot}{7} \equiv \left\{127 \;\; 126 \;\; 125 \;\; 124 \quad \text{(vertici successivi)}\right\}$$

e

$$1\cdot456\dot{7} \equiv \left\{1456 \;\; 1457 \;\; 1467 \;\; 1567 \quad \text{(lati successivi)}\right\}.$$

Questi cenni sulla simbolica da noi adottata possono bastare a darne un'idea e a mostrare che, con le debite modificazioni risguardanti il numero degl'indici costituenti i simboli dei punti fondamentali G e delle rette fondamentali r, essa vale in generale anche per le altre configurazioni $\Phi_{m,n}$.

93. Ciò premesso passiamo a indicare i due gruppi caratteristici (n.° 87) nei quali si può scindere la Cfz. duale $35_4 = \Phi_{5,2} = \varphi_{4,3}$.

Gruppo I.

$$K_5 \equiv (\overline{12}\,\overline{\underline{34}}\,\underline{5})$$

$$F_5 \equiv 6 \cdot (\overline{123}\,\underline{45}) = 10_3$$

$$F'_5 \equiv 7 \cdot (\overline{123}\,\underline{45}) = 10_3$$

$$H_5 \equiv 67 \cdot (\overline{12}\,34\underline{5}).$$

Le Cfz.^{i} F_5, F'_5 sono circoscritte al cinquilatero completo K_5; omologhe sono le rette delle due Cfz.^{i} passanti per uno stesso vertice di K_5 (per es. le 1236, 1237 passanti per 123). Esse sono anche inscritte nel pentagono completo H_5: due punti omologhi (n.° 82), per es. 456, 457, si trovano sopra uno stesso lato 4567. In altri termini le rette omologhe di F_5, F'_5 s'incontrano due a due nei *dieci* vertici di K_5, e i punti omologhi si trovano due a due sui *dieci* lati di H_5.

Le figure H_5 e K_5 sono complementari epperò correlative; infatti i 5 vertici e i 10 lati del pentagono H_5 corrispondono (n.° 90, *a*) uno ad uno ai 5 lati e ai 10 vertici del cinquilatero K_5.

In K_5 essendo compresi *dodici* cinquilateri semplici, a due a due associati o ciclicamente diagonali fra loro, si ricavano in corrispondenza dal Gruppo I *dodici* subgruppi (nei quali è tenuto conto anche dell'ordine in cui si succedono le rette e i punti delle varie figure) che si separano in sei paja di subgruppi associati.

La Cfz. 35_4 contiene 21 differenti gruppi del tipo I, epperò anche 252 subgruppi dello stesso tipo (due a due associati fra loro). Ogni subgruppo rappresenta uno de'modi di riguardare la Cfz. data come Cfz. $\Phi_{5,2}$ corrispondente a un pentagono articolato e a 2 sistemi di 5 forze capaci di tenerlo in equilibrio (n.° 87).

GRUPPO II (*).

$$
\begin{array}{ll}
G_4 \equiv 123 \cdot (456\overline{7}) & r \equiv 456\underline{7} \\[1ex]
H'_4 \equiv 23 \cdot (\overline{45}6\underline{7}) & K'_4 \equiv 1 \cdot (\overline{45\underline{6}}\underline{7}) \\[1ex]
H''_4 \equiv 13 \cdot (\overline{45}6\underline{7}) & K''_4 \equiv 2 \cdot (\overline{45\underline{6}}7) \\[1ex]
H'''_4 \equiv 12 \cdot (\overline{45}6\underline{7}) & K'''_4 \equiv 3 \cdot (\overline{45\underline{6}}\underline{7}).
\end{array}
$$

I vertici di H', H'', H''' sono distribuiti tre a tre sui raggi del fascio G_4 (per es. 127, 137, 237 sul raggio 1237); i lati di K', K'', K''' s'incontrano tre a tre nei punti della punteggiata r (per es. 3456, 2456, 1456 nel punto 456).

Il quadrangolo completo $H^{(i)}$ e il quadrilatero completo $K^{(i)}$ sono complementari, in quanto i 4 vertici e i 6 lati di quello corrispondono ai 4 lati e ai 6 vertici di questo; e in generale ogni figura a sinistra è complementare (epperò correlativa per dualità) a quella a destra che le sta di fronte.

