

Le involuzioni di 3^a e 4^a classe.

(Memoria del dott. MARTINETTI VITTORIO, a Pisa.)

Il sig. BERTINI in una Nota: *Sopra alcune involuzioni piane* (*) dà la configurazione dei punti fondamentali e la costruzione di tutte le involuzioni di JONQUIÈRES, e di quelle di 1^a e 2^a classe. Seguendo la stessa via, tenuta dal sig. BERTINI, pervenni a trovare la configurazione dei punti fondamentali e la costruzione delle involuzioni di 3^a e 4^a classe.

Omettendo la discussione, che mi condusse a stabilire quali sistemi di curve Ω diano luogo ad involuzioni di 3^a e 4^a classe, mi limito qui ad esporre i soli risultati finali ai quali sono giunto, ed in questa esposizione mi atterrò interamente al modo di classificazione ed alle notazioni adottate dal sig. BERTINI nel citato lavoro.

Involuzioni di 3^a classe.

Nelle involuzioni di 3^a classe le curve Ω relative ai varî punti del piano sono di 7^o ordine ed hanno 6 intersezioni variabili.

1. *1^a Specie*. Chiameremo di 1^a specie le involuzioni di 3^a classe per le quali le curve Ω sono:

$$(1_4^5 2 3 \dots 15)_7.$$

Tali involuzioni sono di JONQUIÈRES, e cioè:

- 1^a Involuzione: Involuzione di 8^o ordine,
- 2^a Involuzione: Involuzione di 7^o ordine,
- 3^a Involuzione: Involuzione di 6^o ordine,

considerate nel citato lavoro dal sig. BERTINI, rispettivamente ai n.º 26, 22, 18.

(*) BERTINI: Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. 16, fasc. II-III.

2. *2^a Specie.* Diremo di 2^a specie quelle involuzioni di 3^a classe nelle quali le curve Ω sono:

$$(1_2^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8 9 10 11)_7.$$

I punti 1, 2, ... 11 devono essere disposti in modo, che i gruppi di sei punti:

$$\begin{aligned} 1, 2, 3, 4, 10, 11; & \quad 1, 2, 3, 5, 9, 11; & \quad 1, 2, 3, 6, 9, 10; \\ 1, 2, 4, 5, 8, 11; & \quad 1, 2, 4, 6, 8, 10; \\ 1, 2, 5, 6, 8, 9; & \quad 1, 3, 4, 5, 7, 11; & \quad 1, 3, 4, 6, 7, 10; \\ 1, 3, 5, 6, 7, 9; & \quad 1, 4, 5, 6, 7, 8, \end{aligned}$$

siano sopra altrettante coniche. Queste condizioni (non tutte indipendenti) sono necessarie per l'esistenza delle involuzioni di 2^a specie, le quali si possono effettivamente costruire con due dei cinque fasci di cubiche:

$$\begin{aligned} (1^2 2 3 4 5 11)_3, & \quad (1^2 2 3 4 6 10)_3, & \quad (1^2 2 3 5 6 9)_3, & \quad (1^2 2 4 5 6 8)_3 \\ & & & \quad (1^2 3 4 5 6 7)_3. \end{aligned}$$

3. *Involuzione I.* L'involuzione più generale della 2^a specie è di 10^o ordine e nasce dalla detta costruzione non imponendo ulteriori condizioni ai punti 1, 2, 3, ... 11. Essa possiede:

$$\begin{aligned} \text{un punto settuplo} & \dots 1, \\ \text{cinque punti tripli} & \dots 2, 3, 4, 5, 6, \\ \text{cinque punti semplici} & \dots 7, 8, 9, 10, 11, \end{aligned}$$

la curva punteggiata unita è:

$$\Gamma = (1^3 2 3 4 5 6)_4,$$

e la Jacobiana della involuzione è:

$$\begin{aligned} I = (1^5 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8 9 10 11)_7 & (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^2 (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^2 \dots \\ & (1 2)_1^7 (1 3)_1^8 (1 4)_1^9 (1 5)_1^{10} (1 6)_1^{11}. \end{aligned}$$

Da questa involuzione si ottengono con successivi allineamenti le altre della stessa specie, cioè:

4. *Involuzione II.* Per l'allineamento dei punti 1, 6, 11 si ha una involuzione di 9^o ordine con:

un punto sestuplo 1,
 quattro punti tripli 2, 3, 4, 5,
 un punto doppio 6,
 quattro punti semplici . . . 7, 8, 9, 10,
 un punto unito 11,

essendo:

$$\Gamma = (1^2 2 3 4 5)_3,$$

$$I = (1^4 2^2 3^2 4^2 5^2 6 7 8 9 10)_6^4 (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^2 (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^3 \dots$$

$$(1 2 3 4 5)_2^6 (1 2)_1^7 (1 3)_1^8 (1 4)_1^9 (1 5)_1^{10}.$$

5. *Involuzione III.* Se poniamo nel caso precedente 1, 5, 10 in linea retta avremo una involuzione di 8° ordine con:

un punto quintuplo . . . 1,
 tre punti tripli 2, 3, 4,
 due punti doppi 5, 6,
 tre punti semplici 7, 8, 9,
 due punti uniti 10, 11,

in cui sarà:

$$\Gamma = (1 2 3 4)_2;$$

$$I = (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5^4 (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^2 (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^3 \dots (1 2 3 4 6)_2^5$$

$$(1 2 3 4 5)_2^6 (1 2)_1^7 (1 3)_1^8 (1 4)_1^9.$$

6. *Involuzione IV.* Collochiamo in questa involuzione i punti 1, 4, 9 in linea retta. L'involuzione che si ottiene è del 7° ordine con:

un punto quadruplo . . . 1,
 due punti tripli 2, 3,
 tre punti doppi 4, 5, 6,
 due punti semplici 7, 8,
 tre punti uniti 9, 10, 11;

e si ha:

$$\Gamma = (2 3)_1,$$

$$I = (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^4 (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^2 (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^3 (1 2 3 5 6)_2^4 (1 2 3 4 6)_2^5$$

$$(1 2 3 4 5)_2^6 (1 2)_1^7 (1 3)_1^8.$$

7. *3^a Specie.* Si diranno di 3^a specie quelle involuzioni di 3^a classe per le quali le curve Ω sono:

$$(1^3 2^3 3^3 4^3 5 6 7 8 9 10 11)_7.$$

I punti 1 2... 11 devono essere sopra una medesima cubica, però non in modo arbitrario, ma tale che le quintiche del fascio $(1^2 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9 10 11)_5$ non siano in generale spezzate (per cui uno dei punti è determinato dalla posizione degli altri). Questo fascio e quello di coniche $(1 2 3 4)_2$ danno la costruzione delle involuzioni di 3^a specie.

8. *Involuzione I.* L'involuzione più generale di questa specie è del 15^o ordine con:

quattro punti settupli . . . 1, 2, 3, 4,
sette punti doppi 5, 6, ... 11,

ed è:

$$\Gamma = (1^4 2^4 3^4 4^4 5 6 \dots 11)_9,$$

$$I = (1^4 2^3 3^3 4^3 5 6 \dots 11)_7^4 (1^3 2^4 3^3 4^3 5 6 \dots 11)_7^2 \dots (1 2 3 4 5)_2^5 (1 2 3 4 6)_2^6 \dots (1 2 3 4 11)_2^{11}.$$

9. *Involuzione II.* Poniamo 3, 4, 11 in linea retta; si ha una involuzione di 14^o ordine con:

due punti settupli . . . 1, 2,
due punti sestupli . . . 3, 4,
sei punti doppi 5, 6, ... 10,
uno semplice 11,

e sarà:

$$\Gamma = (1^4 2^4 3^3 4^3 5 6 \dots 10)_8,$$

$$I = (1^4 2^3 3^3 4^3 5 6 \dots 11)_7^4 (1^3 2^4 3^3 4^3 5 6 \dots 11)_7^2 (1^3 2^3 3^3 4^2 5 \dots 10)_6^3 (1^3 2^3 3^2 4^3 5 \dots 10)_6^4 (1 2 3 4 5)_2^5 (1 2 3 4 6)_2^6 \dots (1 2)_1^{11}.$$

10. *Involuzione III.* Coi due allineamenti 3, 4, 11; 1, 2, 11 si ha una involuzione di 13^o ordine che possiede:

quattro punti sestupli . . . 1, 2, 3, 4,
sei punti doppi 5, 6, 7, 8, 9, 10,
un punto unito 11,

ed è:

$$\Gamma = (1^3 2^3 3^3 4^3 5 6 \dots 10)_7,$$

$$I = (1^3 2^3 3^3 4^3 5 \dots 10)_6^4 (1^2 2^3 3^3 4^3 5 \dots 10)_6^2 (1^3 2^3 3^3 4^2 5 \dots 10)_6^3$$

$$(1^3 2^3 3^2 4^3 5 \dots 10)_6^4 (1 2 3 4 5)_2^5 \dots$$

Involuzione IV. Un'altra involuzione di 13^o ordine nasce pei due allineamenti 2, 4, 10; 3, 4, 11. Si hanno così:

- un punto settuplo 1,
- due punti sestupli 2, 3,
- un punto quintuplo 4,
- cinque punti doppi 5, 6, 7, 8, 9,
- due semplici 10, 11,

essendo:

$$\Gamma = (1^4 2^3 3^3 4^2 5 6 7 8 9)_7,$$

$$I = (1^4 2^3 3^3 4^3 5 \dots 11)_7^4 (1^3 2^3 3^3 4^2 5 \dots 9 11)_6^2 (1^3 2^3 3^3 4^2 5 \dots 9 10)_6^3$$

$$(1^3 2^3 3^2 4^2 5 \dots 9)_5^4 (1 2 3 4 5)_2^5 \dots (1 2 3 4 9)_2^9 (1 3)_1^9 (1 2)_1^4.$$

