Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche.

(*Memoria del prof.* G. Ricci, *a Padova.*)

Molti lavori sono stati pubblicati sulle forme differenziali quadratiche dopo che le ricerche moderne sulla natura dello spazio hanno richiamata su di esse la attenzione dei Geometri. Così oltre alla memorabile *Tesi di abilitazione* di Riemann ed alla *Commentatio Mathematica,* in cui viene trattato in ispecial modo il problema di riconoscere quando una data forma sia trasformabile in altra a coefficienti costanti e che, sebbene presentata alla Accademia delle Scienze di Parigi nel 1865, fu pubblicata soltanto nel 1876, apparvero contemporaneamente nel volume 70 del Giornale di Borchardt del 1868 una Memoria di Christoffel sul problema generale della trasformabilità l'una nell'altra di due date forme con egual numero di variabili, ed una di Lipschitz, in cui viene risoluto completamente quello speciale già considerato da Riemann.

In altri lavori pubblicati nei volumi 71 ed 81 del Giornale di Borchardt il Lipschitz si propone di determinare degli invarianti delle forme differenziali quadratiche e vi giunge prendendo a guida i risultati già noti per l'elemento lineare di una superficie, cioè nel caso di due sole variabili indipendenti. Si sa infatti che, se un punto materiale non soggetto alla azione di alcuna forza è costretto a muoversi sopra una superficie, la pressione da esso esercitata sopra questa in ciascun punto è inversamente proporzionale al raggio di curvatura della sezione piana normale alla superficie e tangente alla traiettoria in quel punto. Se quindi ci si propone di determinare le pressioni massima e minima tra quelle corrispondenti alle diverse traiettorie si arriva ad una equazione di secondo grado, che ha per radici i valori reciproci dei raggi di curvatura principali della superficie, e il cui termine noto è la curvatura di Gauss, che si sa essere appunto un invariante differenziale dell'elemento lineare della superficie. Il problema analogo più generale di Calcolo delle variazioni, in cui ci si propone la determinazione delle pressioni massime e minime nel caso che il moto di un punto materiale non soggetto alla azione di alcuna forza in uno spazio ad n dimensioni debba soddisfare ad m condizioni, conduce ad una equazione di grado $n-m$, coi coefficienti della quale si costruiscono gli invarianti cercati. Così, se è $m=1$, come appunto nel caso del moto di un punto materiale del nostro spazio sopra una superficie, e quindi la equazione accennata è della forma

$$\omega^{n-1}+D_1\omega^{n-2}+\cdots+D_{n-2}\omega+D_{n-1}=0,$$

i coefficienti D_2, D_4, D_6,... sono invarianti della forma differenziale quadratica, che rappresenta l'elemento lineare della *superficie ad* $n-1$ *dimensioni,* su cui il punto materiale dello spazio ad n è costretto a muoversi, e lo sono pure i prodotti $D_{2r+1}\ D_{2s+1}$, le quante volte sia $2(r+s+1)\geqq n+1$. Il coefficiente D_{n-1} è riguardato naturalmente come la generalizzazione della curvatura di Gauss.

Il sig. Voss in una Memoria pubblicata a pag. 129 e seguenti del vol. 16 dei *Mathematische Annalen,* prese a considerare due forme $\sum_1^m{}_{rs}a_{rs}du_r du_s$, $\sum_1^n{}_{ik}c_{ik}dx_i dx_k$, dove è $m<n$, e di cui la prima si può dedurre dalla seconda stabilendo tra le x $n-m$ relazioni, che sono identicamente soddisfatte dalle loro espressioni per le u, generalizza per questo caso i concetti delle curvature di Monge e di Gauss e guidato da analogie puramente geometriche giunge ai risultati, cui era pervenuto il Lipschitz seguendo delle analogie tolte alla Meccanica razionale. E ad analogie geometriche sono pure inspirate molte indagini sulla curvatura degli spazî pubblicate nell'ultimo decennio, come quelle del sig. Beez contenute nel vol. 7 dei *Mathematische Annalen* e nelle Annate 1875, 76 e 79 della *Zeitschrift für Mathematik und Physik* diretta da Schlömilch.

Così quasi tutti i Geometri, che si sono fino ad ora occupati di questo argomento seguendo il corso delle idee, quale si è infatti sviluppato e che ha introdotto nel campo della Analisi le forme differenziali quadratiche come rappresentanti gli elementi lineari di spazî ad n dimensioni chiesero alle teorie, che valgono pel nostro spazio e per le superficie ordinarie a due dimensioni, norma alle loro ricerche. E se i risultati, a cui giunsero, furono notevoli, i metodi non appaiono sempre chiari e non rendono dei risultati stessi sufficiente ragione come quelli, che muovono da vedute e considerazioni, che non hanno colle questioni da risolvere una connessione necessaria. E ciò tanto più che, come vedremo, il caso di due sole variabili indipendenti rappresenta sotto molti aspetti nella Teoria, che ci occupa, un caso di eccezione.

Oggetto di questo scritto è di iniziare sulle forme differenziali quadratiche una serie di ricerche le quali condotte su concetti puramente analitici meglio ci addentrino nella conoscenza della loro natura, e sfuggano anche così alle discussioni, a dir vero, alquanto oziose sulla esistenza e sulla natura degli spazî a più di tre dimensioni. Le interpretazioni dettate da analogie geometriche o meccaniche, che a quei risultati si potranno dare, non saranno che illustrazioni di una tale Teoria.

Una osservazione fatta dallo SCHLÆFLI (*), secondo cui una forma differenziale quadratica positiva ad n variabili deve sempre potersi dedurre dalla $\sum_{1}^{n+h} {}_r\, dy_r^2$, dove è $0 \leq h \leq \frac{n(n-1)}{2}$, prendendo per $y_1, y_2, \ldots y_{n+h}$ delle funzioni opportune di n variabili indipendenti, è il punto di partenza di queste ricerche. Se infatti, preso per h il minore tra i numeri intieri positivi, per cui ciò è possibile per una data forma, questa si dice di *classe h,* è evidente che per le questioni più importanti, che si possono proporre nello studio di una forma differenziale quadratica, sarà essenziale il conoscere a quale classe essa appartenga. Così, per esempio, perchè due forme collo stesso numero di variabili indipendenti si possano trasformare l'una nell'altra, sarà necessario anzi tutto che esse siano della medesima classe: e già i risultati, che si conoscono in questa Teoria, si appalesano essenzialmente dipendenti dalla indicata classificazione delle forme.

A me pare che si avrebbe una teoria completa e razionale delle forme differenziali quadratiche, le quante volte si possedessero i criterî per riconoscere a quale classe una data forma appartiene e, partendo da questi, si facesse uno studio speciale delle forme stesse classe per classe.

Qui, chiamate riducibili le forme ad n variabili, che si possono dedurre da una forma ad $n-1$ ponendo le variabili di questa eguali ad altrettante funzioni delle variabili di quella, daremo nel § 1 il modo di riconoscere quando una forma è riducibile e, se lo è, di effettuare la riduzione.

Ristrette poi le nostre considerazioni alle forme non riducibili, daremo nel § 2 una nuova dimostrazione del teorema già dimostrato da LIPSCHITZ e in parte anche da CHRISTOFFEL e RIEMANN sulle condizioni necessarie e sufficienti

(*) Vedasi il Volume 5 della Serie II di questi *Annali* a pag. 178.

perchè una tale forma sia di classe 0. E reputo opportuno il dare una tale dimostrazione, sia perchè essa mi appare chiara e naturale, sia perchè è basata sul teorema del § 1, come quella del paragrafo successivo sul teorema del § 2, e rende così tutto lo studio più completo e le sue parti meglio coordinate fra di loro.

Nel § 3 in fine, date alcune formule, che valgono per delle forme di classe qualunque, daremo i criterî per riconoscere se una forma data sia di 1ª classe. A questo ci condurrà la ricerca della forma speciale, che prendono in questo caso le $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ espressioni (lm, pq) dipendenti dai coefficienti della forma data e dalle loro derivate prime e seconde, le quali si annullano tutte, quando la forma è di classe 0. Si trova che nel caso di una forma di 1ª classe esse sono invece i minori di 2° ordine di un determinante simmetrico di ordine n. Indicati con (lp) gli $\frac{n(n+1)}{2}$ elementi di questo determinante, se è $n=2$, uno solo di essi è determinato in funzione della unica espressione $(12, 12)$ e degli altri due; se è $n=3$, lo sono tutti; e per $n>3$ la loro eliminazione conduce ad $\frac{n^2(n^2-1)}{12}-\frac{n(n+1)}{2}$ relazioni tra le (lm, pq), cioè ad altrettante relazioni differenziali di 2° ordine, a cui debbono soddisfare i coefficienti della forma data perchè questa sia di 1ª classe. Si trova di più che le quantità (lp) debbono soddisfare ad $\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ relazioni differenziali di 1° ordine, le quali nel caso di $n>2$ corrispondono ad altrettante relazioni differenziali di 3° ordine tra i coefficienti della forma data.

Se si considera poi la forma ψ di coefficienti (lp) si trova che essa è covariante alla data φ, così che, se si indicano rispettivamente con Δ ed a i loro discriminanti, per $n=2$, $\frac{\Delta}{a}$ è un *invariante differenziale di* 2° *ordine* di φ, che si trova coincidere colla curvatura di Gauss della superficie, di cui φ rappresenta l'elemento lineare: e per $n>2$ sono invarianti differenziali di 2° ordine di φ tutti gli n invarianti algebrici assoluti del sistema di forme φ e ψ. Si determina poi facilmente il significato geometrico di tali invarianti, poichè, se si estende il nome di superficie a tutti gli spazî, il cui elemento lineare φ è una forma differenziale di 1ª classe, e corrispondentemente si estende la definizione delle linee di curvatura e dei raggi di curvatura principali, si trova che per ogni punto di una superficie ad n dimensioni passano n linee di curvatura, a cui corrispondono altrettanti raggi di curvatura principali, e quegli invarianti rappresentano le somme dei prodotti r ad r dei valori reciproci di questi raggi, essendo $r=1, 2,\dots n$. Così l'invariante $(-1)^n \frac{\Delta}{a}$ rappresenta anche nel caso generale il prodotto di tutti quei valori reciproci e si riguarda quindi come la espressione della curvatura di GAUSS per le superficie di un numero qualunque di dimensioni, tanto più che anche per queste il suo annullarsi corrisponde all'essere la superficie piana.

Le formule generali contenute nel § 3 possono servire come punto di partenza per lo studio delle forme di classe superiore alla prima; ma in questo studio io non mi sono peranco addentrato.

§ 1.

Forme riducibili.