I lati dei tre quadrangoli H si segano due a due nei vertici dei tre quadrilateri K (per es. 1245, 1345 si segano in 145) e i vertici dei K sono allineati due a due sui lati degli H (per es. 145 e 245 sono allineati su 1245); cosicchè ogni K è inscritto in due quadrangoli H, ogni H è circoscritto a due quadrilateri K e precisamente il quadrilatero completo $K^{(i)}$ è inscritto nei due quadrangoli che non gli sono complementari e reciprocamente il quadrangolo completo $H^{(i)}$ è circoscritto ai due quadrilateri che non gli sono complementari.

In corrispondenza ai tre quadrangoli semplici compresi in $H_4^{(i)}$, dal gruppo II si ricavano tre subgruppi, nei quali si tien conto anche dell'ordine di successione dei lati e dei vertici; uno di questi subgruppi è per esempio il seguente:

$$
\begin{array}{ll}
G \equiv 123 \cdot 457\underline{6} & r \equiv 457\underline{6} \\[1ex]
Q'_4 \equiv 12 \cdot 457\underline{6} & q'_4 \equiv 3 \cdot 457\overline{6} \\[1ex]
Q''_4 \equiv 13 \cdot 457\underline{6} & q''_4 \equiv 2 \cdot 457\overline{6} \\[1ex]
Q'''_4 \equiv 23 \cdot 457\underline{6} & q'''_4 \equiv 1 \cdot 457\overline{6}.
\end{array}
$$

(*) Le principali proprietà di questo gruppo II si trovano indicate anche nella Memoria VERONESE; v. pag. 175, *Math. Annalen*, l. c.

La Cfz. 35_4 contiene 35 gruppi del tipo II epperò anche 105 subgruppi dello stesso tipo; ogni subgruppo rappresenta uno dei modi di riguardare la Cfz. 35_4 come reciproca (secondo MAXWELL-CREMONA) della Cfz. $\Phi_{4,3}$ che corrisponde a un quadrangolo articolato e a tre sistemi di forze capaci di tenerlo in equilibrio.

94. *Es. 2.º Configurazione corrispondente al quadrangolo articolato ed a 3 sistemi di 4 forze capaci di tenerlo in equilibrio.* ($N=7$) (*).

$$\text{Cfz. } \Phi_{4,3}=\varphi_{5,2}=(3,\ 5)_{21}^{35}\equiv(\overline{1\,2\,3}\,4\,5\,\underline{6\,7}).$$

GRUPPO I.

$$K_4 \equiv (\overline{1\,2\,\underline{3}}\,\underline{4})=(3,\ 2)_6^4 \qquad r\equiv 5\,6\,7$$

$$\left.\begin{aligned} H_4^{(1)}&\equiv 5(\overline{1\,2}\,3\,\underline{4})= \\ H_4^{(2)}&\equiv 6(\qquad)= \\ H_4^{(3)}&\equiv 7(\qquad)= \end{aligned}\right\}(2,\ 3)_4^6 \qquad \left.\begin{aligned} g_4^{(1)}&\equiv 6\,7(1\,2\,3\,\overline{4})= \\ g_4^{(2)}&\equiv 5\,7(\qquad)= \\ g_4^{(3)}&\equiv 5\,6(\qquad)= \end{aligned}\right\}(1,\ 4)_1^4.$$

I tre quadrangoli $H_4^{(1)}\ H_4^{(2)}\ H_4^{(3)}$ sono circoscritti al quadrilatero K_4; i centri dei tre fasci $g_4^{(1)}\ g_4^{(2)}\ g_4^{(3)}$ sono allineati sulla retta 567. Nel fascio $g_4^{(\alpha)}$ sono inscritti i due quadrangoli $H_4^{(\beta)}$, $H_4^{(\gamma)}$ (α, β, γ rappresentano gl'indici 1, 2, 3). Alla retta 567 corrisponde il quadrilatero complementare K_4.

GRUPPO II.

$$g_5\equiv 6\,7\cdot(1\,2\,3\,4\,\overline{5})=(1,\ 5)_1^5$$

$$\left.\begin{aligned} H'_5&\equiv 6\cdot(\overline{1\,2}\,3\,4\,\underline{5})= \\ H''_5&\equiv 7\cdot(\overline{1\,2}\,3\,4\,\underline{5})= \end{aligned}\right\}(2,\ 4)_5^{10}$$

$$F_5\equiv(\overline{1\,2\,3}\,\underline{4\,5})=10_3.$$

(*) Anche in questo e nei seguenti esempi ci limitiamo a indicare i due gruppi caratteristici della configurazione (n.º 87).