11. *Involuzione V.* Nella involuzione III poniamo i punti 2, 4, 10 in linea retta (ovvero nella IV i punti 1, 2, 11) e scambiamo le indicazioni dei punti 2 e 3, onde si hanno i tre allineamenti 1, 3, 11; 2, 4, 11; 3, 4, 10; e avremo una involuzione di 12^o ordine con:

- due punti sestupli 1, 2,
- due punti quintupli 3, 4,
- cinque doppi 5, 6, . . . 9,
- uno semplice 10,
- ed uno unito 11,

e si ha:

$$\Gamma = (1^3 2^3 3^2 4^2 5 \dots 9)_6,$$

$$I = (1^3 2^3 3^2 4^3 5 \dots 10)_6^4 (1^3 2^3 3^3 4^2 5 \dots 10)_6^2 (1^2 2^3 3^2 4^2 5 \dots 9)_5^3 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 \dots 9)_5^4$$

$$(1 2 3 4 5)_2^5 \dots (1 2)_1^4.$$

Involuzione VI. Nella involuzione IV poniamo 1, 4, 9 in linea retta. L'in-

voluzione diverrà del 12° ordine, ed avrà:

tre punti sestupli 1, 2, 3,
 un punto quadruplo 4,
 quattro punti doppi 5, 6, 7, 8,
 tre semplici 9, 10, 11,

$$\Gamma = (1^3 2^3 3^3 4^3 5 \dots 8)_3,$$

$$I = (1^3 2^3 3^3 4^2 5 \dots 8 10 11)_6^4 (1^3 2^3 3^3 4^2 5 \dots 8 9 11)_6^2 (1^3 2^3 3^3 4^2 5 \dots 8 9 10)_6^2 \\ (1^2 2^2 3^2 4^2 5 \dots 8)_4^4 (1 2 3 4 5)_3^5 \dots (2 3)_1^9 (1 3)_1^{10} (1 2)_1^{11}.$$

Involuzione VII. Un'altra involuzione di 12° ordine si ha situando nella IV i punti 2, 3, 9 in linea retta. Essa possiede:

un punto settuplo 1,
 tre punti quintupli 2, 3, 4,
 quattro punti doppi 5, 6, 7, 8,
 tre semplici 9, 10, 11,

$$\Gamma = (1^4 2^2 3^2 4^2 5 \dots 8)_6,$$

$$I = (1^4 2^3 3^3 4^3 5 \dots 11)_6^4 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 \dots 8 11)_6^2 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 \dots 8 10)_6^2 \\ (1^3 2^2 3^2 4^2 5 \dots 8 9)_6^4 (1 2 3 4 5)_2^5 (1 2 3 4 6)_2^6 \dots (1 4)_1^9 (1 3)_1^{10} (1 2)_1^{11}.$$

12. *Involuzione VIII.* Ponendo 2, 3, 9 in linea retta nell'involuzione VI (ovvero 1, 4, 9 nella VII) e scambiando poi le indicazioni dei punti 9, 11 si ottengono i quattro allineamenti 1, 4, 11; 2, 4, 10; 3, 4, 9; 2, 3, 11. L'involuzione è dell'11° ordine con:

un punto sestuplo 1,
 due punti quintupli 2, 3,
 un punto quadruplo 4,
 quattro punti doppi 5, 6, 7, 8,
 due punti semplici 9, 10,
 ed uno unito 11,

$$\Gamma = (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8)_5,$$

$$I = (1^3 2^3 3^3 4^2 5 \dots 9 10)_6^4 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 \dots 8 9)_5^2 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 \dots 8 10)_5^2 \\ (1^2 2^2 3^2 4^2 5 \dots 8)_4^4 (1 2 3 4 5)_2^5 (1 2 3 4 6)_2^6 \dots (1 2)_1^9 (1 3)_1^{10}.$$

Questa involuzione si ottiene anche dalla V, prendendo in linea retta i punti 1, 4, 9 e scambiando rispettivamente fra loro le denominazioni dei punti 2, 3; 1, 3.

Involuzione IX. Una seconda involuzione di 11^o ordine nasce dalla V prendendo in linea retta i punti 1, 2, 10. Essa avrà:

quattro punti quintupli . . . 1, 2, 3, 4,
cinque punti doppi 5, 6, 7, 8, 9,
due uniti 10, 11,

$$\Gamma = (1^2 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5$$

$$I = (1^2 2^2 3^2 4^2 5 \dots 9)_5^1 (1^2 2^2 3^2 4^2 5 \dots 9)_5^2 (1^2 2^3 3^2 4^2 5 \dots 9)_5^3 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 \dots 9)_5^4 \\ (1 2 3 4 5)_2^5 \dots$$

13. *Involuzione X.* Se nella involuzione VIII si collocano i punti 1, 3, 10 in linea retta si ottiene una involuzione di 10^o ordine la quale ha:

due punti quintupli . . . 1, 2,
due quadrupli 3, 4,
quattro doppi 5, 6, 7, 8,
un punto semplice . . . 9,
e due uniti 10, 11,

$$\Gamma = (1^2 2^2 3 4 5 \dots 8)_4,$$

$$I = (1^2 2^3 3^2 4^2 5 \dots 9)_5^1 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 \dots 9)_5^2 (1^2 2^2 3 4^2 5 \dots 8)_4^3 (1^2 2^2 3^2 4 5 \dots 8)_4^4 \\ (1 2 3 4 5)^5 \dots (1 2)_1^9.$$

14. *Involuzione XI.* Se nella precedente si collocano 1, 2, 9 in linea retta, onde i punti 9, 10, 11 sono diagonali del quadrangolo 1 2 3 4 otteniamo una involuzione di 9^o ordine con:

quattro punti quadrupli . . . 1, 2, 3, 4,
quattro punti doppi 5, 6, 7, 8,
tre punti uniti 9, 10, 11,

ed è:

$$\Gamma = (1 2 3 4 5 6 7 8)_3,$$

$$I = (1 2^2 3^2 4^2 5 \dots 8)_4^1 (1^2 2 3^2 4^2 5 \dots 8)_4^2 \dots (1 2 3 4 5)_2^5 (1 2 3 4 6)_2^6 \dots$$

15. *4^a Specie.* Quelle involuzioni nelle quali le curve Ω sono

$$(1^3 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9)_7,$$

verranno dette di 4^a specie. I punti 1, 2, ... 9 devono essere punti base di un fascio di cubiche. Le quartiche della rete $(1^2 2^2 3 4 \dots 8)_4$ sono unite e servono quindi a costruire tutte le involuzioni di questa specie.

16. *Involuzione I.* Se i punti 1, 2, ... 9 non sono soggetti ad alcun'altra condizione, all'infuori d'esser punti base di un fascio di cubiche, allora la detta costruzione conduce ad una involuzione di 14^o ordine con:

due punti settupli 1, 2,
sei punti quadrupli . . . 3, 4, 5, 6, 7, 8,
un punto semplice 9,

ed è:

$$\Gamma = (1^4 2^4 3^2 4^2 \dots 8^2)_8,$$

$$I = (1^4 2^3 3^2 4^2 \dots 8^2 9)_7^4 (1^3 2^4 3^2 4^2 \dots 8^2 9)_7^2 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^3$$

$$(1^2 2^2 3 4^2 5 6 7 8)_4^4 \dots (1 2)_1^2.$$

17. *Involuzione II.* Ponendo nella precedente in linea retta i punti 1, 2, 9, si ha una involuzione di 13^o ordine, che possiede:

due punti sestupli 1, 2,
sei punti quadrupli . . . 3, 4, 5, 6, 7, 8,
un punto unito 9,

$$\Gamma = (1^3 2^3 3^2 4^2 \dots 8^2)_7,$$

$$I = (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6^4 (1^2 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6^2 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^3 \dots$$

$$(1^2 2^2 3 4 5 6 7 8)_4^6.$$

Involuzione III. Un'altra involuzione di 13^o ordine nasce dalla I per l'allineamento 2, 7, 8. Si hanno allora:

un punto settuplo 1,
un punto sestuplo 2,
quattro punti quadrupli . . . 3, 4, 5, 6,
due tripli 7, 8,
uno semplice 9,

$$\Gamma = (1^4 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8)_7,$$

$$I = (1^4 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9)_7^4 (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^2 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^3 \dots \\ (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^7 (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^8 (1 2)_1^9.$$

18. *Involuzione IV.* Col nuovo allineamento 2, 5, 6 dalla III si ottiene una involuzione di 12° ordine con:

- un punto settuplo 1,
- un punto quintuplo 2,
- due punti quadrupli 3, 4,
- quattro punti tripli 5, 6, 7, 8,
- un punto semplice 9.