Diremo che una forma differenziale quadratica ad n variabili

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s \tag{1}$$

è *riducibile*, le quante volte sia identicamente

$$\varphi = \sum_1^{n-1} {}_{lm}\, b_{lm}\, du_l\, du_m, \tag{2}$$

$u_1, u_2,\dots u_{n-1}$ essendo funzioni di $x_1, x_2,\dots x_n$ e i coefficienti b_{lm} di $u_1, u_2,\dots u_{n-1}$. Se ciò è, posto

$$e_{r,m} = \sum_1^{n-1} {}_l\, b_{l,m} \frac{du_l}{dx_r} \qquad (r=1, 2,\dots n,\ m=1, 2,\dots n-1)$$

si ha

$$a_{rs} = \sum_1^{n-1} {}_m\, e_{rm} \frac{du_m}{dx_s}, \tag{3}$$

cioè il discriminante a della forma φ è il prodotto delle due matrici

$$\left|\begin{matrix} \frac{du_1}{dx_1} & \frac{du_2}{dx_1} \cdots & \frac{du_{n-1}}{dx_1} \\ \frac{du_1}{dx_2} & \frac{du_2}{dx_2} \cdots & \frac{du_{n-1}}{dx_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{du_1}{dx_n} & \frac{du_2}{dx_n} \cdots & \frac{du_{n-1}}{dx_n} \end{matrix}\right|, \qquad \left|\begin{matrix} e_{11} & e_{1,2} \cdots & e_{1,n-1} \\ e_{21} & e_{2,2} \cdots & e_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{n1} & e_{n,2} \cdots & e_{n\,n-1} \end{matrix}\right|,$$

che indicheremo con U ed E e che hanno n linee orizzontali ed $n-1$ verticali. È dunque

$$a = 0. \tag{I}$$

Si ha di più dalla (3)

$$\frac{d a_{rs}}{d x_i} = \sum_1^{n-1}{}_{lmh} \frac{d b_{l,m}}{d u_h} \frac{d u_h}{d x_i} \frac{d u_l}{d x_r} \frac{d u_m}{d x_s} + \sum_1^{n-1}{}_{lm} b_{l,m} \left(\frac{d u_l}{d x_r} \frac{d^2 u_m}{d x_s d x_i} + \frac{d u_m}{d x_s} \frac{d^2 u_l}{d x_r d x_i} \right)$$

e posto

$$2 \begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix} = \frac{d a_{is}}{d x_r} + \frac{d a_{ir}}{d x_s} - \frac{d a_{rs}}{d x_i} \tag{4}$$

e indicato con α_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} in a

$$\left.\begin{aligned} 2 \begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix} &= \sum_1^{n-1}{}_{lmh} \left(\frac{d b_{l\,m}}{d u_h} + \frac{d b_{lh}}{d u_m} - \frac{d b_{hm}}{d u_l} \right) \frac{d u_l}{d x_i} \frac{d u_h}{d x_r} \frac{d u_m}{d x_s} + 2 \sum_1^{n-1}{}_{lm} b_{lm} \frac{d u_l}{d x_i} \frac{d^2 u_m}{d x_r d x_s} . \\ 2 \sum{}_i \alpha_{pi} \begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix} &= \sum_1^{n-1}{}_{lm} \left\{ 2 b_{lm} \frac{d^2 u_m}{d x_r d x_s} + \sum_1^{n-1}{}_h \left(\frac{d b_{l,m}}{d u_h} + \frac{d b_{lh}}{d u_m} - \frac{d b_{hm}}{d u_l} \right) \frac{d u_h}{d x_r} \frac{d u_m}{d x_s} \right\} \sum{}_i \alpha_{pi} \frac{d u_l}{d x_i} . \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ora dalla (3), fattovi $s = i$, moltiplicata per α_{pi} e sommata rispetto ad i tenendo conto della (I), si ha

$$\sum_1^{n-1}{}_l e_{rl} \sum_1^{n}{}_i \alpha_{pi} \frac{d u_l}{d x_i} = 0.$$

Se tutti i determinanti, che si traggono dalla matrice E sopprimendone una linea orizzontale, non sono nulli, questo sistema di equazioni conduce alle

$$\sum_1^{n}{}_i \alpha_{pi} \frac{d u_l}{d x_i} = 0$$

e quindi per le (5) alle

$$\sum{}_i \alpha_{pi} \begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix} = 0, \tag{II}$$

mentre nel caso opposto si giunge a queste immediatamente osservando che, se si indicano con U_i ed E_i i determinanti, che si traggono dalle matrici U ed E trascurandone le orizzontali i^{sime}, si ha

$$\alpha_{pi} = E_p U_i = 0.$$

Supponiamo ora verificate le condizioni (I) e (II) e poniamo

$$x_r = x_r(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, x_n) \qquad (r = 1, 2, \ldots n-1). \tag{6}$$

La φ prende mediante questa posizione la forma

$$\varphi = \sum_1^{n-1}{}_{lm} b_{lm}\, du_l\, du_m + 2\sum_1^{n-1}{}_{rh} \frac{dx_r}{du_h} du_h \sum_1^n a_{rs}\, dx_s$$
$$+ dx_n\left(\sum_1^n{}_s a_{ns}\, dx_s + \sum_1^{n-1}{}_r \frac{dx_r}{dx_n}\sum_1^n{}_s a_{rs}\, dx_s\right),$$

essendosi posto

$$b_{lm} = \sum_1^{n-1}{}_{rs} a_{rs} \frac{dx_r}{du_l}\frac{dx_s}{du_m}. \tag{7}$$

La precedente espressione di φ si riduce alla (2) le quante volte $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ si determinino in funzione di x_n per guisa da soddisfare al sistema di equazioni simultanee

$$\sum_1^n{}_s a_{rs}\, dx_s = 0 \qquad (r = 1,\ 2, \ldots\ n), \tag{8}$$

che sono compatibili fra di loro, quando la condizione (I) è soddisfatta.

Dalle (7), in cui per $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ si intendano posti i valori dati dalle (6), si trae

$$\frac{db_{l,m}}{dx_n} = \sum_1^{n-1}{}_{rs} \frac{da_{rs}}{dx_n}\frac{dx_r}{du_l}\frac{dx_s}{du_m} + \sum_1^{n-1}{}_{rs} a_{rs}\left(\frac{dx_r}{du_l}\frac{d^2x_s}{dx_n\, du_m} + \frac{dx_r}{du_m}\frac{d^2x_s}{dx_n\, du_l}\right),$$

ovvero osservando che è

$$\frac{da_{rs}}{dx_n} = \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_n} + \sum_1^{n-1}{}_p \frac{da_{rs}}{dx_p}\frac{dx_p}{dx_n}$$

e per le (8)

$$\sum_1^{n-1}{}_s a_{rs} \frac{d^2x_s}{dx_n\, du_m} = -\sum_1^{n-1}{}_p \frac{da_{rn}}{dx_p}\frac{dx_p}{du_m} - \sum_1^{n-1}{}_{sp} \frac{da_{rs}}{dx_p}\frac{dx_p}{du_m}\frac{dx_s}{dx_n}$$

$$\frac{db_{lm}}{dx_n} = -2\sum_1^{n-1}{}_{rs} \frac{dx_r}{du_l}\frac{dx_s}{du_m}\sum_1^n{}_p \begin{bmatrix} rs \\ p \end{bmatrix} \frac{dx_p}{dx_n}.$$

Infine poichè le (8), tenuto conto della (I), ci dicono che le dx_i sono proporzionali alle α_{pi} e quindi le (II) conducono alle

$$\sum_1^n{}_p \begin{bmatrix} rs \\ p \end{bmatrix} dx_p = 0,$$

la precedente equazione ci dà $\frac{db_{l,m}}{dx_n} = 0$, cioè ci dice che i coefficienti b_{lm} sono funzioni soltanto delle costanti $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$, che vengono introdotte dalla integrazione del sistema (8).

Si è dunque dimostrato che: *Le condizioni* (I) *e* (II) *sono necessarie e sufficienti perchè la forma* (1) *sia riducibile. Per effettuare la riduzione conviene integrare il sistema di equazioni simultanee* (8); *le costanti di integrazione rappresentano le nuove variabili.*

Si può pure dedurre dalla dimostrazione data che, se è verificata soltanto la condizione (I), la forma (1) si può ridurre alla (2), ma i coefficienti di questa dipenderanno oltre che dalle nuove anche da una delle antiche variabili.

§ 2.

Forme di classe 0.

Supponiamo ora che la forma

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s \tag{1}$$

non sia riducibile e, almeno quando la variabilità delle x_r sia convenientemente limitata, sia positiva. In tal caso, come ha notato lo Schlæfli (*), essa può dedursi dalla

$$ds^2 = \sum_1^{n+h} {}_t\, dy_t^2, \tag{2}$$

essendo $0 \leqq h \leqq \frac{n(n-1)}{2}$ e le y_t funzioni di $x_1, x_2, \ldots x_n$: il numero rappresentato da h darà la *classe* della forma φ.

Se indichiamo per brevità la $\frac{dy_t}{dx_r}$ con $\frac{dt}{dr}$ abbiamo l^

$$a_{rs} = \sum_1^{n+h} {}_t \frac{dt}{dr}\frac{dt}{ds}, \tag{3}$$

dalle quali si deducono per le quantità $\begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix}$ (§ 1, 4) le espressioni

$$\begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix} = \sum_1^{n+h} {}_t \frac{dt}{di}\frac{d^2 t}{dr\, ds}. \tag{4}$$

(*) Si veda il volume 5 della Serie II di questi *Annali* a pag. 190.

Posto poi

$$(lm,\ pq) = \frac{d\begin{bmatrix} lp \\ m \end{bmatrix}}{dq} - \frac{d\begin{bmatrix} lq \\ m \end{bmatrix}}{dp} + \sum\nolimits_{rs} c_{rs} \left\{ \begin{bmatrix} lq \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mp \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} lp \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mq \\ s \end{bmatrix} \right\} \tag{5}$$

e

$$c_{rs} = \frac{\alpha_{rs}}{a} \tag{6}$$

si ha dalle (4)

$$\left.\begin{aligned} (lm,\ pq) &= \sum_1^{n+h}{}_t \left(\frac{d^2 t}{dl\,dp}\,\frac{d^2 t}{dm\,dq} - \frac{d^2 t}{dl\,dq}\,\frac{d^2 t}{dm\,dp} \right) \\ &+ \sum_1^{n+h}{}_{tu} \sum_1^{n}{}_{rs} c_{rs} \frac{dt}{dr}\,\frac{du}{ds} \left(\frac{d^2 t}{dl\,dq}\,\frac{d^2 u}{dm\,dp} - \frac{d^2 t}{dl\,dp}\,\frac{d^2 u}{dm\,dq} \right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Supponendo dapprima $h=0$ e posto

$$D = \sum \pm \frac{dy_1}{dx_1}\,\frac{dy_2}{dx_2} \cdots \frac{dy_n}{dx_n}$$

$$e_{r,t} = \frac{dD}{d\dfrac{dt}{dr}}$$

dalle (3) si ha

$$a = D^2 \qquad \alpha_{rs} = \sum_1^n{}_q e_{rq} e_{sq}. \tag{8}$$

Avremo quindi

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n{}_r \alpha_{rs} \frac{dt}{dr} &= \sum_1^n{}_q e_{sq} \sum_1^n{}_r e_{rq} \frac{dt}{dr} = D e_{st} \\ \sum_1^n{}_{rs} \alpha_{rs} \frac{dt}{dr}\,\frac{du}{ds} &= D \sum\nolimits_s e_{st} \frac{du}{ds} = \begin{cases} D^2 = a & (\text{per } u = t) \\ 0 & (\text{per } u \gtrless t). \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Queste assieme alle (7) dicono che, quando la forma φ è di classe 0, i suoi coefficienti soddisfano alle equazioni

$$(lm,\ pq) = 0. \tag{I}$$

Per dimostrare il teorema inverso di questo risolviamo le equazioni (4) nel caso di $h=0$ rispetto alle derivate seconde delle y. Tenuto conto delle (6) e (9) si ottiene così

$$\frac{d^2 t}{di\,dg} = \sum_1^n{}_{rs} c_{rs} \begin{bmatrix} ig \\ s \end{bmatrix} \frac{dt}{dr}, \tag{10}$$

le quali derivate rispetto ad x_h e sostituiti per le derivate seconde, che compariscono nei secondi membri, i valori dati dalle (10) stesse, si ha

$$\frac{d^3 t}{di\,dg\,dh}=\sum_1^n{}_{rs}\left(\begin{bmatrix} ig \\ s \end{bmatrix}\frac{d\,c_{rs}}{dh}+c_{rs}\left\{\frac{d\begin{bmatrix} ig \\ s \end{bmatrix}}{dh}+\sum_1^n{}_{pq}\,c_{pq}\begin{bmatrix} ig \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} hq \\ s \end{bmatrix}\right\}\right)\frac{dt}{dr}.$$

