Sulla riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea e di un fascio di forme bilineari.

(*Di* Onorato Nicoletti, *a Pisa.*)

Si debbono al Weierstrass le condizioni necessarie e sufficienti perchè due fasci di forme bilineari in due serie di n variabili

$$A\ (u\ v) - \omega B\ (u\ v) = \sum_{1}^{n}{}_{ik} (a_{ik} - \omega b_{ik})\, u_i\ v_k,$$

$$A'(u'\ v') - \omega B'(u'\ v') = \sum_{1}^{n}{}_{ik} (a'_{ik} - \omega b'_{ik})\, u'_i\, v'_k,$$

tali che i determinanti dei due fasci:

$$D(\omega) = |\, a_{ik} - \omega b_{ik}\,|, \quad D'(\omega) = |\, a'_{ik} - \omega b'_{ik}\,|, \quad (i,\ k = 1, \ldots, n)$$

non siano identicamente nulli, siano equivalenti; perchè esistano cioè due trasformazioni lineari, non degeneri, una delle u nelle u', l'altra delle v nelle v', che portino una forma qualunque $A - \omega B$ del primo fascio nella *corrispondente* $A' - \omega B'$ (collo stesso valore di ω) dell'altro. È perciò necessario e sufficiente che i due determinanti $D(\omega)$, $D'(\omega)$ abbiano gli stessi divisori elementari (*).

La dimostrazione del Weierstrass ha carattere trascendente e consiste essenzialmente nel ridurre, con un'opportuna trasformazione lineare delle variabili, il fascio $A - \omega B$ ad una forma *canonica, la quale dipende soltanto*

(*) Per tutto quel che riguarda la teoria dei divisori elementari, come anche per la ricchissima bibliografia sulla questione, rimandiamo al libro del Muth: *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* (Leipzig, Teubner, 1899) ed all'articolo del Meyer: *Invariantentheorie* nel 1.° volume dell'Enciclopedia Matematica (p. 327-334).

dai divisori elementari di primo grado del determinante $D(\omega)$. Questo dimostra il teorema di Weierstrass e dà insieme una trasformazione lineare sulle variabili che porta il fascio $A - \omega B$ nell'equivalente $A' - \omega B'$.

Le condizioni, che il teorema di Weierstrass assegna come necessarie e sufficienti per l'equivalenza di due fasci di forme bilineari, sono evidentemente *razionali*. E questo è ben naturale, in quanto il problema di riconoscere se due fasci siano equivalenti ed in questo caso la determinazione di tutte le trasformazioni dell'un fascio nell'altro possono ricondursi alla discussione di un sistema di equazioni lineari, dipendenti razionalmente dai due fasci (*); il problema stesso è quindi essenzialmente razionale.

Era quindi naturale il cercare del teorema stesso una dimostrazione razionale. Una tale dimostrazione fu data dal Frobenius (**) e si fonda essenzialmente su un procedimento di Kronecker per la riduzione delle matrici (che pone in evidenza i divisori elementari delle matrici stesse) e sul calcolo simbolico delle forme bilineari. Anche la dimostrazione del Frobenius dà una trasformazione particolare di un fascio nell'altro (supposti equivalenti); ma, quando si voglia venire fino alle applicazioni numeriche, è facile persuadersi che il procedimento del Frobenius è tutt'altro che pratico.

Le altre dimostrazioni *razionali* del teorema di W. non si scostano essenzialmente da quella di Frobenius; ricorderemo soltanto, a questo riguardo, una notevole Memoria del Landsberg (***), nella quale il teorema di W. è dimostrato, riconducendo la teoria dei fasci di forme bilineari a quella dei sistemi fondamentali (secondo la denominazione di Landsberg) di funzioni in un determinato campo di razionalità. Anche la dimostrazione di Landsberg si fonda (nel caso generale) sul procedimento di riduzione delle matrici, dato dal Kronecker; per la sua applicazione pratica valgono quindi le stesse osservazioni che per la dimostrazione del Frobenius.

Lo studio accurato della dimostrazione di W. mi ha portato facilmente a concludere che in essa dimostrazione la parte trascendente ed anche la parte irrazionale del procedimento è soltanto apparente, e si può dare alla dimostrazione stessa una veste del tutto razionale. *Basta per questo assumere come campo fondamentale di razionalità, invece che il campo totale* (come nella

(*) Cf. Muth, l. c., pag. 67.
(**) Cf. Muth, l. c., pag. 61.
(***) Landsberg, *Ueber Fundamentalsysteme und bilineare Formen* (Giornale di Crelle, Vol. 116, pag. 331-349).

dimostrazione del W.) *un campo determinato R* (del resto arbitrario) *il quale contenga i coefficienti delle due forme A, B.* La decomposizione, nel campo R, del determinante $D(\omega)$ del fascio nei suoi divisori elementari conduce allora, in modo affatto naturale, alla considerazione di un sistema notevole di congruenze, i cui moduli sono i divisori elementari del determinante $D(\omega)$; e dagli elementi stessi del determinante $D(\omega)$ si hanno agevolmente le soluzioni più generali delle congruenze stesse. Dai coefficienti delle soluzioni (polinomiali) di queste congruenze si trae una trasformazione lineare sulle variabili del fascio, la quale riduce il fascio stesso ad una forma che può dirsi ancora *canonica*, in quanto dipende esclusivamente dai divisori elementari di $D(\omega)$ nel campo R.

Le stesse considerazioni conducono inoltre ad infinite di tali forme canoniche; e, fissata una qualunque tra esse, si ha subito la trasformazione *più generale* delle variabili che riduce il fascio alla forma assegnata. Ne segue il teorema di W. e si ha insieme la più generale trasformazione delle variabili che porta l'uno nell'altro due fasci equivalenti.

È da osservare anche che l'operare entro un campo determinato R di razionalità, invece che nel campo totale, lungi dal complicare, conferisce alla trattazione una grande semplicità, non disgiunta, a mio avviso, da una certa eleganza; si è infatti costretti in tal guisa a rinunciare a qualunque calcolo di carattere particolare, e a fondare invece le proprie deduzioni sui primi e più semplici teoremi della teoria delle funzioni razionali intere (senza il sussidio del teorema fondamentale dell'algebra).

Il problema della riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea (nel campo dato R) è contenuto in quello più generale della riduzione di un fascio di forme bilineari; la sua trattazione diretta è però molto più semplice. Ne ho trattato distesamente nel primo capitolo, arrivando fino a dare due esempî numerici, i quali dimostrano chiaramente la praticità del metodo esposto.

Avrei voluto trattare in un terzo capitolo il caso di Kronecker, quando il determinante del fascio di forme considerato è identicamente nullo, ed in un quarto della riduzione a forma canonica di un fascio di forme quadratiche, od emisimmetriche, o di un fascio che contenga insieme una forma simmetrica ed una emisimmetrica. La mole, già notevole, della Memoria presente mi ha persuaso a rimandarne la trattazione, insieme con altre applicazioni della teoria generale qui svolta, ad un'altra prossima Memoria.

CAPITOLO PRIMO.

Riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea.

Identità fondamentali.

1. Si abbia un determinante di ordine n:

$$D = |c_{ik}|, \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{1}$$

i cui elementi pensiamo come altrettante variabili indipendenti. Abbiamo identicamente, introducendo i simboli δ_{ik} di Kronecker:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik} \frac{\partial D}{\partial c_{lk}} = \delta_{il} D, \quad (i,\ l = 1,\ 2, \ldots,\ n;\ \delta_{ii} = 1,\ \delta_{il} = 0, \text{ per } i \neq l), \tag{2}$$

donde, derivando rispetto ad una qualunque, c_{pq}, tra le c, otteniamo:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik} \frac{\partial^2 D}{\partial c_{lk}\, \partial c_{pq}} + \delta_{ip} \frac{\partial D}{\partial c_{lq}} = \delta_{il} \frac{\partial D}{\partial c_{pq}}, \quad (i,\ l,\ p,\ q = 1,\ 2, \ldots,\ n),$$

e derivando ancora:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik} \frac{\partial^3 D}{\partial c_{lk}\, \partial c_{p_1q_1}\, \partial c_{p_2q_2}} + \delta_{ip_1} \frac{\partial^2 D}{\partial c_{lq_1}\, \partial c_{p_2q_2}} + \delta_{ip_2} \frac{\partial^2 D}{\partial c_{lq_2}\, \partial c_{p_1q_1}} = \delta_{il} \frac{\partial^2 D}{\partial c_{p_1q_1}\, \partial c_{p_2q_2}},$$

$$(i,\ l,\ p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2 = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Così seguitando, otteniamo in generale l'identità, che si dimostra subito per induzione:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n{}_k\, c_{ik} \frac{\partial^{\alpha+1} D}{\partial c_{lk}\, \partial c_{p_1q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}} + \\ &+ \sum_1^\alpha{}_\beta\, \delta_{ip_\beta} \frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{lq_\beta}\, \partial c_{p_1q_1} \ldots \partial c_{p_{\beta-1}q_{\beta-1}}\, \partial c_{p_{\beta+1}q_{\beta+1}} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}} = \\ &= \delta_{il} \frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{p_1q_1}\, \partial c_{p_2q_2} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}}, \quad (i, l, p_1,\ q_1, \ldots,\ p_\alpha,\ q_\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha < n). \end{aligned}\right\} \tag{2)'$$

Insieme con questa si ha ancora:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{1}^{n}{}_i\, c_{ik} \frac{\partial^{\alpha'+1} D}{\partial c_{im}\, \partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_{\alpha'} q_{\alpha'}}} + \\
&+ \sum_{1}^{\alpha}{}_\beta\, \delta_{k q_\beta} \frac{\partial^{\alpha'} D}{\partial c_{p_\beta m}\, \partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_{\beta-1} q_{\beta-1}}\, \partial c_{p_{\beta+1} q_{\beta+1}} \ldots \partial c_{p_{\alpha'} q_{\alpha'}}} = \\
&= \delta_{km} \frac{\partial^{\alpha'} D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_{\alpha'} q_{\alpha'}}}, \quad (k, m, p_1, q_1, \ldots, p_{\alpha'}, q_{\alpha'} = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha' < n)
\end{aligned}\right\} \qquad (\overline{2})_{\alpha'}$$

e da questa si ottiene l'identità notevolissima (*)

$$\left.\begin{aligned}
\Lambda_{\alpha\alpha'} = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, c_{ik} \frac{\partial^{\alpha+1} D}{\partial c_{lk}\, \partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}} \cdot \frac{\partial^{\alpha'+1} D}{\partial c_{im}\, \partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_{\alpha'} q_{\alpha'}}} &= \\
= \frac{\partial^{\alpha'+1} D}{\partial c_{lm}\, \partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_{\alpha'} q_{\alpha'}}} \cdot \frac{\partial^{\alpha} D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}} &\ \text{per } \alpha \leqq \alpha' \\
= \frac{\partial^{\alpha+1} D}{\partial c_{lm}\, \partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}} \cdot \frac{\partial^{\alpha'} D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_{\alpha'} q_{\alpha'}}} &\ \text{per } \alpha \geqq \alpha', \\
(l, m, p_1, q_1, \ldots, p_\alpha, q_\alpha, \ldots, p_{\alpha'}, q_{\alpha'} = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha, \alpha' < n). &
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

In particolare ne segue:

$$\Lambda_{\alpha\alpha'} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{per } \alpha > \alpha',\ m = q_{\alpha'+1}, \ldots, q_\alpha, \\ \text{per } \alpha < \alpha',\ l = p_{\alpha+1}, \ldots, p_{\alpha'}. \end{array} \right. \qquad (3')$$

Sia invece $\alpha = \alpha'$, e si ponga, per uniformità di scrittura, $l = p_{\alpha+1}$, $m = q_{\alpha+1}$; si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}
\Lambda_{\alpha\alpha} = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, c_{ik} \frac{\partial^{\alpha+1} D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}\, \partial c_{p_{\alpha+1} k}} \, \frac{\partial^{\alpha+1} D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}\, \partial c_{i q_{\alpha+1}}} &= \\
= \frac{\partial^{\alpha} D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}} \cdot \frac{\partial^{\alpha+1} D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}\, \partial c_{p_{\alpha+1} q_{\alpha+1}}}&, \\
(\alpha < n;\ p_1, q_1, \ldots, p_\alpha, q_\alpha, p_{\alpha+1}, q_{\alpha+1} = 1, 2, \ldots, n).&
\end{aligned}\right\} \qquad (3'')$$

2. Gli elementi c_{ik} di D siano ora funzioni lineari intere di una variabile ω:

$$c_{ik} = a_{ik} - \omega\, b_{ik}, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (4)$$

(*) Si ricordi che il determinante D è una funzione lineare intera degli elementi di ogni sua linea e quindi è ad es.

$$\frac{\partial^2 D}{\partial c_{pq}\, \partial c_{p'q'}} = 0 \text{ per } p = p' \text{ o } q = q'.$$

tali che *il determinante di ordine n :*

$$B = |b_{ik}|, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}'$$

sia diverso da zero (*). In questa ipotesi il determinante D, che indicheremo anche con

$$D(\omega) = |a_{ik} - \omega b_{ik}| \tag{1}^*$$

sarà un polinomio in ω del grado n.

Sia ora R un campo determinato di razionalità, che contenga le a_{ik}, b_{ik} (e nel quale valgano le leggi fondamentali del campo razionale) e sia $P = P(\omega)$ un divisore *primo* in R (variabile) di $D(\omega)$, del grado g in ω. Al divisore P corrisponderanno un certo numero $h \leq n$ di divisori elementari di $D(\omega)$:

$$P^{e_1}, P^{e_2}, \ldots, P^{e_h}, \quad (\text{con } e_1 \geqq e_2 \geqq \cdots \geqq e_h \geqq 1) \text{ (**)} \tag{5}$$

e, posto in generale

$$l_i = e_{i+1} + e_{i+2} + \cdots + e_h, \quad \text{per} \quad 0 \leq i < h, \tag{6}$$

si avrà per ogni minore di ordine $n - \alpha$ di $D(\omega)$:

$$\frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ P^{l_\alpha}), \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, h-1); \tag{7}_\alpha$$

vi sarà inoltre un minore di ordine $n - \alpha$ *regolare* (***) rispetto a P; esisterà cioè almeno un sistema particolare $(s_1 t_1, s_2 t_2, \ldots, s_\alpha t_\alpha)$, per il quale insieme colla $(7)_\alpha$ si avrà anche:

$$\frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{s_1 t_1} \ldots \partial c_{s_\alpha t_\alpha}} \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ P^{l_\alpha + 1}); \tag{8}_\alpha$$

ricordando inoltre che qualunque minore di $D(\omega)$ regolare rispetto a P contiene dei minori (di qualunque ordine) ancora regolari rispetto a P, si può supporre (il che noi faremo) che i successivi sistemi $(s_1 t_1 \ldots s_\alpha t_\alpha)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, h)$ siano ciascuno compreso nel successivo.

(*) Potremmo supporre soltanto $D(\omega)$ non identicamente nullo; ma, in questa ipotesi, con una trasformazione lineare sulla variabile ω possiamo sempre ridurci al caso superiore.

(**) Cf. MUTH, l. c., pag. 7.

(***) Cf. MUTH, l. c., pag. 6, 7.

Cambiamo ora nella $(2)_\alpha$ α in $\alpha - 1$; dalle $(7)_{\alpha-1}$ avremo le congruenze:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik} \frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{ik}\, \partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_{\alpha-1} q_{\alpha-1}}} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, P^{l_{\alpha-1}})\,;$$

ma, per la $(7)_\alpha$, si può porre

$$\frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{ik}\, \partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_{\alpha-1} q_{\alpha-1}}} = P^{l_\alpha} . X^{(\alpha)}_{lk, p_1 q_1, \ldots, p_{\alpha-1} q_{\alpha-1}}, \tag{9$_\alpha$}$$

essendo le $X^{(\alpha)}$ dei polinomî in ω; sarà quindi anche

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik} X^{(\alpha)}_{lk, p_1 q_1, \ldots, p_{\alpha-1} q_{\alpha-1}} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, P^{r_\alpha}), \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, h;\ i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10$_\alpha$}$$

Facendo $\alpha = 1, 2, \ldots, h$ e prendendo $(p_1 q_1, \ldots, p_{\alpha-1} q_{\alpha-1}) = (s_1 t_1,\ s_2 t_2, \ldots, s_{\alpha-1} t_{\alpha-1})$, $l = s_\alpha$, otteniamo h sistemi di funzioni che indichiamo semplicemente con $\bar{X}^{(\alpha)}_k$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, h;\ k = 1, 2, \ldots, n)$. Dimostriamo che:

La matrice di questi sistemi

$$|\bar{X}^{(\alpha)}_k| \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, h;\ k = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

ha (mod P) *la caratteristica* h.

Consideriamo infatti in questa matrice il minore delle colonne $t_1, t_2, \ldots, t_h$; esso si riduce al prodotto degli elementi principali, ciascuno dei quali per le $(8)_\alpha$, $(9)_\alpha$ è $\not\equiv 0$ (mod P). Ne segue senz'altro la nostra asserzione.

Sistemi e matrici canoniche per un divisore primo (e per le righe) di $D(\omega)$.

3. Sia sempre P un divisore, primo nel campo R, di $D(\omega)$, di grado g. Insieme coi numeri $e_1, e_2, \ldots, e_h$ (di Weierstrass) ad esso relativi conviene introdurre anche i cosidetti numeri del Predella (*). Sia perciò h_1 il numero degli esponenti e_i che sono maggiori di uno, h_2 quello di essi numeri maggiori di $2, \ldots$, in generale sia h_t il numero degli esponenti e_i maggiori di t. Abbiamo

(*) Cf. ad es.: Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazî*, pag. 99 (Pisa, Spoerri, 1907).

evidentemente:

$$t \leq e_1 - 1\,;\ h_i \geqq h_{i+1}\,;\ h + h_1 + h_2 + \cdots + h_{e_1 - 1} = e_1 + e_2 + \cdots + e_h = l_0\,. \qquad (6)^*$$

Consideriamo ora le n congruenze:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik}\, X_k \equiv 0 \pmod{P^l}\,, \quad (\text{con } 0 < l \leq e_1), \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n)\,; \qquad (12)$$

è chiaro che le $X_k^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ h_{l-1})$, date dalle $(9)_\alpha$ costituiscono un sistema di h_{l-1} soluzioni indipendenti di queste congruenze, *la cui matrice ha* (mod P) *la caratteristica* h_{l-1}; questa matrice è infatti una parte della matrice (11).

Siamo in tal guisa condotti a studiare le soluzioni (polinomiali) delle congruenze (12).

Siano perciò, in generale, $X_k^{(1)}$, $X_k^{(2)}, \ldots,$ $X_k^{(r)}$ r soluzioni comunque determinate di esse congruenze, la cui matrice $|X_k^{(\rho)}|$ $(k = 1,\ 2, \ldots,\ n;\ \rho = 1,\ 2, \ldots,\ r)$ abbia (mod P) la caratteristica r.

La matrice stessa può allora, in infiniti modi (*), completarsi in una quadrata M, di ordine n, diversa da zero (mod P). Componiamo il determinante $D(\omega)$ colla matrice M. Il determinante prodotto

$$D'(\omega) = D(\omega)\,.\,(M)$$

per le (12) ha r colonne $\equiv 0 \pmod{P^l}$, e quindi *ha r divisori elementari uguali ad una potenza di P, il cui esponente non è minore di l.* Diciamo infatti l_ρ l'esponente della potenza di P che divide tutti i minori di ordine $n - \rho$ di $D'(\omega)$; sarà $l_r \geqq 0$ e poichè ogni minore di ordine $n - r + i$ $(i > 0)$ di $D'(\omega)$ contiene almeno una colonna $\equiv 0 \pmod{P^l}$, potrà svilupparsi per gli elementi di questa colonna; si ha quindi $l_{r-i} \geqq l_{r-i+1} + l$, donde $e_{r-i+1} \geqq l$, il che per $i = 1,\ 2, \ldots,\ r$ dimostra l'asserto.

