Sopra alcuni sistemi di equazioni differenziali.

(*Nota del prof.* G. Ricci, *a Padova.*)

Se si estende la definizione data da Ampère (*) per l'integrale generale di una equazione differenziale ai sistemi di equazioni simultanee o no, la proprietà di ammettere integrali generali, la cui arbitrarietà sia rappresentata da un numero finito di costanti arbitrarie, non appartiene soltanto alle equazioni a derivate ordinarie, ma anche a quei sistemi completi (**) di equazioni a derivate parziali di ordine qualunque m, in cui tutte le derivate di ordine m^{simo} delle funzioni incognite sono o possono ottenersi espresse per le variabili indipendenti, per le funzioni stesse e per le derivate di ordine inferiore. È in fatti evidente che la differenza fra il numero delle equazioni di ordine qualunque $\mu > m$ che si possono ottenere colla differenziazione dalle *funzioni primitive* e dalle equazioni proposte è costante ed eguale a quello delle funzioni stesse e delle loro derivate di grado inferiore ad m.

Se si indica questo numero con N l'integrale generale del sistema proposto deve, secondo la citata definizione di Ampère, contenere N costanti arbitrarie.

Alcune ricerche, che spero poter pubblicare fra breve, mi hanno condotto ad un sistema di equazioni di 2° ordine con una sola funzione incognita della forma di quelli sopra indicati. Poichè dovrò valermi dei risultati relativi a questo caso, è sopra di esso che mi fermerò specialmente in questo breve studio,

(*) Pour qu'une intégrale soit générale il faut qu'il n'en résulte entre les variables, que l'on considère et leurs dérivées à l'infini que les relations exprimées par l'équation donnée et par les équations, qu'on en déduit en différentiant. — *Considérations générales sur les intégrales des équations aux différentielles partielles,* § 1[er]. Journal de l'École Polytechnique, vol. 10, pag. 550.

(**) Estendo quì in modo facilmente intelligibile e che sarà precisato una denominazione introdotta da Clebsch pei sistemi di equazioni a derivate parziali lineari di 1° ordine.

ma il metodo della dimostrazione renderà evidente la generalità delle conclusioni, a cui esso conduce. Indicando con n il numero delle variabili indipendenti, la determinazione dell'integrale generale dipende da quella di tutti gli integrali indipendenti di un sistema jacobiano di n equazioni a derivate parziali lineari omogenee di 1° ordine con $N+n$ variabili indipendenti. In esso poi le costanti arbitrarie entrano per guisa che determinandole convenientemente si possono far prendere alle funzioni incognite e alle loro derivate di ordine inferiore all'm^{simo} in un punto scelto ad arbitrio dello spazio ad n dimensioni valori arbitrarî.

Come vedremo, questi risultati possono essere utili anche per la integrazione di sistemi di equazioni, che non si possono immediatamente ridurre alla forma quì considerata.

Supponiamo che una funzione φ di n variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ contenga $n+1$ parametri $c_0, c_1, \ldots c_n$, rispetto a cui sia risolubile il sistema di equazioni

$$\varphi = p_0; \qquad \frac{d\varphi}{dx_r} = p_r \qquad (r=1, 2, \ldots n). \tag{1}$$

e la risoluzione dia

$$c_s = f_s(x_1, x_2, \ldots x_n; p_0; p_1, p_2, \ldots p_n) \qquad (s=0, 1, 2, \ldots n). \tag{2}$$

Se questi valori delle c si sostituiscono nelle espressioni

$$\frac{d^2\varphi}{dx_i dx_g} = a_{ig} \qquad (i, g=1, 2, \ldots n) \tag{3}$$

delle derivate seconde di φ si ottiene un sistema di $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni della forma

$$\frac{d^2\varphi}{dx_i dx_g} = A_{ig} \qquad (i, g=1, 2, \ldots n), \tag{a}$$

essendo identicamente

$$A_{ig} = A_{gi} \tag{b}$$

e le A_{ig} funzioni di $x_1, x_2, \ldots x_n; p_0; p_1, p_2, \ldots p_n$. Se per le p si intendono poste le espressioni (1) esse costituiscono un sistema di equazioni a derivate parziali di 2° ordine, a cui soddisfa φ, e poichè i valori delle p dati dalle (1) rendono identiche anche le (2), le equazioni