E poichè dalle equazioni (4) del § 1, che definiscono il simbolo $\begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix}$, si ha

$$\frac{d\,a_{qs}}{dh}=\begin{bmatrix} hq \\ s \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} hs \\ q \end{bmatrix} \tag{11}$$

e quindi

$$\sum_1^n{}_q\,c_{pq}\begin{bmatrix} hq \\ s \end{bmatrix}=-\sum{}_q\,c_{pq}\begin{bmatrix} hs \\ q \end{bmatrix}-\sum{}_q\,a_{qs}\frac{d\,c_{pq}}{dh}$$

$$\sum{}_{qs}\,c_{rs}\,c_{pq}\begin{bmatrix} hq \\ s \end{bmatrix}=-\sum{}_{qs}\,c_{pq}\,c_{rs}\begin{bmatrix} hs \\ q \end{bmatrix}-\frac{d\,c_{pr}}{dh},$$

la precedente si trasforma nella

$$\frac{d^3 t}{di\,dg\,dh}=\sum{}_{rs}\,c_{rs}\left\{\frac{d\begin{bmatrix} ig \\ s \end{bmatrix}}{dh}-\sum{}_{pq}\,c_{pq}\begin{bmatrix} ig \\ p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} hs \\ q \end{bmatrix}\right\}\frac{dt}{dr}.$$

Se si pone ora mente alle (7), si vede che l'essere verificate le equazioni (I) equivale all'essere il sistema (10) *completo* nel senso definito in una mia recente Nota pubblicata in questi stessi *Annali* (*). Come in essa dimostrai, il sistema (10) si integra determinando gli n integrali comuni indipendenti del sistema di equazioni

$$\frac{df}{dx_i}+\sum_1^n{}_g\,A_{ig}\frac{df}{dp_g}=0 \qquad (i=1,\ 2,\dots\ n) \tag{a}$$

dopo aver posto

$$A_{ig}=\sum_1^n{}_{rs}\begin{bmatrix} ig \\ s \end{bmatrix}c_{rs}\,p_r; \tag{12}$$

sistema, che è jacobiano. Indicando infatti quegli integrali con $f_1, f_2,\dots f_n$ le equazioni

$$f_r=c_r \qquad (r=1,\ 2,\dots\ n),$$

dove le c_r sono costanti arbitrarie, danno per $p_1, p_2,\dots p_n$ le derivate rispetto ad $x_1, x_2,\dots x_n$ di una funzione y, la quale rappresenta l'*integrale generale* del sistema (10).

(*) Tomo 12, pag. 43.

Prendiamo

$$f = \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} p_r p_s$$

ed avremo

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx_i} &= \sum_1^n {}_{rs} \frac{d\, c_{rs}}{d\, i} p_r p_s \\ \frac{df}{dp_g} &= 2 \sum_1^n {}_h c_{hg} p_h \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

e per questa e per le (12)

$$\sum_1^n {}_g A_{ig} \frac{df}{dp_g} = 2 \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} p_r \sum_1^n {}_h p_h \sum_1^n {}_g c_{hg} \begin{bmatrix} ig \\ s \end{bmatrix}$$

e siccome dalle (4) del § 1 si ha

$$2 \sum_1^n {}_g c_{hg} \begin{bmatrix} ig \\ s \end{bmatrix} = \sum_1^n {}_g c_{hg} \frac{d\, a_{is}}{d\, g} + \sum_1^n {}_g \left(a_{ig} \frac{d\, c_{hg}}{d s} - a_{sg} \frac{d\, c_{hg}}{d\, i} \right)$$

$$\sum_1^n {}_g A_{ig} \frac{df}{dp_g} = - \sum_1^n {}_{rs} \frac{d\, c_{rs}}{d\, i} p_r p_s .$$

Questa e la (13) ci dicono che f soddisfa alle equazioni (a) e prendendo eguale ad 1 la costante arbitraria, a cui deve essere eguagliata secondo il metodo esposto per integrare il sistema (10), avremo

$$\sum {}_{rs} c_{rs} p_r p_s = 1. \tag{14}$$

Siano poi $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ altri $n-1$ integrali indipendenti fra loro e da f del sistema (a), si ponga

$$f_r = c_r \qquad (r = 1,\ 2, \ldots\ n-1) \tag{14'}$$

e si indichi con y l'integrale particolare del sistema (10), per cui è $\frac{dy}{dx_r} = p_r$, $p_1, p_2, \ldots p_n$ essendo date dalle equazioni (14) e (14'), e che conterrà quindi oltre alle costanti arbitrarie $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ una costante additiva pure arbitraria c_0.

Si consideri la forma

$$\psi = \varphi - dy^2 = \sum_1^n {}_{rs} e_{rs}\, dx_r\, dx_s , \tag{15}$$

dove sarà

$$e_{rs} = a_{rs} - p_r p_s . \tag{15'}$$

Indicando con e il suo discriminante si ha

$$e = a - \sum_1^n {}_{rs} \alpha_{rs} p_r p_s = a(1 - \sum_{rs} c_{rs} p_r p_s)$$

per la (6) e quindi per la (14)

$$e = 0. \tag{16}$$

Se poi con E_{il} si denota il complemento algebrico di e_{il} in e, osservando che $\sum_1^n {}_i a_{ir} E_{il}$ non è che il determinante e, in cui invece di $a_{il} - p_i p_l$ si è posto a_{ir}, si dimostra facilmente la eguaglianza

$$\sum_1^n {}_i a_{ir} E_{il} = p_r \sum_1^n {}_i \alpha_{il} p_i \qquad (r,\ l = 1,\ 2, \ldots\ n).$$

Da questa moltiplicata per α_{qr} e sommata rispetto all'indice r si trae

$$E_{ql} = \sum_1^n {}_i c_{il} p_i \sum_1^n {}_r \alpha_{qr} p_r.$$

Siccome di più, posto

$$2\begin{bmatrix} r\,s \\ l \end{bmatrix}' = \frac{d\,e_{rl}}{d\,x_s} + \frac{d\,e_{sl}}{d\,x_r} - \frac{d\,e_{rs}}{d\,x_l},$$

dalle (15′) si ha

$$\begin{bmatrix} r\,s \\ l \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} r\,s \\ l \end{bmatrix} - p_l \frac{d\,p_r}{d\,x_s},$$

ricorrendo alla (14) e ricordando che è $p_l = \dfrac{d\,y}{d\,x_l}$ e che y soddisfa alle equazioni (10) si trova

$$\sum_1^n {}_l E_{ql} \begin{bmatrix} r\,s \\ l \end{bmatrix}' = 0.$$

Per quanto si vide nel § 1 questa e la (16) ci permettono di concludere che la forma ψ è riducibile e la riduzione si fa integrando il sistema di equazioni simultanee $\sum_1^n {}_s e_{rs}\, d\,x_r = 0$ ovvero per le (15′)

$$\sum_1^n {}_s a_{rs}\, d\,x_s = p_r\, d\,y.$$

Queste risolute rispetto alle $d\,x_s$ e posto

$$P_s = \sum_1^n {}_r c_{rs} p_r \tag{17}$$

si trasformano nelle

$$dx_s = P_s dy. \tag{18}$$

Se quindi si indicano con $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ $n-1$ integrali indipendenti della equazione

$$\sum_1^n {}_s P_s \frac{df}{dx_s} = 0$$

abbiamo

$$\psi = \sum_1^{n-1} {}_{lm} b_{lm} du_l du_m, \tag{15''}$$

posto

$$b_{lm} = \sum_1^{n-1} {}_{rs} (a_{rs} - p_r p_s) \frac{dx_r}{du_l} \frac{dx_s}{du_m}. \tag{19}$$

In queste le derivate sono prese considerando $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ come funzioni di $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ e di x_n. Se invece $x_1, x_2, \ldots x_n$ si considerano come funzioni di $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ e di y, le derivate delle x_s rispetto ad y son date dalle (18) e distinguendo quelle prese rispetto alle u_l nella nuova ipotesi con delle parentesi si ha

$$\frac{dx_r}{du_l} = \left(\frac{dx_r}{du_l}\right) - \frac{P_r}{P_n}\left(\frac{dx_n}{du_l}\right)$$

e quindi

$$\sum_1^{n-1} {}_r a_{rs} \frac{dx_r}{du_l} = \sum_1^n {}_r a_{rs} \left(\frac{dx_r}{du_l}\right) - \frac{p_s}{P_n}\left(\frac{dx_n}{du_l}\right), \tag{20}$$

essendosi fatto uso della

$$\sum_1^n {}_r a_{rs} P_r = p_s, \tag{21}$$

che si deduce immediatamente dalle (17). Da questa combinata colla (14) si trae pure

$$\sum {}_s p_s P_s = 1 \tag{22}$$

e siccome è anche

$$\sum_1^n {}_r p_r \left(\frac{dx_r}{du_l}\right) = \sum_1^n {}_r \frac{dy}{dx_r}\left(\frac{dx_r}{du_l}\right) = \frac{dy}{du_l} = 0 \tag{23}$$

dalle (20) si ha

$$\sum_1^n {}_{rs} a_{rs} \frac{dx_r}{du_l}\frac{dx_s}{du_m} = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} \left(\frac{dx_r}{du_l}\right)\left(\frac{dx_s}{du_m}\right) + \frac{1}{P_n^2}\left(\frac{dx_n}{du_l}\right)\left(\frac{dx_n}{du_m}\right).$$

Si ha pure

$$\sum_1^{n-1}{}_r p_r \frac{dx_r}{du_l} = \sum_1^{n-1}{}_r p_r \left(\frac{dx_r}{du_l}\right) - \frac{1}{P_n}\left(\frac{dx_n}{du_l}\right)\sum_1^{n-1}{}_r p_r P_r$$

e per le (22) e (23)

$$\sum_1^{n-1}{}_r p_r \frac{dx_r}{du_l} = -\frac{1}{P_n}\left(\frac{dx_n}{du_l}\right).$$

Per queste le (19) danno luogo alle

$$b_{lm} = \sum_1^n{}_{rs} a_{rs} \frac{dx_r}{du_l}\frac{dx_s}{du_m}, \tag{24}$$

dove le derivate sono prese considerando $x_1, x_2, \ldots x_n$ come funzioni di $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ e di y.