Si dica ora M' la matrice di ordine n, definita rispetto al modulo P dalla congruenza (**)

$$(M)\,(M') \equiv (\delta_{ik}) \pmod{P} \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

(*) Se è ad es. $|X_k^{(\rho)}| \not\equiv 0$ (mod P) $(k,\ \rho = 1,\ 2, \ldots,\ r)$ basta porre

$$X_k^{(r+i)} = \delta_{k,r+i}\,(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n - r).$$

(**) La congruenza simbolica $(M)\,(M') \equiv (\delta_{ik})$ (mod P) equivale alle n^2 congruenze lineari

$$\sum_1^n{}_r\, m_{ir}\, m'_{rk} \equiv \delta_{ik} \pmod{P} \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

essendo m_{ir}, m'_{rk} gli elementi delle due matrici (M) ed (M'): e queste congruenze determiil determinante $D(\omega)$ si otterrà componendo (mod P) $D'(\omega)$ colla matrice (M'); sarà cioè:

$$D(\omega) \equiv D'(\omega) \, . \, (M') \pmod P$$

e di qui risulta che, *rispetto al modulo* P, i due determinanti $D(\omega)$, $D'(\omega)$ hanno gli stessi divisori elementari. Deve essere dunque $r \leqq h_{l-1}$. D'altra parte si hanno h_{l-1} soluzioni delle (12), la cui matrice ha (mod P) la caratteristica h_{l-1}. Abbiamo così il teorema:

Le congruenze

$$\sum c_{ik} X_k \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad (1 \leqq l \leqq e_1)$$

ammettono h_{l-1} *soluzioni (indipendenti) la cui matrice ha* (mod P) *la caratteristica* h_{l-1}.

Qualunque matrice di soluzioni di esse congruenze ha (mod P) *una caratteristica non maggiore di* h_{l-1} (*).

4. Si abbia ora un sistema di $h\,n$ funzioni

$$X_k^{(\rho)} \; (k = 1, 2, \ldots, n; \; \rho = 1, 2, \ldots, h) \tag{13}$$

che abbia le proprietà seguenti:

a) *Per* $h_l < \rho \leqq h_{l-1}$ (con $l = e_1, e_1 - 1, \ldots, 1$; $h_{e_1} = 0$, $h_0 = h$) *si abbia:*

$$\sum_1^n {}_k\, c_{ik} X_k^{(\rho)} \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{15}$$

b) *la matrice*

$$| X_k^{(\rho)} | \quad (\rho = 1, 2, \ldots, h; \; k = 1, 2, \ldots, n)$$

abbia (mod P) *la caratteristica* h.

Un tal sistema si dirà *un sistema canonico di soluzioni relativo al divisore* P *ed alle righe di* $D(\omega)$.

Le $\overline{X}_k^{(\alpha)}$, date dalle $(9)_\alpha$ del n.° 2, formano, ad es., per la (11), un tale sistema.

---

nano in modo *unico* (mod P) gli elementi m'_{rk}, in quanto $(M) = (m_{ik}) \equiv\!\!\!|\; 0 \pmod P$. (Cfr. per il teorema fondamentale sulla teoria delle congruenze lineari rispetto ad un modulo primo: KRONECKER, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 1er Band. S. 396-404 (Lipsia, Teubner, 1901)).

(*) Il teorema dimostrato vale evidentemente qualunque sia il grado in ω dei polinomî c_{ik}.

Sia il sistema (13) un sistema canonico per il divisore P (e per le righe) di $D(\omega)$, e sia X_k ($k=1, 2,\dots, n$) una qualunque soluzione delle congruenze

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik} X_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, P^l), \quad (0 < l \leq e_1), \quad (i = 1, 2,\dots, n). \tag{12$_l$}$$

La matrice

$$|X_k^{(1)}, X_k^{(2)},\dots, X_k^{(h_{l-1})}, X_k|, \quad (k = 1, 2,\dots, n)$$

ha allora (mod P) la caratteristica h_{l-1}; si ha quindi una relazione della forma

$$A\, X_k + \sum_1^{h_{l-1}}{}_r\, \theta_r\, X_k^{(r)} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, P),$$

con $A \not\equiv 0$ (mod P). Determinando A' dalla congruenza

$$A\, A' \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ P),$$

e ponendo $\lambda_r \equiv A'\,\theta_r$ (mod P), si avrà anche:

$$X_k \equiv \sum_1^{h_{l-1}}{}_r\, \lambda_r\, X_k^{(r)} \ (\mathrm{mod}\, P), \quad (k = 1, 2,\dots\, n)$$

cioè sarà:

$$X_k = \sum_1^{h_{l-1}}{}_r\, \lambda_r\, X_k^{(r)} + P X'_k, \quad (k = 1, 2,\dots, n)$$

e, per $l > 1$, le X'_k soddisfano evidentemente alle congruenze

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik}\, X'_k \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ P^{l-1}). \tag{12$_{l-1}$}$$

Inversamente sia X'_k una soluzione (arbitraria) delle $(12)_{l-1}$ e si ponga, indicando colle λ_r dei polinomî arbitrarî di grado $g-1$ in ω:

$$X_k \equiv \sum_1^{h_{l-1}}{}_r\, \lambda_r\, X_k^{(r)} + P\, X'_k \,(\mathrm{mod}\, P^l), \quad (k = 1, 2,\dots, n); \tag{15}$$

le X_k danno evid. una soluzione delle congruenze $(12)_l$. Ne segue che la *espressione generale di una tale soluzione X_k per le soluzioni di un sistema canonico è:*

$$X_k \equiv \sum_1^{h_{l-1}}{}_r\, M_r(\omega)\, X_k^{(r)}(\omega) + \sum_1^{l-1}{}_\varrho\, P^{l-\varrho} \sum_{h_\varrho+1}^{h_{\varrho-1}}{}_{t_\varrho}\, M_{t_\varrho}(\omega)\, X_k^{t_\varrho}(\omega) \ (\mathrm{mod}\ P^l), \tag{16}$$

indicando le $M_r(\omega)$, $M_{t_\varrho}(\omega)$ dei polinomî arbitrarî in ω. La (16) si riduce infatti alla (15) per $l = 1$; quando inoltre si ammetta per il valore $l - 1$, in virtù della (15) stessa, vale anche per il valore l; è dunque vera in generale.

Nella (16) ogni polinomio $M_r(\omega)$ $(r = 1, \ldots, h_{l-1})$ è determinato solo rispetto al modulo P^l, ogni polinomio $M_{t_\rho}(\omega)$ rispetto al modulo P^ρ. Ne segue subito che: *la soluzione più generale delle congruenze* $(12)_l$ *dipende da*

$$g\left\{ l \,.\, h_{l-1} + \sum_{1}^{l-1}{}_\rho\, \rho\,(h_{\rho-1} - h_\rho) \right\} = g\,(h + h_1 + \ldots + h_{l-1})$$

parametri arbitrarî.

Una soluzione delle congruenze $(12)_l$ si dirà infine *primitiva*, quando non tutte le X_k siano $\equiv 0 \pmod P$.

Dalla (16) si ha subito che la soluzione X_k sarà primitiva allora ed allora soltanto che non tutte le $M_r(\omega)$ $(r = 1, 2, \ldots, h_{l-1})$ siano $\equiv 0 \pmod P$.

5. Si abbiano ora due sistemi canonici:

$$X_k^{(\rho)}, \quad \overline{X}_k^{(\sigma)}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h)$$

relativi al divisore P (ed alle righe) di $D(\omega)$. Avremo allora, per le (16):

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}_k^{(\sigma)} \equiv \sum_{1}^{h_{l-1}}{}_r\, M_r^{(\sigma)}(\omega)\, X_k^{(r)}(\omega) + \sum_{1}^{l-1}{}_\rho\, P^{l-\rho} \sum_{h_\rho+1}^{h_{\rho-1}}{}_{t_\rho}\, M_{t_\rho}^{(\sigma)}(\omega) X_k^{t_\rho}(\omega) \pmod{P^l}, \\ \text{per } h_l < \sigma \leq h_{l-1}, \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, h;\ l = e_1, \ldots, 1) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

e quindi anche:

$$|\overline{X}_k^{(\sigma)}| \equiv |X_k^{(r)}| \,.\, |M_r^{(\sigma)}|, \pmod P \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ r, \sigma = 1, 2, \ldots, h) \tag{18}$$

quando, per $h_l < \sigma \leq h_{l-1}$, si supponga $M_r^{(\sigma)} \equiv 0 \pmod P$ per $r > h_{l-1}$. Ne segue:

$$|M_r^{(\sigma)}| \mathrel{\equiv\!\!|\!\!\equiv} 0 \pmod P, \quad (r, \sigma = 1, 2, \ldots, h) \tag{19}$$

o ciò che è lo stesso, sarà:

$$|M_r^{(\sigma)}| \mathrel{\equiv\!\!|\!\!\equiv} 0 \pmod P \quad (\text{per } r, \sigma = h_l + 1, \ldots\ h_{l-1},\ l = 1, 2, \ldots, e_1). \tag{19*}$$

Inversamente nelle (17) si prendano le $M_r^{(\sigma)}(\omega)$ affatto arbitrarie $\pmod{P^l}$, colla condizione ulteriore che valgan le (19) (o le (19)*); dalla (18) si ottiene che la matrice $|\overline{X}_k^{(\sigma)}|$ ha $\pmod P$ la caratteristica h, e quindi le $\overline{X}_k^{(\sigma)}$ formano un sistema canonico relativo al divisore P ed alle righe di $D(\omega)$.

Ne segue evidentemente:

Il sistema canonico più generale relativo al divisore P (ed alle righe) di $D(\omega)$ dipende da

$$g\sum_{1}^{e_1}{}_l\,(h_{l-1}-h_l)(h_{l-1}+h_{l-2}+\cdots+h_1+h)=g\sum_{0}^{e_1-1}{}_i\,h_i^2=g\,H,\quad (H=\sum h_i^2)\qquad(20)$$

parametri arbitrarî.

In quanto precede si ha inoltre un mezzo per dedurre da un particolare sistema canonico per il divisore P il più generale di tali sistemi. E poichè come abbiamo visto, le funzioni $\bar{X}_k^{(\alpha)}$, definite dalle (9) del n.° 2 formano un tale sistema, da queste, mediante le (17), *abbiamo il modo di ottenere il più generale sistema canonico relativo al divisore P ed alle righe di $D(\omega)$.*

Del numero gH dei parametri, da cui dipende il più generale sistema canonico per il divisore P, si può dare un'espressione notevole per i numeri l_i. Si ha infatti, come si riconosce facilmente

$$l_i=\sum_{0}^{e_1-1}{}_t\,(h_t-i),\quad (i=0,1,\ldots,h-1)$$

dovendosi nella somma del secondo membro tener conto soltanto dei termini non negativi; è dunque:

$$H=\sum_{0}^{e_1-1}{}_i\,h_i^2=\sum_{0}^{e_1-1}{}_i\,\{h_i+2(1+2+\cdots+(h_i-1))\}=l_0+2(l_1+l_2+\cdots+l_{h-1})=L$$

e quindi:

Il sistema canonico più generale relativo al divisore P (ed alle righe) di $D(\omega)$ dipende da

$$g\,L=g\{l_0+2(l_1+l_2+\cdots+l_{h-1})\}\qquad(20)^*$$

parametri arbitrarî.

6. Sia $X_k^{(\rho)}$ $(k=1,2,\ldots,n;\ \rho=1,2,\ldots,h)$ un sistema canonico, relativo al divisore P e si ponga:

$$X_k^{(\rho)}\equiv\sum_{0}^{g-1}{}_u\sum_{0}^{l-1}{}_r\,x_k^{\rho,rg+u}\,\omega^u\,P^r\ (\mathrm{mod}\,P^l),\ (\text{per }\rho=h_l+1,\ldots,h_{l-1};\ l=e_1,\ldots,1).\qquad(13)'$$

Abbiamo il teorema notevole:

La matrice dei coefficienti di un tal sistema

$$\left.\begin{array}{c} \| x_k^{\rho, t_\rho} \| \\ (\rho = 1, 2, \ldots, h;\ t_\rho = 0, 1, \ldots, g\,l - 1 \text{ per } h_l < \rho \leq h_{l-1};\ l = e_1, \ldots, 1) \end{array}\right\} \quad (21)$$

ha la caratteristica $g\,(h + h_1 + \cdots + h_{e_1 - 1}) = g\,l_0$ (è cioè diversa da zero).

La dimostrazione del teorema enunciato si trae in modo molto semplice dalle osservazioni che seguono.

a) Una soluzione delle congruenze (12) (con $l \leq e_1$) nella quale tutte le X_k abbiano un grado minore di $g\,l - 1$ (o, come diremo, una soluzione di grado minore di $g\,l - 1$) è identicamente nulla.

Infatti, in tale ipotesi, il primo membro di ciascuna delle (12) ha un grado minore di $g\,l$; le congruenze stesse possono dunque aver luogo soltanto quando sia:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik}\, X_k = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

cioè, poichè $D(\omega) \mid = 0$, quando sia $X_k = 0$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

b) Sia:

$$P = \omega^g + a_1\,\omega^{g-1} + \cdots + a_{g-1}\,\omega + a_g$$

e, detto $\Lambda(\omega)$ un polinomio arbitrario di grado $g - 1$:

$$\Lambda(\omega) = \alpha_0\,\omega^{g-1} + \alpha_1\,\omega^{g-2} + \cdots + \alpha_{g-1},$$

poniamo:

$$\omega^u\,\Lambda(\omega) \equiv \beta_u\,\omega^{g-1} + \cdots \pmod{P}, \quad (u = 0, 1, \ldots, g - 1);$$

si ha facilmente

$$\beta_u \equiv \alpha_u + \lambda_{u,1}\,\alpha_{u-1} + \cdots + \lambda_{u,u}\,\alpha_0, \quad (u = 0, 1, \ldots, g - 1)$$

indicando le λ delle costanti opportune. Ne segue che possono determinarsi le α in guisa che le $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{g-1}$ assumano valori assegnati a piacere.

Veniamo ora a dimostrare il teorema enunciato.

Si abbia, se è possibile, una relazione non identicamente nulla della forma:

$$\sum_1^h{}_\rho \sum_0^{e_\rho g - 1}{}_{t_\rho} \lambda_{\rho, t_\rho}\, x_k^{\rho, t_\rho} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ e_\rho = l \text{ per } h_l < \rho \leq h_{l-1}) \qquad (23)$$

e poniamo, colle μ arbitrarie:

$$X_k \equiv \sum_1^h{}_\rho \sum_0^{e_\rho - 1}{}_{r'} \sum_0^{g-1}{}_{u'} \mu_{\rho, r'g + u'}\, \omega^{u'}\, P^{e_1 - 1 - r'} . X_k^{(\rho)} \equiv \sum_1^h{}_\rho\, M_\rho(\omega)\, P^{e_1 - e_\rho}\, X_k^{(\rho)}, \pmod{P^{e_1}}$$

con

$$M_\rho(\omega) \equiv \sum_{0}^{e_\rho-1}{}_{v'} \sum_{0}^{g-1}{}_{u'} \mu_{\rho,v'g+u'}\, \omega^{u'} P^{e_\rho-v'-1} \pmod{P^{e_\rho}};$$

le X_k danno evidentemente una soluzione delle congruenze

$$\sum_{1}^{n}{}_k c_{ik} X_k \equiv 0 \pmod{P^{e_1}}, \quad (i = 1, 2,\ldots, n),$$

nella quale il coefficiente di P^{e_1-1} è congruo $(\mathrm{mod}\, P)$ a

$$\sum_{1}^{h}{}_\rho \sum_{0}^{e_\rho-1}{}_v \sum_{0}^{g-1}{}_{u,u'} \mu_{\rho,vg+u}\, x_k^{\rho,vg+u'}\, \omega^{u+u'};$$

quindi, se si determinano le $\mu_{\rho,vg+u}$ in guisa che si abbia per tutti i valori di ρ e v (come è possibile per b)):

$$\omega^{u'} \sum_{0}^{g-1}{}_u \mu_{\rho,vg+u}\, \omega^u \equiv \lambda_{\rho,vg+u'} \cdot \omega^{g-1} + \cdots \pmod{P}, \quad (u' = 0, 1,\ldots, g-1)$$

il coefficiente di $\omega^{g-1} P^{e_1-1}$ nella X_k sarà

$$\sum_{1}^{h}{}_\rho \sum_{0}^{e_\rho g-1}{}_{t_\rho} \lambda_{\rho,t_\rho}\, x_k^{\rho,t_\rho};$$

cioè per la (23) ogni X_k avrà un grado minore di $g\,e_1 - 1$. Si avrebbe dunque $X_k = 0$, e quindi, poichè le $X_k^{(\rho)}$ $(\rho = 1, 2,\ldots, h)$ sono indipendenti, dovrebbe aversi $M_\rho(\omega) = 0$ $(\rho = 1, 2,\ldots, h)$ e quindi $\mu_{\rho,t_\rho} = 0$. Ne seguirebbe allora anche, (per a)) $\lambda_{\rho,t_\rho} = 0$, contro l'ipotesi che la (23) non sia identicamente nulla.

Il teorema enunciato è così dimostrato.

7. Esprimiamo che le $X_k^{(\rho)}$ soddisfano alle congruenze:

$$\sum_{1}^{n}{}_k c_{ik} X_k^{(\rho)} \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad (\text{per } h_l < \rho \leqq h_{l-1},\ l = e_1,\ldots, 1). \tag{14}$$

Abbiamo subito nelle x_k^{ρ,t_ρ} le equazioni lineari:

$$\sum_{1}^{n}{}_k a_{ik}\, x_k^{\rho,vg+u} - \sum_{1}^{n}{}_k b_{ik}\, x_k^{\rho,vg+u-1} + a_{g-u} \sum_{1}^{n}{}_k b_{ik}\, x_k^{\rho,(v+1)g-1} = 0, \tag{24}$$

e come scriveremo brevemente (convenendo di porre $x_k^{\rho,-1} = 0$, per $\rho = 1, 2,\ldots, h$;

$k = 1, 2, \ldots, n)$;

$$\left.\begin{array}{l} A_i(x^{\rho, rg+u}) - B_i(x^{\rho, rg+u-1}) + a_{g-u} B_i(x^{\rho, (r+1)g-1}) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, h;\ u = 0, 1, \ldots, g-1; \\ v = 0, 1, \ldots, l-1 \text{ per } h_l < \rho \leq h_{l-1};\ l = e_1, \ldots, 1). \end{array}\right\} \qquad (24)^*$$

Inversamente queste equazioni, insieme colla condizione che la matrice

$$| x_k^{\varrho, t_\varrho} |$$

sia diversa da zero, definiscono i coefficienti di un sistema canonico relativo al divisore P ed alle righe di $D(\omega)$.

Infatti, per le (24), le funzioni $X_k^{(\varrho)}$ definite dalle (13)$'$ soddisfano alle congruenze (14); la loro matrice ha poi (mod P) la caratteristica h; infatti l'ipotesi contraria porterebbe che una di esse soluzioni si esprimerebbe linearmente ed omogeneamente per le altre (mod P) e quindi i suoi coefficienti si esprimerebbero in ugual modo per i coefficienti delle altre soluzioni; la matrice $| x_k^{\varrho, t_\varrho} |$ avrebbe quindi una caratteristica minore di $g\, l_0$.