La F_5 è inscritta in H'_5 e H''_5 e questi due pentagoni completi sono inscritti nel fascio g_5. In altri termini i vertici omologhi (per es. 61, 71) dei due pentagoni sono sui raggi del fascio g_5 (per es. 671); i loro lati omologhi (per es. 612, 712) si segano nei punti (per es. 12) della Cfz. $F_5 \equiv 10_3$.

Vi sono 35 gruppi del tipo I e 21 gruppi del tipo II; quelli corrispondono univocamente alle rette, questi ai punti della Cfz. $\Phi_{4,3}$.

95. *Es. 3.° Configurazione corrispondente all' esagono articolato ed a 3 sistemi di 6 forze capaci di tenerlo in equilibrio.* (La Cfz. è duale; $N = 9$).

$$\text{Cfz. } \Phi_{6,3} = \varphi_{5,4} = 126_5 \equiv (\overline{12345}\underline{6789}).$$

GRUPPO I.

$$K_6 \equiv (\overline{12\underline{3456}}) = (5,\ 2)^{6}_{15} \qquad H_6 \equiv 789 \cdot (\overline{12}345\underline{6}) = (2,\ 5)^{15}_{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_6^{(1)} \equiv 7 \cdot (\overline{123\underline{4}}\underline{56}) = \\ F_6^{(2)} \equiv 8 \cdot (\qquad\qquad) = \\ F_6^{(3)} \equiv 9 \cdot (\qquad\qquad) = \end{array}\right\} (4,\ 3)^{15}_{20} \qquad \left.\begin{array}{l} f_6^{(1)} \equiv 89 \cdot (\overline{123}4\underline{56}) = \\ f_6^{(2)} \equiv 79 \cdot (\qquad\qquad) = \\ f_6^{(3)} \equiv 78 \cdot (\qquad\qquad) = \end{array}\right\} (3,\ 4)^{20}_{15}.$$

Ogni figura (a sinistra) è complementare, epperò correlativa, a quella segnata di fronte (a destra). Le tre Cfz.i $F_6^{(i)}$ sono circoscritte al silatero completo K_6 (per es. le rette 12347, 12348, 12349 passano pel vertice 1234 di K_6); le tre $f_6^{(i)}$ sono inscritte nell' esagono completo H_6 (per es. i punti 1289, 1279, 1278 sono sul lato 12789 di H_6). La Cfz. $F_6^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ è inscritta nelle due Cfz.i f_6 che non le sono complementari (per es. il punto 4567 di $F_6^{(1)}$ giace nella retta 45679 di $f_6^{(2)}$ e nella 45678 di $f_6^{(3)}$), e reciprocamente la $f_6^{(i)}$ è circoscritta alle due F_6 che non le sono complementari (per es. la retta 12389 di $f_6^{(1)}$ passa pei punti 1238 e 1239 di $F_6^{(2)}$ e $F_6^{(3)}$). Dal gruppo I si ricavano 60 subgruppi, corrispondenti uno a uno ai 60 esagoni semplici contenuti in K_6.

Vi sono 84 gruppi differenti, del tipo I e 5040 subgruppi dello stesso tipo; ciascuno di quest' ultimi corrisponde a un esagono articolato e a 3 sistemi di 6 forze capaci di tenerlo in equilibrio.

Gruppo II.

$$G \equiv 1234\cdot(5678\overline{9}) \qquad\qquad r \equiv 5678\underline{9}$$

$$\left.\begin{array}{l} H_5^{(1)} \equiv 234\cdot(\overline{56}78\underline{9}) = \\ H_5^{(2)} \equiv 134\cdot(\qquad\quad) = \\ H_5^{(3)} \equiv 124\cdot(\qquad\quad) = \\ H_5^{(4)} \equiv 123\cdot(\qquad\quad) = \end{array}\right\} = (2,\ 4)_5^{10} \qquad \left.\begin{array}{l} K_5^{(1)} \equiv 1\cdot(\overline{56\underline{78}}9) = \\ K_5^{(2)} \equiv 2\cdot(\qquad\quad) = \\ K_5^{(3)} \equiv 3\cdot(\qquad\quad) = \\ K_5^{(4)} \equiv 4\cdot(\qquad\quad) = \end{array}\right\} = (4,\ 2)_{10}^5$$