$$\frac{df_s}{dx_i} + \sum_g A_{ig} \frac{df_s}{dp_g} + p_i \frac{df_s}{dp_0} = 0, \qquad (s=0, 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

che si ottengono derivando queste identità e servendosi delle (1) ed (a), se non sono identità, dovranno contenere le p ed essere soddisfatte dai valori (1) di queste. E siccome le (2) ci dicono che almeno in un punto dello spazio ad n dimensioni ($x_1, x_2, \dots x_n$) i valori di φ e delle sue derivate prime sono arbitrarî, mentre invece le (4), se non fossero identità, ci darebbero una o più delle p in funzione delle altre e di $x_1, x_2, \dots x_n$, conviene concludere che $f_0, f_1, \dots f_n$ considerate come funzioni delle $2n+1$ variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots x_n$; $p_0, p_1, p_2, \dots p_n$ soddisfanno al sistema di n equazioni lineari ed omogenee

$$\frac{df}{dx_i} + \sum_g A_{ig} \frac{df}{dp_g} + p_i \frac{df}{dp_0} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n). \qquad (\alpha)$$

Siccome noi supponiamo le c indipendenti fra di loro questo sistema ammette dunque $n+1$ integrali indipendenti e però esso è completo e per la sua forma speciale jacobiano. Ciò del resto si verifica facilmente come segue.

Posto

$$(ig, l) = \frac{dA_{ig}}{dx_l} + \sum_1^n {}_h \frac{dA_{ig}}{dp_h} A_{hl} + p_l \frac{dA_{ig}}{dp_0} \qquad (i, g, l = 1, 2, \dots n) \qquad (5)$$

le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema (α) sia jacobiano consistono in ciò che si abbia identicamente

$$(ig, l) = (lg, i) \qquad (i, g, l = 1, 2, \dots n). \qquad (b_1)$$

Ora ricordando che le A_{ig} non sono che le a_{ig}, in cui per le c si sono sostituiti i loro valori dati dalle (2), si trova

$$(ig, l) = \frac{da_{ig}}{dx_l} + \sum_0^n {}_k \frac{da_{ig}}{dc_k} \left(\frac{df_k}{dx_l} + \sum_1^n {}_h A_{hl} \frac{df_k}{dp_h} + p_l \frac{df_k}{dp_0} \right)$$

e per le (3) e (4)

$$(ig, l) = \frac{d^3 \varphi}{dx_i \, dx_g \, dx_l} = (lg, i).$$

Reciprocamente se si ha un sistema di equazioni della forma (a), dove le A_{ig} sono funzioni delle variabili indipendenti, di φ e delle sue derivate prime tali che, fatte le posizioni (1), si abbiano le identità (b) e (b_1), il sistema (α), in cui si considerano le x e le p come indipendenti fra di loro è jacobiano. Esso ammette dunque $n+1$ integrali indipendenti $f_0, f_1, \dots f_n$, i quali eguagliati ad altrettante costanti arbitrarie daranno il sistema di equazioni (2) risolubile rispetto alle p e da cui trarremo quindi $p_0, p_1, \dots p_n$ espresse in funzione di $x_1, x_2, \dots x_n$ e delle costanti arbitrarie. Da esse si avrà pure

$$\frac{df_s}{dx_i} + \sum_0^n {}_g \frac{df_s}{dp_g} \frac{dp_g}{dx_i} = 0 \qquad (s = 0, 1, \dots n; \; i = 1, 2, \dots n)$$

e ricordando che le f_s soddisfanno alle (α), dal confronto di queste con quelle, che si hanno dalle (α) facendovi $f=f_s$,

$$p_i=\frac{d\,p_0}{d\,x_i};\qquad \frac{d\,p_g}{d\,x_i}=A_{ig}\qquad (i,\ g=1,\ 2,\ldots\ n).$$

Queste ci dicono che $p_1, p_2,\ldots p_n$ sono le derivate prime di una stessa funzione p_0 di $x_1, x_2,\ldots x_n$, la quale contiene $n+1$ costanti arbitrarie e soddisfa al sistema di equazioni (α). Le (2) ci dicono di più che si può sempre disporre di queste costanti in guisa che p_0 e le sue derivate prime prendano valori arbitrarî in un punto arbitrario dello spazio ad n dimensioni ($x_1, x_2,\ldots x_n$).