La matrice dei coefficienti di un sistema canonico per il divisore P e per le righe di $D(\omega)$ si dirà brevemente *una matrice canonica per il divisore P e per le righe di $D(\omega)$*.

Dal n.° 5 si ha evidentemente il modo di costruire la più generale di queste matrici. Essa dipende, come il più generale sistema canonico, da $g\,H = g\,L$ parametri arbitrarî.

8. Consideriamo alcuni casi particolari notevoli.

a) Sia, per il divisore P che si considera, $h = 1$, cioè $D(\omega)$ abbia un solo divisore elementare uguale ad una potenza di P, sia P^e. Le congruenze:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik} X_k \equiv 0 \ (\text{mod } P^e), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ammettono in questo caso una soluzione unica, determinata a meno di un fattore arbitrario di proporzionalità (mod P^e), la quale si ottiene (n.° 2) prendendo le X_k proporzionali ai complementi algebrici $\dfrac{\partial D(\omega)}{\partial c_{rk}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ di una riga generica, la r, di $D(\omega)$, che non siano tutti $\equiv 0$ (mod P); si ha cioè, indicando con $M(\omega)$ un polinomio arbitrario (mod P^e):

$$X_k \equiv M(\omega) \,.\, \frac{\partial D(\omega)}{\partial c_{rk}} \ (\text{mod } P^e), \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Una tal soluzione dipende evidentemente (come viene anche dalla teoria generale) da $g e = g l_0$ parametri arbitrarî.

b) Il divisore P abbia il primo grado e sia

$$P = \omega - \omega_0 . \tag{22'}$$

Le congruenze (12) si scrivono

$$\sum_1^n {}_k \, c_{ik} X_k \equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, (\omega - \omega_0)^l), \quad (0 < l \leq e_1); \tag{12'}$$

e se le:

$$X_k^{(\varrho)} \equiv \sum_0^{l-1} {}_t \, x_k^{\varrho, t} (\omega - \omega_0)^t \; (\mathrm{mod}\, (\omega - \omega_0)^l) \text{ per } h_l < \rho \leq h_{l-1} \;\; (l = 1, 2, \ldots, e_1) \tag{13'}$$

formano un sistema canonico per il divisore P e per le righe di $D(\omega)$, le $x_k^{\varrho, t}$ soddisferanno alle equazioni lineari:

$$\left.\begin{array}{c} A_i (x^{\varrho, t}) - \omega_0 B_i (x^{\varrho, t}) - B_i (x^{\varrho, t-1}) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, n;\; t = 1, 2, \ldots, l \text{ per } h_{l-1} < \rho \leq h_{l-1}). \end{array}\right\} \tag{24'}$$

Poniamo nelle (17) del n.º 5 che dànno le relazioni tra due sistemi canonici $X_k^{(\varrho)}$, $\bar{X}_k^{(\sigma)}$, oltre le (13)' ancora:

$$M_r^{(\sigma)} (\omega) \equiv \sum_0^{l-1} {}_u \, \mu_{ru}^{(\sigma)} (\omega - \omega_0)^u \; (\mathrm{mod}\, P^l), \quad M_{t_\varrho}^{(\sigma)} (\omega) \equiv \sum_0^{\varrho-1} {}_u \, \mu_{t_\varrho, u}^{(\sigma)} (\omega - \omega_0)^u \; (\mathrm{mod}\, P^\rho),$$

$$\text{per } h_l < \sigma \leq h_{l-1}, \quad \rho < l; \quad t_\rho = h_\rho + 1, \ldots, h_{\rho-1}$$

$$\bar{X}_k^{(\sigma)} \equiv \sum_0^{l-1} {}_w \, \bar{x}_k^{\sigma, w} (\omega - \omega_0)^w \; (\mathrm{mod}\, P^l), \text{ per } h_l < \sigma \leq h_{l-1}; \tag{$\overline{13}'$}$$

le $\mu_{ru}^{(\sigma)}$, $\mu_{t_\varrho u}^{(\sigma)}$ saranno costanti affatto arbitrarie, e dalle (17) si otterranno le identità:

$$\bar{x}_k^{\sigma, w} = \sum_1^{h_{l-1}} {}_r \sum_{\substack{u, v \\ (u+v=w)}} \mu_{ru}^{(\sigma)} x_k^{r, v} + \sum_1^{l-1} {}_\rho \sum_{h_\varrho+1}^{h_{\varrho-1}} {}_{t_\varrho} \sum_{\substack{u', v' \\ (u'+v'=w+\varrho-l)}} \mu_{t_\varrho u'}^{(\sigma)} x_k^{l_\varrho, v'} \quad \text{per } h_l < \sigma \leq h_{l-1} \tag{17'}$$

le quali danno le relazioni tra due matrici canoniche $|x_k^{r, v}|$, $|\bar{x}_k^{\sigma, w}|$ relative ambedue al divisore $\omega - \omega_0$. Le (19)* del n.º 5 danno poi semplicemente che i determinanti $|\mu_{r0}^{(\sigma)}|$ $(r, \sigma = h_l + 1, \ldots, h_{l-1};\; l = e_1 - 1, \ldots, 1)$ debbono essere diversi da zero.

Osserviamo infine che dalle (17)' si ha, per gli elementi di una matrice canonica:

$$x_k^{\rho,t} = \frac{1}{t!}\left\{\frac{d^t}{d\,\omega^t} X_k^{(\rho)}\right\}_{\omega=\omega_0}, \quad (t = 0, 1, \ldots, l-1 \text{ per } h_l < \rho \leq h_{l-1};\ l = e_1, \ldots, 1). \quad (13)''$$

c) Un caso particolare molto semplice, che dovremo considerare nel seguito, si ha supponendo $P = \omega$, $h = n$.

È allora evidentemente $a_{ik} = 0$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ e, per le nostre ipotesi, $|b_{ik}| \neq 0$. In questo caso le congruenze (12) diventano identiche ed il sistema canonico o la matrice canonica più generale per il divisore ω è data dal più generale determinante (con elementi costanti) di ordine n diverso da zero.

d) Consideriamo il caso in cui il divisore P abbia il 2.° grado, e sia

$$P = \omega^2 + a_1\,\omega + a_2. \qquad (22)''$$

Ci limitiamo a scrivere in modo esplicito le eq.^{ni} (24)* del n.° 7. Esse si scrivono:

$$\left.\begin{array}{l} A_i(x^{\rho,2t}) \quad - B_i(x^{\rho,2t-1}) + a_2\, B_i(x^{\rho,2t+1}) = 0 \\ A_i(x^{\rho,2t+1}) - B_i(x^{\rho,2t}) \quad + a_1\, B_i(x^{\rho,2t+1}) = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ t = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1;\ \rho = 1, 2, \ldots, h). \end{array}\right\} (24)''$$

Matrici canoniche per le righe di $D(\omega)$.

9. Riprendiamo le considerazioni generali, e siano $P_1, P_2, \ldots, P_s$ s divisori primi *diversi* di $D(\omega)$, dei gradi $g_1, g_2, \ldots, g_s$, e sia:

$$P_\alpha = \omega^{g_\alpha} + a_1^{(\alpha)}\,\omega^{g_\alpha - 1} + \cdots + a_{g_\alpha}^{(\alpha)}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, s). \qquad (22)_\alpha$$

Indichiamo coll'indice α (o P_α) gli elementi tutti relativi al divisore P_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$ e consideriamo s matrici canoniche relative ad essi divisori ed alle righe di $D(\omega)$:

$$|x_k^{\rho,t}(P_\alpha)|, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, s) \qquad (21)_\alpha$$

e riuniamole in una matrice di n righe e di

$$g_1\, l_0^{(1)} + g_2\, l_0^{(2)} + \cdots + g_s\, l_0^{(s)} = \sum_1^s{}_\alpha\, g_\alpha\, l_0^{(\alpha)}$$

colonne. Abbiamo il teorema:

Una tale matrice ha la caratteristica: $\sum_1^s{}_\alpha\, g_\alpha\, l_0^{(\alpha)}$.

Si abbia infatti, se è possibile, tra gli elementi di ogni riga di essa matrice una relazione che scriviamo brevemente:

$$\Lambda_1 (x_k (P_1)) + \Lambda_2 (x_k (P_2)) + \cdots + \Lambda_s (x_k (P_s)) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (\Lambda)$$

essendo le Λ_α delle combinazioni lineari omogenee (non tutte identicamente nulle) degli elementi delle colonne corrispondenti alla matrice relativa a P_α.

Come al n.° 6, costruiamo dal sistema canonico relativo al divisore P_α quella soluzione $X_k^{(\alpha)}$ delle congruenze:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik}\, X_k \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ P_\alpha^{e_1^{(\alpha)}}),$$

nella quale il coefficiente del termine di grado $g_\alpha e_1^{(\alpha)} - 1$ è dato dalla $\Lambda_\alpha (x_k (P_\alpha))$. Poniamo inoltre:

$$\Pi = P_1^{e_1^{(1)}} \,.\, P_2^{e_1^{(2)}} \ldots P_s^{e_1^{(s)}}; \quad \Pi_\alpha = \frac{\Pi}{P_\alpha^{e_1^{(\alpha)}}}, \quad (\alpha = 1, \ldots, s); \quad X_k = \sum_1^s{}_\alpha\, \Pi_\alpha\, X_k^{(\alpha)};$$

si avrà:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik}\, X_k \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ P_\alpha^{e_1^{(\alpha)}}), \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, s),$$

e poichè i divisori primi $P_1, P_2, \ldots, P_s$ sono diversi, anche:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik}\, X_k \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \Pi).$$

Ma, per la (Λ), nella X_k è nullo il coefficiente di $\omega^{\sum_1^s{}_\alpha g_\alpha e_1^{(\alpha)} - 1}$; si ha quindi identicamente (n.° 6, a):

$$X_k = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ne segue, rispetto al modulo $P_\alpha^{e_1^{(\alpha)}}$, poichè Π_α è primo con P_α:

$$X_k^{(\alpha)} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ P_\alpha^{e_1^{(\alpha)}}), \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, s),$$

e, poichè la $X_k^{(\alpha)}$ ha un grado minore di $g_\alpha\, e_1^{(\alpha)}$, anche:

$$X_k^{(\alpha)} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, s)$$

cioè (se non è Λ_α identicamente nulla) le soluzioni del sistema canonico relativo al divisore P_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$) sarebbero dipendenti, il che non è. È dunque $\Lambda_\alpha = 0$, ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$), il che dimostra il teorema.

10. Siano ora $P_1, P_2, \ldots, P_s$ tutti i divisori primi distinti di $D(\omega)$; sarà $g_1 l_0^{(1)} + g_2 l_0^{(2)} + \cdots + g_s l_0^{(s)} = n$; e riunendo s matrici canoniche relative ad essi divisori (ed alle righe di $D(\omega)$) avremo una matrice quadrata di ordine n, la quale, per quanto precede, è diversa da zero. Una tale matrice diremo *una matrice canonica per le righe di* $D(\omega)$.

Le (9) del n.° 2, nelle quali si faccia successivamente $P = P_1, P_2, \ldots, P_s$, dànno il modo di costruire dagli elementi del determinante $D(\omega)$ una particolare matrice canonica per le sue righe; le considerazioni del n.° 5 danno poi il modo di costruire da una matrice canonica particolare la più generale di esse matrici e dimostrano insieme che la più generale matrice canonica per le righe di $D(\omega)$ dipende da:

$$N = \sum_1^s{}_\alpha H^{(\alpha)} g_\alpha = \sum_1^s{}_\alpha g_\alpha \{ l_0^{(\alpha)} + 2 (l_1^{(\alpha)} + l_2^{(\alpha)} + \cdots + l_{n_\alpha - 1}^{(\alpha)}) \} \tag{25}$$

parametri arbitrarî.

Si può dare del numero N una espressione notevolissima. Si dica $D_r(\omega)$ il massimo comun divisore dei minori di ordine $n-r$ di $D(\omega)$ e sia n_r il suo grado; sarà $D_r = P_1^{l_r^{(1)}} P_2^{l_r^{(2)}} \ldots P_s^{l_r^{(s)}}$ e quindi anche:

$$n_r = \sum_1^s{}_\alpha g_\alpha l_r^{(\alpha)}, \ (r = 0, 1, \ldots, n; \ n_0 = n).$$

La (25) si scrive allora semplicemente:

$$N = n_0 + 2 (n_1 + n_2 + n_3 \cdots + n_n). \tag{25*}$$

Si ha così il teorema:

La più generale matrice canonica per le righe del determinante $D(\omega)$ *dipende da*

$$N = n_0 + 2 (n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_n)$$

parametri arbitrarî, indicando con n_r ($r = 0, 1, \ldots, n$) *il grado in* ω *del massimo comun divisore dei minori di ordine* $n - r$ *di* $D(\omega)$.

11. Si abbia una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$, e sia, decomposto $D(\omega)$ nei suoi divisori elementari:

$$D(\omega) = (-1)^n \,|\, b_{ik} \,|\, . \prod_1^m{}_\rho P_\varrho^{e_\varrho}.$$

Ad ogni divisore $P_\varrho^{e_\varrho}$ di $D(\omega)$ (dove P_ρ ha il grado g_ρ) corrisponde un gruppo di $g_\rho e_\rho$ colonne della matrice canonica considerata, che indichiamo con $x_k^{\varrho, vg_\varrho+u}$ ($u = 0, 1, \ldots, g_\rho - 1$; $v = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1$), le quali soddisfano (n.º 7) alle relazioni:

$$\left.\begin{array}{c} A_i(x^{\varrho, vg_\varrho+u}) - B_i(x^{\varrho, vg_\varrho+u-1}) + a^{(\varrho)}_{g_\varrho-u}\; B_i(x^{\varrho,(v+1)g_\varrho-1}) = 0, \\ (i = 1, 2, \ldots, n,\ \rho = 1, 2, \ldots, m;\ v = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1;\ u = 0, 1, \ldots, g_\rho - 1;\ x^{\rho,-1} = 0). \end{array}\right\} \quad (24)_\rho$$

Inversamente si abbia una matrice quadrata di ordine n, diversa da zero:

$$|\, x_k^{\varrho, t_\varrho} \,|,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, m;\ t_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho g_\rho - 1;\ \sum_1^m{}_\rho\, e_\rho g_\rho = n)$$

le cui colonne possano distribuirsi in m gruppi (corrispondenti ai diversi valori di ρ) tali che le righe di ogni gruppo soddisfino a relazioni come le $(24)_\rho$ (indicando le $a^{(\rho)}$ opportune costanti).

Posto allora:

$$P_\rho = \omega^{g_\varrho} + a_1^{(\varrho)}\omega^{g_\varrho-1} + \cdots + a^{(\varrho)}_{g_\varrho}, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m) \qquad (22)_\rho$$

$$X_k^{(\varrho)} \equiv \sum_0^{e_\varrho-1}{}_v \sum_0^{g_\varrho-1}{}_u\, x^{\varrho, vg_\varrho+u}\, \omega^u P_\varrho^v \pmod{P_\varrho^{e_\varrho}}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (13)'_\rho$$

si avrà (n.º 7):

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik} X_k^{(\varrho)} \equiv 0 \pmod{P_\varrho^{e_\varrho}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

e se è ad es. $P_1 = P_2 = \cdots = P_h \mid\!\!-\, P_\rho$ *per* $\rho > h$, *quando* P_1 *sia primo nel campo* R *considerato,* saranno le $X_k^{(\varrho)}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $\rho = 1, 2, \ldots, h$) gli elementi di un sistema canonico per il divisore P_1 e per le righe di $D(\omega)$. Analogamente si avrà per gli altri divisori P_ρ; quando dunque questi siano primi in R, il determinante $D(\omega)$ sarà decomposto nei suoi divisori elementari in R

$$D(\omega) = (-1)^n \,|\, b_{ik} \,|\, P_1^{e_1} P_2^{e_2} \ldots P_m^{e_m}$$

e la matrice $\alpha_k^{\varrho, t_\varrho}$ sarà canonica per le righe di $D(\omega)$. Le $(24)_\rho$ adunque, insieme colla condizione che i polinomî P_ρ sian primi in R e la matrice $|\alpha_k^{\varrho, t_\varrho}|$ sia diversa da zero, sono caratteristiche per gli elementi di una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$.

12. Considerando ancora alcuni casi particolari.

a) Siano $P_1, P_2, \ldots, P_m$ i divisori primi distinti di $D(\omega)$, dei gradi $g_1, g_2, \ldots, g_m$ e ad ogni divisore primo P_ρ corrisponda un solo divisore elementare $P_\varrho^{e_\varrho}$; si avrà quindi $\sum_1^m {}_\rho e_\rho g_\rho = n$. Il sistema canonico relativo al divisore $P_\varrho^{e_\varrho}$ (ed alle righe di $D(\omega)$) conterrà n sole funzioni, che indicheremo coi simboli $X_k^{(\varrho)}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, per le quali si avrà (n.° 8, *a*):

$$X_k^{(\varrho)} \equiv M_\rho(\omega) \frac{\partial D(\omega)}{\partial c_{l_\varrho k}} (\bmod P_\varrho^{e_\varrho}), \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m),$$

essendo l_ρ una qualunque colonna di $D(\omega)$, per la quale non tutti i complementi algebrici dei suoi elementi sono $\equiv 0 (\bmod P_\rho)$ ed $M_\rho(\omega)$ un polinomio arbitrario $(\bmod P_\varrho^{e_\varrho})$. I coefficienti $\alpha_k^{\varrho, t_\varrho}$ di esse funzioni conterranno quindi $e_\rho g_\rho$ parametri arbitrarî e la matrice canonica più generale per le righe di $D(\omega)$ dipenderà da n parametri arbitrarî. Questo risulta anche del resto dalla $(25)^*$ del n.° 10; si ha infatti in questo caso $n_1 = n_2 = \cdots = n_n = 0$.

b) I divisori primi di $D(\omega)$ sian tutti lineari: questo caso (che diciamo di Weierstrass, il quale lo considerò per il primo) si ha in particolare quando il campo fondamentale di razionalità sia il campo di tutti i numeri reali e complessi. Il determinante $D(\omega)$, decomposto nei suoi divisori elementari, si scriverà:

$$D(\omega) = (-1)^n |b_{ik}| \,.\, \prod_1^m {}_\rho (\omega - \omega_\rho)^{e_\varrho}, \quad (e_1 + e_2 + \cdots + e_m = n);$$

sarà ω_ρ una radice dell'equazione $D(\omega) = 0$ e a ciascuno dei divisori elementari $(\omega - \omega_\rho)^{e_\varrho}$ corrisponde in una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$

$$\alpha_k^{\varrho, v_\varrho}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n; \ \rho = 1, 2, \ldots, m; \ v_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1)$$

un gruppo di e_ρ colonne:

$$\alpha_k^{\varrho, 0}, \ \alpha_k^{\varrho, 1}, \ldots, \alpha_k^{\varrho, e_\varrho - 1}, \quad (k = 1, \ldots, n)$$

le quali soddisfano alle relazioni (caratteristiche):

$$A_i(x^{\varrho, r_\varrho}) = \omega_\rho \dot{B}_i(x^{\varrho, r_\varrho}) + B_i(x^{\varrho, r_\varrho - 1}),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, m;\ v_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1;\quad a^{\rho, -1} = 0);$$

e posto:

$$X_k^{(\varrho)} = \sum_0^{e_\varrho - 1}{}_{r_\varrho} x_k^{\varrho, r_\varrho} (\omega - \omega_\rho)^{r_\varrho},\quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, m),$$

si avrà:

$$\sum_1^n{}_k c_{ik} X_k^{(\varrho)} \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ (\omega - \omega_\rho)^{e_\varrho}),\quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, m)$$

ed insieme:

$$x_k^{\varrho, r_\varrho} = \frac{1}{v_\rho!} \left\{ \frac{d^{v_\varrho} X_k^{(\varrho)}}{d\,\omega^{v_\varrho}} \right\}_{\omega\ \omega_\varrho},\quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, m;\ v_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1).$$

c) Ancora più particolarmente supponiamo che l'equazione $D(\omega) = 0$ abbia tutte le radici distinte e diciamole $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; sarà allora $m = n$, $e_\rho = 1$ per $\rho = 1, 2, \ldots, n$; e gli elementi di una matrice canonica che (omettendo l'ultimo indice superiore che è sempre nullo) indichiamo con $x_k^{(\varrho)}$, soddisferanno alle equazioni lineari omogenee (il cui determinante ha per ogni valore di ρ la caratteristica $n - 1$):

$$\sum_1^n{}_k (a_{ik} - \omega_\rho b_{ik}) x_k^{(\varrho)} = 0,\quad (i, \rho = 1, \ldots, n).$$

d) Si abbia infine $a_{ik} = 0$ per $i, k = 1, 2, \ldots, n$. Il determinante $D(\omega)$ ha in questo caso n divisori elementari uguali ad ω; le congruenze (12) del n.° 3 diventano identiche e qualunque determinante di ordine n diverso da zero può assumersi come una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$ (cf. n.° 8, *c*).

Riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare. Trasformazioni lineari permutabili con una sostituzione lineare.

13. I risultati precedenti hanno un'immediata applicazione al problema della riduzione di una sostituzione lineare a forma canonica.

Si abbia una sostituzione lineare S sulle variabili u_i, u'_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$

definita dalle relazioni:

$$S) \quad \sum_1^n{}_i\, a_{ik}\, u_i = \sum_1^n{}_i\, b_{ik}\, u'_i\,, \quad (k = 1, 2, \dots, n;\ |b_{ik}| \neq 0) \tag{26}$$

o brevemente:

$$S) \quad \bar{A}_k(u) = \bar{B}_k(u'),\ (k = 1, 2, \dots, n);$$

e, conservando tutte le notazioni superiori, sia:

$$|x_k^{\rho, t_\rho}|, \quad (\rho = 1, 2, \dots, m;\ t_\rho = 0, 1, \dots, e_\rho g_\rho - 1)$$

una matrice canonica per le righe del determinante *caratteristico* della sostituzione

$$D(\omega) = |a_{ik} - \omega b_{ik}|.$$

Introduciamo delle nuove variabili (*variabili canoniche*) η_{ρ, t_ρ}, η'_{ρ, t_ρ} mediante le relazioni:

$$\left.\begin{array}{c} \eta_{\rho, t_\rho} = \sum_1^n{}_{ik}\, b_{ik}\, x_k^{\rho, t_\rho}\, u_i = B(u, x^{\rho, t_\rho});\quad \eta'_{\rho, t_\rho} = B(u', x^{\rho, t_\rho}) = A(u, x^{\rho, t_\rho}) \\ (\rho = 1, 2, \dots, m;\ t_\rho = 0, 1, \dots, e_\rho g_\rho - 1). \end{array}\right\} \tag{27}$$

Si avrà allora subito, per le relazioni $(24)_\rho$ del n.º 11:

$$\left.\begin{array}{c} \eta'_{\rho, v g_\rho + u} = \eta_{\rho, v g_\rho + u - 1} - a^{(\rho)}_{g_\rho - u}\, \eta_{\rho, (v+1) g_\rho - 1} \\ (\rho = 1, 2, \dots, m;\ v = 0, 1, \dots, e_\rho - 1;\ u = 0, 1, \dots, g_\rho - 1;\ \eta_{\rho, -1} = 0) \end{array}\right\} \tag{28}$$

cioè la sostituzione sulle variabili η, η' si decompone nel prodotto di tante sostituzioni parziali, operanti su variabili diverse, quanti sono (nel campo di razionalità considerato) i divisori elementari del determinante caratteristico; e la sostituzione relativa al divisore $P_\rho^{e_\rho}$, di grado $e_\rho g_\rho$, opera su $e_\rho g_\rho$ variabili ed ha la forma canonica:

$$\left.\begin{array}{c} \eta'_{\rho, v g_\rho + u} = \eta_{\rho, v g_\rho + u - 1} - a^{(\rho)}_{g_\rho - u}\, \eta_{\rho, (v+1) g_\rho - 1} \\ (v = 0, 1, \dots, e_\rho - 1;\ u = 0, 1, \dots, g_\rho - 1;\ \eta_{\rho, -1} = 0). \end{array}\right\} \tag{28$_\rho$}$$

Inversamente, se una trasformazione lineare non degenere sulle u_i (e sulle u'_i) posta sotto la forma (27) (e qualunque trasformazione lineare può scriversi sotto questa forma, in quanto $|b_{ik}| \neq 0$) trasforma la sostituzione S

in una S' che ha la forma canonica (28), dovranno le x_k^{ϱ, t_ϱ} soddisfare alle relazioni $(24)_\rho$ del n.º 11, e quindi (quando i polinomî P_ρ siano primi nel campo R) costituiranno una matrice canonica per le righe del determinante $D(\omega)$, caratteristico della sostituzione S.

Abbiamo così il teorema:

Si abbia una sostituzione lineare omogenea su n variabili:

$$S)\quad \sum_1^n {}_i\, b_{ik}\, u'_i = \sum_1^n {}_i\, a_{ik}\, u_i \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n;\ |b_{ik}| \neq 0,$$

ed il determinante caratteristico della sostituzione:

$$D(\omega) = |a_{ik} - \omega\, b_{ik}|, \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

si decomponga, in un campo R di razionalità (che contiene le a_{ik} e b_{ik}) nel prodotto dei suoi divisori elementari al modo seguente:

$$D(\omega) = (-1)^n\, |b_{ik}|\, P_1^{e_1} . P_2^{e_2} \ldots\ P_m^{e_m}.$$

La sostituzione S può allora ridursi, con operazioni razionali, ed in ∞^N modi, alla forma canonica S' data dalle (28).

La più generale trasformazione che riduce la S a forma canonica si scrive sotto la forma (27), *nella quale le x_k^{ϱ, t_ϱ} sono gli elementi di una matrice canonica (in R) per le righe di $D(\omega)$.*

Una tale trasformazione dipende quindi da

$$N = n_0 + 2\,(n_1 + n_2 + \cdots + n_n)$$

parametri arbitrarî, indicando con n_r il grado in ω del massimo comun divisore $D_r(\omega)$ di tutti i minori di ordine $n - r$ di $D(\omega)$.

14. *a*) Quando i divisori primi P_ρ sono tutti lineari (*caso di* Weierstrass), la parte della sostituzione canonica relativa al divisore $P_\varrho^{e_\varrho} = (\omega - \omega_\rho)^{e_\varrho}$ diventa:

$$\eta'_{\rho,v} = \eta_{\rho,v-1} + \omega_\rho\, \eta_{\rho,v}, \quad (\rho = 1,\ 2, \ldots,\ m;\ v = 0,\ 1, \ldots,\ e_\rho - 1) \qquad (28)'_\rho$$

o esplicitamente (*):

$$\eta'_{\rho 0} = \omega_\rho\, \eta_{\rho 0}\,;\ \eta'_{\rho 1} = \eta_{\rho 0} + \omega_\rho\, \eta_{\rho 1}\,; \ldots;\ \eta'_{\rho, e_\rho - 1} = \eta_{\rho, e_\rho - 2} + \omega_\rho\, \eta_{\rho, e_\rho - 1}, \ (\rho = 1,\ 2, \ldots,\ m).$$

(*) Ponendo, conformemente al n.º 12, *b*):

$$H_\varrho = \sum_0^{e_\varrho - 1} {}_v\, \eta_{\varrho, v}\, (\omega - \omega_\varrho)^v = \sum_1^n {}_{ik}\, b_{ik}\, X_k^{(\varrho)}\, u_i\,.$$

b) Se in particolare i divisori $\omega - \omega_\rho$ sono tutti lineari, la sostituzione canonica diventa

$$\eta'_\rho = \omega_\rho \eta_\rho, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n) \tag{28}''_\rho$$

(omettendo l'indice v che deve essere sempre fatto uguale allo zero).

c) Consideriamo ancora il caso *reale*, quando cioè le a_{ik} e le b_{ik} sono reali e si assume come campo fondamentale il campo di tutti i numeri reali. In questo caso i divisori primi di $D(\omega)$ hanno tutti il primo od il secondo grado. Abbiamo già considerato i divisori primi lineari; sia ora:

$$P_\rho = \omega^2 + a_1^{(\rho)} \omega + a_2^{(\rho)}$$

un divisore primo di secondo grado di $D(\omega)$ e $P_\rho^{e_\rho}$ un divisore elementare di $D(\omega)$; la parte della sostituzione canonica ad esso relativa si scriverà:

$$\left.\begin{aligned} \eta'_{\rho,2v} &= \eta_{\rho,2v-1} - a_2^{(\rho)} \eta_{\rho,2v+1}, \\ \eta'_{\rho,2v+1} &= \eta_{\rho,2v} - a_1^{(\rho)} \eta_{\rho,2v+1}, \end{aligned} \quad (v = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1;\ \eta_{\rho,-1} = 0). \right\} \tag{28}'''_\rho$$

15. Le (26) possono risolversi rispetto alle u'_i; si ha in tal guisa:

$$S) \quad u'_i = \sum_1^n {}_{kr}\, a_{rk} B_{ki} u_r$$

dove abbiamo posto (*)

$$B_{ki} = \frac{\partial \log |b_{ik}|}{\partial b_{ik}}, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

---

si ha:

$$\eta_{\varrho,v} = \frac{1}{v!} \left\{ \frac{\partial^v H_\varrho}{\partial \omega^v} \right\}_{\omega = \omega_\varrho}, \quad (v = 0, 1, \ldots, e_\varrho - 1).$$

È così giustificata un'asserzione, a pag. 20, della mia Memoria: ***Sulla teoria della convergenza degli algoritmi di iterazione*** (Annali di Matematica, Serie III, Tomo XIV, pagg. 1-30, 1907).

Osservo insieme che nella formula (34) di pag. 20 della Memoria stessa è incorso un errore di stampa; essa deve scriversi:

$$G = \sum_1^n {}_i\, \vartheta_i \varphi_i, \quad G^{(u)} = \sum_1^n {}_i\, \vartheta_i^{(u)} \varphi_i = \frac{1}{u!} \left(\frac{\partial^u G}{\partial \omega^u} \right)_{\omega = \omega_1}, \quad (u = 1, 2, \ldots, t-1). \tag{34}$$

(*) Questa notazione, leggermente diversa dall'ordinaria, è suggerita dal calcolo delle forme bilineari.

od anche, ponendo $A \equiv (a_{ik})$, $B \equiv (b_{ik})$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, dove i è l'indice delle righe e k quello delle colonne e introducendo le notazioni del calcolo simbolico sulle forme bilineari (*), la S può scriversi:

$$S \equiv A\, B^{-1}. \tag{26}^*$$

Sia $X \equiv | x_k^{\varrho \prime \varrho} |$ una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$; le (27) si scrivono simbolicamente:

$$\eta = B\, X\, u, \quad \eta' = B\, X\, u' \tag{27}^*$$

e quindi la sostituzione canonica $\eta' = S' \eta$, che dalle η fa passare alle η', si scriverà:

$$S' \equiv B\, X\, S\, X^{-1}\, B^{-1}, \tag{29}$$

donde risulta anche:

$$S \equiv X^{-1}\, B^{-1}\, S'\, B\, X; \tag{30}$$

e l'una o l'altra di queste due relazioni caratterizza, per quanto abbiam detto al n.° 13, una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$. Se quindi X_1 è un'altra di queste matrici, si avrà anche:

$$S' \equiv B\, X_1\, S\, X_1^{-1}\, B^{-1}$$

e per la (30):

$$S \equiv X^{-1}\, X_1\, S\, X_1^{-1}\, X;$$

cioè posto:

$$T \equiv X_1^{-1}\, X, \tag{31}$$

si ha:

$$S \equiv T^{-1}\, S\, T, \quad \text{oppure} \quad S\, T \equiv T\, S; \tag{32}$$

la trasformazione T è cioè permutabile colla S. Inversamente dalle (32) e (29) si ottiene:

$$S' \equiv B\, X\, T^{-1}\, S\, T\, X^{-1}\, B^{-1} \equiv B\, (X\, T^{-1})\, S\, (X\, T^{-1})^{-1}\, B^{-1};$$

posto dunque:

$$X_1 \equiv X\, T^{-1}, \quad \text{cioè} \quad T \equiv X_1^{-1}\, X,$$

sarà X_1 una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$. Abbiamo così il teorema:

La trasformazione lineare (non degenere) più generale permutabile colla

---

(*) Muth, *Elementartheiler* . . . pag. 20 e sg.

sostituzione lineare:

$$S)\quad \sum_1^n{}_i\, a_{ik}\, u_i = \sum_1^n{}_k\, b_{ik}\, u'_i, \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n;\ |\, b_{ik}\,| \neq 0)$$

è data simbolicamente dalla formula:

$$T = X_1^{-1}\, X, \tag{31}$$

essendo X_1 *una particolare (qualunque),* X *la più generale matrice canonica per le righe del determinante*

$$D(\omega) = |\, a_{ik} - \omega\, b_{ik}\,|, \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

caratteristico della sostituzione S.

Una tale trasformazione T *può quindi determinarsi razionalmente e dipende da:*

$$N = n_0 + 2\,(n_1 + n_2 + \cdots + n_n)$$

parametri arbitrarî.

16. Diamo infine due esempî numerici, i quali provano la praticità del metodo esposto.

Il primo di questi è dovuto al Burnside (*).

Si abbia la sostituzione S in 5 variabili

$$\begin{cases} u'_1 = -2\,u_1 - u_2 - u_3 + 3\,u_4 + 2\,u_5\,, \\ u'_2 = -4\,u_1 + u_2 - u_3 + 3\,u_4 + 2\,u_5\,, \\ u'_3 = u_1 + u_2 - 3\,u_4 - 2\,u_5\,, \\ u'_4 = -4\,u_1 - 2\,u_2 - u_3 + 5\,u_4 + u_5\,, \\ u'_5 = 4\,u_1 + u_2 + u_3 - 3\,u_4\,. \end{cases}$$

Il determinante caratteristico della S si scriverà (conformemente alla (26)

(*) Cf. W. Burnside, *On the reduction of a Linear Substitution to its Canònical Form.* (Proceedings of the London Math. Society; Vol. XXX (1899), pag. 191-194), ed insieme:

A. C. Dickson, id. id. (ibidem. Vol. XXXI (1900), pag. 175-176) ed anche:

T. J. I. A. Bromwich, id. id. (ibidem, Vol. XXXI (1900), pag. 295-297). Il processo di riduzione del Bromwich conduce, salvo alcune lievi modificazioni, agli stessi calcoli del testo.

del n.° 13):

$$D(\omega) = |c_{ik}| = |a_{ik} - \omega b_{ik}| = \begin{vmatrix} -2-\omega & -4 & 1 & -4 & 4 \\ -1 & 1-\omega & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -\omega & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 5-\omega & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & -\omega \end{vmatrix}.$$

Si ha quindi:

$$\frac{\partial D}{\partial c_{11}} = \omega(\omega-2)^3, \quad \frac{\partial D}{\partial c_{12}} = -(\omega+1)^2(\omega-2), \quad \frac{\partial D}{\partial c_{13}} = -(\omega-2)^3,$$

$$\frac{\partial D}{\partial c_{14}} = 3(\omega+1)(\omega-2)^2, \quad \frac{\partial D}{\partial c_{15}} = (\omega+1)(\omega-2)(2\omega-7),$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{21}} = \omega^3 - 5\omega^2 + 2\omega - 1,$$

$$D(\omega) = c_{11}\frac{\partial D}{\partial c_{11}} + c_{12}\frac{\partial D}{\partial c_{12}} + c_{12}\frac{\partial D}{\partial c_{13}} + c_{14}\frac{\partial D}{\partial c_{14}} + c_{15}\frac{\partial D}{\partial c_{15}} = -(\omega+1)^2(\omega-2)^3.$$

Il determinante $D(\omega)$ si decompone inoltre (come si riconosce con semplici trasformazioni sulle sue righe e colonne) nei suoi divisori elementari al modo seguente

$$D(\omega) = -(\omega+1)^2 \,.\, (\omega-2)^2 \,.\, (\omega-2),$$

e per le relazioni precedenti, il minore $\frac{\partial D}{\partial c_{11}}$ (ad es.) è regolare rispetto al divisore $\omega+1$, i minori $\frac{\partial D}{\partial c_{12}}$, $\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{21}}$ sono regolari rispetto al divisore $\omega - 2$.

Consideriamo prima il divisore $\omega+1$. Dobbiamo allora soddisfare le congruenze:

$$\left.\begin{array}{l} -(2+\omega)X_1 - 4X_2 + X_3 - 4X_4 + 4X_5 \equiv 0 \\ -X_1 + (1-\omega)X_2 + X_3 - 2X_4 + X_5 \equiv 0 \\ -X_1 - X_2 - \omega X_3 - X_4 + X_5 \equiv 0 \quad \{\bmod (\omega+1)^2\} \\ 3X_1 + 3X_2 - 3X_3 + (5-\omega)X_4 - 3X_5 \equiv 0 \\ 2X_1 + 2X_2 - 2X_3 + X_4 - \omega X_5 \equiv 0 \end{array}\right\} (\alpha)$$

alle quali si soddisfa nel modo più generale, ponendo

$$X_1 \equiv \{\alpha + \beta(\omega+1)\}\frac{\partial D}{\partial c_{11}}, \quad X_2 \equiv \{\alpha + \beta(\omega+1)\}\frac{\partial D}{\partial c_{12}}, \quad X_3 \equiv \{\alpha + \beta(\omega+1)\}\frac{\partial D}{\partial c_{13}},$$

$$X_4 \equiv \{\alpha + \beta(\omega+1)\}\frac{\partial D}{\partial c_{14}}, \quad X_5 \equiv \{\alpha + \beta(\omega+1)\}\frac{\partial D}{\partial c_{15}} \quad \{\mathrm{mod}\,(\omega+1)^2\}.$$

In particolare ponendo $\omega + 1 = t$ e prendendo il moltiplicatore $\alpha + \beta(\omega+1)$ in guisa che sia

$$-3\{\alpha + \beta(\omega+1)\}(\omega - 2) \equiv 1 \{\mathrm{mod}\,(\omega+1)^2\}$$

otterremo la soluzione particolare (canonica):

$$\bar{X}_1^{(1)} \equiv 3 - 5t, \quad \bar{X}_2^{(1)} \equiv 0, \quad \bar{X}_3^{(1)} \equiv 3 - 2t, \quad \bar{X}_4^{(1)} \equiv 3t, \quad \bar{X}_5^{(1)} \equiv 3t \quad (\mathrm{mod}\, t^2);$$

donde si trae che la matrice:

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_1^{10} & \bar{x}_2^{10} & \bar{x}_3^{10} & \bar{x}_4^{10} & \bar{x}_5^{10} \\ \bar{x}_1^{11} & \bar{x}_2^{11} & \bar{x}_3^{11} & \bar{x}_4^{11} & \bar{x}_5^{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

è canonica per il divisore $(\omega+1)$ e per le righe di $D(\omega)$. La più generale $\begin{vmatrix} x_i^{10} \\ x_i^{11} \end{vmatrix}$, $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ di queste matrici si ha poi ponendo:

$$x_i^{10} = \alpha\,\bar{x}_i^{10}, \quad x_i^{11} = \alpha\,\bar{x}_i^{11} + \beta\,\bar{x}_i^{10}, \quad (i = 1, 2, \ldots, 5),$$

indicando α e β delle costanti arbitrarie, di cui $\alpha \neq 0$.