$$\left.\begin{array}{l} F_5^{(12)} \equiv 12\cdot(\overline{567}\underline{89}) = \\ F_5^{(13)} \equiv 13\cdot(\qquad\quad) = \\ F_5^{(23)} \equiv 23\cdot(\qquad\quad) = \end{array}\right\} = 10_3 \qquad \left.\begin{array}{l} F_5^{(34)} \equiv 34\cdot(\overline{567}\underline{89}) = \\ F_5^{(24)} \equiv 24\cdot(\qquad\quad) = \\ F_5^{(14} \equiv 14\cdot(\qquad\quad) = \end{array}\right\} = 10_3\,.$$

Le figure a sinistra sono complementari e correlative alle corrispondenti di destra. I vertici dei quattro pentagoni completi H giaciono quattro a quattro sui raggi del fascio G (per es. gli omologhi 2349, 1349, 1249, 1239 sul raggio 12349 di G); i lati dei cinquilateri completi K s'incontrano quattro a quattro nei punti della punteggiata r (per es. gli omologhi 15678, 25678, 35678, 45678 nel punto 5678 di r). Rappresentando con α, β, γ, δ i quattro indici 1, 2, 3, 4, i lati omologhi di $H_5^{(\gamma)}$ e $H_5^{(\beta)}$ si segano due a due nei punti della Cfz. $F_5^{(\gamma\delta)}$, e i vertici omologhi di $K_5^{(\alpha)}$ e $K_5^{(\beta)}$ sono due a due allineati sulle rette della Cfz. $F_5^{(\alpha\beta)}$ (per es. i lati 23456 di $H_5^{(1)}$ e 13456 di $H_5^{(2)}$ si segano nel punto 3456 della $F_5^{(34)}$; i vertici 1789 di $K_5^{(1)}$ e 2789 di $K_5^{(2)}$ sono sulla retta 12789 di $F_5^{(12)}$); cosicchè la $F_5^{(\alpha\beta)} \equiv 10_3$ è circoscritta ai due cinquilateri completi $K^{(\alpha)}$, $K^{(\beta)}$ ed è in pari tempo inscritta nei due pentagoni completi $H^{(\gamma)}$, $H^{(\delta)}$.

Il gruppo II somministra 12 subgruppi, che corrispondono univocamente ai 12 pentagoni semplici contenuti in K_5, e sono *associati* due a due; chiamando associati due subgruppi corrispondenti a due pentagoni semplici ciclicamente diagonali fra loro.

Vi sono 126 gruppi del tipo II e 756 paja di subgruppi associati, dello stesso tipo II.

96. *Es. 4.º Configurazione corrispondente al pentagono articolato ed a 4 sistemi di 5 forze capaci di tenerlo in equilibrio.* ($N = 9$).

$$\text{Cfz. } \Phi_{5,4} = \varphi_{6,3} = (4,\ 6)_{84}^{126} \equiv (\overline{1\,2\,3\,4}\,5\,6\,\underline{7\,8}\,9).$$

GRUPPO I.

$$\begin{array}{llll}
K_5 \equiv & (\overline{1\,2}\,\underline{3\,4}\,5) & & r \equiv 6\,7\,8\,9 \\
F_5^{(1)} \equiv & 6\cdot(\overline{1\,2\,3}\,\underline{4}\,5) = 10_3 & & g_5^{(1)} \equiv 7\,8\,9\cdot(1\,2\,3\,4\,\bar{5}) \\
F_5^{(2)} \equiv & 7\cdot(\qquad) & & g_5^{(2)} \equiv 6\,8\,9\cdot(\qquad) \\
F_5^{(3)} \equiv & 8\cdot(\qquad) & & g_5^{(3)} \equiv 6\,7\,9\cdot(\qquad) \\
F_5^{(4)} \equiv & 9\cdot(\qquad) & & g_5^{(4)} \equiv 6\,7\,8\cdot(\qquad) \\
H_5^{(1)} \equiv & 6\,7\cdot(\overline{1}\,2\,3\,4\,\underline{5}) & & H_5^{(4)} \equiv 8\,9\cdot(\overline{1}\,2\,3\,4\,\underline{5}) \\
H_5^{(2)} \equiv & 6\,8\cdot(\qquad) & & H_5^{(5)} \equiv 7\,9\cdot(\qquad) \\
H_5^{(3)} \equiv & 6\,9\cdot(\qquad) & & H_5^{(6)} \equiv 7\,8\cdot(\qquad).
\end{array}$$

Le quattro Cfz.ⁱ F_5 sono circoscritte al cinquilatero completo K_5; i centri dei quattro fasci g_5 sono situati sulla $r \equiv 6789$. La $F_5^{(i)}$ è inscritta in tre dei sei pentagoni completi H_5, il fascio $g_5^{(i)}$ è circoscritto agli altri tre pentagoni H_5 ($i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$).

