Sul grado e sopra i discriminanti di una equazione algebrico differenziale del primo ordine fra quattro variabili e della sua primitiva completa algebrica

(*Nota di* Francesco d'Arcais, *a Padova.*)

---

1. Il chiarissimo prof. Felice Casorati in una importante Nota letta nell'adunanza 6 luglio 1876 del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere ed avente per titolo: *Sulle soluzioni singolari delle equazioni alle derivate parziali,* stabilisce il legame esistente tra il grado di una equazione algebrica alle derivate parziali di primo ordine fra tre variabili, che si suppone ammettere una primitiva completa algebrica, ed il grado di questa primitiva e tra i discriminanti delle medesime equazioni. Secondo il prof. Casorati, algebrico differenziale vien detta una equazione o legame fra più variabili quando tale legame si possa esprimere con un numero finito di operazioni algebriche da farsi sui simboli delle variabili e delle derivate parziali di una fra queste rispetto alle altre. Tale equazione si può sempre supporre ridotta a forma razionale intera rispetto a questi simboli. La primitiva completa è algebrica quando il legame che esiste tra le variabili e le costanti è pure espresso con un numero finito di operazioni algebriche a farsi su queste quantità. Il discriminante dell'equazione alle derivate parziali si intende preso considerando le derivate parziali, quello della primitiva completa considerando le costanti arbitrarie come le variabili della forma della quale si calcola il discriminante medesimo.

Sia

$$f_1(x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta)=0$$

o più semplicemente

$$f_1(\xi,\ \eta)=0, \tag{a}$$

ξ, η essendo le costanti arbitrarie, la primitiva completa algebrica; ovvero, posto $\frac{\xi}{\zeta}$, $\frac{\eta}{\zeta}$ in luogo di ξ, η,

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

essendo ora f una funzione razionale intera ed omogenea di ξ, η, ζ i cui coefficienti sono funzioni razionali intere di x, y, z.

Sia

$$F_1(p, q) = 0$$

la equazione algebrica alle derivate parziali, dove al solito $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, ottenuta eliminando le ξ, η tra la (a) e le sue derivate rapporto alla x e alla y; ovvero, posto $-\frac{p}{r}$, $-\frac{q}{r}$ in luogo di p, q

$$F(p, q, r) = 0$$

essendo allora F funzione razionale intera ed omogenea di p, q, r i cui coefficienti sono funzioni razionali intere di x, y, z.

Il prof. Casorati ha dimostrato che se n è il grado della primitiva rapporto alle costanti, n^2 è in generale il grado della equazione alle derivate parziali rapporto alle derivate, ma che tale grado può riuscire minore in casi particolari. A questo risultato Egli è pervenuto mediante una ingegnosa considerazione geometrica.

Relativamente al discriminante G della $F = 0$ e g della $f = 0$, prendendo in speciale esame il caso $n = 2$, dimostra che se l'equazione alle derivate parziali è del terzo o quarto grado rispetto alle derivate ed ammette una primitiva completa di secondo grado rispetto alle costanti arbitrarie il suo discriminante è nullo (*); ed in seguito, prendendo a considerare il caso in cui

$$f = c + l\eta + m\xi + n\xi\eta,$$

nel quale la $F = 0$ risulta di secondo grado nelle derivate, trova tra i discriminanti una relazione semplice ed importante, ed introduce nella equazione alle derivate parziali il discriminante g invece di una delle funzioni c, l, m,

---

(*) Questo teorema è contenuto nel seguente generale, che si può facilmente dimostrare col metodo del prof. Casorati.

Quando l'equazione a derivate parziali fra tre variabili è del grado n^2, $n^2 - 1$, $n^2 - 2, \ldots\ n + 1$, rispetto alle derivate ed ammette una primitiva completa di grado n rispetto alle costanti arbitrarie, il suo discriminante è nullo.

n (*), riducendola ad una forma che, insieme colla relazione tra G e g, è di fondamentale importanza per lo studio delle soluzioni singolari.

Nella presente Nota, con analoghi procedimenti, vengono studiate le equazioni algebrico differenziali di primo ordine fra quattro variabili, stabilendo la relazione tra i gradi della equazione e della primitiva completa, il modo col quale il grado della equazione alle derivate parziali può riuscire minore del normale, i casi nei quali G è zero identicamente, e determinando la relazione tra g e G in un caso particolare quando $n=2$.