Veniamo ora a considerare il divisore $\omega - 2$. Dobbiamo considerare le congruenze (α) rispetto al modulo $(\omega-2)^2$ e rispetto al modulo $(\omega - 2)$. Poichè i minori $\frac{\partial D}{\partial c_{12}}$, $\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{21}}$ sono regolari rispetto al divisore $\omega - 2$, si avrà un sistema canonico particolare per questo divisore, ponendo (cf. n.i 2 e 4):

$$\bar{X}_1^{(2)} \equiv -\frac{1}{3(\omega-2)}\frac{\partial D}{\partial c_{11}}, \quad \bar{X}_2^{(2)} = -\frac{1}{3(\omega-2)}\frac{\partial D}{\partial c_{12}}, \quad \bar{X}_3^{(2)} = -\frac{1}{3(\omega-2)}\frac{\partial D}{\partial c_{13}},$$

$$\bar{X}_4^{(2)} = -\frac{1}{3(\omega-2)}\frac{\partial D}{\partial c_{14}}, \quad \bar{X}_5^{(2)} = -\frac{1}{3(\omega-2)}\frac{\partial D}{\partial c_{15}} \quad \{\mathrm{mod}\,(\omega-2)^2\}$$

$$\bar{X}_1^{(3)} \equiv -\frac{1}{9}\,\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{21}}, \quad \bar{X}_2^{(3)} \equiv -\frac{1}{9}\,\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{22}}, \quad \bar{X}_3^{(3)} \equiv -\frac{1}{9}\,\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{23}},$$

$$\bar{X}_4^{(3)} \equiv -\frac{1}{9}\,\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{24}}, \quad \bar{X}_5^{(3)} \equiv -\frac{1}{9}\,\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{25}} \quad \{\mathrm{mod}\,(\omega-2)\}$$

cioè, posto $t = \omega - 2$:

$$\begin{array}{lllll} \bar{X}_1^{(2)} \equiv 0, & \bar{X}_2^{(2)} \equiv 3 + 2t, & \bar{X}_3^{(2)} \equiv 0, & \bar{X}_4^{(2)} \equiv -3t, & \bar{X}_5^{(2)} \equiv 3 - t \ (\mathrm{mod}\ t^2) \\ \bar{X}_1^{(3)} \equiv 1, & \bar{X}_2^{(3)} \equiv 0, & \bar{X}_3^{(3)} \equiv 0, & \bar{X}_4^{(3)} \equiv 0, & \bar{X}_5^{(3)} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ t). \end{array}$$

Si avrà di qui il sistema più generale, ponendo (n.° 5):

$$X_i^{(2)} \equiv (\gamma + \delta t)\,\bar{X}_i^{(2)} + \varepsilon t\,\bar{X}_i^{(3)} \ (\mathrm{mod}\ t^2),$$

$$X_i^{(3)} \equiv \eta\,\bar{X}_i^{(2)} + \zeta\,\bar{X}_i^{(3)} \ (\mathrm{mod}\ t),$$

essendo γ, δ, ε, η, ζ cinque costanti arbitrarie, delle quali γ e ζ sono diverse da zero.

Ne segue che la matrice:

$$\left|\begin{array}{ccccc} \bar{x}_1^{20} & \bar{x}_2^{20} & \bar{x}_3^{20} & \bar{x}_4^{20} & \bar{x}_5^{20} \\ \bar{x}_1^{21} & \bar{x}_2^{21} & \bar{x}_3^{21} & \bar{x}_4^{21} & \bar{x}_5^{21} \\ \bar{x}_1^{30} & \bar{x}_2^{30} & \bar{x}_3^{30} & \bar{x}_4^{30} & \bar{x}_5^{30} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc} 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

è una particolare matrice canonica per il divisore $\omega - 2$ e per le righe di $D(\omega)$, e la più generale:

$$\left|\begin{array}{c} x_i^{20} \\ x_i^{21} \\ x_i^{30} \end{array}\right|, \quad (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

di queste matrici si ha ponendo:

$$x_i^{20} = \gamma\,\bar{x}_i^{20}; \quad x_i^{21} = \gamma\,\bar{x}_i^{21} + \delta\,\bar{x}_i^{20} + \varepsilon\,\bar{x}_i^{30}; \quad x_i^{30} = \eta\,\bar{x}_i^{20} + \zeta\,\bar{x}_i^{30}, \quad (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

con γ, δ, ε, η, ζ costanti arbitrarie, di cui γ e ζ diverse da zero.

Porremo quindi (n.° 13):

$$\bar{\eta}_{10} = \sum_1^5{}_i\,\bar{x}_i^{10}\,u_i; \quad \bar{\eta}_{11} = \sum{}_i\,\bar{x}_i^{11}\,u_i; \quad \bar{\eta}_{20} = \sum \bar{x}_i^{20}\,u_i; \quad \bar{\eta}_{21} = \sum \bar{x}_i^{21}\,u_i; \quad \bar{\eta}_{30} = \sum \bar{x}_i^{30}\,u_i;$$

cioè:

$$\bar{\eta}_{10} = 3\,(u_1 + u_3);\quad \bar{\eta}_{11} = -5\,u_1 - 2\,u_3 + 3\,u_4 + 3\,u_5\,;$$

$$\bar{\eta}_{20} = 3\,(u_2 + u_5);\quad \bar{\eta}_{21} = \quad 2\,u_2 - 3\,u_4 - u_5\,;\quad \eta_{30} = u_1 + u_5\,;$$

e si avrà la forma normale (come subito si verifica):

$$\bar{\eta}'_{10} = -\bar{\eta}_{10};\quad \bar{\eta}'_{11} = \bar{\eta}_{10} - \bar{\eta}_{11}\,;$$

$$\bar{\eta}'_{20} = 2\,\bar{\eta}_{20};\quad \bar{\eta}'_{21} = \bar{\eta}_{20} + 2\,\bar{\eta}_{21}\,;\quad \bar{\eta}'_{30} = 2\,\bar{\eta}_{30}.$$

La più generale trasformazione che riduce la S a forma normale si avrà ponendo:

$$\eta_{10} = \alpha\,\bar{\eta}_{10};\quad \eta_{11} = \alpha\,\bar{\eta}_{11} + \beta\,\bar{\eta}_{10};\quad \eta_{20} = \gamma\,\bar{\eta}_{20};\quad \eta_{21} = \gamma\,\bar{\eta}_{21} + \delta\,\bar{\eta}_{20} + \varepsilon\,\bar{\eta}_{30};$$

$$\eta_{30} = \eta\,\bar{\eta}_{20} + \zeta\,\bar{\eta}_{30}\,,$$

essendo le α, $\beta \ldots \zeta$ 7 costanti arbitrarie, tali che $\alpha\gamma\zeta \neq 0$.

Si noti che nel nostro caso è $n = 5$, $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = \cdots = n_5 = 0$, quindi è $N = n + 2\,(n_1 + n_2 + \cdots + n_5) = 5 + 2 = 7$, come abbiamo trovato direttamente.

Facendo rispettivamente:

$$(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\eta\,\zeta) = \left(-3,\ 0,\ -3,\ 0,\ 0,\ -\frac{1}{3}\right),\quad \left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ -\frac{2}{9},\ 0,\ -\frac{1}{3},\ 1\right),$$

$$\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{9},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{9},\ -1,\ 1\right),\quad \left(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3}\,l_2,\ l_1\right),$$

si hanno le sostituzioni date dal Burnside (p. 194), dal Dickson (p. 176) e dal Bromwich (p. 296) nei lavori già ricordati.

17. Come secondo esempio, consideriamo la sostituzione su quattro variabili:

$$\begin{aligned}
u'_1 &= \quad u_2 - u_3,\\
2\,u'_2 &= \quad u_1 + u_2 - u_3 - 2\,u_4,\\
2\,u'_3 &= 3\,u_1 + u_2 - u_3 - 2\,u_4,\\
u'_4 &= -u_1 + u_2.
\end{aligned}$$

Il suo determinante caratteristico è:

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} -\omega & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1-2\omega & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -(1+2\omega) & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -\omega \end{vmatrix} = 4(\omega^2+1)^2;$$

si ha inoltre:

$$\frac{\partial D}{\partial c_{21}} = -2(\omega-1)-2(\omega^2+1); \quad \frac{\partial D}{\partial c_{22}} = -(\omega+1)-(\omega^2+1)(1+2\omega);$$

$$\frac{\partial D}{\partial c_{23}} = \omega+1+(\omega^2+1); \quad \frac{\partial D}{\partial c_{24}} = 4(\omega^2+1);$$

e di qui si trae che $D(\omega)$ ha un solo divisore elementare uguale ad $(\omega^2+1)^2$, rispetto al quale, ad es. il minore $\frac{\partial D}{\partial c_{21}}$ è regolare. Dobbiamo quindi considerare le congruenze:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} -\omega X_1 & +X_2 & +3X_3 & -X_4 & \equiv 0 \\ X_1 & +(1-2\omega)X_2 & +X_3 & +X_4 & \equiv 0 \\ -X_1 & -X_2 & -(1+2\omega)X_3 & & \equiv 0 \\ & -2X_2 & -2X_3 & -\omega X_4 & \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{(\omega^2+1)^2},$$

alle quali si soddisfa nel modo più generale ponendo:

$$X_i \equiv M . \overline{X}_i \pmod{(\omega^2+1)^2}, \quad (i=1,\,2,\,3,\,4):$$

con:

$$\overline{X}_1 \equiv -2(\omega-1)-2(\omega^2+1), \quad \overline{X}_2 \equiv -(\omega+1)-(\omega^2+1)\,(1+2\omega),$$

$$\overline{X}_3 \equiv (\omega+1)+(\omega^2+1), \quad \overline{X}_4 \equiv 4(\omega^2+1) \pmod{(\omega^2+1)^2}$$

ed indicando:

$$M \equiv \alpha+\beta\,\omega+(\omega^2+1)\,(\gamma+\delta\,\omega) \pmod{(\omega^2+1)^2}$$

un polinomio arbitrario (mod $(\omega^2+1)^2$). Ne segue che la matrice:

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_1^0 & \bar{x}_2^0 & \bar{x}_3^0 & \bar{x}_4^0 \\ \bar{x}_1^1 & \bar{x}_2^1 & \bar{x}_3^1 & \bar{x}_4^1 \\ \bar{x}_1^2 & \bar{x}_2^2 & \bar{x}_3^2 & \bar{x}_4^2 \\ \bar{x}_1^3 & \bar{x}_2^3 & \bar{x}_3^3 & \bar{x}_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

è una particolare matrice canonica per le righe di $D(\omega)$ e la più generale di queste matrici:

$$x_i^r, \quad (i=1,\,2,\,3,\,4;\; r=0,\,1,\,2,\,3)$$

si ha ponendo (cf. n.° 5):

$$x_i^0 = \alpha\,\bar{x}_i^0 - \beta\,\bar{x}_i^1; \quad x_i^1 = \beta\,\bar{x}_i^0 + \alpha\,\bar{x}_i^1; \quad x_i^2 = \gamma\,\bar{x}_i^0 + (\beta - \delta)\,\bar{x}_i^1 + \alpha\,\bar{x}_i^2 - \beta\,\bar{x}_i^3;$$

$$x_i^3 = \delta\,\bar{x}_i^0 + \gamma\,\bar{x}_i^1 + \beta\,\bar{x}_i^2 + \alpha\,\bar{x}_i^3, \quad (i=1,\,2,\,3,\,4)$$

essendo α, β, γ, δ quattro costanti arbitrarie, tali che $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$. Si noti che nel nostro caso è $n_0 = n = 4$, $n_1 = n_2 = \cdots = n_4 = 0$ e quindi $N = n = 4$.

Ponendo allora (cf. la (27) del n.° 13):

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}_0 &= b_{11}\bar{x}_1^0 u_1 + b_{22}\bar{x}_2^0 u_2 + b_{33}\bar{x}_3^0 u_3 + b_{11}\bar{x}_1^0 u_1 = \bar{x}_1^0 u_1 + 2\bar{x}_2^0 u_2 + 2\bar{x}_3^0 u_3 + \bar{x}_4^0 u_4 = 2(u_1 - u_2 + u_3),\\
\bar{\eta}_1 &= = 2(-u_1 - u_2 + u_3),\\
\bar{\eta}_2 &= = 2(-u_1 - u_2 + u_3 + 2u_4),\\
\bar{\eta}_3 &= = -4u_2,
\end{aligned}$$

la sostituzione prende la forma normale (cf. la (28) del n.° 13) semplicissima (che subito si verifica):

$$\bar{\eta}'_0 = -\bar{\eta}_1, \quad \bar{\eta}'_1 = \bar{\eta}_0, \quad \bar{\eta}'_2 = \bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_3, \quad \bar{\eta}'_3 = \bar{\eta}_2.$$

La più generale trasformazione, per cui la sostituzione prende la stessa forma normale, è data da:

$$\eta_0 = \alpha\,\bar{\eta}_0 - \beta\,\bar{\eta}_1; \quad \eta_1 = \beta\,\bar{\eta}_0 + \alpha\,\bar{\eta}_1;$$

$$\eta_2 = \gamma\,\bar{\eta}_0 + (\beta - \delta)\,\bar{\eta}_1 + \alpha\,\bar{\eta}_2 - \beta\,\bar{\eta}_3; \quad \eta_3 = \delta\,\bar{\eta}_0 + \gamma\,\bar{\eta}_1 + \beta\,\bar{\eta}_2 + \alpha\,\bar{\eta}_3$$

con α, β, γ, δ arbitrarî ed $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$.

CAPITOLO SECONDO.

Riduzione a forma canonica di un fascio di forme bilineari. Il teorema di Weierstrass.

Sistemi canonici per le righe e le colonne di $D(\omega)$. Identità relative.

18. I risultati ottenuti sui sistemi e sulle matrici canoniche relative ai divisori primi ed alle righe di $D(\omega)$ valgono evidentemente anche per le colonne, ed è superfluo enunciarli.

Fra due sistemi e matrici canoniche, l'una per le righe, l'altra per le colonne di $D(\omega)$ si hanno delle relazioni identiche notevolissime, che ci proponiamo di determinare.

Siano perciò P e P' due divisori primi (uguali o diversi) di $D(\omega)$, dei gradi g, g' e siano X_k, Y_i, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ due soluzioni delle congruenze:

$$(a)\ \sum_k c_{ik} X_k \equiv 0 \pmod{P'},\quad (b)\ \sum_i c_{ik} Y_i \equiv 0 \pmod{P'^{l'}},\quad (i,\ k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1)$$

Si avrà allora insieme:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{ik}^{n} c_{ik} Y_i X_k = C(Y, X) &\equiv 0 \pmod{P'}\\ &\equiv 0 \pmod{P'^{l'}}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

e quindi, se i due divisori P e P' sono diversi, anche:

$$C(Y, X) \equiv 0 \pmod{P' . P'^{l'}}.$$

Ma avendo i polinomi X_k un grado minore di $g\,l$, i polinomi Y_i uno minore di $g'l'$, il polinomio $C(Y, X)$ ha un grado minore di $g\,l + g'l'$; si ha quindi identicamente:

$$C(Y, X) = 0 \qquad (2)^*$$

donde il teorema:

Per due soluzioni X, Y delle congruenze (1), *relative a due divisori primi* diversi *del determinante $D(\omega)$, si ha la relazione identica:*

$$C(Y,\ X) = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, c_{ik}\, Y_i(\omega)\, X_k(\omega) = 0.$$

Sia invece $P = P'$; dalla (2) si ha (e del resto è evidente):

$$C(Y,\ X) \equiv 0 \pmod{P^{l_0}},$$

indicando con l_0 il maggiore dei due numeri l, l'.

19 *a*). Conservando le notazioni del n.° 2, sia P un divisore primo di $D(\omega)$ e

$$\frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{s_1 t_1}\, \partial c_{s_2 t_2} \ldots \partial c_{s_\alpha t_\alpha}}, \quad (\alpha = 0,\ 1, \ldots,\ h) \tag{3}$$

un minore di $D(\omega)$ di ordine $n - \alpha$ regolare rispetto al divisore P. Le formule:

$$\frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{s_1 t_1} \ldots \partial c_{s_{\alpha-1} t_{\alpha-1}}\, \partial c_{s_\alpha k}} = P^{l_\alpha}\, \overline{X}_k^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ h;\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{4}$$

definiscono allora un sistema canonico $\overline{X}_k^{(\alpha)}$ relativo al divisore P ed alle righe di $D(\omega)$ (cf. n.° 2). Ugualmente, ponendo:

$$\frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{s_1 t_1} \ldots \partial c_{s_{\alpha-1} t_{\alpha-1}}\, \partial c_{i t_\alpha}} = P^{l_\alpha}\, \overline{Y}_i^{(\alpha)} \ (\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ h;\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{4'}$$

si ha un sistema canonico $\overline{Y}_i^{(\alpha)}$ per il divisore P e per le colonne di $D(\omega)$.

Tra i due sistemi $\overline{X}$, $\overline{Y}$ così definiti si hanno le relazioni identiche:

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & C(\overline{Y}^\alpha,\ \overline{X}^{\alpha'}) = 0, \quad \text{per } \alpha \neq \alpha' \\ (b) & C(\overline{Y}^\alpha,\ \overline{X}^\alpha) = P^{l_\alpha}\, Q_\alpha, \quad \text{con } Q_\alpha \not\equiv 0 \pmod{P}, \end{array} \quad (\alpha,\ \alpha' = 1,\ 2, \ldots,\ h) \right\} \tag{5}$$

Cambiamo infatti nella (3) del n.° 1 α ed α' risp. in $\alpha - 1$, $\alpha' - 1$, e supposto ad es.: $\alpha \geqq \alpha'$, facciamovi:

$$(p_1 q_1,\ p_2 q_2, \ldots,\ p_{\alpha-1} q_{\alpha-1}) = (s_1 t_1,\ s_2 t_2, \ldots,\ s_{\alpha-1},\ t_{\alpha-1}),\ l = s_\alpha,\ m = t_\alpha.$$

Si avrà allora:

$$\Lambda_{\alpha-1, \alpha'-1} = P^{l_\alpha}\, P^{l_{\alpha'}}\, C(\overline{Y}^\alpha,\ \overline{X}^{\alpha'})$$

e quindi per $\alpha \neq \alpha'$, dalle (3') si hanno la $(5, a)$; per $\alpha = \alpha'$, la (3)'' porta alla $(5, b)$, con:

$$Q_\alpha \equiv \frac{1}{P^{l_\alpha + l_{\alpha-1}}} \frac{\partial^{\alpha-1} D}{\partial c_{s_1 t_1} \dots \partial c_{s_{\alpha-1} t_{\alpha-1}}} \frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{s_1 t_1} \dots \partial c_{s_\alpha t_\alpha}} \pmod{P^\alpha}, \tag{6}$$

donde, ricordando che i minori (3) sono regolari rispetto a P, segue essere $Q_\alpha \equiv\!\!\!\!/\; 0 \pmod P$.

b) La considerazione dei due sistemi canonici $\overline{X}_k^{(\alpha)}$, $\overline{Y}_i^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, \dots, h)$ sopra definiti porta a conseguenze notevolissime.