E sarà:

$$\Gamma = (1^4 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8)_6,$$

$$I = (1^4 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9)_7^4 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_6^5 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^3 \\ (1^2 2^2 3 4^2 5 6 7 8)_4^4 (1^2 2 3 4 5 7 8)_3^5 (1^2 2 3 4 6 7 8)_3^6 (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^7 \\ (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^8 (1 2)_1^9.$$

Involuzione V. Poniamo nella III 1, 6, 8 in linea retta; si ha una involuzione di 12° ordine che possiede:

- due punti sestupli 1, 2,
- tre punti quadrupli 3, 4, 5,
- due punti tripli 6, 7,
- un punto doppio 8,
- uno semplice 9,

$$\Gamma = (1^3 2^3 3^2 4^2 5^2 6 7)_6,$$

$$I = (1^3 2^3 3^2 4^2 5^2 6 7^2 8 9)_6^4 (1^2 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^2 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^3 \dots \\ (1 2^2 3 4 5 6 7)_3^6 (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^7 (1 2 3 4 5)_2^8 (1 2)_1^9.$$

Involuzione VI. Una terza involuzione di 12° ordine si ha pei due allineamenti 1, 2, 9; 2, 7, 8, essa possiede:

- un punto sestuplo 1,
- un punto quintuplo 2,
- quattro punti quadrupli 3, 4, 5, 6,
- due punti tripli 7, 8,
- uno unito 9,

$$\Gamma = (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8)_6,$$

$$I = (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6^4 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8)_5^2 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^3 \dots \\ (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^7 (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^8.$$

19. *Involuzione VII.* Nell'involuzione IV prendiamo in linea retta i punti 2, 3, 4. L'involuzione che si ottiene è dell'11° ordine con:

un punto settuplo 1,
 un punto quadruplo 2,
 sei punti tripli 3, 4, 5, 6, 7, 8,
 uno semplice 9,

$$\Gamma = (1^4 2 3 4 5 6 7 8)_5,$$

$$I = (1^4 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9)_7^4 (1^3 2 3 4 5 6 7 8 9)_4^2 (1^2 2 3 5 6 7 8)_3^3 (1^2 2 4 5 6 7 8)_3^4 \\ (1^2 2 3 4 5 7 8)_3^5 (1^2 2 3 4 6 7 8)_3^6 (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^7 (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^8 (1 2)_1^9.$$

Involuzione VIII. Un'altra involuzione di 11° ordine nasce dalla IV per l'allineamento 1, 2, 9 (o dalla VI per l'allineamento 2, 5, 6). Avremo così:

un punto sestuplo 1,
 tre punti quadrupli 2, 3, 4,
 quattro punti tripli 5, 6, 7, 8,
 un punto unito 9,

$$\Gamma = (1^3 2 3^2 4^2 5 6 7 8)_5,$$

$$I = (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 \dots 8^2)_6^4 (1^2 2 3^2 4^2 5 \dots 8)_4^2 (1^2 2^2 3^2 4 5 \dots 8)_4^3 (1^2 2^2 3 4^2 5 \dots 8)_4^4 \\ (1^2 2 3 4 5 7 8)_3^5 (1^2 2 3 4 6 7 8)_3^6 (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^7 (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^8.$$

Involuzione IX. Collochiamo nella IV i punti 1, 6, 8 in linea retta (ovvero nella V i punti 2, 5, 6) e scambiamo fra loro le denominazioni dei punti 6, 7, onde si hanno i tre allineamenti 1, 7, 8; 2, 5, 7; 2, 6, 8. Si ottiene una involuzione di 11° ordine, che ha:

un punto sestuplo 1,
 un punto quintuplo 2,
 due punti quadrupli 3, 4,
 due punti tripli 5, 6,
 due doppi 7, 8,
 ed uno semplice 9,

$$\Gamma = (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6)_5,$$

$$I = (1^3 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^4 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5^2 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^3 \\ (1^2 2^2 3 4^2 5 6 7 8)_4^4 (1^2 2 3 4 5 6 8)_5^5 (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^6 (1 2 3 4 6)_2^7 (1 2 3 4 5)_2^8 (1 2)_1^9.$$

Involuzione X. Un'altra involuzione di 11^o ordine si ha dalla V e VI ponendo rispettivamente in linea retta i punti 1, 2, 9; 1, 6, 8. Essa possiede:

- due punti quintupli . . . 1, 2,
- tre punti quadrupli . . . 3, 4, 5,
- due punti tripli 6, 7,
- un punto doppio 8,
- uno unito 9;

$$\Gamma = (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6 7)_5,$$

$$I = (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6 7^2 8)_5^4 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8)_5^2 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^3 \dots \\ (1 2^2 3 4 5 6 7)_3^6 (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^7 (1 2 3 4 5)_2^8.$$

20. *Involuzione XI.* Nella involuzione VII si pongano in linea retta i punti 1, 2, 9 (ovvero 2, 3, 4 nell'VIII) e si avrà una involuzione di 10^o ordine con

- un punto sestuplo . . . 1,
- sette punti tripli 2, 3, ... 8,
- un punto unito 9;

essendo:

$$\Gamma = (1^3 3 4 5 6 7 8)_4$$

$$I = (1^3 2^2 3^2 4^2 \dots 8^2)_6^4 (1^2 3 4 5 6 7 8)_3^2 (1^2 2 3 5 6 7 8)_3^3 (1^2 2 4 5 6 7 8)_4^4 \\ (1^2 2 3 4 5 7 8)_3^5 \dots$$

Involuzione XII. Suppongasi nell'involuzione IX i punti 1, 2, 9 in linea retta e si avrà un'altra involuzione di 10^o ordine (che si può ottenere anche dall'VIII e dalla X ponendo in linea retta rispettivamente i punti 1, 6, 8; 2, 5, 6 e scambiando fra loro le denominazioni dei punti 6 e 7) la quale ha:

- un punto quintuplo . . . 1,
- tre punti quadrupli . . . 2, 3, 4,
- due punti tripli 5, 6,
- due doppi 7, 8,
- uno unito 9;

$$\Gamma = (1^2 2 3^2 4^2 5 6)_4$$

$$I = (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8)_5^4 (1^2 2 3^2 4^2 5 6 7 8)_4^2 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^3 (1^2 2^2 3 4^2 5 6 7 8)_4^4 \\ (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^5 (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^6 (1 2 3 4 6)_2^7 (1 2 3 4 5)_2^8.$$

Involuzione XIII. Nasce un'altra involuzione di 10° ordine dalla IX prendendo 1, 5, 6 in linea retta. Si ha:

due punti quintupli . . . 1, 2,
 due punti quadrupli . . . 3, 4,
 quattro doppi. 5, 6, 7, 8,
 ed uno semplice 9;

$$\Gamma = (1^2 2^2 3^2 4^2)_4$$

$$I = (1^2 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5^4 (1^2 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5^2 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^3 \\ (1^2 2^2 3 4^2 5 6 7 8)_4^4 (1 2 3 4 8)_2^5 (1 2 3 4 7)_2^6 (1 2 3 4 6)_2^7 (1 2 3 4 5)_2^8 (1 2)_1^9.$$

21. *Involuzione XIV.* Nella involuzione XII poniamo in linea retta i punti 1, 5, 6 (o nella XIII i punti 1, 2, 9) ed avremo una involuzione di 9° ordine la quale avrà:

quattro punti quadrupli . . . 1, 2, 3, 4,
 quattro punti doppi 5, 6, 7, 8,
 ed uno unito 9,

$$\Gamma = (1 2 3^2 4^2)_3$$

$$I = (1 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8)_4^4 (1^2 2 3^2 4^2 5 6 7 8)_4^2 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^3 (1^2 2^2 3 4^2 5 6 7 8)_4^4 \\ (1 2 3 4 8)_2^5 (1 2 3 4 7)_2^6 \dots$$

22. Queste sono tutte le involuzioni di 3^a classe e 4^a specie.

Notiamo che oltre alla costruzione generale già detta ve n'ha un'altra che può servire per tutte eccettuate le due prime; essa si ottiene per mezzo dei due fasci di cubiche unite

$$(1 2 3 4 5 6 7 8 9)_3 (1^2 2 3 4 5 6)_3;$$

anzi in alcune di esse si può al secondo fascio sostituire altri fasci analoghi di cubiche razionali unite.

Di più le involuzioni di questa specie le quali posseggono soli 8 punti fon-

damentali possono essere generate per mezzo del sistema tre volte infinito di sestiche (*)

$$(1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6$$

le quali in quelle involuzioni sono unite.

23. *5^a Specie.* Vi è ancora una sola involuzione di 3^a classe, la quale sarà chiamata di 5^a specie, ed è quella per la quale le curve Ω sono:

$$(1^2_2 2^2_2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8 9 10 11)_7.$$

Essa è di 6^o ordine, non possiede curva punteggiata unita ed ha:

due punti tripli 1, 2,
 quattro punti doppi . . . 3, 4, 5, 6,
 uno semplice 7,
 e quattro uniti 8, 9, 10, 11.

Le cubiche fondamentali hanno un punto doppio nel punto corrispondente e passano semplicemente per gli altri punti fondamentali; le coniche fondamentali passano per i punti tripli e doppi eccettuato quello al quale corrispondono.

Scegliamo affatto arbitrariamente i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6 e consideriamo le due involuzioni nei fasci $(1 2 3 4)_2$, $(1 2 3 5)_2$ determinate rispettivamente dalle due coppie di elementi corrispondenti:

$$(1 2 3 4 5)_2, (1 2 3 4 6)_2; (1 3)_1 (2 4)_1, (1 4)_1 (2 3)_1;$$

$$(1 2 3 5 4)_2, (1 2 3 5 6)_2; (1 3)_1 (2 5)_1, (1 5)_1 (2 3)_1.$$

I punti del piano restano riferiti fra loro univocamente ed involutoriamente, quando si chiamino corrispondenti due punti, se le coniche dei due fasci che si segano in uno di essi, corrispondono, nelle rispettive involuzioni, a quelle che si segano nell'altro.

L'involuzione così ottenuta è appunto quella di 6^o ordine 3^a classe e 5^a specie.

Il punto 7 non è arbitrario, ma è l'intersezione delle coniche dei due fasci che corrispondono rispettivamente alle

$$(1 2)_1 (3 4)_1, (1 2)_1 (3 5)_1.$$

La costruzione della involuzione di 5^a specie si può avere in 12 modi diversi potendosi considerare sei diversi fasci di coniche in involuzione.