Indicando con b il discriminante di ψ ridotta alla forma (15''), con β_{rs} il complemento algebrico di b_{rs} in b e posto

$$2\begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix}_1 = \frac{db_{is}}{du_r} + \frac{db_{ir}}{du_s} - \frac{db_{rs}}{du_i}$$

si trova

$$\frac{\beta_{rs}}{b} = \frac{1}{a}\sum_1^n{}_{pq}\alpha_{pq}\frac{du_r}{dx_p}\frac{du_s}{dx_q}$$

$$\begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix}_1 = \sum_1^n{}_{lpq}\begin{bmatrix} lq \\ p \end{bmatrix}\frac{dx_l}{du_r}\frac{dx_q}{du_s}\frac{dx_p}{du_i} + \sum_1^n{}_{pq}a_{pq}\frac{dx_p}{du_i}\frac{d^2x_q}{du_r\,ud_s}$$

e facendo uso della (11)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\begin{bmatrix} lp \\ m \end{bmatrix}_1}{du_q} - \frac{d\begin{bmatrix} lq \\ m \end{bmatrix}_1}{du_p} = \sum_1^n{}_{ihkg}\left\{\frac{d\begin{bmatrix} ik \\ h \end{bmatrix}}{dg} - \frac{d\begin{bmatrix} ig \\ h \end{bmatrix}}{dk}\right\}\frac{dx_g}{du_q}\frac{dx_i}{du_l}\frac{dx_h}{du_m}\frac{dx_k}{du_p}& \\
+\sum_1^n{}_{ihk}\begin{bmatrix} ik \\ h \end{bmatrix}\left\{\frac{dx_i}{du_l}\frac{dx_k}{du_p}\frac{d^2x_h}{du_m du_q} - \frac{dx_i}{du_l}\frac{dx_k}{du_q}\frac{d^2x_h}{du_m du_p}\right.& \\
\left.+\frac{dx_k}{du_q}\frac{dx_i}{du_m}\frac{d^2x_h}{du_l du_p} - \frac{dx_k}{du_p}\frac{dx_i}{du_m}\frac{d^2x_h}{du_l du_q}\right\}& \\
+\sum_1^n{}_{ih}a_{ih}\left\{\frac{d^2x_i}{du_m du_q}\frac{d^2x_h}{du_l du_p} - \frac{d^2x_i}{du_m du_p}\frac{d^2x_h}{du_l du_q}\right\}.&
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Si ha pure facendo uso delle

$$\sum_1^{n-1}{}_r\frac{dx_h}{du_r}\frac{du_r}{dx_v} = \begin{cases} -\dfrac{dx_h}{dy}\dfrac{dy}{dx_v} = -P_h\dfrac{dy}{dx_v} & (\text{per } v \lessgtr h) \\ -P_h\dfrac{dy}{dx_v} + 1 & (\text{per } v = h) \end{cases}$$

e di alcune facili riduzioni

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{b}\sum_1^{n-1}{}_r\beta_{rs}\begin{bmatrix} l\,q \\ r \end{bmatrix}_1 = \sum_1^n{}_i\frac{d\,u_s}{d\,x_i}\left\{\frac{d^2 x_i}{d\,u_l\,d\,u_q}+\frac{1}{a}\sum{}_{vwk}a_{vi}\begin{bmatrix} w\,k \\ v \end{bmatrix}\frac{d\,x_w}{d\,u_l}\frac{d\,x_k}{d\,u_q}\right\}\\
&\frac{1}{b}\sum_1^{n-1}{}_{rs}\beta_{rs}\begin{bmatrix} l\,q \\ r \end{bmatrix}_1\begin{bmatrix} m\,p \\ s \end{bmatrix}_1 = \sum_1^n{}_{ih}a_{ih}\frac{d^2 x_i}{d\,u_m\,d\,u_p}\frac{d^2 x_h}{d\,u_l\,d\,u_q}+\sum_1^n{}_{ihk}\begin{bmatrix} i\,k \\ h \end{bmatrix}\left\{\frac{d\,x_i}{d\,u_l}\frac{d\,x_k}{d\,u_q}\frac{d^2 x_h}{d\,u_m\,d\,u_p}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{d\,x_i}{d\,u_m}\frac{d\,x_k}{d\,u_p}\frac{d^2 x_h}{d\,u_l\,d\,u_q}\right\}+\sum_1^n{}_{ghkivw}c_{vw}\begin{bmatrix} i\,g \\ v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h\,k \\ w \end{bmatrix}\frac{d\,x_i}{d\,u_l}\frac{d\,x_g}{d\,u_q}\frac{d\,x_h}{d\,u_m}\frac{d\,x_k}{d\,u_p}\\
&\qquad-\sum_1^n{}_i\left(p_i\frac{d^2 x_i}{d\,u_l\,d\,u_q}+\sum_1^n{}_{kvw}c_{iv}p_i\begin{bmatrix} w\,k \\ v \end{bmatrix}\frac{d\,x_w}{d\,u_l}\frac{d\,x_k}{d\,u_q}\right)\\
&\qquad\times\sum_1^n{}_{gj}\left(a_{jg}\frac{d^2 x_j}{d\,u_m\,d\,u_p}+\sum_1^n{}_f\begin{bmatrix} j\,f \\ g \end{bmatrix}\frac{d\,x_j}{d\,u_m}\frac{d\,x_f}{d\,u_p}\right)\frac{d\,x_g}{d\,y}
\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

e poichè dalla $\sum_1^n{}_w\frac{d\,y}{d\,x_w}\frac{d\,x_w}{d\,u_l}=0$ si ha

$$\sum_1^n{}_w\frac{d^2 y}{d\,x_w\,d\,x_k}\frac{d\,x_w}{d\,u_l}=-\sum_1^n{}_w\sum_1^{n-1}{}_r\frac{d\,y}{d\,x_w}\frac{d^2 x_w}{d\,u_l\,d\,u_r}\frac{d\,u_r}{d\,x_k}$$

$$\sum_1^n{}_{wk}\frac{d^2 y}{d\,x_w\,d\,x_k}\frac{d\,x_w}{d\,u_l}\frac{d\,x_k}{d\,u_q}=-\sum{}_i p_i\frac{d^2 x_i}{d\,u_l\,d\,u_q}$$

e sostituendo per $\frac{d^2 y}{d\,x_w\,d\,x_k}$ il valore dato dalle (10)

$$\sum_1^n{}_{ikvw}c_{vi}p_i\begin{bmatrix} w\,k \\ v \end{bmatrix}\frac{d\,x_w}{d\,u_l}\frac{d\,x_k}{d\,u_q}=-\sum{}_i p_i\frac{d^2 x_i}{d\,u_l\,d\,u_q},$$

l'ultima sommatoria del secondo membro della (26) sparisce e da questa e dalla (25), indicando con $(lm,\ pq)_1$ la espressione, che si deduce dalla ψ posta sotto la forma (15''), come la $(lm,\ pq)$ dalla φ [formula (5)] si deduce

$$(lm,\ pq)_1=\sum_1^n{}_{ighk}(ih,\ kg)\frac{d\,x_i}{d\,u_l}\frac{d\,x_g}{d\,u_q}\frac{d\,x_h}{d\,u_m}\frac{d\,x_k}{d\,u_p},$$

e quindi per le (I)

$$(lm,\ pq)_1=0.$$

Ne viene che, come la forma φ (15), anche la ψ può mettersi sotto la forma $dy_1^2+\chi$, dove la χ è una forma differenziale quadratica con una variabile di meno di quelle contenute in ψ cioè con $n-2$ variabili, e a χ applicando lo stesso ragionamento e così di seguito n volte si conclude in fine che a φ può darsi la forma $\sum_1^n{}_r dy_r^2$, cioè che la forma φ è di classe 0.

Possiamo dunque concludere che: *Le condizioni espresse dalle equazioni* (I) *sono necessarie e sufficienti perchè la forma irriducibile* φ *sia di classe* 0.

È facile verificare dalle (5) che si ha $(ll, pq)=0$, $(lm, pq)+(ml, pq)=0$, $(lm, pq)=(pq, lm)$, dalle quali deduciamo che nelle espressioni (lm, pq) non si possono supporre più di due indici eguali senza che esse spariscano identicamente; che esse non si alterano scambiando il gruppo di indici lm, col gruppo pq e che cambiano soltanto il segno scambiando fra loro gli indici di uno stesso gruppo. Esse si potranno quindi distinguere in tre categorie assegnando alla prima quelle, in cui i due gruppi coincidono e che sono della forma (lm, lm); alla seconda quelle, in cui un indice del primo gruppo coincide coll'indice corrispondente dell'altro, gli altri due essendo distinti, e che sono della forma (lm, lq) e alla terza quelle, in cui tutti gli indici sono distinti. Il numero delle prime è evidentemente $\frac{n(n-1)}{2}$, quello delle seconde, che si ottengono combinando coi gruppi lm in numero di $\frac{n(n-1)}{2}$ gli $n-2$ indici distinti da l e da m, è $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$, e quello delle terze, che si ottengono ciascuna due volte combinando coi gruppi (lm) quelli (pq) fatti cogli $n-2$ indici differenti da l e da m sono $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$. Se si nota però ancora che queste ultime sono legate tre a tre dalle relazioni

$$(lm, pq)+(lp, qm)+(lq, mp)=0,$$

il numero di quelli, che sono indipendenti fra loro, si riduce ad

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}.$$

Il numero totale delle espressioni (lm, pq) indipendenti le une dalle altre è dunque $N=\frac{n(n-1)}{2}\left\{1+n-2+\frac{(n-2)(n-3)}{6}\right\}$, ovvero

$$N=\frac{n^2(n^2-1)}{12} \quad (*). \tag{27}$$

Ricordiamo che nel ridurre φ alla forma $dy^2+\psi$ abbiamo fatto uso di n costanti arbitrarie, di cui una additiva alla y e che, quando la avremo tras-

(*) Ho riprodotto qui per essere completo un ragionamento già fatto da Christoffel e Lipschitz nelle citate Memorie.

formata nella $\sum_1^n {}_r dy_r^2$, ne avremo usate $\frac{n(n+1)}{2}$, di cui n additive. Esse rappresentano evidentemente la arbitrarietà, che abbiamo nella scelta del sistema di assi ortogonali $y_1, y_2, \ldots y_n$ nello spazio piano ad n dimensioni, di cui $y_1, y_2, \ldots y_n$ possono riguardarsi come le coordinate cartesiane ortogonali, mentre $x_1, x_2, \ldots x_n$ rappresentano un altro sistema di coordinate qualunque.