Siano X_k $(k = 1, 2, \dots, n)$, Y_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ due soluzioni delle congruenze:

$$\sum_k c_{ik} X_k \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad \sum_i c_{ik} Y_i \equiv 0 \pmod{P^m}, \quad (l, m \leqq e_1;\ i, k = 1, 2, \dots, n) \tag{7}$$

e sia, ad es.: $l \geqq m$. Per le (16) del n.° 4 si avrà:

$$\left.\begin{aligned} X_k &\equiv \sum_r^{h_{l-1}} M_r(\omega) \overline{X}_k^{(r)}(\omega) + \sum_\rho^{l-1} P^{l-\rho} \sum_{t_\rho = h_\rho+1}^{h_{\rho-1}} M_{t_\rho}(\omega) \overline{X}_k^{t_\rho}(\omega) \equiv \\ &\equiv \sum_\alpha^h \overline{M}_\alpha(\omega) \overline{X}_k^\alpha(\omega) \pmod{P^l} \\ Y_i &\equiv \sum_s^{h_{m-1}} N_s(\omega) \overline{Y}_i^{(s)}(\omega) + \sum_\sigma^{m-1} P^{m-\sigma} \sum_{u_\sigma = h_\sigma+1}^{h_{\sigma-1}} M_{u_\sigma}(\omega) \overline{Y}_i^{u_\sigma}(\omega) \equiv \\ &\equiv \sum_\alpha^h \overline{N}_\alpha(\omega) \overline{Y}_i^\alpha(\omega) \pmod{P^m} \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

e ciò che è lo stesso:

$$X_k = \sum_\alpha^h \overline{M}_\alpha \overline{X}_k^{(\alpha)} + \mu_k P^l, \quad Y_i = \sum_{\alpha'}^h \overline{N}_{\alpha'} \overline{Y}_i^{(\alpha')} + \nu_i P^m, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

indicando le μ_k, ν_i dei polinomî in ω. Ne segue:

$$C(Y, X) = \sum_\alpha^h \overline{M}_\alpha \overline{N}_\alpha C(\overline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha) + P^l \sum_{\alpha'}^h C(\overline{N}_{\alpha'} \overline{Y}^{\alpha'}, \mu) +$$
$$+ P^m \sum_\alpha^h C(\nu, \overline{M}_\alpha \overline{X}^\alpha) + P^{l+m} C(\nu, \mu);$$

ed avendosi anche:

$$C(\overline{N}_{\alpha'} \overline{Y}^{\alpha'}, \mu) \equiv 0 \pmod{P^m}, \quad C(\nu, \overline{M}_\alpha \overline{X}^\alpha) \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h)$$

sarà infine, per le (5):

$$C(Y, X) \equiv \sum_1^h {}_\alpha \overline{M}_\alpha \overline{N}_\alpha P^{e_\alpha} Q_\alpha \pmod{P^{l+m}}.$$

Osserviamo ora che per $\alpha \leq h_l$, è $e_\alpha > l$; per $\alpha > h_{l-1}$ (risp. per $\alpha > h_{m-1}$) (donde $e_\alpha < l$ o $< m$), si ha

$$\overline{M}_\alpha P^{e_\alpha} \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad \overline{N}_\alpha P^{e_\alpha} \equiv 0 \pmod{P^m}$$

e quindi anche per $\alpha > h_{m-1}$ è:

$$\overline{M}_\alpha \overline{N}_\alpha P^{e_\alpha} \equiv 0 \pmod{P^{l+1}}.$$

Ne segue la formula:

$$C(Y, X) \equiv P^l \sum_{h_l+1}^{h_{m-1}} {}_\alpha M_\alpha N_\alpha Q_\alpha \pmod{P^{l+1}}. \tag{8}$$

c) Siano ora $X^1, X^2, \ldots, X^u$; $Y^1, Y^2, \ldots, Y^v$ delle soluzioni delle congruenze (7); con notazioni analoghe alle superiori avremo:

$$\frac{1}{P^l} C(Y^\mu, X^\lambda) \equiv \sum_{h_l+1}^{h_{m-1}} {}_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} N_\alpha^{(\mu)} Q_\alpha \pmod{P}, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, u;\ \mu = 1, 2, \ldots, v)$$

e quindi la matrice di u righe e v colonne:

$$\left| \frac{1}{P^l} C(Y^\mu, X^\nu) \right|, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, u;\ \mu = 1, 2, \ldots, v) \tag{9}$$

si decompone (mod P) nel prodotto delle tre matrici:

$$| M_\alpha^{(\lambda)} |, \ | \delta_{\alpha\beta} Q_\alpha |, \ | N_\beta^{(\mu)} |, \ (\alpha, \beta = h_l + 1, \ldots, h_{m-1};\ \lambda = 1, 2, \ldots, u;\ \mu = 1, 2, \ldots, v)$$

la seconda delle quali è $\equiv\!|\!\equiv 0 \pmod{P}$.

Ne segue che la matrice (9) ha una caratteristica non maggiore di $h_{m-1} - h_l$; quando inoltre si prenda $u = v = h_{m-1} - h_l$, ed i due determinanti

$$| M_\alpha^{(\lambda)} |, \quad | N_\alpha^{(\mu)} |, \quad (\alpha, \lambda, \mu = h_l + 1, \ldots, h_{m-1})$$

si prendano $\equiv\!|\!\equiv 0 \pmod{P}$, la matrice stessa avrà la caratteristica $h_{m-1} - h_l$.

Abbiamo così il teorema notevole:

Siano $X_k^{(\lambda)}$, $Y_i^{(\mu)}$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, \ldots, u;\ \mu = 1, 2, \ldots, v)$ ***due sistemi di soluzioni delle congruenze:***

$$\sum c_{ik} X_k \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad \sum c_{ik} Y_i \equiv 0 \pmod{P^m}, \quad (m \leq l \leq e_1).$$

La matrice

$$\left|\frac{1}{P^l} C(Y^\mu, X^\lambda)\right|, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, u;\ \mu = 1, 2, \ldots, v)$$

ha (mod P) *una caratteristica minore od uguale ad* $h_{m-1} - h_l$.

Si possono determinare (ed in infiniti modi) $h_{m-1} - h_l$ *soluzioni dell'uno e dell'altro sistema di congruenze per le quali la matrice* (9) *abbia* (mod P) *la caratteristica* $h_{m-1} - h_l$.

Per $l = m = 1$, e nel caso che il divisore P sia lineare il teorema dimostrato si riduce ad un noto teorema di Stickelberger (*).

d) Siano $X_k^{(\rho)}$, $Y_i^{(\sigma)}$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h)$ due sistemi canonici arbitrarî, relativi al divisore P, l'uno per le righe, l'altro per le colonne di $D(\omega)$; le $X_k^{(\rho)}$, $Y_i^{(\sigma)}$ si esprimeranno per le $\overline{X}_k^{(\alpha)}$, $\overline{Y}_i^{(\alpha)}$ date dalle (4) e (4)' con formole analoghe alle (7)'. Facciamo allora nel teorema precedente $l = m$ e $\lambda, \mu = h_l + 1, \ldots, h_{l-1}$; i due determinanti:

$$|M_\alpha^\lambda|, \quad |N_\alpha^\mu|, \quad (\alpha, \lambda, \mu = h_l + 1, \ldots, h_{l-1})$$

sono allora $\equiv\equiv 0$ (mod P), (n.° 5). Abbiamo quindi il teorema:

Siano $X_k^{(\rho)}$, $Y_i^{(\sigma)}$ *due sistemi canonici arbitrari, relativi al divisore* P, *l'uno per le righe, l'altro per le colonne di* $D(\omega)$. *Il determinante di ordine* $h_{l-1} - h_l$

$$\left|\frac{1}{P^l} C(Y^\mu, X^\lambda)\right|, \quad (\lambda, \mu = h_l + 1, \ldots, h_{l-1};\ l = 1, 2, \ldots, e_1) \tag{10}$$

è $\equiv\equiv 0$ (mod P).

20. Siano $X_k^{(\rho)}$, $Y_i^{(\sigma)}$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h)$ due sistemi canonici per il divisore P e per le righe e per le colonne di $D(\omega)$; si avrà:

$$\sum c_{ik} X_k^{(\rho)} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ P^{e_\rho}), \quad \sum c_{ik} Y_i^{(\sigma)} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ P^{e_\sigma}), (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h;\ i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Indicando con $e_{\rho\sigma}$ il maggiore dei due esponenti e_ρ, e_σ, possiamo porre:

$$C(Y^\sigma, X^\rho) = P^{e_{\rho\sigma}} Q_{\rho\sigma}, \quad (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h)$$

dove $Q_{\rho\sigma}$ è un polinomio in ω, perfettamente determinato, di grado minore

(*) Cf. ad es. Muth, l. c., pag. 190.

od uguale a $g(e_\rho + e_\sigma - e_{\rho\sigma}) - 1$ e gli e_1 determinanti:

$$|Q_{\rho\sigma}|, \quad (\rho,\ \sigma = h_l + 1, \ldots, h_{l-1};\ l = 1,\ 2, \ldots,\ e_1)$$

sono inoltre (n.° 19, d) $\equiv\!\equiv 0 \pmod P$.

Questo risultato può invertirsi col teorema seguente.

Si abbiano h^2 polinomî $Q_{\rho\sigma}$ $(\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h)$ dei gradi $(e_\rho + e_\sigma - e_{\rho\sigma})\,g - 1$, affatto arbitrarî, ma tali che gli e_1 determinanti:

$$|Q_{\rho\sigma}|, \quad (\rho,\ \sigma = h_l + 1, \ldots, h_{l-1};\ l = 1,\ 2, \ldots,\ e_1) \tag{11}$$

siano diversi da zero (mod P); *e sia:*

$X_k^{(\rho)}$, $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1,\ 2, \ldots,\ h)$ $[Y_i^{(\sigma)},\ (i = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1,\ 2, \ldots,\ h)]$

un sistema canonico per il divisore P e per le righe [per le colonne] di $D(\omega)$.

È possibile, ed in un modo solo, associare al sistema $X\,[Y]$ un sistema canonico Y, $[X]$ per il divisore P e per le colonne [per le righe] di $D(\omega)$, per il quale si abbia:

$$C(Y^\sigma,\ X^\rho) = P^{e_{\rho\sigma}}\,Q_{\rho\sigma}, \quad (\rho,\ \sigma = 1,\ 2, \ldots,\ h). \tag{12}$$

Due tali sistemi Y, X si diranno *associati* al sistema (11) dei polinomi $Q_{\rho\sigma}$.

Sia ad es.: $X_k^{(\rho)}$ il sistema canonico dato, $Y_i^{(\sigma)}$ quello che si cerca; essi si esprimeranno per i due sistemi $\bar{X}^{(\alpha)}$, $\bar{Y}^{(\sigma)}$ che abbiamo definito al n.° 19 a) al modo seguente:

$$\left\{\begin{array}{l} X_k^{(\lambda)} \equiv \sum\limits_{1}^{h_{l-1}}{}_r\, M_r^{(\lambda)}\, \bar{X}_k^{(r)}(\omega) + \sum\limits_{1}^{l-1}{}_\rho\, P^{l-\rho} \sum\limits_{h_\rho+1}^{h_{\rho-1}}{}_{t_\rho}\, M_{t_\rho}^{(\lambda)}\, \bar{X}_k^{(t_\rho)}(\omega) \pmod{P^{l}} \\ \qquad\qquad (\text{per } h_l < \lambda \leq h_{l-1},\ l = 1,\ 2, \ldots,\ e_1) \\ Y_i^{(\mu)} \equiv \sum\limits_{1}^{h_{m-1}}{}_s\, N_s^{(\mu)}\, \bar{Y}_i^{(s)}(\omega) + \sum\limits_{1}^{m-1}{}_\sigma\, P^{m-\sigma} \sum\limits_{h_\sigma+1}^{h_{\sigma-1}}{}_{u_\sigma}\, N_{u_\sigma}^{(\mu)}\, \bar{Y}_i^{(u_\sigma)}(\omega) \pmod{P^{m}} \\ \qquad\qquad (\text{per } h_m < \mu \leq h_{m-1};\ m = 1,\ 2, \ldots,\ e_1) \end{array}\right.$$

ed i polinomî M saranno noti, i polinomî N si devono invece determinare secondo le condizioni del teorema.

Cominciamo dal dimostrare che i polinomî N possono determinarsi rispetto al modulo P in modo che si abbia intanto:

$$\frac{1}{P^{e_{\rho\sigma}}} C(Y^\sigma, X^\rho) \equiv Q_{\rho\sigma} (\mathrm{mod}\, P), \quad (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h). \tag{12$_1$}$$

Ricordiamo intanto che per la formula (8) si ha:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{1}{P^l} C(Y^\mu, X^\lambda) \equiv \sum\limits_{h_l+1}^{h_{m-1}} {}_\sigma M_\alpha^{(\lambda)} N_\alpha^{(\mu)} Q_\sigma (\mathrm{mod}\, P) \\ \text{per} \quad h_l < \lambda \leq h_{l-1}, \quad h_m < \mu \leq h_{m-1} \quad \text{ed} \quad l \geq m; \end{array}\right\} \tag{13}$$

quando sia invece $h_l < \lambda \leq h_{l-1}$, $h_m < \mu \leq h_{m-1}$ ed $l \leq m$, si ha, ancora per la (8):

$$\frac{1}{P^m} C(Y^\mu, X^\lambda) \equiv \sum_{h_m+1}^{h_{l-1}} {}_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} N_\alpha^{(\mu)} Q_\sigma (\mathrm{mod}\, P). \tag{13$'$}$$

Le condizioni cui devono soddisfare i polinomi $N_\alpha^{(\mu)} (\mathrm{mod}\, P)$ $(h_m < \mu \leq h_{m-1})$ sono quindi:

$$\left.\begin{array}{l} \text{per } l \geq m, \quad (a) \quad \sum\limits_{h_l+1}^{h_{m-1}} {}_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} N_\alpha^{(\mu)} Q_\sigma \equiv Q_{\lambda\mu} (\mathrm{mod}\, P) \\ \text{per } l \leq m, \quad (b) \quad \sum\limits_{h_m+1}^{h_{l-1}} {}_\sigma M_\alpha^{(\lambda)} N_\alpha^{(\mu)} Q_\alpha \equiv Q_{\lambda\mu} (\mathrm{mod}\, P) \\ (h_l < \lambda \leq h_{l-1},\ h_m < \mu \leq h_{m-1},\ l, m = 1, 2, \ldots, e_1). \end{array}\right\} \tag{14}$$

Si dia ora ad m un valore fisso e facciamo $l = m$; dovremo avere:

$$\sum_{h_m+1}^{h_{m-1}} {}_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} N_\alpha^{(\mu)} Q_\alpha \equiv Q_{\lambda\mu} (\mathrm{mod}\, P) \quad (\lambda, \mu = h_m + 1, \ldots, h_{m-1}).$$

Ora è possibile, ed in un modo solo, determinare le $N_\alpha^{(\mu)}$ in guisa da soddisfare alle congruenze superiori; è infatti (n.° 5):

$$| M_\alpha^{(\lambda)} | \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, P), \ (\alpha, \lambda = h_m + 1, \ldots, h_{m-1}).$$

Facciamo poi $l = m + 1, \ldots, e_1$; $l = m - 1, m - 2, \ldots, 1$, le (14) (a) (b) determinano successivamente $(\mathrm{mod}\, P)$ le N_α^μ $(\alpha = h_l + 1, \ldots, h_{l-1})$, in quanto si ha ogni volta un sistema di $h_{l-1} - h_l$ congruenze lineari il cui determinante $|M_\alpha^{(\lambda)}|$, $(\alpha, \lambda = h_l + 1, \ldots, h_{l-1})$ è $\not\equiv 0$ $(\mathrm{mod}\, P)$. Per $m = 1, 2, \ldots, e_1$ ne segue la nostra asserzione.

Si osservi che con ciò sono completamente determinati i polinomî

$N_\alpha^{(\mu)}$, $(\mu = 1, 2, \ldots, h;\ \alpha = h_1 + 1, \ldots, h)$ i quali, come le $P_{\alpha\mu}$ relative, hanno il grado $g - 1$.

Procediamo ora per induzione, ed ammettiamo sia possibile determinare, ed in un modo solo, le N_α^μ, $(\alpha, \mu = 1, 2, \ldots, h)$ (mod P^s) $(s < e_1)$, in guisa che valgano le congruenze:

$$\frac{1}{P^{r_{\varrho\sigma}}} C(Y^\sigma, X^\varrho) \equiv Q_{\varrho\sigma} \pmod{P^s}, \tag{12$_s$}$$

(ciò che determina completamente le N_α^μ, $(\mu = 1, 2, \ldots, h;\ \alpha = h_s + 1, \ldots, h)$) e dimostriamo che è possibile determinare le N_α^μ, $(\mu = 1, 2, \ldots, h_s;\ \alpha \geqq h_s)$ in guisa che si abbia ancora:

$$\frac{1}{P^{r_{\varrho\sigma}}} C(Y^\sigma, X^\varrho) \equiv Q_{\varrho\sigma} \pmod{P^{s+1}}. \tag{12$_{s+1}$}$$

Per quanto precede basterà occuparsi delle N_α^μ, per le quali α è minore od uguale ad h_s. Si abbia già:

$$\frac{1}{P^{r_{\lambda\mu}}} \sum_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} \overline{N}_\alpha^{(\mu)} Q_\alpha \equiv Q_{\lambda\mu} \pmod{P^s} \quad (h_l < \lambda \leqq h_{l-1},\ h_m < \mu \leqq h_{m-1};\ e_1 \geqq l,\ m \geqq s)$$

(dove ogni volta i valori che deve assumere l'indice α sono determinati dalle (13) essendo le $\overline{N}_\alpha^{(\mu)}$ determinate (mod P^s) e si ponga:

$$N_\alpha^{(\mu)} \equiv \overline{N}_\alpha^{(\mu)} + P^s \overline{\overline{N}}_\alpha^{(\mu)} \pmod{P^{s+1}}$$

essendo le $\overline{\overline{N}}_\alpha^{(\mu)}$ da determinare (mod P). Si avran da soddisfare le congruenze:

$$\frac{1}{P^{r_{\lambda\mu}}} \sum_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} (\overline{N}_\alpha^{(\mu)} + P^s \overline{\overline{N}}_\alpha^{(\mu)}) Q_\alpha \equiv Q_{\lambda\mu} \pmod{P^{s+1}},$$

o posto:

$$-\frac{1}{P^{r_{\lambda\mu}}} \sum_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} \overline{N}_\alpha^{(\mu)} Q_\alpha + Q_{\lambda\mu} \equiv P^s \cdot q_{\lambda\mu} \pmod{P^{s+1}},$$

le congruenze:

$$P^s \left\{ \frac{1}{P^{r_{\lambda\mu}}} \sum_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} \overline{\overline{N}}_\alpha^{(\mu)} Q_\alpha \right\} \equiv P^s q_{\lambda\mu} \pmod{P^{s+1}},$$

cioè

$$\frac{1}{P^{r_{\lambda\mu}}} \left\{ \sum_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} \overline{\overline{N}}_\alpha^{\mu} Q_\alpha \right\} \equiv q_{\lambda\mu} \pmod{P};$$

il che è possibile, ed *in un modo solo*, ripetendo le considerazioni fatte per le (14). Facendo $s = 1, 2, \ldots, e_1 - 1$, si ha che è possibile determinare le N^{μ}_{α}, $(\alpha, \mu = 1, 2, \ldots, h)$ in guisa che si abbia:

$$\frac{1}{P^{r_{\rho\sigma}}} C(Y^{\sigma}, X^{\rho}) \equiv Q_{\rho\sigma} \pmod{P^{r_{\rho} + r_{\sigma} - r_{\rho\sigma}}};$$

e poichè ambedue i membri delle congruenze superiori hanno un grado minore di $(e_{\rho} + e_{\sigma} - e_{\rho\sigma})\, g$, sarà infine:

$$C(Y^{\sigma}, X^{\rho}) = Q_{\rho}^{\sigma} P^{r_{\rho\sigma}}, \quad (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h)$$

il che dimostra il teorema enunciato.