Vi sono 126 gruppi del tipo I, corrispondenti uno ad uno alle rette della Cfz.

GRUPPO II.

$$\begin{array}{ll}
g_6 \equiv 7\,8\,9\cdot(1\,2\,3\,4\,5\,\bar{6}) & F_6 \equiv (\overline{1\,2\,3}\,\underline{4\,5\,6}) = (4,\ 3)_{20}^{15} \\
H_6^{(1)} \equiv 7\,8\cdot(\overline{1}\,2\,3\,4\,5\,\underline{6}) & \left.\begin{array}{l} f_6^{(1)} \equiv 9\cdot(\overline{1\,2\,3}\,\underline{4\,5}\,6) = \\ f_6^{(2)} \equiv 8\cdot(\qquad) = \\ f_6^{(3)} \equiv 7\cdot(\qquad) = \end{array}\right\} (3,\ 4)_{15}^{20}. \\
H_6^{(2)} \equiv 7\,9\cdot(\qquad) & \\
H_6^{(3)} \equiv 8\,9\cdot(\qquad) &
\end{array}$$

Il fascio g_6 è circoscritto ai tre esagoni H_6; la Cfz. F_6 è inscritta nelle tre Cfz.ⁱ f_6. I lati omologhi di $H_6^{(\alpha)}$ e $H_6^{(\beta)}$ s'incontrano nei punti della $f_6^{(\gamma)}$; i punti omologhi di $f_6^{(\alpha)}$ e $f_6^{(\beta)}$ sono allineati sui lati di $H_6^{(\gamma)}$.

Vi sono 84 gruppi del tipo II, corrispondenti uno ad uno ai punti della Cfz.

97. *Es. 5.º Configurazione corrispondente al pentagono articolato ed a 3 sistemi di 5 forze capaci di tenerlo in equilibrio.* ($N=8$).

$$\text{Cfz. } \Phi_{5,3}=\varphi_{5,3}=(4,\ 5)_{56}^{70}\equiv(\overset{r}{\overline{1\,2\,3\,4}}\,\overset{r'}{\overline{5\,\underline{6\,7\,8}}}).$$

La Cfz. è della stessa specie della sua reciproca (secondo Maxwell-Cremona). Le rette fondamentali sono due a due conjugate. I due gruppi caratteristici nei quali la Cfz. si può scindere sono identici ossia si fondono nel seguente

Gruppo unico.

$$
\begin{array}{ll}
K_5\equiv\ (\overline{1\,2\,\underline{3\,4}}\,\underline{5}) & g_5\equiv 678\cdot(1\,2\,3\,4\,\overline{5}) \\
F_5^{(1)}\equiv 6\cdot(\overline{1\,2\,3}\,\underline{4\,5})=10_3 & H_5^{(1)}\equiv\ 78\cdot(\overline{1\,2}\,3\,4\,\underline{5}) \\
F_5^{(2)}\equiv 7\cdot(\qquad) & H_5^{(2)}\equiv\ 68\cdot(\qquad) \\
F_5^{(3)}\equiv 8\cdot(\qquad) & H_5^{(3)}\equiv\ 67\cdot(\qquad).
\end{array}
$$

Il cinquilatero completo K_5 è inscritto nelle tre Cfz.ⁱ F_5; il fascio g_5 è circoscritto ai tre pentagoni completi H_5. I punti omologhi di $F_5^{(\alpha)}$ ed $F_5^{(\beta)}$ sono allineati sui lati di $H_5^{(\gamma)}$; i lati omologhi di $H_5^{(\alpha)}$ e $H_5^{(\beta)}$ s'incontrano nei punti fondamentali della $F_5^{(\gamma)}$. Alle rette delle varie figure della prima colonna sono conjugate le rette delle figure corrispondenti nella seconda colonna.