§ 3.

Forme di 1ª classe.

Nel caso di $h > 0$ a è il quadrato della matrice

$$\left| \begin{matrix} \frac{d1}{d1}, & \frac{d2}{d1}, \ldots & \frac{d(n+h)}{d1} \\ \frac{d1}{d2}, & \frac{d2}{d2}, \ldots & \frac{d(n+h)}{d2} \\ \frac{d1}{dn}, & \frac{d2}{dn}, \ldots & \frac{d(n+h)}{dn} \end{matrix} \right| \qquad (\alpha)$$

cioè, indicando con $e_{t_1 t_2 \ldots t_h}$ il determinante, che da essa si ottiene trascurandone le verticali $t_1^{sima}, t_2^{sima}, \ldots t_h^{sima}$ e indicando con $\sum_{t_1 t_2 \ldots t_h}$ una sommatoria estesa a tutte le combinazioni della classe h degli indici $1, 2, \ldots n+h$, si ha

$$a = \sum_{t_1 t_2 \ldots t_h} e^2_{t_1 t_2 \ldots t_h}. \tag{1}$$

Indicando poi con $\overset{(r,t)}{e}_{t_1 t_2 \ldots t_h}$ il complemento algebrico di $\frac{dy_t}{dx_r}$ in $e_{t_1 t_2 \ldots t_h}$ si vede facilmente che è

$$\alpha_{rs} = \frac{1}{2} \sum_{\tau t_1 t_2 \ldots t_h} \overset{(r,\tau)}{e}_{t_1 t_2 \ldots t_h} \overset{(s,\tau)}{e}_{t_1 t_2 \ldots t_h}. \tag{2}$$

Per calcolare ora la somma

$$\sum_1^n {}_r \alpha_{rs} \frac{dt}{dr} = \frac{1}{2} \sum_{\tau t_1 \ldots t_h} \overset{(s,\tau)}{e}_{t_1 t_2 \ldots t_h} \sum_1^n {}_r \overset{(r,\tau)}{e}_{t_1 t_2 \ldots t_h} \frac{dt}{dr}$$

si noti che, come una riflessione molto semplice fa vedere, se la colonna t^{sima} della matrice (α) occupa il posto $\alpha^{simo}_{tt_1 \ldots t_{h-1}}$ in quella, che se ne ottiene sopprimendone le colonne t_1^{sima}, t_2^{sima},… t_{h-1}^{sima} si ha

$$\sum_1^n{}_r \overset{(r,\tau)}{e}_{t_1 t_2 \ldots t_h} \frac{dt}{dr} = \begin{cases} 0 \text{ se } \tau,\ t_1,\ t_2,\ldots\ t_h \text{ son tutti differenti da } t \\ e_{t_1 t_2 \ldots t_h} \text{ se è } \tau = t \\ (-1)^{\alpha_{t t_1 \cdots t_{h-1}} + \alpha_{\tau t_1 \cdots t_{h-1}} - 1} e_{\tau t_1 \ldots t_{h-1}} \text{ se è } t_h = t. \end{cases} \tag{3}$$

Noi abbiamo dunque

$$\sum_1^n{}_r \alpha_{rs} \frac{dt}{dr} = \frac{1}{2} \sum{}_{t_1 t_2 \ldots t_h} e_{t_1 t_2 \ldots t_h} \overset{(s,t)}{e}_{t_1 t_2 \ldots t_h} + \frac{1}{2} \sum{}_{\tau t_1 \ldots t_{h-1}} (-1)^{\alpha_{\tau t_1 \cdots t_{h-1}} + \alpha_{t t_1 \cdots t_{h-1}} - 1} e_{\tau t_1 \ldots t_{h-1}} \overset{(s,\tau)}{e}_{t t_1 \ldots t_{h-1}}$$

e poichè, come è facile vedere, si ha

$$(-1)^{\alpha_{t t_1 \cdots t_{h-1}} + \alpha_{\tau t_1 \cdots t_{h-1}} - 1} \overset{(s,\tau)}{e}_{t t_1 \ldots t_{h-1}} = \overset{(s,t)}{e}_{\tau t_1 \ldots t_{h-1}} \tag{3'}$$

$$\sum_1^n{}_r \alpha_{rs} \frac{dt}{dr} = \sum{}_{t_1 t_2 \ldots t_h} e_{t_1 t_2 \ldots t_h} \overset{(s,t)}{e}_{t_1 t_2 \ldots t_h}. \tag{4}$$

Da questa poi si deduce la

$$\sum_1^n{}_{rs} \alpha_{rs} \frac{dt}{dr} \frac{du}{ds} = \sum{}_{t_1 t_2 \ldots t_h} e_{t_1 t_2 \ldots t_h} \sum_1^n{}_s \overset{(s,t)}{e}_{t_1 t_2 \ldots t_h} \frac{du}{ds},$$

in cui dalla sommatoria del secondo membro si escluderanno le combinazioni, che contengono t. Essa, tenuto conto anche delle (1) e (3), dà quindi luogo alle

$$\sum_1^n{}_{rs} \alpha_{rs} \frac{dt}{dr} \frac{dt}{ds} = a - \sum{}_{t_1 t_2 \ldots t_{h-1}} e^2_{t t_1 \ldots t_{h-1}}$$

$$\sum_1^n{}_{rs} \alpha_{rs} \frac{dt}{dr} \frac{du}{ds} = \sum{}_{t_1 t_2 \ldots t_{h-1}} (-1)^{\alpha_{t t_1 \cdots t_{h-1}} + \alpha_{u t_1 \cdots t_{h-1}} - 1} e_{t t_1 \ldots t_{h-1}} e_{u t_1 \ldots t_{h-1}},$$

di cui la seconda vale per t differente da u. Per esse le (6) del § 2 danno luogo alle

$$\left.\begin{aligned} (lm,\ pq) = \frac{1}{a} \sum_1^n{}_{tu} \sum{}_{t_1 t_2 \ldots t_{h-1}} (-1)^{\alpha_{t t_1 \cdots t_{h-1}} + \alpha_{u t_1 \cdots t_{h-1}} - 1} e_{t t_1 \ldots t_{h-1}} e_{u t_1 \ldots t_{h-1}} \\ \left\{ \frac{d^2 t}{dl\, dq} \frac{d^2 u}{dm\, dp} - \frac{d^2 t}{dl\, dp} \frac{d^2 u}{dm\, dq} \right\}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

dove dalla $\sum_{t_1 t_2 \ldots t_{h-1}}$ debbono essere escluse le combinazioni, che contengono t ed u.

Posto ora simbolicamente

$$\sqrt{a}(lq) = \begin{vmatrix} \frac{d^2 1}{dl\,dq} & \frac{d^2 2}{dl\,dq} \cdots & \frac{d^2(n+h)}{dl\,dq} \\ \frac{d1}{d1} & \frac{d2}{d1} \cdots & \frac{d(n+h)}{d1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d1}{dn} & \frac{d2}{dn} \cdots & \frac{d(n+h)}{dn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

alla (5) si può dare la forma simbolica

$$(lm,\, pq) = (lp)(mq) - (lq)(mp). \tag{I}$$

Nel caso di $h = 1$, cioè delle forme di prima classe, le (6) e (I) non sono simboliche, ma effettive e ci dicono che le espressioni $(lm,\, pq)$ sono i minori di secondo ordine di un determinante simmetrico, che ha gli elementi (lp).

Posto

$$b_{l,p} = \sqrt{a}(lp) \tag{7}$$

si ha dalle (6)

$$b_{lp} = \sum_1^{n+1}{}_t (-1)^{t-1} e_t \frac{d^2 t}{dl\,dp}, \tag{8}$$

dalla quale si trae

$$\frac{d b_{lp}}{dm} - \frac{d b_{lm}}{dp} = \sum_1^n{}_r \sum{}_{tu} (-1)^{t-1} \overset{(r,u)}{e_t} \left\{ \frac{d^2 t}{dl\,dp} \frac{d^2 u}{dr\,dm} - \frac{d^2 t}{dl\,dm} \frac{d^2 u}{dr\,dp} \right\}. \tag{9}$$

Indicando con $s,\ t,\ u,\ v, \ldots\ w$ una permutazione qualunque degli indici $1,\ 2, \ldots\ n+1$, abbiamo il sistema di equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \sum_1^n{}_r \overset{(r,u)}{e_t} \frac{dt}{dr} = (-1)^{t+u-1} e_u \\ \sum_1^n{}_r \overset{(r,u)}{e_t} \frac{du}{dr} = e_t \\ \sum_1^n{}_r \overset{(r,u)}{e_t} \frac{dv}{dr} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_1^n{}_r \overset{(r,u)}{e_t} \frac{dw}{dr} = 0, \end{array}\right\} \tag{10}$$

il quale risoluto rispetto alle $\overset{(r,u)}{e_t}$ dà

$$e_s \overset{(r,u)}{e_t} = (-1)^{t+u-1} e_u \overset{(r,t)}{e_s} + e_t \overset{(r,u)}{e_s}.$$

Queste, sebbene ottenute supponendo s differente da t ed u, valgono, come è facile verificare, per s qualunque e per mezzo loro alla equazione (9) può darsi la forma

$$e_s \left\{ \frac{d b_{lp}}{dm} - \frac{d b_{lm}}{dp} \right\} = \sum_{rtu} \left\{ (-1)^{t-1} e_t \overset{(r,u)}{e_s} - (-1)^{u-1} e_u \overset{(r,t)}{e_s} \right\}$$
$$\left\{ \frac{d^2 t}{dl\,dp} \frac{d^2 u}{dr\,dm} - \frac{d^2 t}{dl\,dm} \frac{d^2 u}{dr\,dp} \right\}$$

e per le (8) l'altra

$$e_s \left\{ \frac{d b_{lp}}{dm} - \frac{d b_{lm}}{dp} \right\} = \sum_{rt} \overset{(r,t)}{e_s} \left\{ b_{lp} \frac{d^2 t}{dr\,dm} - b_{lm} \frac{d^2 t}{dr\,dp} + b_{rp} \frac{d^2 t}{dl\,dm} - b_{rm} \frac{d^2 t}{dl\,dp} \right\}.$$

Moltiplicando poi questa per e_s, sommando rispetto ad s e tenendo conto delle (1) e (4), che nel nostro caso prendono la forma

$$a = \sum_1^{n+1}{}_s e_s^2, \qquad \sum_1^n{}_k \alpha_{rk} \frac{dt}{dk} = \sum_s e_s \overset{(r,t)}{e_s}, \tag{10^{bis}}$$

nonchè delle (4) del § 2, si ottiene

$$a \left\{ \frac{d b_{lp}}{dm} - \frac{d b_{lm}}{dp} \right\} = \sum_{rs} \alpha_{rs} \left\{ b_{lp} \begin{bmatrix} r\,m \\ s \end{bmatrix} - b_{lm} \begin{bmatrix} r\,p \\ s \end{bmatrix} + b_{rp} \begin{bmatrix} l\,m \\ s \end{bmatrix} - b_{rm} \begin{bmatrix} l\,p \\ s \end{bmatrix} \right\} \tag{11}$$