Secondo questo teorema i polinomî Q, quando soddisfino alle condizioni superiori relative al loro grado e ai determinanti (minori) principali:

$$|\, Q_{\sigma\rho} \,|, \quad (\rho, \sigma = h_l + 1, \ldots, h_{l-1};\ l = 1, 2, \ldots, e_1),$$

sono del tutto arbitrarî. Il loro insieme dipende, come dimostra un calcolo semplicissimo, da

$$g \sum h_i^2 = g\, \{ l_0 + 2(l_1 + l_2 + \cdots + l_{h-1}) \} = g\, L$$

parametri arbitrarî, il che è in completo accordo col teorema sopra dimostrato.

21. Riprendiamo le congruenze (1) del n.° 18 e poniamovi:

$$X_k = \sum_{u=0}^{g-1} \sum_{v=0}^{l-1} x_k^{(rg+u)} \omega^u P^v; \quad Y_i = \sum_{u'=0}^{g'-1} \sum_{v'=0}^{l'-1} y_i^{(r'g'+u')} \omega^{u'} P^{v'}; \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n); \qquad (15)$$

dalle (1) stesse si avrà, confrontando i termini di grado maggiore:

$$(a) \sum_{k=1}^{n} c_{ik} X_k = - P^{l} B_i (x^{lg-1}), \quad (b) \sum_{i=1}^{n} c_{ik} Y_i = - P^{l'} \overline{B}_k (y^{l'g'-1}), \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (15)'$$

Ne segue anche:

$$C(Y, X) = - P^{l} B(Y, x^{lg-1}) = - P^{l'} B(y^{l'g'-1}, X). \qquad (16)$$

a) Supponiamo ora che si abbia identicamente, per le soluzioni considerate:

$$C(Y, X) = 0 \qquad (20)$$

(questo in particolare accadrà quando sia $P \quad P'$ (n.° 18)); *si avrà anche:*

$$B(Y, x^{lg-1}) = B(y^{l'g'-1}, X) = 0$$

e perciò:

$$B(y^s, x^{lg-1}) = 0,\ B(y^{l'g'-1}, x^r) = 0,\ (r = 0, 1, \ldots, lg-1;\ s = 0, 1, \ldots, l'g'-1). \quad (17)$$

b) Sia ora $P = P'$ ed insieme $l \geqq l'$; la (16) dà allora:

$$B(y^{l'g-1}, X) = P^{l-l'} B(Y, x^{lg-1}), \qquad (16)^*$$

donde come sopra si traggono le identità:

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & B(y^{l'g-1}, x^r) = 0, \quad \text{per } r < (l-l')g; \\ & \qquad\qquad (r = 0, 1, \ldots, lg-1) \\ (b) & B(y^{l'g-1}, x^r) = B(y^{r-(l-l')g}, x^{lg-1}), \quad \text{per } r \geqq (l-l')g. \end{array}\right\} \quad (18)$$

La (16)* conduce ancora ad un'altra proprietà notevolissima.

Deriviamo le (15′, *b*) rispetto ad ω; avremo:

$$\sum_1^n{}_i\, c_{ik} \frac{dY_i}{d\omega} - B_k(Y) = -l' P^{l'-1} \frac{dP}{d\omega} \bar{B}_k(y^{l'g-1}),$$

e moltiplicando per X_k e sommando, si ottiene:

$$C\left(\frac{dY}{d\omega}, X\right) - B(Y, X) = -l' P^{l'-1} \frac{dP}{d\omega} B(y^{l'g-1}, X)$$

e per le (16), (16)*:

$$C\left(\frac{dY}{d\omega}, X\right) - B(Y, X) = -l' P^{l-1} \frac{dP}{d\omega} B(Y, x^{lg-1}) = l' \frac{d\log P}{d\omega} C(Y, X).$$

Ne segue, rispetto al modulo P', la relazione notevole:

$$B(Y, X) \equiv -l' \frac{d\log P}{d\omega} C(Y, X) \pmod{P'}, \qquad (19)$$

o ciò che è lo stesso:

$$\left.\begin{array}{l} B(Y, X) \equiv 0 \pmod{P^{l'-1}}, \\ \dfrac{1}{P^{l'-1}} B(Y, X) \equiv -l' \dfrac{dP}{d\omega} \dfrac{1}{P} C(Y, X) \pmod{P}. \end{array}\right\} \qquad (20)$$

c) Più generalmente si ponga, indicando con ω_1 una costante arbitraria:

$$C_{\omega_1}(Y, X) = (A - \omega_1 B)(Y, X) = \sum_{ik} (a_{ik} - \omega_1 b_{ik}) Y_i X_k ;$$

si avrà:

$$C_{\omega_1}(Y, X) = C(Y, X) + (\omega - \omega_1) B(Y, X),$$

e per la (19):

$$C_{\omega_1}(Y, X) \equiv - l'(\omega - \omega_1) \frac{d \log P}{d \omega} C(Y, X) \pmod{P'}, \tag{19*}$$

cioè:

$$\left. \begin{aligned} & C_{\omega_1}(Y, X) \equiv 0 \pmod{P^{l-1}}, \\ & \frac{1}{P^{l-1}} C_{\omega_1}(Y, X) \equiv - l'(\omega - \omega_1) \frac{d P}{d \omega} \frac{1}{P^l} C(Y, X) \pmod{P}. \end{aligned} \right\} \tag{20*}$$

Si supponga ora P diverso da $\omega - \omega_1$; è allora $(\omega - \omega_1) \frac{d P}{d \omega}$ primo con P e si ricordino i due teoremi *c*), *d*) del n.° 19. Dalle (20), (20)* si ha subito che *due teoremi affatto identici valgono per le matrici:*

$$\left| \frac{1}{P^{l-1}} B(Y^\mu, X^\lambda) \right|, \qquad \left| \frac{1}{P^{l-1}} C_{\omega_1}(Y^\mu, X^\lambda) \right|$$

analoghe alle matrici (9) e (10) *ivi considerate.*

Quando poi sia $P = \omega - \omega_1$ si ha semplicemente:

$$C_{\omega_1}(Y, X) = -(l' - 1) C(Y, X). \tag{20**}$$

donde si traggono conclusioni analoghe.

Matrici canoniche associate per il determinante $D(\omega)$.

22. I risultati ottenuti sui sistemi canonici per le righe e le colonne di $D(\omega)$ conducono a relazioni notevoli tra due matrici canoniche tratte da essi sistemi.

Supponiamo perciò nuovamente che per le due soluzioni X, Y delle congruenze (1) del n.° 18 si abbia:

$$C(Y, X) = 0;$$

avremo allora le (17) del n.° precedente:

$$B(y^s, x^{lg-1}) = B(y^{l'g'-1}, x^r) = 0 \ (r = 0, 1, \dots, lg - 1; \ s = 0, 1, \dots, l'g' - 1). \quad (17)$$

Osserviamo ora che insieme colle X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) anche le $\overline{X}_k$, definite dalle congruenze:

$$\overline{X}_k(\omega) \equiv M(\omega) \, . \, X_k(\omega) \ (\mathrm{mod}\ P')$$

dove:

$$M(\omega) \equiv \sum_0^{l-1}{}_r \sum_0^{g-1}{}_s \mu_{gr+s} \, \omega^s \, P^r \ (\mathrm{mod}\ P')$$

è un polinomio arbitrario (mod P'), dànno una soluzione delle $(1)_n$; posto dunque:

$$\overline{X}_k \equiv \sum_0^{l-1}{}_r \sum_0^{g-1}{}_s \overline{x}_k^{rg+s} \, \omega^s \, P^r \ (\mathrm{mod}\ P'),$$

insieme colle (17) si avranno anche le altre identità:

$$B(y^s, \overline{x}^{lg-1}) = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, l'g' - 1). \qquad (\overline{17})$$

Osserviamo ora che le $\overline{x}_k^r$ sono delle forme bilineari nelle x_k^r e nelle μ ed è facile vedere che possiamo prendere le μ in guisa che nelle $\overline{x}_k^{lg-1}$ vengano a mancare tutte le x_k^r, tranne una fissa $x_k^{r_0}$ di esse. Si hanno infatti in tal guisa $lg - 1$ equazioni lineari omogenee nelle μ stesse, alle quali è dunque possibile di soddisfare con valori delle μ non tutti nulli. Determinate in tal guisa le μ (od i loro rapporti) non può accadere che si annulli il coefficiente delle $x_k^{r_0}$, altrimenti si avrebbe $\overline{x}_k^{lg-1} = 0$ per $k = 1, 2, \dots, n$ e quindi ogni $\overline{X}_k$ avrebbe un grado minore di $gl - 1$ e sarebbe perciò identicamente nulla, il che non è se non tutte le μ sono nulle. Saranno quindi le $\overline{x}_k^{lg-1}$ proporzionali alle $x_k^{r_0}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) e dalle $(\overline{17})$ si ottengono così le relazioni notevolissime:

$$B(y^s, x^r) = 0, \quad (r = 0, 1, \dots, lg - 1; \ s = 0, 1, \dots, l'g' - 1). \qquad (17)^*$$

Insieme con queste si avrà anche, con simboli analoghi:

$$\left.\begin{array}{c} A(y^s, x^r) = 0, \ (A - \omega_1 B)(y^s, x^r) = C_{\omega_1}(y^s, x^r) = 0; \\ (r = 0, 1, \dots, lg - 1; \ s = 0, 1, \dots, l'g' - 1). \end{array}\right\} \qquad (17)^{**}$$

Infatti per le equazioni cui soddisfano le y^s (o le x^r), le $A(y^s, x^r)$ e perciò anche le $C_{\omega_1}(y^s, x^r)$ si esprimono linearmente ed omogeneamente per le $B(y^s, x^r)$.

Dalle (17)*, (17)** si ha poi evidentemente:

$$B\left(\frac{d^\mu Y}{d\,\omega^\mu}, \frac{d^\nu X}{d\,\omega^\nu}\right) = C_{\omega_1}\left(\frac{d^\mu Y}{d\,\omega^\mu}, \frac{d^\nu X}{d\,\omega^\nu}\right) = C\left(\frac{d^\mu Y}{d\,\omega^\mu}, \frac{d^\nu X}{d\,\omega^\nu}\right) = 0\,, \qquad (20)^*$$

qualunque siano gli intieri μ e ν, positivi o nulli e per qualunque ω_1; queste relazioni sono dunque conseguenza della (20).

23. Sia ora nelle (1) $P = P'$ ed insieme $l \geq l'$. Indicando con t un intero qualunque, non maggiore di l', poniamo

$$Y_i \equiv Y_i^{(t)} \pmod{P'}\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sarà dalle $(15)_b$:

$$Y_i^{(t)} = \sum_0^{g-1}{}_{u'} \sum_0^{t-1}{}_{v'} y_i^{v'g+u'} \omega^{u'} P^{v'}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ed insieme

$$C(Y^{(t)}, X) = -P' B(Y^{(t)}, x^{tg-1}) = -P' B(y^{tg-1}, X) \qquad (16)_t$$

donde

$$B(y^{tg-1}, X) = P^{l-t} B(Y^{(t)}, x^{tg-1}), \quad (1 \leq t \leq l'). \qquad (21)_t$$

Ne seguono le identità:

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & B(y^{tg-1}, x^r) = 0, \ \text{per} \ r < (l-t)\,g;\ t = 1, 2, \ldots, l'. \\ (b) & B(y^{tg-1}, x^r) = B(y^{r-(l-t)g}, x^{tg-1}), \ \text{per} \ r \geq (l-t)\,g;\ t = 1, 2, \ldots, l'. \end{array}\right\} \quad (22)$$

Usiamo ora il solito artificio e sostituiamo alle $Y_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ le $\overline{Y}_i$ definite da:

$$\overline{Y}_i \equiv M(\omega)\, Y_i(\omega) \pmod{P''}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

con:

$$M(\omega) \equiv \sum_0^{l'-1}{}_\alpha \sum_0^{g-1}{}_\beta \mu_{\alpha g+\beta}\, \omega^\beta P^\alpha \pmod{P''};$$

si avranno le altre relazioni:

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & B(\overline{y}^{tg-1}, x^r) = 0;\quad t = 1, 2, \ldots, l',\quad r < (l-t)\,g; \\ (b) & B(\overline{y}^{tg-1}, x^r) = B(\overline{y}^{r-(l-t)g}, x^{tg-1});\quad t = 1, 2, \ldots, l',\quad r \geq (l-t)\,g. \end{array}\right\} \quad (\overline{22})$$

Dalle $(\overline{22}, a)$ si hanno, come al n.° antecedente, le relazioni notevolissime:

$$B(y^{r'g+u'}, x^{rg+u}) = 0, \quad \text{per} \quad v + v' < l - 1; \quad u, u' = 0, 1, \ldots, g-1; \quad (23)_a$$

ed altre relazioni si avrebbero confrontando nei due membri delle $(22, b)$ i coefficienti delle stesse μ. Non scriviamo queste relazioni nel caso generale, poichè non hanno una forma semplice e non ci occorrono nel seguito. Ci limitiamo a darle nel caso che il divisore F abbia il primo grado. È allora $g = 1$ ed insieme:

$$\bar{y}^r = \sum_0^v {}_\alpha \mu_\alpha y^{r-\alpha}, \quad (v = 0, 1, \ldots, l' - 1)$$

e le $(\bar{22}, b)$ danno le identità:

$$\left.\begin{array}{c} B(y^s, x^r) = B(y^{s+\alpha}, x^{r-\alpha}), \\ (r + s \geqq l - 1;\ r = 0, 1, \ldots, l-1;\ s = 0, 1, \ldots, l' - 1;\ s + \alpha \geqq 0,\ r - \alpha \geqq 0). \end{array}\right\} (23)_b$$

Nel caso generale (facendo nelle $(\overline{22})$ $t = l'$) si hanno dalle $(\overline{22})$ $l'g(lg - 1)$ (per $r = 0, 1, \ldots, lg - 2$) relazioni lineari omogenee nelle

$$B(y^s, x^r), \ (r = 0, 1, \ldots, lg - 1;\ s = 0, 1, \ldots, l'g - 1),$$

di cui le $(23)_\alpha$ sono una parte. *Queste $l'g(lg-1)$ relazioni sono tutte indipendenti.* Aggiungiamo infatti ad esse le $l'g$ relazioni:

$$B(y^s, x^{lg-1}) = 0, \quad (s = 0, 1, \ldots, l'g - 1); \tag{24}$$

si avrà allora:

$$B(Y, x^{lg-1}) = 0$$

e per la (16) del n.° 21 anche:

$$C(Y, X) = 0,$$

donde (n.° 22) si trae:

$$B(y^s, x^r) = 0, \quad (r = 0, 1, \ldots, lg - 1, \quad s = 0, 1, \ldots, l'g - 1)$$

Quindi le relazioni che si hanno delle $(\overline{22})$ insieme colle (24) formano un sistema di $ll'g^2$ equazioni lineari omogenee nelle $ll'g^2$ quantità $B(y^s, x^r)$ che hanno come unica soluzione la soluzione identicamente nulla; *il loro determinante è quindi diverso da zero.*

È così dimostrata la nostra asserzione; si ha di più un altro risultato.

Per le soluzioni X, Y delle (1) si ha:

$$C(Y, X) = P' . Q \tag{16)**}$$

dove:

$$Q = - B\,(Y,\ x^{l'g-1}) \tag{16}^{***}$$

è un polinomio determinato di grado $l'g - 1$. *La conoscenza del polinomio Q determina in modo unico le $B\,(y^s, x^r)$, $(r = 0, 1, \ldots, lg - 1;\ s = 0, 1, \ldots, l'g - 1)$*; per quanto precede infatti si hanno in tal guisa $l\,l'g^2$ equazioni lineari nelle $B\,(y^s, x^r)$ stesse, il cui determinante è diverso da zero. Sono allora determinate anche, in modo unico, le $C_{\omega_1}(y^s, x^r)$, con ω_1 qualunque (n.º 22).

24. *a*) Supponiamo in particolare che il divisore P sia lineare, sia:

$$P = \omega - \omega_0.$$

In questa ipotesi se è:

$$Q = \sum_0^{l'-1} {}_t\, q_t\,(\omega - \omega_0)^t,$$

si avrà dalla $(16)^{***}$ (poichè $g = 1$):

$$B\,(y^t,\ x^{l-1}) = - q_t = - \frac{1}{t\,!} \left\{ \frac{\partial^t Q}{\partial \omega^t} \right\}_{\omega = \omega_0}$$

e quindi, per le (23) *a*), *b*), è anche (con $l \geqq l'$):

$$\left.\begin{array}{c} B\,(y^s,\ x^r) = 0, \quad \text{per} \quad 0 \leqq r + s < l - 1; \\ B\,(y^s,\ x^r) = - q_{r+s-l+1} = - \dfrac{1}{(r + s - l + 1)\,!} \left\{ \dfrac{\partial^{r+s-l+1} Q}{\partial \omega^{r+s-l+1}} \right\}_{\omega = \omega_0}; \\ l - 1 \leqq r + s \leqq l + l' - 2; \\ (r = 0, 1, \ldots, l - 1;\ s = 0, 1, \ldots, l' - 1). \end{array}\right\} \tag{23}'$$