Vi sono 56 gruppi analoghi a questo; ogni punto G ne individua uno.

APPENDICE.

§ 6.

Sulle configurazioni duali d'indice 3, cioè del tipo μ_3.

98. Siano $P_1\ P_2\ P_3 \ldots P_k$ k poligoni semplici di n vertici, *ciclicamente inscritti* fra loro, tali cioè che P_1 sia inscritto in P_2, P_2 in $P_3, \ldots P_k$ in P_1. Questi poligoni hanno complessivamente kn vertici ed altrettanti lati. Un lato di P_i ($i=1,\ 2, \ldots k$) contiene 3 punti, cioè due vertici di P_i e uno di P_{i-1} (se $i=1$ intendasi $i-1=0=k$); in un vertice di P_i concorrono 3 rette, cioè due lati di P_i e un lato di P_{i+1} (se $i=k$, intendasi $i+1=k+1=1$). Dunque un gruppo ($P_1\ P_2 \ldots P_k$) di k n-goni semplici ciclicamente inscritti fra loro costituisce una Cfz. μ_3 ove $\mu=nk$. Questa definizione delle Cfz.[i] duali d'indice 3 include anche i due casi indicati da Reye (*): cioè quello di due n-goni simultaneamente inscritti l'uno nell'altro (Cfz. $2n_3$), e quello di un n-gono semplice circoscritto a sè medesimo (Cfz. n_3).

Dati in un piano $k-1$ poligoni $P_1\ P_2 \ldots P_{k-1}$ in modo che ciascuno sia inscritto nel susseguente, per completare, quando sia possibile, la Cfz. nk_3 basta costruire un n-gono semplice P_k i cui vertici cadano sui lati di P_1 e i cui lati passino pei vertici di P_{k-1}. Il qual problema, fissato che sia l'ordine nel quale questa doppia condizione dev'essere soddisfatta, è in generale di secondo grado e si risolve geometricamente col metodo di falsa posizione.

Dai §§ 1 e 3 si rileva che ogni configurazione F_m corrispondente a più di cinque forze equilibrate contiene uno o più gruppi di Cfz.[i] μ_3.

(*) L. c. n.° 2.

§ 7.

Osservazione sulla Cfz. d'equilibrio di 6 forze nel piano; sua analogia con la Cfz. delle rette di Steiner nell'esagrammo di Pascal.

99. Con la simbolica adottata da Cremona (*) e da Veronese (**) nello studio dell'esagrammo di Pascal, i principali gruppi della configurazione di 6 forze, discussi nel § 3 Es. 4°, si potrebbero esprimere mediante certe combinazioni dei 15 trilateri Δ_{ij} (n.° 29) (***).

Senza fermarci su questo concetto, il cui sviluppo richiederebbe una non breve disgressione, osserviamo come, prescindendo dal significato meccanico, le proprietà geometriche della Cfz. F_6 competano a tutte le configurazioni della stessa specie; in particolare anche, per esempio, alla Cfz. $(4, 3)_{20}^{15}$ costituita dalle rette e dai punti di Steiner nell'esagrammo di Pascal.

Da quest'osservazione risulta per es. che con le rette di Steiner si possono formare 60 esagoni semplici, 6 Cfz.i $(3, 3)_{10}^{10}$ e 6 cinquilateri completi, 144 pentagoni semplici, 15 Cfz.i $(2, 3)_4^6$ e 30 quadrilateri completi, 135 quadrangoli semplici, 60 triangoli λ, 20 terne di raggi concorrenti, per modo che i vertici di tutte queste figure siano punti di Steiner; e inoltre 15 trilateri Δ, i cui vertici sono estranei alla Cfz. $(4, 3)_{20}^{15}$ ossia non coincidono con punti di Steiner. E i 60 esagoni si separano in *dieci* gruppi di *sei* o in *quindici* gruppi di *quattro* per modo, che tutti gli esagoni di un gruppo siano dotati di certe proprietà comuni; e i pentagoni si combinano in 36 paja di pentagoni ciclicamente inscritti e in 36 corrispondenti paja di pentagoni ciclicamente diagonali: ogni poligono della prima serie essendo circoscritto al poligono corrispondente dell'altra; ecc. ecc.

(*) *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di* Pascal. Memoria della R. Accad. dei Lincei, ser. 3ª, tom. I (1876-77).