(*) BERTINI: *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie*, § 5. Annali di Mat., serie II, tomo 8.

Involuzioni di 4^a classe.

Nelle involuzioni di 4^a classe le curve Ω sono del 9^o ordine e posseggono 73 intersezioni fisse.

24. *1^a Specie.* Le involuzioni di JONQUIÈRES di 4^a classe sono tre, degli ordini 10, 9, 8 (*) e verranno dette di 1^a specie. In esse le curve Ω sono:

$$(1_6^7 2 3 \dots 19)_9.$$

25. *2^a Specie.* Si chiameranno di 2^a specie le involuzioni di 4^a classe per le quali le curve Ω sono:

$$(1_2^5 2^3 3^3 4^3 5^2 6^2 7^2 8^2 9 10 11)_9.$$

Gli 11 punti 1, 2, 3, ... 11 devono essere disposti in modo che i gruppi di sei punti

$$\begin{array}{lll} (1, 2, 3, 5, 7, 11) & (1, 2, 3, 6, 8, 11) & (1, 2, 4, 5, 7, 10) \\ (1, 2, 4, 6, 8, 10) & (1, 3, 4, 6, 8, 9) & (1, 3, 4, 5, 7, 9) \end{array}$$

esistano sopra altrettante coniche (ed allora gli undici punti sono sopra una cubica).

Coi due fasci $(1^2 2 3 4 5 7)_3$, $(1^2 2 3 4 6 8)_3$, si costruiscono tutte le involuzioni di 2^a specie.

26. *Involuzione I.* Assoggettando i punti 1 2... 11 a queste sole condizioni, la detta costruzione dà una involuzione di 14^o ordine nella quale si ha:

un punto nonuplo 1,
tre punti quintupli 2, 3, 4,
quattro punti tripli 5, 6, 7, 8,
tre semplici 9, 10, 11,

$$\Gamma = (1^4 2^3 3^3 4^2 5 6 7 8)_6$$

$$I = (1^6 2^3 3^3 4^3 5^2 6^2 7^2 8^2 9 10 11)_9^4 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_6^2 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 10)_3^3$$

$$(1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 11)_5^4 (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^5 (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^6 (1^2 2 3 4 6 7 8)_3^7$$

$$(1^2 2 3 4 5 7 8)_3^8 (1 2)_1^9 (1 3)_1^{10} (1 4)_1^{11}.$$

(*) BERTINI: *Sopra alcune involuzioni piane*, l. c., num. 26, 22, 18.

27. *Involuzione II.* Coll'allineamento (2, 3, 4) si ottiene una involuzione di 13^o ordine, che ha:

- un punto nonuplo 1,
- tre punti quadrupli 2, 3, 4,
- quattro punti tripli 5, 6, 7, 8,
- tre semplici 9, 10, 11,

ed è:

$$\Gamma = (1^4 2^3 3^4 4^5 6^7 8)_5,$$

$$I = (1^6 2^3 3^3 4^3 5^2 6^2 7^2 8^2 9 10 11)_9^4 (1^3 2^3 3^4 4^5 6^7 8 9)_4^2 (1^3 2^3 3^4 4^5 6^7 8 10)_4^3$$

$$(1^3 2^3 3^4 4^5 6^7 8 11)_4^4 (1^2 2^3 3^4 4^5 6 8)_3^5 (1^2 2^3 3^4 4^5 6 7)_3^6 (1^2 2^3 3^4 6 7 8)_3^7$$

$$(1^2 2^3 3^4 4^5 7 8)_3^8 (1 2)_1^9 (1 3)_1^{10} (1 4)_1^{11}.$$

Involuzione III. Poniamo 1, 7, 8 in linea retta; si ha una involuzione di 13^o ordine, che ha:

- un punto ottuplo 1,
- tre punti quintupli 2, 3, 4,
- due punti tripli 5, 6,
- due punti doppi 7, 8,
- e tre semplici 9, 10, 11,

$$\Gamma = (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6)_5,$$

$$I = (1^5 2^3 3^3 4^3 5^2 6^2 7 8 9 10 11)_8^4 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5^2 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 10)_5^3$$

$$(1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 11)_5^4 (1^2 2^3 3^4 4 5 6 8)_3^5 (1^2 2^3 3^4 4 5 6 7)_3^6 (1 2 3 4 6)_2^7 (1 2 3 4 5)_2^8$$

$$(1 2)_1^9 (1 3)_1^{10} (1 4)_1^{11}.$$

Involuzione IV. Un'altra involuzione di 13^o ordine nasce dall'allineamento 1, 4, 11. Si hanno allora:

- un punto ottuplo 1,
- due punti quintupli 2, 3,
- un punto quadruplo 4,
- quattro punti tripli 5, 6, 7, 8,
- due semplici 9, 10,
- ed uno unito 11,

$$\Gamma = (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_5,$$

$$I = (1^5 2^3 3^3 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9^2 10^2)_8 (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9^2)_5 (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 10^2)_5^3 \\ (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_4 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 8^2)_5 (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2)_5 \dots (1^2)_1 (1^3)_1^{10}.$$

28. *Involuzione V.* Per i due allineamenti 2, 3, 4; 1, 4, 11 abbiamo una involuzione di 12° ordine con:

un punto ottuplo 1,
 due punti quadrupli 2, 3,
 cinque punti tripli 4, 5, 6, 7, 8,
 due punti semplici 9, 10,
 ed uno unito 11;

essendo:

$$\Gamma = (1^3 2^2 3^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_4,$$

$$I = (1^5 2^3 3^3 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9^2 10^2)_8 (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9^2)_4 (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 10^2)_4^2 \\ (1^2 2^2 3^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_5 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 8^2)_5 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2)_5 \dots (1^2)_1 (1^3)_1^{10}.$$

Involuzione VI. Dalle III e IV nasce una seconda involuzione di 12° ordine allineando rispettivamente i punti 1, 4, 11; 1, 7, 8 essa possiede:

un punto settuplo 1,
 due punti quintupli 2, 3,
 un punto quadruplo 4,
 due punti tripli 5, 6,
 due punti doppi 7, 8,
 due semplici 9, 10,
 ed uno unito 11,

$$\Gamma = (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2)_4,$$

$$I = (1^4 2^3 3^3 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9^2 10^2)_7 (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9^2)_5 (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 10^2)_5^2 \\ (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_4 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 8^2)_5 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2)_5 (1^2 3^2 4^2 6^2)_7 \\ (1^2 3^2 4^2 5^2)_8 (1^2)_1 (1^3)_1^{10}.$$

Involuzione VII. Nella III poniamo in linea retta i punti 1, 5, 6. L'ir-

voluzione, che nasce è del 12° ordine con

- un punto settuplo 1,
- tre punti quintupli . . . 2, 3, 4,
- quattro doppi 5, 6, 7, 8,
- e tre semplici 9, 10, 11:

$$\Gamma = (1^2 2^2 3^2 4^2)_4,$$

$$I = (1^4 2^3 3^3 4^3 5 6 7 8 9 10 11 \frac{1}{7} (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5^2 (1^2 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 10)_3^2 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 11)_5^4 (1 2 3 4 8)_2^2 (1 2 3 4 7)_2^2 (1 2 3 4 6)_2^2 (1 2 3 4 5)_2^2 (1 2)_1^2 (1 3)_1^2 (1 4)_1^2.$$

Involuzione VIII. Un'altra involuzione di 12° ordine si ottiene dalla IV per l'allineamento 1, 3, 10. Essa ha

- un punto settuplo 1,
- un punto quintuplo . . . 2,
- due punti quadrupli . . . 3, 4,
- quattro punti tripli . . . 5, 6, 7, 8,
- uno semplice 9,
- e due uniti 10, 11,

$$\Gamma = (1^2 2^2 3 4 5 6 7 8)_4,$$

$$I = (1^4 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9)_7^4 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5^2 (1^2 2^2 3 4^2 5 6 7 8)_4^3 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^4 (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^5 (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^5 \dots (1 2)_1^2.$$

29. *Involuzione IX.* Poniamo nella VI in linea retta i punti 1, 5, 6 (od anche nella VII i punti 1, 4, 11). L'involuzione che risulta è di 11° ordine, con:

- un punto sestuplo 1,
- due punti quintupli . . . 2, 3,
- un punto quadruplo . . . 4,
- quattro punti doppi . . . 5, 6, 7, 8,
- due semplici 9, 10,
- ed uno unito 11,

ed è:

$$\Gamma = (1\ 2^2\ 3^2\ 4)_3,$$

$$I = (1^3\ 2^3\ 3^3\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)_4! (1^3\ 2^3\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)_5^2 (1^3\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8\ 10)_5^3 \\ (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_4! (1\ 2\ 3\ 4\ 8)_5^2 (1\ 2\ 3\ 4\ 7)_5^2 (1\ 2\ 3\ 4\ 6)_5^2 (1\ 2\ 3\ 4\ 5)_5^2 (1\ 2)_1^9 (1\ 3)_1^{10}.$$

Involuzione X. Nella V si pongano 1, 3, 10 in linea retta (od anche nella VIII, 2, 3, 4). L'involuzione si riduce all'11° ordine, ed avrà:

un punto settuplo 1,
 un punto quadruplo 2,
 sei punti tripli 3, 4, 5, 6, 7, 8,
 uno semplice 9,
 e due uniti 10, 11,

$$\Gamma = (1^2\ 2\ 5\ 6\ 7\ 8)_3,$$

$$I = (1^4\ 2^3\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7^2\ 8^2\ 9)_4! (1^3\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)_4^2 (1^2\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_3^3 (1^2\ 3\ 5\ 6\ 7\ 8)_4! \\ (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8)_5^2 (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)_3^2 (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8)_7 (1^2\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8)_8 (1\ 2)_1^9.$$