Se ora deriviamo la (a) rispetto ad x_l e per le derivate seconde di φ, che compariscono nel secondo membro, poniamo i valori dati dalle (a) stesse noi otteniamo

$$\frac{d^3\varphi}{d\,x_i\,d\,x_g\,d\,x_l}=(ig,\ l). \tag{c}$$

Dunque l'essere verificate le identità (b_1) importa che, come nel primo, anche nel secondo membro di queste equazioni si possa scambiare l'indice i coll'indice l, come le identità (b) permettono di ciò fare rispetto agli indici i e g nei secondi membri delle equazioni (a) e (c). Se le (a) e (b) non fossero identità, esse costituirebbero delle equazioni differenziali di 1° ordine, a cui dovrebbero soddisfare tutti gli integrali del sistema (a), e che sarebbero quindi da aggiungere al sistema stesso. Per questo noi chiameremo *completo* un sistema di equazioni della forma (a), quando i suoi secondi membri considerati come funzioni delle variabili *indipendenti* $x_1, x_2,\ldots x_n$; p_0; $p_1, p_2,\ldots p_n$ soddisfacciano alle equazioni (b) e (b_1).

Noi abbiamo dunque:

« Se un sistema di equazioni della forma (a), i cui secondi membri contengono oltre alle variabili indipendenti la funzione incognita e le sue derivate » prime, è completo, il suo integrale generale contiene $n+1$ costanti arbitrarie, » di cui si può disporre in modo che esso e le sue derivate prime prendano » in un punto qualunque dello spazio ad n dimensioni ($x_1, x_2,\ldots x_n$) valori » arbitrarî. »

« Di più in questo caso considerando le A_{ig} come funzioni delle $2n+1$ variabili indipendenti $x_1, x_2,\ldots x_n$; p_0; $p_1, p_2,\ldots p_n$ dopo aver fatte le posi» zioni (1) il sistema di equazioni (α) è jacobiano, e i suoi $n+1$ integrali in» dipendenti eguagliati ad altrettante costanti arbitrarie ci danno in $p_0, p_1,\ldots$ » p_n l'integrale generale del sistema (a) e le sue derivate. »

Se nelle φ le c_h invece che costanti si suppongono funzioni delle x, invece del sistema (1) si ha l'altro

$$\varphi = p_0, \qquad \frac{d\varphi}{dx_r} = p_r + \sum_0^n {}_h \frac{d\varphi}{dc_h}\frac{dc_h}{dx_r}, \qquad (r = 1, 2, \ldots n),$$

il quale coincide col sistema (1), se le c soddisfanno alle equazioni

$$\frac{d\varphi}{dc_h} = 0.$$

Ne viene che, determinato l'integrale generale del sistema (a) se ne trarranno degli integrali singolari, se per alcune o per tutte le c, per esempio per c_0, $c_1, \ldots c_m$ (con $m \leqq n$) si porranno in φ i valori dati per esse in funzione delle x e di c_{m+1}, $c_{m+2}, \ldots c_n$ dalle equazioni

$$\frac{d\varphi}{dc_0} = \frac{d\varphi}{dc_1} = \cdots = \frac{d\varphi}{dc_m} = 0,$$

che supponiamo risolubili rispetto a c_0, $c_1, \ldots c_m$.

Se i secondi membri delle equazioni (a) non contengono la funzione incognita, φ si ha dalle (5)

$$(ig, l) = \frac{dA_{ig}}{dx_l} + \sum_1^n {}_h \frac{dA_{ig}}{dp_h} A_{hl} \qquad (i, g, l = 1, 2, \ldots n)$$

e l'essere verificate le identità (b_1) importa che non soltanto il sistema (α), ma anche il sistema

$$\frac{df}{dx_i} + \sum_1^n {}_g A_{ig} \frac{df}{dp_g} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \qquad (\alpha_1)$$

che ha una variabile indipendente di meno, sia jacobiano. Esso ammette soltanto n integrali indipendenti e come si è fatto nel caso generale si dimostra che questi eguagliati ad altrettante costanti arbitrarie ci danno per p_1, $p_2, \ldots p_n$ le derivate prime di una stessa funzione φ, che soddisfa alle equazioni (a) e ne è l'integrale generale. In questo caso la determinazione di questo integrale si riduce dunque a quella degli n integrali indipendenti del sistema (α_1) e ad una quadratura così che una delle $n+1$ costanti arbitrarie riesce, come è naturale, semplicemente additiva.