(**) *Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres, particulièrement pour* $n = 3, 4, 5, 6$, *en relation avec les groupes de l'Hexagramme mystique.* Annali di Matematica, t. XI.

(***) Una simbolica analoga estesa ad esprimere opportunamente i varî gruppi contenuti nelle Cfz.i d'equilibrio di 7, 8, 9,... forze, permetterebbe di ravvicinare la teorica di queste configurazioni a quella delle sostituzioni di 7, 8, 9,... lettere.

Ne è difficile stabilire una corrispondenza univoca fra le 15 rette di Steiner e le 15 rette fondamentali dell'esagrammo, di maniera che ogni gruppo di quelle individui un gruppo di queste. Per es.: Ai tre esagoni fondamentali le cui rette di Pascal concorrono in un punto G di Steiner corrispondono tre esagoni di rette Steiner consociati e appartenenti alla tripla T individuata dal punto G (n.° 31), ecc. Se poi si considerano le intersezioni P' delle rette di Steiner, che non cadono in punti di Steiner, e le intersezioni P delle rette fondamentali, che non cadono nei sei punti fondamentali, si ottiene una serie di 45 punti P' e una serie di 45 punti P, che si corrispondono univocamente. Ogni gruppo di punti P determina un gruppo di punti P'; da certe proprietà del primo gruppo, si possono ricavare proprietà dell'altro. Per es.

I punti P sono distribuiti tre a tre su 60 rette di Pascal; a ognuna di queste corrisponde un trilatero Δ_{ij}; un punto di Steiner individua tre rette di Pascal: i corrispondenti trilateri hanno i vertici sulle tre rette di Pascal determinate dal punto conjugato (*).

Ecc. ecc.

I punti P' determinano tre a tre 60 triangoli $\mathbf{P}$, a ognun dei quali corrisponde un trilatero Δ_{ij}; un punto di Steiner individua tre triangoli $\mathbf{P}$: i trilateri corrispondenti hanno per vertici i vertici dei tre triangoli $\mathbf{P}$ individuati dal punto conjugato.

§ 8.

Proprietà dei poliedri completi.

100. La configurazione di m forze equilibrate nel piano essendo in sostanza la projezione di un m-edro completo, gli spigoli e i vertici di questo si possono indicare con gli stessi simboli che dinotano le rette e i punti fondamentali della Cfz. F_m; epperò si può rappresentare un m-edro completo Π_m con la stessa segnatura $(1, 2, 3, \ldots m)$ che simbolicamente esprime la F_m. Se dunque i simboli dei varî gruppi di tale Cfz. s'interpretano convenientemente, si ottengono corrispondentemente dei teoremi relativi all'm-edro completo.

(*) Cfr. Veronese, *Interprétations*, ecc., l. c., n.° 24.

Si ha per esempio per $m=5$:

I dieci spigoli del pentaedro completo sono lati di sei paja di pentagoni gobbi (semplici) ciclicamente inscritti fra loro.

Per $m=6$:

Gli spigoli dell'esaedro completo sono distribuiti tre a tre su 15 iperboloidi Δ_{ij} (n.° 29), dei quali essi sono generatrici. Ogni spigolo è *generatrice* comune di tre iperboloidi.

Gli spigoli dell'esaedro completo si aggruppano (in sessanta maniere diverse) in un esagono gobbo (semplice) e in due trispigoli (conjugati) che rispettivamente ne projettano i vertici di posto pari e di posto dispari; i rimanenti tre spigoli sono generatrici di un iperboloide che corrisponde univocamente all'esagono gobbo.

Questi 60 esagoni gobbi sono inscritti 6 a 6 in uno stesso pajo di trispigoli conjugati e 4 a 4 corrispondono a uno stesso iperboloide; e quindi si distribuiscono in *dieci* gruppi di *sei* o in *quindici* gruppi di *quattro* esagoni (n.° 33, tab. I e II) secondo che come nucleo o base del gruppo si prende il sistema di due trispigoli conjugati ovvero l'iperboloide.

Con gli spigoli dell'esaedro completo si formano 36 paja di pentagoni gobbi (semplici) ciclicamente inscritti e 36 corrispondenti paja di pentagoni piani (semplici) ciclicamente diagonali. Un pajo qualunque di quei pentagoni è circoscritto al pajo corrispondente di questi. Due paja corrispondenti di pentagoni contengono tutt'e quindici gli spigoli dell'esaedro.