Involuzione XI. Se nella VI prendiamo in linea retta i punti 1, 3, 10 (od anche nell'VIII i punti 1, 7, 8) si ha una involuzione di 11° ordine con

un punto sestuplo 1,
 un punto quintuplo 2,
 due punti quadrupli 3, 4,
 due punti tripli 5, 6,
 due punti doppi 7, 8,
 uno semplice 9,
 e due uniti 10, 11,

$$\Gamma = (1\ 2^2\ 3\ 4\ 5\ 6)_3,$$

$$I = (1^3\ 2^3\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8\ 9)_6! (1^3\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)_5^2 (1^2\ 2^2\ 3\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^2 \\ (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_4! (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8)_5^2 (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)_5^2 (1\ 2\ 3\ 4\ 6)_5^2 (1\ 2\ 3\ 4\ 5)_5^2 (1\ 2)_1^9.$$

Involuzione XII. Un'altra involuzione di 11° ordine nasce dall'VIII per

l'allineamento 1, 2, 9. Essa avrà:

un punto sestuplo 1,
 tre punti quadrupli 2, 3, 4,
 quattro tripli 5, 6, 7, 8,
 e tre uniti 9, 10, 11,

$$\Gamma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_3$$

$$I = (1^3\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7^2\ 8^2)_6^4 (1^2\ 2\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^3 (1^2\ 2^2\ 3\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^3 \\ (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^4 (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8)_3^5 \dots$$

30. *Involuzione XIII.* Si prendano nella IX i punti 1, 3, 10 in linea retta (od anche 1, 5, 6 nell'XI). Si ha una involuzione di 10° ordine la quale possiede:

due punti quintupli 1, 2,
 due punti quadrupli 3, 4,
 quattro punti doppi 5, 6, 7, 8,
 uno semplice 9,
 e due uniti 10, 11

$$\Gamma = (2^2\ 3\ 4)_2$$

$$I = (1^2\ 2^3\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)_5^4 (1^3\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)_5^2 (1^2\ 2^2\ 3\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^3 \\ (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^4 (1\ 2\ 3\ 4\ 8)_2^5 (1\ 2\ 3\ 4\ 7)_2^6 \dots (1\ 2)_1^9$$

Involuzione XIV. Nella involuzione X poniamo in linea retta i punti 1, 2, 9 (od i punti 2, 3, 4 nella XII). Otteniamo una involuzione di 10° ordine, che avrà:

un punto sestuplo 1,
 sette punti tripli 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
 tre uniti 9, 10, 11,

$$\Gamma = (1\ 5\ 6\ 7\ 8)_2$$

$$I = (1^3\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7^2\ 8^2)_6^4 (1^2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_3^2 (1^2\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_3^3 (1^2\ 2\ 3\ 5\ 6\ 7\ 8)_3^4 \\ (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8)_3^5 (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)_3^6 \dots$$

Involuzione XV. Un'ultima involuzione di 2 specie si può ottenere dalla

XI per l'allineamento 1, 2, 9 (od anche dalla XII per l'allineamento 1, 7, 8).
Essa è di 10° ordine con:

un punto quintuplo . . . 1,
tre quadrupli 2, 3, 4,
due tripli 5, 6,
due doppi 7, 8,
e tre uniti 9, 10, 11,

$$\Gamma = (2\ 3\ 4\ 5\ 6)_2,$$

$$I = (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8)_3^1 (1^2\ 2\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^2 (1^2\ 2^2\ 3\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^1 (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^1 \\ (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8)_3^5 (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)_3^6 (1\ 2\ 3\ 4\ 6)_2^7 (1\ 2\ 3\ 4\ 5)_2^8.$$

31. *3^a Specie.* Verranno dette di 3^a specie quelle involuzioni nelle quali le curve Ω sono:

$$(1^4\ 2^4\ 3^4\ 4^4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13)_9.$$

Il fascio delle quintiche, che hanno quattro punti doppi nei punti 1, 2, 3, 4 e passano semplicemente per *sette* dei *nove* punti 5, 6, ... 13, deve avere gli altri due per punti base. Questo fascio insieme all'altro $(1\ 2\ 3\ 4)_2$ dà la costruzione delle involuzioni di 3^a specie.

32. *Involuzione I.* Se non assoggettiamo ad altri vincoli i punti 1, 2, ... 13, la detta costruzione conduce ad una involuzione di 19° ordine con:

quattro punti nonupli . . . 1, 2, 3, 4,
e nove doppi 5, 6, ... 13,

$$\Gamma = (1^5\ 2^5\ 3^5\ 4^5\ 5 \dots 13)_{11}$$

$$I = (1^5\ 2^4\ 3^4\ 4^4\ 5 \dots 13)_9^1 (1^4\ 2^5\ 3^4\ 4^4\ 5 \dots 13)_9^2 \dots (1\ 2\ 3\ 4\ 5)_2^5 (1\ 2\ 3\ 4\ 6)_2^6 \dots$$

33. *Involuzione II.* Per l'allineamento 3, 4, 13 nasce una involuzione di 18° ordine, che ha:

due punti nonupli . . . 1, 2,
due punti ottupli . . . 3, 4,
otto punti doppi 5, 6, ... 12,
uno semplice 13;

ed è:

$$\Gamma = (1^5 2^5 3^4 4^4 5 6 \dots 12)_{10},$$

$$I = (1^5 2^4 3^4 4^4 5 6 \dots 12 13)_9^1 (1^4 2^5 3^4 4^4 5 6 \dots 12 13)_9^2 (1^4 2^4 3^4 4^3 5 6 \dots 12)_8^3$$

$$(1^4 2^4 3^3 4^4 5 6 \dots 12)_8^4 (1 2 3 4 5)_2^5 \dots (1 2)_1^{13}.$$

34. *Involuzione III.* Da quest'ultima involuzione ponendo in linea retta i punti 2, 4, 12 si deduce una involuzione di 17^o ordine, che possiede:

- un punto nonuplo . . . 1,
- due punti ottupli . . . 2, 3,
- un punto settuplo . . . 4,
- sette doppi 5, 6, . . 11,
- due semplici 12, 13,

e si ha:

$$\Gamma = (1^5 2^4 3^4 4^3 5 6 \dots 11)_9,$$

$$I = (1^5 2^4 3^4 4^4 5 6 7 8 9 10 11 12 13)_9^1 (1^4 2^4 3^4 4^3 5 \dots 11 12)_8^2$$

$$(1^4 2^4 3^4 4^3 5 \dots 11 13)_8^3 (1^4 2^3 3^3 4^3 5 \dots 11)_7^4 (1 2 3 4 5)_2^5 (1 2 3 4 6)_2^6 \dots (1 2)_1^{12} (1 3)_1^{13}.$$

Involuzione IV. Se invece nella II poniamo in linea retta i punti 1, 2, 13 otteniamo una involuzione di 17^o ordine con:

- quattro punti ottupli . . . 1, 2, 3, 4,
- otto punti doppi 5, 6, . . 12,
- ed uno unito 13;

essendo:

$$\Gamma = (1^4 2^4 3^4 4^4 5 \dots 12)_9,$$

$$I = (1^4 2^3 3^4 4^4 5 \dots 12)_8^1 (1^3 2^4 3^4 4^4 5 \dots 12)_8^2 (1^4 2^4 3^4 4^3 5 \dots 12)_8^3$$

$$(1^4 2^4 3^3 4^4 5 \dots 12)_8^4 (1 2 3 4 5)_2^5 \dots$$

35. *Involuzione V.* Poniamo nella III, in linea retta i punti 2, 3, 11. Abbiamo una involuzione di 16^o ordine con:

- un punto nonuplo . . . 1,
- tre punti settupli . . . 2, 3, 4,
- sei punti doppi 5, 6, 7, . . 10,
- tre punti semplici . . . 11, 12, 13,

e sarà:

$$\Gamma = (1^5 2^3 3^3 4^3 5 6 \dots 10)_8$$

$$I = (1^5 2^4 3^4 4^4 5 \dots 13)_6^4 (1^4 2^3 3^3 4^3 5 \dots 10 11)_7^2 (1^4 2^3 3^3 4^3 5 \dots 10 12)_7^3 \\ (1^4 2^3 3^3 4^3 5 \dots 10 13)_7^4 (1 2 3 4 5)_2^5 (1 2 3 4 6)_2^6 \dots (1 2)_1^{11} (1 3)_1^{12} (1 4)_1^{13}.$$

Involuzione VI. Nella III prendiamo in linea retta i punti 1, 2, 13 (ovvero nella IV 2, 4, 12) e scambiamo fra loro le denominazioni dei punti 2 e 3, onde si hanno i tre allineamenti 1, 3, 13; 2, 4, 13; 3, 4, 12. Avremo un'altra involuzione di 16° ordine con:

due punti ottupli . . . 1, 2,
 due punti settupli . . . 3, 4,
 sette punti doppi . . . 5, 6, ... 11,
 uno semplice 12,
 ed uno unito 13,

$$\Gamma = (1^4 2^4 3^3 4^3 5 \dots 11)_8$$

$$I = (1^4 2^4 3^3 4^4 5 \dots 12)_8^4 (1^4 2^4 3^4 4^3 5 \dots 12)_8^2 (1^3 2^4 3^3 4^3 5 \dots 11)_7^3 \\ (1^4 2^3 3^3 4^3 5 \dots 11)_7^4 (1 2 3 4 5)_2^5 \dots (1 2)_1^{12}.$$