2. Si abbia l'equazione

$$f_1(\xi, \eta, \zeta)=0, \tag{1}$$

dove ξ, η, ζ indicano delle costanti arbitrarie, f_1 è una funzione razionale intera di grado n delle ξ, η, ζ i cui coefficienti sono funzioni razionali intere delle variabili x, y, z, w.

Derivando la (1) rapporto alle variabili indipendenti x, y, z e posto

$$p=\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad q=\frac{\partial w}{\partial y}. \qquad r=\frac{\partial w}{\partial z}$$

(*) Un altro caso nel quale si arriva facilmente a stabilire la relazione tra i discriminanti g e G è il seguente:

Essendo $n=3$, sia

$$f=a\eta^2\zeta+b\zeta^2\xi+c\xi^2\eta+2l\xi\eta\zeta=0.$$

Allora le curve di terzo ordine (ξ, η, ζ coordinate)

$$f=0, \qquad f'_x=0, \qquad f'_y=0, \qquad f'_z=0$$

passano, per qualunque valore di x, y, z, pei punti

$$\xi=0, \quad \eta=0; \quad \eta=0, \quad \zeta=0; \quad \xi=0, \quad \zeta=0$$

in modo che risultano nel primo punto tangenti alla retta $\xi=0$, nel secondo alla $\eta=0$, nel terzo alla $\zeta=0$.

Potremo prendere

$$g=27abc+8l^3;$$

e posto

$$k=\begin{vmatrix} a & b & c & l \\ a_x & b_x & c_x & l_x \\ a_y & b_y & c_y & l_y \\ a_z & b_z & c_z & l_z \end{vmatrix}$$

dove a_x, a_y, a_z,... indicano le derivate di a,... rapporto ad x, y, z, si trova

$$G=k^6 g.$$

Anche qui si introduce facilmente g in vece di una delle a, b, c, l nella equazione alle derivate parziali.

otteniamo

$$\left.\begin{aligned} f'_{1x}+f'_{1w}p=0\\ f'_{1y}+f'_{1w}q=0\\ f'_{1z}+f'_{1w}r=0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dalle quali e dalla (1) eliminando ξ, η, ζ otteniamo una equazione della forma

$$F_1(p,\ q,\ r)=0 \tag{3}$$

dove F_1 è una funzione razionale intera di p, q, r i cui coefficienti sono funzioni razionali intere di x, y, z, w.

Ponendo poi $\frac{\xi}{v}$, $\frac{\eta}{v}$, $\frac{\zeta}{v}$ in luogo di ξ, η, ζ e $-\frac{p}{s}$, $-\frac{q}{s}$, $-\frac{r}{s}$ in luogo di p, q, r le equazioni (1), (2), (3) assumono la forma

$$f(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ v)=0 \tag{1$'$}$$

$$\left.\begin{aligned} \rho p=f'_x(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ v)\\ \rho q=f'_y(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ v)\\ \rho r=f'_z(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ v)\\ \rho s=f'_w(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ v) \end{aligned}\right\} \tag{2$'$}$$

$$F(p,\ q,\ r,\ s)=0; \tag{3$'$}$$

ed allora nella equazione (1)$'$ (primitiva completa algebrica) f è una funzione razionale intera ed omogenea di grado n delle ξ, η, ζ, v e nella (3)$'$ (equazione algebrica alle derivate parziali del primo ordine) F è razionale intera ed omogenea di un grado, che indicheremo con N, rispetto alle p, q, r, s.

Determiniamo N. Adottando il metodo geometrico così opportunamente tenuto dal prof. Casorati nella Nota citata, noi potremo supporre le ξ, η, ζ, v siano le coordinate omogenee dei punti di uno spazio (primo) e p, q, r, s le coordinate dei punti di un altro spazio (secondo).

Le formole (2)$'$ stabiliscono una corrispondenza tra i punti del primo spazio e del secondo per modo che alla superficie (1)$'$ del primo spazio corrisponde nel secondo la superficie (3)$'$. In questa guisa una equazione alle derivate parziali di primo ordine algebrica fra quattro variabili x, y, z, w stabilisce una corrispondenza fra i punti di due spazî a tre dimensioni; le x, y, z, w figurano come parametri nelle equazioni delle superficie corrispondentesi nei due spazî e nelle formole (2)$'$. Ora N è dato dal numero di punti nei quali la