Per farne poi una speciale applicazione darò ancora un cenno sull'uso di questo metodo per la integrazione di un sistema completo di equazioni simultanee a derivate parziali di primo ordine. Se m è il numero delle funzioni incognite $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m$, n quello delle variabili indipendenti un tale sistema è della forma

$$\frac{d\varphi_r}{dx_s} = A_s^{(r)}, \qquad (r = 1, 2, \dots m;\ s = 1, 2, \dots n) \qquad (\alpha_1)$$

dove le $A_s^{(r)}$ sono funzioni delle variabili indipendenti e di $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m$. Posto

$$\varphi_r = q_r \qquad (r = 1, 2, \dots m)$$

$$\{st,\ r\} = \frac{dA_s^{(r)}}{dx_t} + \sum_1^m{}_k \frac{dA_s^{(r)}}{dq_k} A_r^{(k)} \qquad (r = 1, 2, \dots m;\ s,\ t = 1, 2, \dots n),$$

le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema (a_1) sia completo consistono in ciò che, le $A_s^{(r)}$ considerate come funzioni delle $n+m$ variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots x_n$; $q_1, q_2, \dots q_m$ soddisfacciano al sistema di equazioni simultanee a derivate parziali lineari

$$\{st,\ r\} = \{ts,\ r\} \qquad (r = 1, 2, \dots m;\ s,\ t = 1, 2, \dots n). \qquad (b')$$

Queste stesse condizioni sono quelle necessarie e sufficienti, perchè il sistema di n equazioni lineari a derivate parziali con $n+m$ variabili indipendenti

$$\frac{df}{dx_r} + \sum_1^m{}_h A_r^{(h)} \frac{df}{dq_q} = 0 \qquad (A_1)$$

sia jacobiano e il *sistema integrale generale* delle equazioni (a_1) si ottiene eguagliando ad altrettante costanti arbitrarie gli m integrali indipendenti del sistema (A_1).

Se invece di nm equazioni simultanee, a derivate parziali di 1° ordine con m funzioni incognite ed n variabili indipendenti risolubili rispetto alle derivate prime di quelle, se ne hanno soltanto $nm-1$, che permettano di esprimere tutte le derivate, ad eccezione di una, che supporremo essere $\frac{d\varphi_1}{dx_1}$, per questa, per le φ e per le x, noi abbiamo un sistema di equazioni della forma (a_1), in cui manca quella, che corrisponde ad $r = 1$, $s = 1$ e in cui posto

$$\frac{d\varphi_1}{dx_1} = A,$$

le $A_r^{(s)}$ saranno funzioni delle x, delle q e di A. Se questa si potrà determinare in funzione delle x e delle q, per guisa che le equazioni (b') restino soddisfatte, noi potremo ridurre il sistema (a_1) alla forma (a) ed integrarlo col metodo dato per questo. E poichè in questa ipotesi si ha

$$\{st,\ r\} = \frac{dA_s^{(r)}}{dx_t} + \frac{dA_s^{(r)}}{dA}\frac{dA}{dx_t} + \sum_1^{(m)}{}_k \left(\frac{dA_s^{(r)}}{dq_k} + \frac{dA_s^{(r)}}{dA}\frac{dA}{dq_k}\right),$$

le derivate essendo prese col considerare le x, le q ed A come variabili indipendenti, si vede che il sistema di equazioni (b'), a cui deve soddisfare A è a derivate parziali di 1° ordine e lineare. Il numero delle equazioni è poi

$$N = \frac{m\,n(n-1)}{2}$$

e quelle delle variabili indipendenti dopo averle rese omogenee con un metodo noto

$$\mu = n + m + 1.$$

Nel caso di $m = 1$ ed $n = 2$ è $N = 1$, $\mu = 4$. Vediamo così che la integrazione delle equazioni a derivate parziali di primo ordine con due variabili indipendenti, si può far dipendere dalla determinazione dell'integrale generale di una equazione lineare ed omogenea con quattro variabili indipendenti e poi da quella dell'integrale comune di due equazioni pure lineari ed omogenee con tre variabili indipendenti.

Padova, giugno 1883.