Involuzione VII. Un'altra involuzione di 16° ordine si deduce dalla III ponendo 11 sulla retta (1, 4)₄. Questa involuzione possiede:

tre punti ottupli 1, 2, 3,
 un punto sestuplo . . . 4,
 sei punti doppi 5, 6, ... 10,
 tre punti semplici . . . 11, 12, 13,

$$\Gamma = (1^4 2^4 3^4 4^3 5 \dots 10)_8$$

$$I = (1^4 2^4 3^4 4^3 5 \dots 10 12 13)_8^4 (1^4 2^4 3^4 4^3 5 \dots 10 11 13)_8^2 (1^4 2^4 3^4 4^3 5 \dots 10 11 12)_8^3 \\ (1^3 2^3 3^3 4^2 5 \dots 10)_6^4 (1 2 3 4 5)_2^5 (1 2 3 4 6)_2^6 \dots (2 3)_1^{11} (1 3)_1^{12} (1 2)_1^{13}.$$

36. *Involuzione VIII.* Ponendo 1, 4, 11 in linea retta nella involuzione V (o nella VII i punti 2, 3, 11) e scambiando le denominazioni dei punti 11 e 13, si ha una involuzione di 15° ordine, che ha:

un punto ottuplo . . . 1,
 due punti settupli . . . 2, 3,
 un punto sestuplo . . . 4,
 sei punti doppi 5, 6, ... 10,
 due semplici 11, 12,
 ed uno unito 13.

Essendo:

$$\Gamma = (1^4 2^3 3^3 4^2 5 \dots 10)_7$$

$$I = (1^4 2^4 3^4 4^3 5 \dots 12)_8 (1^4 2^3 3^3 4^3 5 \dots 10 11)_7 (1^4 2^3 3^3 4^3 5 \dots 10 12)_7^3 \\ (1^3 2^3 3^3 4^2 5 \dots 10)_6 (1 2 3 4 5)_2^5 (1 2 3 4 6)_2^6 \dots (1 2)_1^{11} (1 3)_1^{12}$$

Involuzione IX. Nell'involuzione VI prendiamo il punto 12 sulla (1, 2)₁. L'involuzione diviene di 15° ordine con:

quattro punti settupli . . . 1, 2, 3, 4,
 sette punti doppi 5, 6, ... 11,
 due punti uniti 12, 13,

$$\Gamma = (1^3 2^3 3^3 4^3 5 \dots 11)_7$$

$$I = (1^3 2^3 3^3 4^4 5 \dots 11)_7 (1^3 2^3 3^4 4^3 5 \dots 11)_7^2 (1^3 2^4 3^3 4^3 5 \dots 11)_7^3 \\ (1^4 2^3 3^3 4^3 5 \dots 11)_7 (1 2 3 4 5)_2^5 (1 2 3 4 6)_2^6 \dots$$

37. *Involuzione X.* Poniamo nella VIII i punti 1, 3, 12 in linea retta (ovvero nella IX i punti 2, 3, 11 e scambiamo fra loro le denominazioni dei punti 12 e 13; 2 e 4), si ottengono i cinque allineamenti

1, 3, 12; 1, 4, 13; 2, 3, 13; 2, 4, 12; 3, 4, 11.

L'involuzione diviene di 14° ordine con:

due punti settupli . . . 1, 2,
 due punti sestupli . . . 3, 4,
 sei punti doppi 5, 6, ... 10,
 uno semplice 11,
 e due uniti 12, 13,

Ed è:

$$\begin{aligned}\Gamma &= (1^3 2^3 3^3 4^2 5 \dots 10)_6 \\ I &= (1^3 2^4 3^3 4^3 5 \dots 11)_7^4 (1^4 2^3 3^3 4^3 5 \dots 11)_7^2 (1^3 2^3 3^2 4^3 5 \dots 10)_6^3 \\ &\quad (1^3 2^3 3^3 4^2 5 \dots 10)_6^4 (1 2 3 4 5)_2^5 \dots (1 2)_1^{11}.\end{aligned}$$

38. *Involuzione XI.* Da questa poi per l'allineamento 1, 2, 11 si ottiene una involuzione di 13 ordine nella quale i punti 11, 12, 14 sono diagonali del quadrangolo 1, 2, 3, 4. Essa ha:

quattro punti sestupli . . . 1, 2, 3, 4,
sei punti doppi 5, 6, 7, 8, 9, 10,
e tre uniti 11, 12, 13.

La curva punteggiata unita sarà:

$$\Gamma = (1^2 2^2 3^2 4^2 5 6 \dots 10)_5,$$

e la Jacobiana:

$$I = (1^2 2^3 3^3 4^3 5 \dots 10)_6^4 (1^3 2^2 3^3 4^3 5 \dots 10)_6^2 \dots (1 2 3 4 5)_2^5 (1 2 3 4 6)_2^6 \dots$$

39. *4^a Specie.* Se le curve Ω sono:

$$(1_2^4 2_2^4 3_2^4 4^2 5^2 6^2 7 8 9 10 11 12 13)_6$$

abbiamo una sola involuzione, che verrà detta di 4^a specie. Essa è dell'8^o ordine e possiede:

tre punti quadrupli . . . 1, 2, 3,
tre punti doppi 4, 5, 6,
tre semplici 7, 8, 9,
e quattro uniti 10, 11, 12, 13.

Non esiste curva punteggiata unita, e la Jacobiana è:

$$\begin{aligned}I &= (1^2 2^2 3^2 4 5 6 8 9)_4^4 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 9)_4^2 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^3 (1 2 3 5 6)_2^4 \\ &\quad (1 2 3 4 6)_2^5 (1 2 3 4 5)_2^6 (2 3)_1^7 (1 3)_1^8 (1 2)_1^9.\end{aligned}$$

Le coniche del fascio $(1 2 3 4)_2$ hanno per corrispondenti coniche del fascio stesso, quindi si ha nel fascio una involuzione, nella quale devono essere corrispondenti le coppie:

$$\begin{aligned}(1 2 3 4 5)_2, & \quad (1 2 3 4 6)_2; & (1 2 3 4 7)_2, & \quad (1 4)_1 (2 3)_1; \\ (1 2 3 4 8)_2, & \quad (1 3)_1 (2 4)_1; & (1 2 3 4 9)_2, & \quad (1 2)_1 (3 4)_1.\end{aligned}$$

Lo stesso dicasi pei fasci $(1 2 3 5)_2, (1 2 3 6)_2$.

Per mezzo di due di questi tre fasci di coniche si può costruire l'involuzione.

40. 5^a Specie. Di 5^a specie si diranno le involuzioni di 4^a classe, nelle quali le curve Ω sono:

$$(1_2^4 2_2^4 3^3 4^3 5^2 6^2 7^2 8^2 9 10 11)_9.$$

In queste involuzioni devono i punti 1, 2, ... 11 giacere sopra una medesima cubica, in modo, che la cubica $(1 2 3^2 4 5 6 7 8)_3$ passi per 9, e che i gruppi di sei punti 1, 2, 3, 4, 10, 11; 1, 2, 5, 6, 7, 8 giacciano sopra due coniche. Soddisfatte queste condizioni ne consegue l'esistenza delle curve

$$\begin{aligned} (1 2 3 4^2 5 6 7 8 9)_3, & \quad (1 2 3 5 7 10)_2, & \quad (1 2 3 6 7 11)_2, & \quad (1 2 3 5 8 11)_2, \\ (1 2 3 6 8 10)_2, & \quad (1 2 4 5 8 10)_2, & \quad (1 2 4 6 8 11)_2, \\ (1 2 4 5 7 11)_2, & \quad (1 2 4 6 7 10)_2. \end{aligned}$$

Queste involuzioni si costruiscono poi col fascio $[1^2 2^2 3 4 5 6 7 8 10 (11)]_4$ insieme ad uno dei due

$$(1^2 2^2 3^2 5 6 7 8)_4, \quad (1^3 2^3 4^2 5 6 7 8)_4.$$

41. *Involuzione I.* Non sottoponendo ad altri vincoli i punti 1, 2, ... 11 nasce una involuzione di 10^o ordine con:

- due punti quintupli . . . 1, 2,
- due punti quadrupli . . . 3, 4,
- quattro punti doppi . . . 5, 6, 7, 8,
- uno semplice 9,
- e due uniti 10, 11,

essendo:

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1 2 3 4)_2, \\ I &= (1^3 2^3 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5^4 (1^2 2^3 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5^2 (1^2 2^2 3 4^2 5 6 7 8)_4^2 \\ & (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^4 (1 2 3 4 6)_2^5 (1 2 3 4 5)_2^6 (1 2 3 4 8)_2^7 (1 2 3 4 7)_2^8 (1 2)_1^9 \end{aligned}$$

42. *Involuzione II.* Per l'allineamento (1, 2, 9) nasce una involuzione di 9^o ordine con:

- quattro punti quadrupli . . . 1, 2, 3, 4,
- quattro punti doppi 5, 6, 7, 8,
- e tre uniti 9, 10, 11,

e si ha:

$$\Gamma = (3\ 4)_1,$$

$$I = (1^2\ 2\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^4 (1\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^2 (1^2\ 2^2\ 3\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^3 (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^4 \\ (1\ 2\ 3\ 4\ 6)_2^5 (1\ 2\ 3\ 4\ 5)_2^6 (1\ 2\ 3\ 4\ 8)_2^7 (1\ 2\ 3\ 4\ 7)_2^8.$$

43. *6^a Specie.* Le involuzioni di 6^a specie sono quelle che danno il sistema di curve Ω :

$$(1^4\ 2^3\ 3^3\ 4^3\ 5^3\ 6^3\ 7^2\ 8^2\ 9^2)_0.$$

In esse i punti fondamentali 1, 2, ... 9 sono i punti base di un fascio di cubiche, il quale insieme all'altro $(1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)_3$ serve a costruire tutte queste involuzioni di 6^a specie.