E in queste sostituendo per le b_{lp} i loro valori dati dalle (7) e notando che per le (11) del § 2 è

$$\frac{da}{dm} = 2 \sum_1^n{}_{rs} \alpha_{rs} \begin{bmatrix} r\,m \\ s \end{bmatrix},$$

posto

$$(l,\ mp) = \frac{d(lp)}{dm} - \frac{d(lm)}{dp} + \sum_1^n{}_{rs} c_{rs} \left\{ (rm) \begin{bmatrix} l\,p \\ s \end{bmatrix} - (rp) \begin{bmatrix} l\,m \\ s \end{bmatrix} \right\}, \tag{12}$$

si ottengono in fine le

$$(l,\ mp) = 0. \tag{II}$$

Supponiamo ora che le espressioni (lm, pq) siano i minori di 2° ordine di un determinante simmetrico di ordine n di guisa che le equazioni (I) siano effettive e che gli elementi di questo determinante soddisfacciano alle equazioni (II). Risolviamo le n equazioni, che si ottengono dalle (4) del § 2, facendovi $h=1$, $r=i$, $s=g$, rispetto a tutte le derivate seconde contenutevi, eccettuata la $\frac{d^2 t}{d i d g}$. Otterremo così le

$$e_t \frac{d^2 s}{d i d g} = \sum_1^n {}_k \overset{(k s)}{e_t} \left\{ \begin{bmatrix} g i \\ k \end{bmatrix} - \frac{d t}{d k} \frac{d^2 t}{d i d g} \right\},$$

in cui s deve essere differente da t. Moltiplicando per e_t e sommando rispetto a t da 1 ad $n+1$ con esclusione di s si trova

$$(a - e_s^2) \frac{d^2 s}{d i d g} = \sum_1^n {}_k \sum {}_t e_t \overset{(k,s)}{e_t} \begin{bmatrix} g i \\ k \end{bmatrix} - \sum {}_{tk} e_t \overset{(k,s)}{e_t} \frac{d t}{d k} \frac{d^2 t}{d i d g}$$

e per le (10), (6), la seconda delle (10^{bis}) e la (6) del § 2, posto

$$z_t = (-1)^{t-1} \frac{e_t}{\sqrt{a}} \tag{13}$$

$$\frac{d^2 t}{d i d g} = \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} \begin{bmatrix} g i \\ s \end{bmatrix} \frac{d t}{d r} + (g i) z_t. \tag{14}$$

Da queste si ha

$$\frac{d^3 t}{d i d g d h} = \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} \begin{bmatrix} g i \\ s \end{bmatrix} \frac{d^2 t}{d r d h} + \sum_1^n {}_{rs} \frac{d}{d h} \left\{ c_{rs} \begin{bmatrix} g i \\ s \end{bmatrix} \right\} \frac{d t}{d r} + (g i) \frac{d z_t}{d h} + z_t \frac{d (g i)}{d h}$$

e poichè dalle (14) combinate colle (11) del § 2 e colle

$$\sum_1^n {}_q c_{pq} \frac{d a_{rq}}{d h} = - \sum_1^n {}_q a_{rq} \frac{d c_{pq}}{d h}, \tag{15}$$

che sono elementari, si traggono le

$$\frac{d^2 t}{d r d h} = - \sum_1^n {}_{pq} a_{rq} \frac{d c_{pq}}{d h} \frac{d t}{d p} - \sum_1^n {}_{pq} c_{pq} \begin{bmatrix} q h \\ r \end{bmatrix} \frac{d t}{d p} + (r h) z_t \tag{16}$$

dopo poche e facili riduzioni

$$\frac{d^3 t}{d g d i d h} = \sum_1^n {}_{pq} c_{pq} \left\{ \frac{d}{d h} \begin{bmatrix} g i \\ q \end{bmatrix} - \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} \begin{bmatrix} q h \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g i \\ s \end{bmatrix} \right\} \frac{d t}{d p} + (g i) \frac{d z_t}{d h}$$
$$+ z_t \left\{ \frac{d (g i)}{d h} + \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} (r h) \begin{bmatrix} g i \\ s \end{bmatrix} \right\}.$$

Sottraendo poi da questa quella, che se ne ottiene scambiando i con h e ponendo mente alle (4) del § 1, alle (6) del § 2 ed alle (12) e (II) di questo

$$(gi)\left\{\frac{dz_t}{dh}+\sum_1^n{}_{pq}c_{pq}(qh)\frac{dt}{dp}\right\}=(gh)\left\{\frac{dz_t}{di}+\sum_1^n{}_{pq}c_{pq}(qi)\frac{dt}{dp}\right\}.$$

Se, come supporremo, la forma φ non è di classe o, per quanto si dimostrò nel § 2, nè gli elementi, nè i minori di 2° ordine del determinante Δ possono essere tutti nulli e le precedenti equazioni non possono quindi essere tutte verificate senza che si abbia

$$\frac{dz_t}{dh}+\sum_1^n{}_{pq}c_{pq}(qh)\frac{dt}{dp}=0 \qquad (h=1,\ 2,\dots\ n). \tag{17}$$

Posto

$$\Delta=\pm(11)(22)\cdots(nn) \tag{18}$$

ed indicato con $[rs]$ il complemento algebrico di (rs) in Δ si ha dalla (17)

$$\sum{}_h[rh]\frac{dz_t}{dh}+\Delta\sum{}_p c_{pr}\frac{dt}{dp}=0. \tag{19}$$

Se supponiamo dapprima

$$\Delta=0, \tag{α'}$$

queste prendono la forma

$$R(z)=\sum_1^n{}_h[rh]\frac{dz}{dh}=0, \qquad (r=1,\ 2,\dots\ n) \tag{β}$$

delle quali $n-1$ soltanto sono indipendenti. Da esse si ha

$$R\{S(z)\}-S\{R(z)\}=\sum_1^n{}_{hk}\left\{[rh]\frac{d[sk]}{dh}-[sh]\frac{d[rk]}{dh}\right\}\frac{dz}{dk}. \tag{γ}$$

Ora è

$$\frac{d[sk]}{dh}=\sum{}_{tu}\frac{d^2\Delta}{d(sk)\,d(tu)}\,\frac{d(tu)}{dh},$$

dove (sk) deve essere considerato distinto da (ks) e la sommatoria estesa a tutti i valori di t ed u da 1 fino ad n, eccettuati rispettivamente s e k, e dalle (II) avendosi

$$\frac{d(tu)}{dh}=\frac{d(th)}{du}+\sum_1^n{}_{vw}c_{vw}\left\{(vu)\begin{bmatrix}th\\w\end{bmatrix}-(vh)\begin{bmatrix}tu\\w\end{bmatrix}\right\}$$

e tenendo conto anche della (α')

$$\sum_1^n{}_h [rh] \frac{d[sk]}{dh} = \sum_1^n{}_{tu} \frac{d^2\Delta}{d(sk)d(tu)} \left\{ \sum_1^n{}_h [rh] \frac{d(th)}{du} + \sum_1^n{}_{vw} c_{vw} (vu) \sum{}_h [rh] \begin{bmatrix} th \\ w \end{bmatrix} \right\}.$$

E poichè per la (α') si ha anche

$$\sum_1^n{}_h [rh] \frac{d(th)}{du} = -\sum{}_h (th) \frac{d[rh]}{du}$$

ed è

$$\sum{}_t \frac{d^2\Delta}{d(sk)\,d(tu)} (th) = \begin{cases} 0 \text{ per } h \text{ differente da } u \text{ e } k \\ [sk] \text{ per } h = u \\ -[su] \text{ per } h = k \end{cases}$$

$$\sum_1^n{}_h [rh] \frac{d[sk]}{dh} = \sum_1^n{}_h [sh] \frac{d[rk]}{dh} - [sk] \left\{ \sum_1^n{}_h \frac{d[rh]}{dh} - \sum_1^n{}_{twh} c_{tw} [rh] \begin{bmatrix} th \\ w \end{bmatrix} \right\}$$
$$- \sum_1^n{}_{twh} c_{sw} [rh][tk] \begin{bmatrix} th \\ w \end{bmatrix}$$

dalla quale e dalla (γ) si deduce che il sistema di equazioni (β) è completo. Esso ammette dunque un integrale z e poichè se ne trae

$$(ih) = M_i \frac{dz}{dh},$$

essendo M_i un fattore indeterminato, e da questa e dalle (I)

$$(lm,\ pq) = 0$$

e quindi (§ 1) che la forma φ è di classe o, concludiamo che, se questa è di prima classe, il determinante Δ non può mai annullarsi.

Sia ora

$$\Delta \gtrless 0, \tag{20}$$

si ponga

$$c'_{rh} = \frac{[rh]}{\Delta}, \tag{21}$$

e si trarrà dalle (19)

$$\frac{dt}{dg} = -\sum_1^n{}_{rh} a_{rg} c'_{rh} \frac{dz_t}{dh}. \tag{22}$$

Da questa si ha

$$\frac{d^2 t}{d i\, d g} = -\sum_1^n{}_{hr}\left\{a_{gr} c'_{rh} \frac{d^2 z_t}{d i\, d h} + c'_{rh} \frac{d a_{gr}}{d i} \frac{d z_t}{d h} + a_{gr} \frac{d c'_{rh}}{d i} \frac{d z_t}{d h}\right\}, \tag{23}$$

per mezzo della quale e della (19) dalla (14) si passa alla

$$\sum_1^n{}_{hr} a_{gr} c'_{rh} \frac{d^2 z_t}{d h\, d i} + \sum_1^n{}_{hr}\left\{c'_{rh}\begin{bmatrix} r i \\ g \end{bmatrix} + a_{gr} \frac{d c'_{rh}}{d i}\right\} \frac{d z_t}{d h} + (g i) z_t = 0$$

e da questa moltiplicata per c_{gs} e sommata rispetto all'indice g e poi per $(s k)$ e sommata rispetto all'indice s

$$\frac{d^2 z_t}{d i\, d k} = \sum_1^n{}_{rs} c'_{rs}\left\{\frac{d(s k)}{d i} - \sum_1^n{}_{pq}(p k) c_{pq}\begin{bmatrix} s i \\ q \end{bmatrix}\right\} \frac{d z_t}{d r} - z_t \sum_1^n{}_{rs} c_{rs}(i r)(k s). \tag{24}$$

Applichiamo per la integrazione di questo sistema di equazioni il metodo indicato nella mia Nota già citata, mentre dalla via, che terremo per tale applicazione, risulterà di per sè che il sistema stesso è completo. Ciò, per quanto è stato dimostrato in quella Nota, equivale ad essere jacobiano il sistema di n equazioni lineari omogenee con $2n+1$ variabili indipendenti

$$\frac{d f}{d x_k} + \sum_1^n{}_i A_{ik} \frac{d f}{d p_i} + p_k \frac{d f}{d z} = 0, \tag{δ}$$

dove è

$$A_{ik} = \sum_1^n{}_{rs} c'_{rs}\left\{\frac{d(s k)}{d i} - \sum_1^n{}_{pq}(p k) c_{pq}\begin{bmatrix} s i \\ q \end{bmatrix}\right\} p_r - z \sum{}_{rs} c_{rs}(i r)(k s). \tag{25}$$