$F=0$ viene incontrata da una retta qualunque

$$\begin{aligned} \alpha p+\beta q+\gamma r+\delta s&=0\\ \alpha_1 p+\beta_1 q+\gamma_1 r+\delta_1 s&=0, \end{aligned}$$

ovvero dal numero dei punti comuni nel primo spazio alle tre superficie, tutte di ordine n,

$$f(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ v)=0 \qquad \left.\begin{aligned} \alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z+\delta f'_w&=0\\ \alpha_1 f'_x+\beta_1 f'_y+\gamma_1 f'_z+\delta_1 f'_w&=0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Avremo dunque $N=n^3$, cioè: *il grado della equazione algebrico differenziale rispetto alle derivate parziali è uguale, in generale, alla terza potenza del grado della primitiva completa rispetto alle costanti.*

Ma il grado N potrà riuscire minore di n^3. Ciò avverrà se le superficie

$$f=0, \qquad f'_x=0, \qquad f'_y=0, \qquad f'_z=0, \qquad f'_w=0 \tag{5}$$

hanno in comune un certo numero di punti fissi, cioè indipendentemente dai valori di x, y, z, w, ovvero se queste medesime superficie passano tutte per una o più curve fisse, perchè allora ciò pure avrà luogo per le superficie (4), qualunque siano i valori di x, y, z, w, α, β...

3. Data la $f=0$, per calcolare il discriminante G della $F=0$, seguendo un procedimento analogo a quello tenuto nella Nota già citata, si vede come basti eliminare ξ, η, ζ, v dalla equazione

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} & \dfrac{\partial f}{\partial \eta} & \dfrac{\partial f}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial f'_y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial f'_y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial f'_y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial f'_y}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial f'_z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial f'_z}{\partial \eta} & \dfrac{\partial f'_z}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial f'_z}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial f'_w}{\partial \xi} & \dfrac{\partial f'_w}{\partial \eta} & \dfrac{\partial f'_w}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial f'_w}{\partial v} \end{vmatrix}=0$$

e dalle tre equazioni ottenute da questa scrivendo successivamente f'_z, f'_w, f'_x; f'_w, f'_x, f'_y; f'_x, f'_y, f'_z in luogo di f'_y, f'_z, f'_w.

4. Vediamo ora come si comporta G in relazione coi gradi di F e f.

Osserviamo che i generi (*) delle superficie $f=0$, $F=0$ univocamente corrispondenti, sono uguali.

(*) Vedi Salmon: *Analytische Geometrie des Raumes deutsch bearbeitet von Fiedler*. 1874, pag. 505, 2.ª parte e Noether: *Curve multiple di superficie algebriche.* Annali di Matematica, tomo V, serie II, pag. 173.

Quando $n=1$ non si hanno discriminanti. Per $n=2$, il genere di $f=0$ è zero, e la $F=0$, generalmente di grado 8, dovrà pure essere di genere zero, per il che occorre che essa possieda curve doppie o punti tripli; dicasi lo stesso se la $F=0$ risulterà di 7°, 6°, 5°, 4° grado. Se poi, per avere le (5) cinque punti in comune, la $F=0$ sarà di grado 3, allora essa non potrà avere alcuna retta doppia, ma solo potrà avere dei punti doppi. Se la $F=0$ risulterà di secondo grado, non avrà punto doppio. Da ciò concludiamo:

Quando una equazione a derivate parziali tra quattro variabili di primo ordine è di grado ottavo, settimo,.... quarto rispetto alle derivate ed ammette una primitiva completa di secondo grado rispetto alle costanti arbitrarie, il suo discriminante è identicamente nullo. Se l'equazione è di terzo grado (*) il suo discriminante potrà non essere nullo. Se l'equazione è di secondo grado esso è diverso da zero, se tale è quello della $f=0$.

Quando si ha in mira lo studio comparativo dei discriminanti g e G è d'uopo partirci da una $f=0$ priva di quelle singolarità per le quali sia nullo il g. Così, come per $n=2$, quando $n=3$ dovremo supporre zero il genere della superficie $f=0$; ed allora finchè $N>3$ il discriminante G risulterà sempre nullo dovendo la $F=0$ essere di genere zero.

Rammentando che le superficie di ordine n che hanno in comune

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-3$$

punti passano tutte per altri

$$n^3+3-\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

punti fissi, vediamo che potremo solamente supporre le (5) passino al più per $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-4$ punti fissi.

Questo numero essendo 16 per $n=3$, avremo $N=27-16=11$. Perciò, quando $n=3$, non si ottiene alcun caso utile per la comparazione di g e G finchè ci si limita a supporre che le (5) abbiano solamente dei punti in comune.

Ma, come abbiamo accennato, le (5) possono avere in comune una linea.