44. *Involuzione I.* L'involuzione piú generale di questa specie è di 17^o ordine, e possiede:

un punto nonuplo 1,
cinque punti sestupli . . . 2, 3, 4, 5, 6,
e tre tripli 7, 8, 9,

$$\Gamma = (1^5\ 2^3\ 3^3\ 4^3\ 5^3\ 6^3\ 7\ 8\ 9)_9,$$

$$I = (1^5\ 2^3\ 3^3\ 4^3\ 5^3\ 6^3\ 7^2\ 8^2\ 9^2)_9^4 (1^3\ 2^3\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8\ 9)_6^2 (1^3\ 2^2\ 3^3\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8\ 9)_6^3 \dots \\ (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)_3^7 \dots$$

45. *Involuzione II.* Per l'allineamento 1, 6, 9 si ha una involuzione di 16^o ordine, con:

un punto ottuplo 1,
quattro punti sestupli . . . 2, 3, 4, 5,
un punto quintuplo 6,
due tripli 7, 8,
uno doppio 9,

ed è:

$$\Gamma = (1^4\ 2^3\ 3^3\ 4^3\ 5^3\ 6^2\ 7\ 8)_8,$$

$$I = (1^4\ 2^3\ 3^3\ 4^3\ 5^3\ 6^2\ 7^2\ 8^2\ 9)_8^6 (1^3\ 2^3\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8\ 9)_6^2 (1^3\ 2^2\ 3^3\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8\ 9)_6^3 \dots \\ (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8)_5^6 (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)_3^7 (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8)_3^8 (1\ 2\ 3\ 4\ 5)_2^9.$$

Involuzione III. Per l'allineamento 4, 5, 6 si ha un'altra involuzione di

16° ordine, che ha:

- un punto nonuplo . . . 1,
- due punti sestupli . . . 2, 3,
- tre punti quintupli . . . 4, 5, 6,
- tre punti tripli 7, 8, 9,

$$\Gamma = (1^5 2^3 3^3 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_8,$$

$$I = (1^5 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3 7^2 8^2 9^2)_9^4 (1^3 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^2 (1^3 2^2 3^3 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^3 \\ (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5^4 (1^3 2^2 3^2 4 5^2 6 7 8 9)_5^5 (1^3 2^2 3^2 4 5 6^2 7 8 9)_5^6 \\ (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^7 (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^8 (1^2 2 3 4 5 6 9)_3^9.$$

46. *Involuzione IV.* Poniamo nella II i punti 1, 5, 8 in linea retta. Si ha una involuzione di 15° ordine con:

- un punto settuplo 1,
- tre punti sestupli 2, 3, 4,
- due punti quintupli . . . 5, 6,
- un punto triplo 7,
- e due doppi 8, 9,

$$\Gamma = (1^3 2^3 3^3 4^3 5^2 6^2 7)_7,$$

$$I = (1^3 2^3 3^3 4^3 5^2 6^2 7 8 9)_7^4 (1^3 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^2 (1^3 2^2 3^3 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^3 \\ (1^3 2^2 3^2 4^3 5^2 6^2 7 8 9)_6^4 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 9)_5^5 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8)_5^6 \\ (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^7 (1 2 3 4 6)_2^8 (1 2 3 4 5)_2^9.$$

Involuzione V. Se nella II si prendono in linea retta i punti 4, 5, 6 (od anche nella III i punti 1, 6, 9) si ottiene una involuzione di 15° ordine con:

- un punto ottuplo 1,
- due punti sestupli 2, 3,
- due punti quintupli . . . 4, 5,
- un punto quadruplo . . . 6,
- due tripli 7, 8,
- ed uno doppio 9;

essendo:

$$\Gamma = (1^4 2^3 3^3 4^2 5^2 6 7 8)_7,$$

$$I = (1^4 2^3 3^3 4^3 5^3 6^2 7^2 8^2 9)_8^4 (1^3 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^2 (1^3 2^2 3^3 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^3 \\ (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5^4 (1^3 2^2 3^2 4 5^2 6 7 8 9)_5^5 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^6 \\ (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^7 (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^8 (1 2 3 4 5)_2^9.$$

Involuzione VI. Un'altra involuzione di 15° ordine si ha dalla III ponendo in linea retta i punti 2, 3, 6, sicchè abbiamo:

un punto nonuplo 1,
quattro punti quintupli . . . 2, 3, 4, 5,
un punto quadruplo 6,
e tre tripli 7, 8, 9,

$$\Gamma = (1^5 2^2 3^2 4^2 5^2 6 7 8 9)_7,$$

$$I = (1^5 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3 7^2 8^2 9^2)_9^4 (1^3 2^2 3 4^2 5^2 6 7 8 9)_5^2 (1^3 2 3^2 4^2 5^2 6 7 8 9)_5^3 \\ (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_4^5 (1^3 2^2 3^2 4 5^2 6 7 8 9)_3^6 (1^3 2 3 4 5 6 7 8 9)_4^6 \\ (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^7 (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^8 (1^2 2 3 4 5 6 9)_3^9.$$

47. *Involuzione VII.* Dalla IV pel nuovo allineamento 1, 4, 7 nasce una involuzione di 14° ordine, che ha:

tre punti sestupli 1, 2, 3,
tre punti quintupli 4, 5, 6,
tre doppi 7, 8, 9,

$$\Gamma = (1^2 2^3 3^3 4^2 5^2 6^2)_6,$$

$$I = (1^2 2^3 3^3 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^4 (1^3 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^2 (1^3 2^2 3^3 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^3 \\ (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 8 9)_5^4 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 9)_5^5 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8)_5^6 \\ (1 2 3 5 6)_2^7 (1 2 3 4 6)_2^8 (1 2 3 4 5)_2^9.$$

Involuzione VIII. Nella IV poniamo in linea retta i punti 4, 5, 6 (ovvero nella V 1, 5, 8). Si ha una involuzione di 14° ordine con:

un punto settuplo 1,
due punti sestupli 2, 3,
un punto quintuplo 4,
due punti quadrupli 5, 6,
un punto triplo 7,
e due doppi 8, 9,

ed è:

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1^3 2^3 3^3 4^2 5 6 7)_6, \\ I &= (1^3 2^3 3^3 4^3 5^2 6^2 7^2 8 9)_7^4 (1^3 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^2 (1^3 2^2 3^3 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^3 \\ &\quad (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5^4 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 9)_4^5 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^6 \\ &\quad (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^7 (1 2 3 4 6)_2^8 (1 2 3 4 5)_2^9 \end{aligned}$$

Involuzione IX. Una terza involuzione di 14^o ordine si ha dalla V per l'allineamento 2, 3, 6 (od anche dalla VI per l'allineamento 1, 6, 9); essa possiede:

- un punto ottuplo 1,
- quattro punti quintupli . . . 2, 3, 4, 5,
- tre punti tripli 6, 7, 8,
- ed uno doppio 9.

Si ha:

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1^4 2^2 3^2 4^2 5^2 7 8)_6, \\ I &= (1^4 2^3 3^3 4^3 5^3 6^2 7^2 8^2 9)_8^4 (1^3 2^2 3 4^2 5^2 6 7 8 9)_5^2 (1^3 2 3^2 4^2 5^2 6 7 8 9)_5^3 \\ &\quad (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_4^4 (1^3 2^2 3^2 4 5^2 6 7 8 9)_5^5 (1^2 2 3 4 5 7 8)_3^6 \\ &\quad (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^7 (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^8 (1 2 3 4 5)_2^9. \end{aligned}$$

48. *Involuzione X.* Nella involuzione VII poniamo in linea retta i punti 4, 5, 6 (ovvero i punti 1, 4, 7 nell'VIII). Nasce così una involuzione di 13^o ordine con:

- tre punti sestupli 1, 2, 3,
- tre punti quadrupli . . . 4, 5, 6,
- tre doppi 7, 8, 9,

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1^2 2^3 3^3 4 5 6)_5, \\ I &= (1^2 2^3 3^3 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^4 (1^3 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^2 (1^3 2^2 3^3 4^2 5^2 6^2 7 8 9)_6^3 \\ &\quad (1^2 2^2 3^2 4 5 6 8 9)_4^4 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 9)_4^5 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^6 \\ &\quad (1 2 3 5 6)_2^7 (1 2 3 4 6)_2^8 (1 2 3 4 5)_2^9. \end{aligned}$$

49. 7^a *Specie.* Le involuzioni di 4^a classe nelle quali le curve Ω sono:

$$(1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3 7^3 8^3 9)_9,$$

verranno chiamate di 7^a specie.

In queste involuzioni i nove punti 1, 2, ... 9 sono punti base di un fascio di cubiche, e tutti si possono costruire col sistema tre volte infinito di sestiche (*)

$$(1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6$$

50. *Involuzione I.* Questa costruzione, nel caso in cui i punti 1, 2, 3, ... 9 non siano soggetti ad altre condizioni, dà una involuzione di 17° ordine, con:

otto punti sestupli . . . 1, 2, ... 8,

ed uno unito 9.

ed è:

$$\Gamma = (1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3 7^3 8^3)_9,$$

$$I = (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6^4 (1^2 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6^2 \dots$$

51. *Involuzione II.* Per l'allineamento 6, 7, 8 si ha una involuzione di 16° ordine con:

cinque punti sestupli . . . 1, 2, ... 5,

tre punti quintupli 6, 7, 8,

ed uno unito 9,

$$\Gamma = (1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6^2 7^2 8^2)_8$$

$$I = (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6^4 (1^2 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6^2 \dots (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8)_5^6 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6 7^2 8)_5^7 \dots$$

Poichè una rete particolare del sistema $(1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6$ basta a costruire l'involuzione, così potremo prendere la rete $(1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6 7 8)_5$.