Trasformiamo il sistema stesso ponendo in luogo delle variabili p le ψ legate ad esse dalle relazioni

$$\psi_s = \sum_1^n{}_r c'_{rs} p_r; \qquad p_r = \sum_1^n{}_q (r q) \psi_q. \tag{26}$$

Indicando per un momento con $\left(\frac{d f}{d x_k}\right)$ la derivata di f rapporto ad x_k presa dopo la sostituzione si trova

$$\left.\begin{aligned} \frac{d f}{d x_k} &= \left(\frac{d f}{d x_k}\right) + \sum_1^n{}_{qrs}(r q) \frac{d c'_{rs}}{d x_k} \psi_q \frac{d f}{d \psi_s} \\ \frac{d f}{d p_i} &= \sum_1^n{}_u c'_{iu} \frac{d f}{d \psi_u} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

e da questa e dalle (25) e (II)

$$\sum_1^n {}_i A_{ik} \frac{df}{dp_i} = -\sum_1^n {}_{qrs} \left\{ (rq) \frac{dc'_{rs}}{dx_k} + c_{rs} \begin{bmatrix} qk \\ r \end{bmatrix} \right\} \psi_q \frac{df}{d\psi_s} - z \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} (kr) \frac{df}{d\psi_s}$$

Per queste e per le (26) e (27) le (δ) prendono la forma

$$\frac{df}{dx_k} + \sum_1^n {}_s B_{sk} \frac{df}{d\psi_s} + \sum_1^n {}_u (ku) \psi_u \cdot \frac{df}{dz} = 0, \tag{δ_1}$$

essendo

$$B_{sk} = -\sum_1^n {}_r c_{rs} \left\{ z(kr) + \sum_1^n {}_u \begin{bmatrix} uk \\ r \end{bmatrix} \psi_u \right\}. \tag{28}$$

È facile vedere che il sistema di equazioni (δ_1) ammette per integrale il primo membro della equazione

$$z^2 + \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} \psi_r \psi_s = 1. \tag{29}$$

Sostituendolo come variabile indipendente a z e ponendolo poi eguale all'unità, il sistema (δ_1) prende la forma

$$K(f) = \frac{df}{dx_k} + \sum_1^n {}_s B_{sk} \frac{df}{d\psi_s} = 0, \tag{ε}$$

dove le B_{sk} sono date dalle (28), in cui per z deve intendersi posto il valore dato dalla (29).

Dalla (ε) si ha

$$H\{K(f)\} - K\{H(f)\} = \sum_1^n {}_s (C_{s,hk} - C_{s,kh}) \frac{df}{d\psi_s},$$

essendo

$$C_{s,hk} = \frac{dB_{sk}}{dx_h} + \sum_1^n {}_r B_{rh} \frac{dB_{sk}}{d\psi_r},$$

ovvero, come si ha immediatamente dalle (28), tenendo conto della (29)

$$C_{s,hk} = z \left(\sum_1^n {}_t c_{st} \left\{ -\frac{d(kt)}{dh} + \sum_1^n {}_{vw} c_{vw} (hv) \begin{bmatrix} kw \\ t \end{bmatrix} \right\} - \sum_1^n {}_t (kt) \frac{dc_{st}}{dh} \right)$$
$$- \sum_1^n {}_{tu} c_{ts} \psi_u \left\{ \frac{d}{dh} \begin{bmatrix} uk \\ t \end{bmatrix} + (hu)(kt) - \sum_1^n {}_{vw} c_{vw} \begin{bmatrix} uh \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hw \\ t \end{bmatrix} + \sum_1^n {}_t \begin{bmatrix} uk \\ t \end{bmatrix} \frac{dc_{ts}}{dh} \right\}$$

e poichè per la (11) del § 2 è

$$\sum_1^n {}_w c_{vw} \begin{bmatrix} kw \\ t \end{bmatrix} = -\sum_1^n {}_w c_{vw} \begin{bmatrix} kt \\ w \end{bmatrix} + \sum_1^n {}_w c_{vw} \frac{d a_{tw}}{dk} = -\sum_1^n {}_w c_{vw} \begin{bmatrix} kt \\ w \end{bmatrix} - \sum_1^n {}_w a_{tw} \frac{d c_{vw}}{dk}$$

$$\sum_1^n {}_{tw} c_{st} c_{vw} \begin{bmatrix} kw \\ t \end{bmatrix} = -\sum_1^n {}_{tw} c_{st} c_{vw} \begin{bmatrix} kt \\ w \end{bmatrix} - \frac{d c_{v,s}}{d x_k},$$

se si pon mente alle (5) del § 2 ed alle (12) di questo si trova

$$C_{s,hk} - C_{s,kh} = -z \sum_1^n {}_t c_{st}(t,\ hk) + \sum_1^n {}_{us} c_{st} \psi_u \{(hu)(kt) - (ku)(ht) + (ut,\ kh)\}.$$

E poichè supponiamo soddisfatte le equazioni (I) e (II), da questa si deduce che il sistema di equazioni (ε) è jacobiano. Esso ammette quindi n integrali, che eguagliati ad altrettante costanti arbitrarie, ci daranno le ψ espresse per queste costanti e per le x. La (29) ci darà z per le stesse quantità, e le p_h date dalle (26), come è del resto facile il verificare, le derivate di z. Sostituendo questi valori delle p_h alle $\frac{d z_t}{dh}$ nei secondi membri delle (22), questi divengono le derivate di una stessa funzione y, per la quale si ha quindi

$$\frac{dy}{d x_g} = -\sum_1^n {}_{hrs} a_{rg} c'_{rh}(sh) \psi_s = -\sum_1^n {}_r a_{rg} \psi_r, \tag{30}$$

e di cui è facile riconoscere che soddisfa alle equazioni (14), in cui sia posto $z_t = z$, così che avendosi anche dalla (30)

$$\sum_1^n {}_r c_{rs} \frac{dy}{d x_r} = -\psi_s \tag{31}$$

si ha

$$\frac{d^2 y}{d x_i\, d x_g} = -\sum_1^n {}_r \begin{bmatrix} gi \\ r \end{bmatrix} \psi_r + (gi) z. \tag{32}$$

Prendiamo anche qui a considerare la forma

$$\psi = \varphi - dy^2 = \sum_1^n {}_{rs} \left(a_{rs} - \frac{dy}{d x_r} \frac{dy}{d x_s} \right) d x_r\, d x_s,$$

per la quale manterremo le stesse notazioni che per la φ, aggiunti degli apici. Avremo così

$$a'_{rs} = a_{rs} - \frac{dy}{d x_r} \frac{dy}{d x_s}, \qquad a' = a - \sum_1^n {}_{rs} \alpha_{rs} \frac{dy}{d x_r} \frac{dy}{d x_s}$$

e dalle (29), (30) e (31) avendosi

$$\sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs} \frac{dy}{dx_r}\frac{dy}{dx_s} = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\psi_r\psi_s = 1 - z^2 \tag{33}$$

$$a' = a z^2, \qquad a'_{rs} = a(c_{rs} z^2 + \psi_r\psi_s)$$

$$\begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix} - \frac{dy}{dx_i}\frac{d^2 y}{dx_r dx_s}$$

$$\frac{d\begin{bmatrix} lp \\ m \end{bmatrix}'}{dq} = \frac{d\begin{bmatrix} lp \\ m \end{bmatrix}}{dq} - \frac{d^2 y}{dx_m dx_q}\frac{d^2 y}{dx_l dx_p} - \frac{dy}{dx_m}\frac{d^3 y}{dx_l dx_p dx_q} \tag{34}$$

e, facendo uso delle (29), (31) e (32),

$$\frac{1}{a'}\sum_1^n {}_r\, \alpha'_{rs}\begin{bmatrix} lq \\ r \end{bmatrix}' = \sum_1^n {}_r\, c_{rs}\begin{bmatrix} lq \\ r \end{bmatrix} + \frac{(lq)}{z}\psi_s$$

$$\frac{1}{a'}\sum_1^n {}_{rs}\, \alpha'_{rs}\begin{bmatrix} lq \\ r \end{bmatrix}'\begin{bmatrix} mp \\ s \end{bmatrix}' = \sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs}\begin{bmatrix} lq \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} mp \\ s \end{bmatrix} - \frac{d^2 y}{dx_m dx_p}\frac{d^2 y}{dx_l dx_q} + (lq)(mp).$$

Per mezzo poi di questa, delle (34) e delle (5) del § 2 si trova

$$(lm,\ pq)' = (lm,\ pq) + (lq)(mp) - (lp)(mq)$$

e per le (I)

$$(lm,\ pq)' = 0.$$

Da queste pel teorema del § 2 si deduce che la forma ψ è di classe *o* e quindi la forma φ è di 1ª classe. Possiamo dunque concludere:

Le condizioni (I) *e* (II) *sono necessarie e sufficienti perchè una forma* φ, *che non è di classe o, sia di prima classe.*

Ed anche:

Per ogni forma di 1ª classe il determinante simmetrico, che ha gli elementi (lp) *definiti dalle equazioni* (I) *è differente da o.*

Poichè (§ 2) il numero delle espressioni $(lm,\ pq)$ indipendenti fra di loro è $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ e quello delle (lp) è $\frac{n(n+1)}{2}$

$$N_1 = \frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{n(n-1)}{6} - 1\right\} \tag{35}$$

sarà il numero delle condizioni (I).

Dalle (12) si deduce facilmente

$$(l,\ mm)=0 \qquad (l,\ mp)+(l,\ pm)=0$$

$$(l,\ mp)+(m,\ pl)+(p,\ lm)=0,$$

e si vede che le espressioni $(l,\ mp)$ si possono distinguere in due categorie secondo che esse contengono o no due indici eguali. Quelle della prima categoria sono evidentemente in numero di $n(n-1)$ e quelle della seconda in numero di $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$, di cui però $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ soltanto indipendenti fra loro. Per conseguenza il numero delle condizioni (II) distinte fra loro è

$$N_2=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}. \tag{36}$$

Nel caso di $n=2$ è $N_1=-2$, $N_2=2$ cioè non esistono condizioni (I) ed anzi due delle quantità (lp) sono indeterminate e soltanto debbono soddisfare a due equazioni simultanee a derivate parziali di 1° ordine, cioè alle (II), nelle quali, ad una di quelle quantità, sia sostituita la sua espressione in funzione delle altre due tratta dalla equazione (I).

Nel caso di $n=3$ è $N_1=0$, $N_2=8$, cioè le quantità (lp) sono completamente determinate dalle equazioni (I) e debbono soddisfare ad otto relazioni differenziali di 1° ordine.