(*) Calcolando il G pel caso particolare in cui

$$f=a\xi\eta+b\zeta\xi+cv\xi+d\eta\zeta+g\eta v-(a+b+c+d+g)\zeta v$$

e nel quale perciò le (5) passano pei quattro vertici del tetraedro di riferenza e pel punto unità $\xi=\eta=\zeta=v$ e conseguentemente F e di terzo grado, si trova $G=0$.

È noto che se tre superficie di ordine n_1, n_2, n_3 passano per una curva C_m d'ordine m con h punti doppi apparenti, esse si tagliano in altri

$$n_1 n_2 n_3 - m(n_1 + n_2 + n_3 - m - 1) - 2h$$

punti non situati sopra C_m (*). Per cui supponendo che le superficie (5) abbiano in comune una tal curva C_m, le (4) che pure passeranno per la medesima curva si segheranno in altri

$$n^3 - m(3n - m - 1) - 2h$$

punti e conseguentemente

$$N = n^3 - m(3n - m - 1) - 2h.$$

Per $n = 2$ avremo $N = 2$ se si suppone che le superficie (5) passino per una conica. Allora G è diverso da zero. Questo caso è studiato in appresso.

Quando $n = 3$ si verifica facilmente che N è sempre superiore a 3, e quindi $G = 0$, finchè le (5) passano per una curva comune C_1 o C_2 o C_3 o C_4 o C_5. Quando hanno in comune una C_6 con 6 punti doppi apparenti allora avremo $N = 3$ e questo caso si presta allo studio comparativo dei discriminanti. Una tal curva C_6 la si otterrebbe ad es. considerando la intersezione di due superficie di secondo e quarto ordine che si incontrano inoltre in una conica, oppure colla intersezione di due superficie di ordine secondo e quinto che si intersecano inoltre in una C_4 con due punti doppi apparenti.

5. Prendiamo ora a considerare, quando $n = 2$, il caso nel quale le (5) abbiano una conica comune, e determiniamo la relazione tra g e G.

Supponendo la conica comune sia la

$$v = 0, \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0,$$

prendiamo

$$f = l(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + dv^2 + 2a\xi v + 2b\eta v + 2c\zeta v = 0.$$

Il discriminante della f è

$$\begin{vmatrix} l & 0 & 0 & a \\ 0 & l & 0 & b \\ 0 & 0 & l & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = l^2(ld - a^2 - b^2 - c^2),$$

(*) Vedi Salmon, opera citata, pag. 115.

e potremo quindi prendere

$$g = l\,d - a^2 - b^2 - c^2.$$

La $F = 0$ si otterrebbe molto semplicemente in questo caso e per determinarne il discriminante G osserviamo che il determinante del paragrafo 3 diviene ora

$$\begin{vmatrix} l\xi + av & l\eta + bv & l\zeta + cv & a\xi + b\eta + c\zeta + dv \\ l_y\xi + a_y v & l_y\eta + b_y v & l_y\zeta + c_y v & a_y\xi + b_y\eta + c_y\zeta + d_y v \\ l_z\xi + a_z v & l_z\eta + b_z v & l_z\zeta + c_z v & a_z\xi + b_z\eta + c_z\zeta + d_z v \\ l_w\xi + a_w v & l_w\eta + b_w v & l_w\zeta + c_w v & a_w\xi + b_w\eta + c_w\zeta + d_w v \end{vmatrix} = 0$$

indicando con $l_y\ l_z\ l_w \ldots$ le derivate di $l, \ldots$ rapporto ad y, z, w ovvero sviluppando

$$\left.\begin{aligned} -|a\,b_y\,c_z\,l_w|(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - |b\,c_y\,d_z\,l_w|\,\xi v + |a\,c_y\,d_z\,l_w|\,\eta v \\ -|a\,b_y\,d_z\,l_w|\,\zeta v + |a\,b_y\,c_z\,d_w|\,v^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

dove abbiamo posto

$$|a\,b_y\,c_z\,l_w| = \begin{vmatrix} a & b & c & l \\ a_y & b_y & c_y & l_y \\ a_z & b_z & c_z & l_z \\ a_w & b_w & c_w & l_w \end{vmatrix} \text{ ecc.}$$

Poniamo ora

$$k = \begin{vmatrix} a & b & c & d & l \\ a_x & b_x & c_x & d_x & l_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y & l_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z & l_z \\ a_w & b_w & c_w & d_w & l_w \end{vmatrix};$$

e

$$\chi = k^4 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \lambda \\ \alpha_x & \beta_x & \gamma_x & \delta_x & \lambda_x \\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y & \delta_y & \lambda_y \\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z & \delta_z & \lambda_z \\ \alpha_w & \beta_w & \gamma_w & \delta_w & \lambda_w \end{vmatrix}$$

sia il determinante ad elementi reciproci del determinante k.