52. *Involuzione III.* Coi due allineamenti 4, 5, 8; 6, 7, 8 si ottiene una involuzione di 15° ordine la quale possiede:

tre punti sestupli 1, 2, 3,

quattro punti quintupli . . . 4, 5, 6, 7,

uno quadruplo 8,

ed uno unito 9;

e si ha:

$$\Gamma = (1^3 2^3 3^3 4^2 5^2 6^2 7^2 8)_7$$

$$I = (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6^4 \dots (1^2 2^3 3^2 4^2 5 6^2 7^2 8)_5^4 \dots (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^5.$$

(*) BERTINI: *Ricerche*, ecc., l. c., § 5.

Questa involuzione, e le altre che verranno in seguito (casi particolari di questa) possono essere generate coi due fasci di curve unite: $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)_3$, $(1^2\ 2^2\ 3^2\ 4\ 5\ 6\ 7)_4$.

53. *Involuzione IV.* Ponendo nella precedente i punti 2, 3, 8 in linea retta nasce una involuzione di 14° ordine con:

un punto sestuplo . . . 1,
 sei punti quintupli . . . 2, 3, . . . 7,
 uno triplo 8,
 ed uno unito 9:

essendo:

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1^3\ 2^3\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7^2)_6, \\ I &= (1^3\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7^2\ 8^2)_6^4 (1^2\ 2^2\ 3\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7^2\ 8)_5^2 (1^2\ 2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7^2\ 8)_5^3 \\ &\quad (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6^2\ 7^2\ 8)_5^4 (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4\ 5^2\ 6^2\ 7^2\ 8)_5^5 (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8)_5^6 \\ &\quad (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6\ 7^2\ 8)_5^7 (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)_3^8. \end{aligned}$$

Involuzione V. Nella III poniamo in linea retta i punti 3, 5, 7 e scambiamo fra loro le denominazioni dei punti 5 e 6, per cui abbiamo i tre allineamenti 3, 6, 7; 4, 6, 8; 5, 7, 8. Avremo una involuzione di 14° ordine con:

due punti sestupli 1, 2,
 tre punti quintupli . . . 3, 4, 5,
 tre punti quadrupli . . . 6, 7, 8,
 ed uno unito 9,

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1^3\ 2^3\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6\ 7\ 8)_6, \\ I &= (1^3\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7^2\ 8^2)_6^4 (1^2\ 2^3\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7^2\ 8^2)_6^2 (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6\ 7\ 8)_5^3 \\ &\quad (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6\ 7^2\ 8)_5^4 (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8)_5^5 (1^2\ 2^2\ 3\ 4\ 5^2\ 6\ 7\ 8)_4^6 \\ &\quad (1^2\ 2^2\ 3\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^7 (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^8. \end{aligned}$$

54. *Involuzione VI.* Nella IV poniamo in linea retta i punti 3, 5, 6 e scambiamo le denominazioni dei punti 3, 7 (ovvero nella V allineamo i punti 2, 3, 8 e scambiamo le denominazioni dei punti 3, 5; 6, 7; 2, 4). L'involu-

zione diviene di 13° ordine, e possiede:

un punto sestuplo 1,
 tre punti quintupli 2, 3, 4,
 tre punti quadrupli 5, 6, 7,
 un punto triplo 8,
 ed uno unito 9,

e si ha:

$$\Gamma = (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7)_5,$$

$$I = (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6^1 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8)_5^2 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6 7^2 8)_5^3 \\ (1^2 2^2 3^2 4^2 5 6^2 7^2 8)_5^4 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^5 (1^2 2^2 3 4^2 5 6 7 8)_4^6 \\ (1^2 2 3^2 4^2 5 6 7 8)_4^7 (1^2 2 3 4 5 6 7)_5^8$$

Involuzione VII. Un'altra involuzione di 13° ordine si deduce dalla V pel nuovo allineamento 3, 4, 5. Si avrà:

due punti sestupli 1, 2,
 sei punti quadrupli 3, 4, 5, 6, 7, 8,
 uno unito 9,

$$\Gamma = (1^3 2^3 3 4 5 6 7 8)_5,$$

$$I = (1^3 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6^1 (1^2 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6^2 (1^2 2^3 3 4 5 6 7 8)_4^3 \\ (1^2 2^2 3 4 5 6 7^2 8)_4^4 (1^2 2^2 3 4 5 6^2 7 8)_4^5 \dots$$

55. *Involuzione VIII.* Nella involuzione VI poniamo in linea retta i punti 2, 3, 8 e scambiamo fra loro le denominazioni dei punti 3 e 7 (ovvero prendiamo nella VII i punti 3, 4, 7 in linea retta e scambiamo le denominazioni dei punti 3, 4 e poi 3, 5); avremo una involuzione di 12° ordine, la quale possiederà:

un punto sestuplo 1,
 un punto quintuplo 2,
 quattro punti quadrupli 3, 4, 5, 6,
 due tripli 7, 8,
 ed uno unito 9,

e si avrà:

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1^3 2^2 3 4 5 6)_4, \\ I &= (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6^4 (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8)_5^2 (1^2 2^2 3 4^2 5 6 7 8)_4^3 \\ &\quad (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^4 (1^2 2^2 3 4 5 6^2 7 8)_4^5 (1^2 2^2 3 4 5^2 6 7 8)_4^6 \\ &\quad (1^2 2 3 4 5 6 8)_7^7 (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^8. \end{aligned}$$

56. *Involuzione IX.* Poniamo in quest'ultima involuzione, il punto 2 sulla retta (5 6)₁, sicchè i punti 2, 3, 4 sono diagonali nel quadrangolo 5, 6, 7, 8. Nasce così una involuzione di 11° ordine con:

un punto sestuplo 1,
tre punti quadrupli . . . 2, 3, 4,
quattro punti tripli . . . 5, 6, 7, 8,
ed uno unito 9,

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1^3 2 3 4)_3, \\ I &= (1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2)_6^4 (1^2 2 3^2 4^2 5 6 7 8)_4^2 (1^2 2^2 3 4^2 5 6 7 8)_4^3 \\ &\quad (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^4 (1^2 2 3 4 6 7 8)_3^5 (1^2 2 3 4 5 7 8)_3^6 \\ &\quad (1^2 2 3 4 5 6 8)_3^7 (1^2 2 3 4 5 6 7)_3^8. \end{aligned}$$

57. Trovata così la configurazione dei punti fondamentali, e la costruzione delle involuzioni di 3^a e 4^a classe, essendo già nota quella delle involuzioni di classe $\nu=0, 1, 2$, veniamo anche a conoscere tutte le involuzioni di ordine $n < 10$.

Ma notiamo, che se, oltre alle considerate, esistono altre involuzioni di 10° ordine, esse non possono essere che di 5^a classe, quindi non possiederanno curva punteggiata unita; perciò dovranno le curve fondamentali passare un numero pari di volte pei punti fondamentali cui corrispondono. Per questa osservazione si deduce facilmente, che vi sono due sole involuzioni di 5^a classe e 10° ordine:

la 1^a è di JONQUIÈRES, che rientra nel caso generale trattato dal sig. BERTINI;
la 2^a possiede:

due punti quintupli . . . 1, 2,
due punti quadrupli . . . 3, 4,
quattro punti doppi . . . 5, 6, 7, 8,
un punto semplice 9,
e quattro uniti 10, 11, 12, 13,

ed ha per Jacobiana:

$$I = (1^2 2^3 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5^4 (1^3 2^2 3^2 4^2 5 6 7 8 9)_5^2 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_4^3 \\ (1^2 2^2 3 4^2 5 6 7 8)_4^4 (1 2 3 4 6)_2^5 (1 2 3 4 5)_2^6 (1 2 3 4 8)_2^7 (1 2 3 4 7)_2^8 (1 2)_1^9.$$

Tale involuzione si costruisce per mezzo di due fasci in involuzione, uno di coniche $(1 2 3 4)_2$ nel quale devono essere coppie di elementi corrispondenti le:

$$(1 2 3 4 5)_2, \quad (1 2 3 4 6)_2; \quad (1 2 3 4 7)_2, \quad (1 2 3 4 8)_2; \\ (1 2 3 4 9)_2, \quad (1 2)_1(3 4)_1; \quad (1 3)_1(2 4)_1, \quad (1 4)_1(2 3)_1,$$

l'altro di cubiche $(1^2 2 3 4 5 7)_3$ in cui devono essere corrispondenti le coppie:

$$(1 7)_1(1 2 3 4 5)_2, \quad (1^2 2 3 4 5 7 6)_3; \quad (1 5)_1(1 2 3 4 7)_2, \quad (1^2 2 3 4 5 7 8)_3; \\ (1 2)_1(1 3 4 5 7)_2, \quad (1^2 2 3 4 5 7 9)_3; \quad (1 3)_1(1 2 4 5 7)_2, \quad (1 4)_1(1 2 3 5 7)_2.$$

Al fascio $(1^2 2 3 4 5 7)_3$ si può sostituire un altro analogo, sicchè questa stessa involuzione può essere generata in vari modi.

Ora possiamo dire di conoscere tutte le involuzioni (a punti fondamentali distinti) di ordine $n \equiv 10$.

Pisa, 27 novembre 1883.