Ecc. ecc.

Per $m=7$ si ha:

Gli spigoli r dell'ettaedro completo si aggruppano (in 120 maniere diverse) in una terna di ettagoni gobbi (semplici) ciclicamente inscritti, che, assorbendo 21 vertici dell'ettaedro, determinano i 14 rimanenti. Questi punti sono vertici di tre 14-goni gobbi (semplici) aventi per lati quattordici spigoli r e corrispondenti uno ad uno agli ettagoni anzidetti. Ogni 14-gono è doppiamente inscritto nell'ettagono corrispondente.

Ecc. ecc.

§ 9.

Equilibrio dei poligoni articolati sollecitati da forze applicate *sui* lati.

101. Se un poligono articolato è in equilibrio sotto l'azione di m forze poste nel suo piano e applicate ad altrettanti punti dati (ad arbitrio) sui suoi m lati; le linee delle reazioni nei suoi vertici sono lati di un poligono funicolare connettente le forze date.

Infatti se l_{i-1}, l_i, l_{i+1} sono tre lati successivi del poligono articolato, si può sciogliere il vincolo che collega i primi due aggiungendo nel vertice $(l_{i-1}\, l_i)$ due certe forze uguali opposte agenti lungo una retta determinata $a_{i-1.i}$; e si può sciogliere il vincolo che collega gli ultimi due lati aggiungendo nel vertice $(l_i\, l_{i+1})$ due certe forze uguali opposte agenti lungo una retta determinata $a_{i.i+1}$. E poichè la forza esterna P_i, applicata in un punto di l_i, e le reazioni negli estremi di questo lato sono in equilibrio, le rette $a_{i-1.i}$, $a_{i.i+1}$ devono evidentemente concorrere sulla P_i.

Dunque le rette a_{12}, a_{23}, $a_{34}, \ldots a_{m1}$, cioè le linee delle reazioni nei vertici successivi $(l_1\, l_2)$, $(l_2\, l_3)$, $(l_3\, l_4), \ldots (l_m\, l_1)$ del poligono articolato, formano un poligono semplice Q_m circoscritto al poligono articolato e inscritto nel poligono delle forze esterne. Inoltre, le reazioni nei vertici essendo uguali e contrarie alle azioni esercitate sui vertici stessi dalle forze date, ne viene che queste si possono scomporre in $2m$ forze aventi per linee d'azione i lati di Q_m e a due a due uguali opposte; onde Q_m è un poligono funicolare delle forze date.

Questa proprietà si presta alla soluzione di diversi problemi. Per esempio: « Date le linee delle reazioni negli m vertici di un poligono articolato e assegnati su $m-1$ lati i punti d'applicazione delle forze che devono tenere il poligono in equilibrio, si possono determinare, proporzionalmente, tutte le forze esterne e tutte le reazioni nei vertici, nonchè il punto d'applicazione della forza agente sull'm^o lato. »

« Date le reazioni degli m vertici si possono determinare le intensità, direzioni e punti d'applicazione (sugli m lati) delle forze esterne che devono tenere in equilibrio il poligono articolato. »

« Date le linee d'azione di $m-1$ forze esterne e le intensità di quelle applicate sopra *due* lati consecutivi, si possono determinare completamente tutte le forze esterne e le reazioni di tutti i vertici. »

102. Riassumendo in un solo enunciato il teorema testè dimostrato e quello già noto, richiamato al n.° 12, si ha la seguente proposizione generale:

Un sistema piano di forze equilibrate è capace di tenere in equilibrio tutt'i poligoni articolati che ne sono poligoni funicolari oppure tutt'i poligoni articolati che sono inscrittibili in un qualsivoglia poligono funicolare del sistema, secondo che le forze s'intendono applicate rispettivamente ai vertici oppure a punti comunque assegnati *sui* lati dei poligoni articolati.

Ed è evidente il corollario:

Se un poligono articolato è tenuto in equilibrio da m forze poste nel suo piano e applicate a punti dati dei suoi lati; le linee d'azione di queste forze e delle rispettive risultanti cicliche, e quelle delle reazioni nei vertici, sono le rette fondamentali di una configurazione F_{m+1} (§ 2).

Milano, 10 gennaio 1884.

INDICE.

PARTE I.

PARTE II.

APPENDICE.