Per $n>3$ è sempre $N_1>0$.

Se, come si suole, si da ai risultati, che abbiamo ottenuti, una interpretazione geometrica, essi appariscono di qualche importanza nella Teoria generale degli spazî. Se infatti conveniamo di chiamare *superficie* gli spazî ad n dimensioni, che senza alterazione del loro elemento lineare possono essere riportati in uno spazio piano ad $n+1$ dimensioni, il metodo da noi seguito per dimostrare il teorema di questo paragrafo ci conduce alla effettiva determinazione della equazione della superficie in coordinate cartesiane ortogonali, datone l'elemento lineare φ. Una tale equazione contiene, come è facile vedere, $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ costanti arbitrarie, di cui $n+1$ additive alle coordinate y_1, $y_2, \ldots y_{n+1}$, costanti, che sono necessarie e sufficienti a fissare la posizione della superficie nello spazio, e soltanto nel caso di $n=2$ la equazione stessa contiene di più tutta la arbitrarietà, che proviene dalla integrazione del sistema di due equazioni a derivate parziali di 2° ordine con due funzioni incognite, di cui abbiamo parlato. Di qui si conclude che, la proprietà delle superficie ordinarie a due dimensioni di potere essere deformate, senza alterazione del loro elemento lineare, non si estende alle superficie con un numero maggiore di dimensioni, le quali possono soltanto mediante traslazioni e rotazioni, quasi fossero rigide, mutar posto nello spazio. A questa stessa conclusione è già pervenuto il sig. Beez (*) fondandosi su considerazioni puramente geometriche, le quali però mi sembrano non avere la stessa forza di dimostrazione di quelle, su cui ci siamo qui fondati.

Si abbia ora una forma di prima classe

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

e alle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ se ne sostituiscano delle nuove $u_1, u_2, \ldots u_n$. Essa allora si trasformerà nella

$$\varphi_1 = \sum_1^n {}_{pq} b_{pq}\, du_p\, du_q$$

e, se si indica con U_x il determinante funzionale delle u rispetto alle x, con b il discriminante di φ_1 si ha

$$a_{rs} = \sum_1^n {}_{pq} b_{pq} \frac{d u_p}{d x_r} \frac{d u_q}{d x_s}, \qquad a = U_x^2 b.$$

Dalle (6) si deduce poi facilmente che, indicando con $(pq)'$ la espressione analoga alla (pq), introdotte le nuove variabili, si ha

$$(rs) = \sum_1^n {}_{pq} (pq)' \frac{d u_p}{d x_r} \frac{d u_q}{d x_s}.$$

Se quindi insieme alla φ si considera la forma

$$\psi = \sum_1^n {}_{rs} (rs)\, dx_r\, dx_s,$$

questa è covariante di φ e costruendo il sistema di n invarianti algebrici assoluti delle due forme φ e ψ si avranno per $n > 2$ altrettante espressioni dipendenti dai coefficienti di φ e dalle loro derivate prime e seconde dotate della proprietà di assoluta invarianza.

(*) *Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung* Zeitschrift für Mathematik und Physik. Jahrgang 21, pag. 374 e seguenti.

Per riconoscere il significato geometrico di questi invarianti assoluti procediamo col metodo tenuto dal sig. Beez nella Memoria citata (*). Indicando con σ la superficie, che ha per elemento lineare φ, ed i cui punti sono determinati dalle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, con $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ le coordinate cartesiane ortogonali di un suo punto P, con $y'_1, y'_2, \ldots y'_{n+1}$ quelle di un punto P' della normale a σ in P, con ρ la distanza PP', si ha

$$y'_t - y_t = \frac{(-1)^t e_t}{\sqrt{a}}\rho, \qquad (t=1,\ 2, \ldots\ n+1) \tag{37}$$

poichè le quantità $\frac{(-1)^t e_t}{\sqrt{a}}$ rappresentano i coseni di direzione di quella normale.

Se dal punto P lungo una linea di curvatura di σ passiamo ad un punto vicinissimo Q e prendiamo per P' il punto d'incontro delle due normali a σ in P e Q noi dobbiamo differenziare le (37) considerandovi le y_t come funzioni delle x_r e queste di una sola variabile indipendente e le y'_t e ρ come costanti. Noi abbiamo così

$$\sum_1^n{}_r \left(\frac{d\,y_t}{d\,x_r} + (-1)^t \rho \frac{d}{d\,x_r} \frac{e_t}{\sqrt{a}}\right) d\,x_r = 0$$

e moltiplicando per $\frac{d y_t}{d\,x_s}$, sommando rispetto a t, tenendo conto delle (3) del § 2 e della

$$\sum_1^{n+1}{}_t (-1^t e_t \frac{d\,y_t}{d\,x_r} = 0,$$

che è evidente, e da cui si ha per le (7) ed (8)

$$\sum_1^{n+1}{}_t (-1)^t \frac{d\,e_t}{d\,x_s}\frac{d\,y_t}{d\,x_r} = \sum_1^{n+1}{}_t (-1)^{t-1} e_t \frac{d^2\,y_t}{d\,x_r\,d\,x_s} = \sqrt{a}\,(r\,s)$$

$$\sum_1^n{}_r \left\{\frac{a_{rs}}{\rho} + (r\,s)\right\} d\,x_r = 0. \qquad (s=1,\ 2, \ldots\ n).$$

Queste equazioni sono quelle delle linee di curvatura di σ e ci dicono che i valori reciproci dei raggi di curvatura principali di σ (che sono in numero di n e a cui corrispondono altrettante linee di curvatura) sono le radici della

(*) Zeitschrift für Mathematik und Physik. Jahrgang 20, Seite 427.

equazione di grado n in $\frac{1}{\rho}$

$$\begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{\rho}+(1\,1), & \frac{a_{12}}{\rho}+(1\,2),\ldots & \frac{a_{1n}}{\rho}+(1\,n) \\ \frac{a_{21}}{\rho}+(2\,1), & \frac{a_{22}}{\rho}+(2\,2),\ldots & \frac{a_{2n}}{\rho}+(2\,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_{n1}}{\rho}+(n\,1), & \frac{a_{n2}}{\rho}+(n\,2),\ldots & \frac{a_{nn}}{\rho}+(n\,n) \end{vmatrix} = 0.$$

Posta questa sotto la forma

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^n + \alpha_1\left(\frac{1}{\rho}\right)^{n-1} + \alpha_2\left(\frac{1}{\rho}\right)^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\frac{1}{\rho} + \alpha_n = 0,$$

i suoi coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, come si sa dalla Teoria delle forme, costituiscono un sistema di n invarianti assoluti indipendenti delle due forme φ e ψ e $(-1)^r\alpha_r$ rappresenta la somma dei prodotti r ad r dei valori reciproci dei raggi di curvatura principali di σ. In particolare l'invariante assoluto

$$k = (-1)^n \alpha_n = (-1)^n \frac{\Delta}{a}$$

rappresenta il prodotto di tutti i valori reciproci dei raggi di curvatura principali di σ e si riguarda quindi a ragione come la espressione generalizzata della curvatura di Gauss per le superficie di quante si vogliano dimensioni. In un altro suo lavoro (*) il sig. Beez ha dimostrato che anche nel caso di $n > 2$, facendo di σ la rappresentazione di Gauss sopra una sfera ad n dimensioni di raggio eguale all'unità k rappresenta il rapporto dell'elemento della sfera di raggio 1 a quello corrispondente di σ. Infine si è qui dimostrato che analogamente a quanto si sapeva pel caso di $n=2$, l'annullarsi di k equivale ad essere la superficie σ piana.

Per $n > 2$ le equazioni (I) ci danno tutti gli elementi di Δ espressi per i coefficienti di φ e per le loro derivate prime e seconde. Se si nota di più che secondo le (I) i minori di 2° ordine di Δ sono funzioni razionali di queste quan-

(*) *Ueber das Krümmungsmass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.* Mathematische Annalen, 7er Band, Seite 387.

tità, si riconosce subito che a_1, a_2,... a_n sono alternativamente funzioni irrazionali e razionali delle quantità stesse.

Noi chiameremo la forma ψ, che ha per coefficienti le quantità (rs), *forma derivata di* φ, *ed invarianti differenziali di ordine* m della forma φ tutte le espressioni, che dipendendo soltanto dai coefficienti di φ e dalle loro derivate fino a quelle di ordine m^{simo} godono della proprietà di assoluta invarianza per ogni trasformazione di φ, e possiamo concludere che:

Ogni forma differenziale quadratica φ *di 1ª classe ad* n *variabili, per* $n > 2$, *ammette* n *invarianti differenziali di 2º ordine, i quali si ottengono costruendo coi metodi noti il sistema di invarianti algebrici assoluti comuni a* φ *ed alla sua forma derivata. Essi presi con segno conveniente rappresentano le somme dei prodotti* r *ad* r $(r=1, 2,\ldots n)$ *dei valori reciproci dei raggi di curvatura principali della superficie, che ha* φ *per elemento lineare, e sono alternativamente irrazionali e razionali.*

Siccome nel caso di n dispari gli elementi reciproci di Δ sono esprimibili pei minori di 2º ordine dello stesso Δ, se invece che alle forme φ e ψ si ha ricorso alle loro controvarianti

$$\Phi = \sum_1^n {}_{rs} \alpha_{rs} X_r X_s$$

$$\Psi = \sum_1^n {}_{rs} [rs] X_r X_s$$

si ottengono n invarianti differenziali di 2º ordine di φ tutti razionali e indipendenti fra loro. Noi possiamo dunque dire che:

Ogni forma differenziale quadratica φ *di 1ª classe con un numero* n *dispari di variabili indipendenti ammette* n *invarianti differenziali di 2º ordine tutti razionali, i quali si ottengono costruendo il sistema di invarianti algebrici assoluti indipendenti comuni alle forme controvarianti di* φ *e della sua derivata.*

È questo il metodo tenuto dal Christoffel (*) nel caso di $n=3$, mentre nello stesso caso il Souvorof (**) giunse agli stessi risultati con un metodo diretto di eliminazione.

Nel caso di n dispari la espressione della curvatura di Gauss è irrazionale,

---

(*) *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*, § 12. (Borchardt's Journal, 70er Band, Seite 65.)

(**) *Sur les caractéristiques des systèmes de trois dimensions.* (Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, vol. 4, pag. 180.)

ma è razionale la sua potenza $(n-1)^{\text{sima}}$, poichè si ha

$$k^{n-1} = \frac{\Delta^{n-1}}{a^{n-1}} = \frac{\Delta_1}{a^{n-1}},$$

con Δ_1 indicando il determinante reciproco di Δ.

Il caso di $n = 2$ è un caso di eccezione pei teoremi sopra dimostrati, perchè in esso le equazioni (I) non bastano a determinare le quantità (lp) per le (lm, pq). In questo caso si ha un solo invariante differenziale di 2° ordine, che è

$$k = \frac{\Delta}{a} = \frac{(12,\ 12)}{a},$$

e di cui sarebbe facile verificare che coincide colla nota espressione della curvatura di GAUSS.

Padova, febbraio 1884.