La equazione (6) allora assume l'aspetto

$$-\delta_x(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\alpha_x\xi v+\beta_x\eta v+\gamma_x\zeta v-\lambda_x v^2=0. \tag{7}$$

Applicando lo stesso calcolo alle altre tre equazioni di cui è parola nel paragrafo 3, otteniamo:

$$\begin{aligned}
-\delta_y(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\alpha_y\xi v+\beta_y\eta v+\gamma_y\zeta v-\lambda_y v^2&=0\\
-\delta_z(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\alpha_z\xi v+\beta_z\eta v+\gamma_z\zeta v-\lambda_z v^2&=0\\
-\delta_w(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\alpha_w\xi v+\beta_w\eta v+\gamma_w\zeta v-\lambda_w v^2&=0.
\end{aligned}$$

Rimane ora da eliminare ξ, η, ζ, v tra queste tre equazioni e la (7). Per far ciò ricaviamo da esse i valori di $\frac{\xi^2}{v^2}+\frac{\eta^2}{v^2}+\frac{\zeta^2}{v^2}$ e di $\frac{\xi}{v}$, $\frac{\eta}{v}$, $\frac{\zeta}{v}$ ed esprimiamo che la prima quantità è uguale alla somma dei quadrati delle altre tre. Avremo così

$$-\begin{vmatrix}\alpha_x & \beta_x & \gamma_x & \delta_x\\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y & \delta_y\\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z & \delta_z\\ \alpha_w & \beta_w & \gamma_w & \delta_w\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha_x & \beta_x & \gamma_x & \lambda_x\\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y & \lambda_y\\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z & \lambda_z\\ \alpha_w & \beta_w & \gamma_w & \lambda_w\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\beta_x & \gamma_x & \delta_x & \lambda_x\\ \beta_y & \gamma_y & \delta_y & \lambda_y\\ \beta_z & \gamma_z & \delta_z & \lambda_z\\ \beta_w & \gamma_w & \delta_w & \lambda_w\end{vmatrix}^2$$

$$-\begin{vmatrix}\alpha_x & \gamma_x & \delta_x & \lambda_x\\ \alpha_y & \gamma_y & \delta_y & \lambda_y\\ \alpha_z & \gamma_z & \delta_z & \lambda_z\\ \alpha_w & \gamma_w & \delta_w & \lambda_w\end{vmatrix}^2-\begin{vmatrix}\alpha_x & \beta_x & \delta_x & \lambda_x\\ \alpha_y & \beta_y & \delta_y & \lambda_y\\ \alpha_z & \beta_z & \delta_z & \lambda_z\\ \alpha_w & \beta & \delta_w & \lambda_w\end{vmatrix}^2=0$$

ovvero

$$\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\frac{\partial\chi}{\partial\delta}-\left(\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\right)^2-\left(\frac{\partial\chi}{\partial\beta}\right)^2-\left(\frac{\partial\chi}{\partial\gamma}\right)^2=0$$

cioè

$$k^6(l\,d-a^2-b^2-c^2)=0.$$

Il primo membro di questa equazione è il discriminante G ed avremo quindi

$$G=k^6 g.$$

Mediante g si esprimono poi f e F colle formole

$$\begin{aligned}
lf&=l^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+d\,l+2\,a\,l\,\xi+2\,b\,l\,\eta+2\,c\,l\,\zeta\\
&=(a+l\xi)^2+(b+l\eta)^2+(c+l\zeta)^2+g
\end{aligned}$$

nella quale abbiamo posto $v=1$, e

$$Fd^2 = 4g \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2g & b & c & d \\ g_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ g_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ g_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}^2$$

$$+ \begin{vmatrix} 2g & a & c & d \\ g_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ g_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\ g_3 & a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2g & a & b & d \\ g_1 & a_1 & b_1 & d_1 \\ g_2 & a_2 & b_2 & d_2 \\ g_3 & a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}^2$$

indicando con a_1 b_1 c_1 g_1 d_1 le derivate di a b c g d rapporto ad x considerando w come funzione di x, con a_2, b_2,... e con a_3, b_3,... le analoghe rapporto ad y e a z.

Padova, marzo 1883.