Avendosi inoltre dalle (24)′ del n.º 8:

$$A\,(y^s,\ x^r) = \omega_0\, B\,(y^s,\ x^r) + B\,(y^{s-1},\ x^r)$$

sarà anche:

$$\left.\begin{array}{c} A\,(y^s,\ x^r) = 0, \quad \text{per} \quad r + s < l - 1; \\ A\,(y^s,\ x^r) = - \{\omega_0\, q_{r+s-l+1} + q_{r+s-l}\}, \quad \text{per} \quad l - 1 \leqq r + s \leqq l + l' - 2; \\ (r = 0, 1, \ldots, l - 1,\ s = 0, 1, \ldots, l' - 1). \end{array}\right\} \tag{23}''$$

b) Sia ora $Q_{\rho\sigma}$, $(\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h)$ un sistema di h^2 polinomi in ω determinati in guisa da soddisfare al teorema del n.° 20, e siano:

$$X^{(\rho)},\ Y^{(\sigma)},\ (\rho,\ \sigma = 1,\ 2, \ldots,\ h)$$

due sistemi associati al sistema $Q_{\rho\sigma}$; poniamo:

$$\left.\begin{array}{l} Q_{\rho\sigma} \equiv \sum\limits_{0}^{\eta_{\rho\sigma}-1}{}_{r}\ q_r^{(\rho\sigma)} (\omega - \omega_0)^r, \quad (\eta_{\rho\sigma} = e_\rho + e_\sigma - e_{\rho\sigma}), \\ X_k^{(\rho)} \equiv \sum\limits_{0}^{e_\rho-1}{}_{r}\ x_k^{\rho,r} (\omega - \omega_0)^r \ (\mathrm{mod}\, (\omega - \omega_0)^{e_\rho}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\rho,\ \sigma = 1,\ 2, \ldots, h) \\ Y_i^{(\sigma)} \equiv \sum\limits_{0}^{e_\sigma-1}{}_{s}\ y_i^{\sigma,s} (\omega - \omega_0)^s \ (\mathrm{mod}\, (\omega - \omega_0)^{e_\sigma}); \end{array}\right\} \quad (25)$$

dalle relazioni precedenti si ha subito:

$$\left.\begin{array}{l} B(y^{\sigma,s},\ x^{\rho,r}) = 0, \quad \text{per} \quad r + s < e_{\rho\sigma} - 1; \\ B(y^{\sigma,s},\ x^{\rho,r}) = -\, q^{(\rho\sigma)}_{r+s-\eta_{\rho\sigma}+1}, \quad \text{per} \quad r + s \geqq e_{\rho\sigma} - 1; \\ \qquad\qquad (r = 0,\ 1, \ldots,\ e_\rho - 1;\ s = 0,\ 1, \ldots,\ e_\sigma - 1) \end{array}\right\} \quad (26)_a$$

$$\left.\begin{array}{l} A(y^{\sigma,s},\ x^{\rho,r}) = 0 \\ A(y^{\sigma,s},\ x^{\rho,r}) = -\,\omega_0\, q^{(\rho\sigma)}_{r+s-\eta_{\rho\sigma}+1} - q^{(\rho\sigma)}_{r+s-\eta_{\rho\sigma}}, \quad (q^{\rho\sigma}_{-1} = 0). \end{array}\right\} \quad (26)_b$$

c) Consideriamo il caso particolarissimo in cui si abbia:

$$Q_{\rho\sigma} = 0, \quad \text{per} \quad \rho \mathrel{=}\!\!\!|\ \sigma \quad \text{e} \quad Q_{\rho\rho} = -1; \quad (27)$$

si ha in questo caso, per due sistemi associati $X^{(\rho)}$, $Y^{(\sigma)}$:

$$\left.\begin{array}{l} A(y^{\sigma,s},\ x^{\rho,r}) = B(y^{\sigma,s},\ x^{\rho,r}) = 0, \quad \text{per} \quad \sigma \mathrel{=}\!\!\!|\ \rho, \\ (r = 0,\ 1, \ldots,\ e_\rho - 1;\ s = 0,\ 1, \ldots,\ e_\sigma - 1) \end{array}\right\} \quad (28)_a$$

per $\rho = \sigma$ è invece, col simbolo δ di KRONECKER:

$$\left.\begin{array}{l} B(y^{\rho,s},\ x^{\rho,r}) = \delta_{r+s-e_\rho+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (r,\ s = 0,\ 1, \ldots,\ e_\rho - 1) \\ A(y^{\rho,s},\ x^{\rho,r}) = \omega_0\, \delta_{r+s-e_\rho+1} + \delta_{r+s-e_\rho}, \end{array}\right\} \quad (28)_b$$

o brevemente:

$$\left.\begin{array}{l} B(y^{\sigma,s},\ x^{\rho,r}) = \delta_{\rho\sigma} \,.\, \delta_{r+s-e_\rho+1}, \\ A(y^{\sigma,s},\ x^{\rho,r}) = \delta_{\rho\sigma} \,.\, (\omega_0\, \delta_{r+s-e_\rho+1} + \delta_{r+s-e_\rho}). \end{array}\right\} \quad (28^*)$$

d) Dai due sistemi canonici $\bar{X}$, $\bar{Y}$ definiti al n.° 19 è facile dedurre due sistemi canonici associati al sistema (27). Si determinino infatti $2h$ polinomi $M_\alpha(\omega)$, $N_\alpha(\omega)$ determinati rispetto al modulo $(\omega - \omega_0)^{e_\alpha}$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, h)$ per i quali si abbia:

$$M_\alpha(\omega)\, N_\alpha(\omega)\, Q_\alpha \equiv -1 \; (\mathrm{mod}\, (\omega - \omega_0)^{e_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, h) \tag{29}$$

essendo Q_α espresso dalla (6) (con $P = \omega - \omega_0$). Uno dei polinomi stessi è completamente arbitrario, purchè $\not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,(\omega - \omega_0)^{e_\alpha})$ e posto:

$$\left.\begin{array}{c} \bar{\bar{X}}_k^{(\alpha)} \equiv M_\alpha \bar{X}_k^{(\alpha)}, \; \bar{\bar{Y}}_i^{(\alpha)} \equiv N_\alpha \bar{Y}_i^{(\alpha)} \; (\mathrm{mod}\,(\omega - \omega_0)^{e_\alpha}) \\ (i, k = 1, 2, \ldots, n; \; \alpha = 1, 2, \ldots, h) \end{array}\right\} \tag{29)*$$

saranno, come è chiaro dalla (5) del n.° 19, $\bar{\bar{X}}^{(\alpha)}$, $\bar{\bar{Y}}^{(\alpha)}$ due sistemi canonici associati al sistema (27) relativo al divisore $\omega - \omega_0$.

25. Quando il divisore P non ha il primo grado, la determinazione delle $B(y^s, x^r)$, $(r = 0, \ldots, lg - 1;\; s = 0, 1, \ldots, l'g - 1)$ *associate* ad un polinomio Q di grado $l'g - 1$ (essendo $l \geqq l'$) è data dalla risoluzione di un sistema di equazioni lineari, la cui forma non è semplice. Terremo in questo caso una via inversa; supporremo date le $B(y^s, x^r)$ in guisa che sian soddisfatte le condizioni imposte dall'essere X, Y soluzioni delle congruenze (1) e determineremo dalla (16)*** del n.° 23 il polinomio Q che figura nella (16)**.

Conviene perciò tener conto delle condizioni cui devono soddisfare le $B(y^s, x^r)$. Queste condizioni (le quali comprendono evidentemente le relazioni date ai n. 22, 23) troviamo al modo seguente.

Siano

$$P_1^{e_1},\; P_2^{e_2}, \ldots,\; P_m^{e_m}$$

i divisori elementari di $D(\omega)$ e sia, come al n.° 11:

$$P_\rho = \omega^{g_\rho} + a_1^{(\rho)} \omega^{g_\rho - 1} + \ldots + a_{g_\rho - 1}^{(\rho)} \omega + a_{g_\rho}^{(\rho)}, \quad \left(\rho = 1, 2, \ldots, m;\; \sum_1^m{}_\rho\, g_\rho e_\rho = n\right)$$

siano poi:

$$X \equiv |x_k^{\rho, t_\rho}|, \quad Y \equiv |y_i^{\sigma, \tau_\sigma}|$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n;\; \rho, \sigma = 1, 2, \ldots, m;\; t_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho g_\rho - 1;$$
$$\tau_\sigma = 0, 1, \ldots, e_\sigma g_\sigma - 1)$$

due matrici quadrate di ordine n diverse da zero, ma affatto arbitrarie, e poniamo per brevità di scrittura:

$$\left.\begin{array}{l} B_{\rho,t_\rho;\sigma,\tau_\sigma} = B\,(y^{\sigma,\tau_\sigma},\ x^{\rho,t_\rho})\,; \quad A_{\rho,t_\rho;\sigma,\tau_\sigma} = A\,(y^{\sigma,\tau_\sigma};\ x^{\rho,t_\rho})\,; \\ (\rho, \sigma = 1,\ 2, \ldots,\ m;\ t_\rho = 0,\ 1, \ldots,\ e_\rho\, g_\rho - 1;\ \tau_\sigma = 0,\ 1, \ldots,\ e_\sigma\, g_\sigma - 1) \end{array}\right\} \tag{30}$$

sarà allora anche:

$$|\, B_{\rho,t_\rho;\sigma,\tau_\sigma} \,| = |\, B \,| \,.\, X \,.\, Y \mathrel{-|-} 0. \tag{30$'$}$$

Supponiamo ora che la matrice X sia canonica per le righe di $D\,(\omega)$; moltiplicando le $(24)'$ del n.° 8 per y_i^{σ,τ_σ}, e sommando rispetto all'indice i da 1 ad n, abbiamo le identità (nelle quali intendiamo che sian nulle le B in cui un indice t_ρ o τ_σ sia negativo):

$$\left.\begin{array}{l} A_{\rho,v g_\rho+u;\sigma,\tau_\sigma} = B_{\rho,v g_\rho+u-1;\sigma,\tau_\sigma} - a^{(\sigma)}_{g_\rho-u}\, B_{\rho,(v+1)g_\rho-1;\sigma,\tau_\sigma}\,; \\ (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, m;\ v = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1;\ u = 0, 1, \ldots, g_\rho - 1;\ \tau_\sigma = 0, 1, \ldots, e_\sigma\, g_\sigma - 1) \end{array}\right\} \tag{31}$$

inversamente, poichè la matrice Y si suppone diversa da zero, queste relazioni equivalgono alle $(24)_\rho$ del n.° 8; esse sono quindi caratteristiche per una matrice canonica X per le righe di $D\,(\omega)$.

Analogamente, se la matrice Y è canonica per le colonne di $D\,(\omega)$, si avranno le relazioni:

$$\left.\begin{array}{l} A_{\rho,t_\rho;\sigma,v' g_\sigma+u'} = B_{\rho,t_\rho;\sigma,v' g_\sigma+u'-1} - a^{(\sigma)}_{g_\sigma-u'}\, B_{\rho,t_\rho;\sigma,(v'+1)g_\sigma-1}\,; \\ (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, m;\ v' = 0, 1, \ldots, e_\sigma - 1;\ u' = 0, 1, \ldots, g_\sigma - 1;\ t_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho\, g_\rho - 1). \end{array}\right\} \tag{31$'$}$$

Se quindi ambedue le matrici X, Y sono canoniche, l'una per le righe, l'altra per le colonne di $D\,(\omega)$, si avranno le identità fondamentali:

$$\left.\begin{array}{l} B_{\rho,v g_\rho+u;\sigma,v' g_\sigma+u'} - a^{(\rho)}_{g_\rho-u}\, B_{\rho,(v+1)g_\rho-1;\sigma,v' g_\sigma+u'} = B_{\rho,v g_\rho+u;\sigma,v' g_\sigma+u'-1} - \\ \qquad\qquad - a^{(\sigma)}_{g_\sigma-u'}\, B_{\rho,v g_\rho+u;\sigma,(v'+1)g_\sigma-1} \\ (\rho,\ \sigma = 1,\ 2, \ldots,\ m;\quad v = 0,\ 1, \ldots,\ e_\rho - 1;\ v' = 0,\ 1, \ldots,\ e_\sigma - 1; \\ \qquad u = 0,\ 1, \ldots,\ g_\rho - 1;\quad u' = 0,\ 1, \ldots,\ g_\sigma - 1). \end{array}\right\} \tag{32}$$

Osserviamo esplicitamente che: *le identità superiori dipendono unicamente dai divisori elementari (nel campo R) del determinante $D\,(\omega)$.*

Inversamente si abbiano n^2 quantità $B_{\rho,t_\rho;\sigma,\tau_\sigma}$, il cui determinante sia diverso da zero e che soddisfino alle (32); o come diremo, si abbia una soluzione *propria* $B_{\rho,t_\rho;\sigma,\tau_\sigma}$ delle (32), e sia ad es. X una matrice canonica per le righe di $D\,(\omega)$; le prime n^2 delle (30) definiscono allora una matrice Y, la quale, per quanto precede, sarà canonica per le colonne di $D\,(\omega)$. Due tali matrici X, Y, evidentemente legate in ugual modo alla soluzione propria $B_{\rho, t_\rho; \sigma, \tau_\sigma}$ considerata, si diranno *associate a questa soluzione.* Ad ogni soluzione propria delle relazioni (32) sono quindi associate ∞^N coppie di matrici canoniche.

Segue anche di qui che la più generale soluzione propria delle (32) si ottiene dalle prime delle (30), quando sia X la più generale matrice canonica per le righe di $D(\omega)$, Y una particolare per le colonne (o inversamente, il che è lo stesso); una tal soluzione contiene quindi linearmente ed omogenamente $N = n_0 + 2(n_1 + n_2 \cdots + n_n)$ parametri arbitrarî.

E anche chiaro, che quando tutti i divisori $P_1, P_2, \ldots, P_m$ abbiano il 1.° grado (nel caso di Weierstrass), le $(26)_a$ del n.° 24 danno la più generale soluzione propria delle relazioni (32).

26. Nel caso generale si ha un sistema notevole di soluzioni delle relazioni (32) al modo seguente.

Cerchiamo di soddisfare alle (32) stesse ponendo (indicando $\delta_{\rho\sigma}$ il simbolo di Kronecker):

$$\left.\begin{array}{c} B_{\rho, t_\rho; \sigma, \tau_\sigma} = \delta_{\rho\sigma} \,.\, \vartheta^{(\rho)}_{t_\rho + \tau_\sigma}, \\ (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, m; \quad t_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho g_\rho - 1; \quad \tau_\sigma = 0, 1, \ldots, e_\sigma g_\sigma - 1) \end{array}\right\} \quad (33)$$

essendo le $\vartheta^{(\rho)}$ delle quantità da determinare. Per $t_\rho = -1$, si ha intanto dalle (33):

$$\vartheta^{(\rho)}_{s_\rho} = 0, \quad \text{per} \quad s_\rho < e_\rho g_\rho - 1; \qquad (34)_a$$

le (32) diventano poi identiche per $P_\rho = \omega$; per $P_\rho \mathrel{-\!\!|\!\!-} \omega$ diventano semplicemente:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\vartheta^{(\rho)}_{h g_\rho - 1}}{a^{(\rho)}_{g_\rho}} = \dfrac{\vartheta^{(\rho)}_{h g_\rho + u - 1}}{a^{(\rho)}_{g_\rho - u}}, \\ (h = e_\rho, e_\rho + 1, \ldots, 2e_\rho - 1; \quad u = 1, 2, \ldots, g_\rho - 1; \quad \rho = 1, 2, \ldots, m) \end{array}\right\} \quad (34)_b$$

e si soddisfa ad esse ponendo:

$$\left.\begin{array}{c} \vartheta^{(\rho)}_{h g_\rho + u - 1} = \Lambda^{(\rho)}_h \,.\, a^{(\rho)}_{g_\rho - u}, \\ \text{con:} \\ u = 0, 1, \ldots, g_\rho - 1; \; h = 0, 1, \ldots, 2e_\rho - 1; \; \Lambda^{(\rho)}_h = 0, \text{ per } h < e_\rho; \; \rho = 1, 2, \ldots, m. \end{array}\right\} \quad (34)_c$$

Con queste posizioni il determinante $|B_{\rho, t_\rho; \sigma, \tau_\sigma}|$ si riduce al prodotto

$$\prod_1^m {}_\rho \left| \vartheta^{(\rho)}_{e_\rho g_\rho - 1} \right|^{e_\rho g_\rho};$$

sarà quindi diverso da zero, quando, per $P_\rho \neq \omega$, si prenda $\Lambda^{(\varrho)}_{e_\varrho} \neq 0$, e per $P_\rho = \omega$ si prenda $\mathfrak{S}^{(\varrho)}_{e_\varrho} \neq 0$.

Otteniamo in questo modo una soluzione delle (32), la quale contiene $E = \sum_1^m {}_\rho\, e_\rho$ parametri arbitrarî. Per una tale soluzione le (30) e (31) diventano:

$$\left.\begin{array}{c}
B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\varrho} = A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} = 0, \quad \text{per } \rho \neq \sigma; \\
(\rho,\ \sigma = 1,\ldots,\ m;\ t_\rho = 0,\ 1,\ldots,\ e_\rho\, g_\rho - 1;\ \tau_\sigma = 0,\ 1,\ldots,\ e_\sigma\, g_\sigma - 1) \\
B_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho} = \Lambda^{(\varrho)}_h \,.\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho - t}, \ \text{con } u_\rho + v_\rho = h\, g_\rho + t - 1; \\
(\rho = 1,\ 2,\ldots,\ m;\ u_\rho,\ v_\rho = 0,\ 1,\ldots,\ e_\rho\, g_\rho - 1) \\
A_{\varrho,vg_\varrho+u;\varrho,v'g_\varrho+u'} = \Lambda^{(\varrho)}_h \,.\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho-t+1} - \Lambda^{(\varrho)}_{v+v'+1}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho-u}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho-u'}, \\
\text{per } (v + v')\, g_\rho + u + u' = h g_\rho + t - 1 \text{ e } t > 0, \quad \text{cioè per } u + u' \neq g - 1; \\
A_{\varrho,vg_\varrho+u;\varrho,v'g_\varrho+u'} = \Lambda^{(\varrho)}_{v+v'}\, a^{(\varrho)}_1 - \Lambda^{(\varrho)}_{v+v'+1}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho-u} \,.\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho-u'}, \ \text{per } u + u' = g - 1.
\end{array}\right\} \quad (35)$$

Per $P_\rho = \omega$ si ha semplicemente:

$$\left.\begin{array}{c}
B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} = A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\varrho} = 0, \quad \text{per } \rho \neq \sigma,\ (\rho, \sigma = 1,\ 2,\ldots,\ m); \\
B_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho} = \mathfrak{S}^{(\varrho)}_{u_\varrho+v_\varrho};\ A_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho} = \mathfrak{S}_{u_\varrho+v_\varrho-1},\ (\mathfrak{S}^{(\varrho)}_{s_\varrho=0} = 0 \quad \text{per } s_\rho < e_\rho - 1).
\end{array}\right\} \quad (35)'$$

Consideriamo il caso particolarissimo in cui si abbia:

$$\Lambda^{(\varrho)}_h = 0, \quad \text{per } h \neq e_\rho \ (\text{o per } P_\rho = \omega \text{ sia } \mathfrak{S}^{(\varrho)}_s = 0, \quad \text{per } s \neq e_\rho - 1),$$

essendo sempre $\Lambda^{(\varrho)}_{e_\varrho} \neq 0$ ($\mathfrak{S}^{(\varrho)}_{e_\varrho - 1} \neq 0$). La soluzione corrispondente delle (32) si dirà *la loro soluzione principale* e due matrici canoniche associate ad essa si diranno semplicemente *associate*. Le (35) in questo caso diventano:

$$\left.\begin{array}{c}
B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} = A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} = 0 \quad \text{per } \rho \neq \sigma; \\
B_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho} = \delta_{he_\varrho} \,.\, \mathbf{\Lambda}^{(\varrho)}_e \,.\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho-t}, \quad \text{per } u_\rho + v_\rho = h\, g_\rho + t - 1; \\
A_{\varrho,vg_\varrho+u;\varrho,v'g_\varrho+u'} = \mathbf{\Lambda}^{(\varrho)}_{e_\varrho} \left\{ \delta_{he_\varrho}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho-t+1} - \delta_{v+v'+1,e_\varrho}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho-u}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho-u'} \right\} \\
\text{per } t > 0, \text{ cioè } u + u' \neq g - 1; \\
A_{\varrho,vg_\varrho+u,\varrho,v'g_\varrho+u'} = \Lambda^{(\varrho)}_{e_\varrho} \left\{ \delta_{v+v',e_\varrho}\, a^{(\varrho)}_1 - \delta_{v+v'+1,e_\varrho}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho-u}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho-u'} \right\} \\
\text{per } t = 0, \text{ cioè } u + u' = g - 1; \\
(\rho = 1,\ 2,\ldots,\ m;\ v_\rho,\ u_\rho = 0,\ 1,\ldots,\ e_\rho\, g_\rho - 1;\ u,\ u' = 0,\ 1,\ldots,\ g_\rho - 1; \\
v,\ v' = 0,\ 1,\ldots,\ e_\rho - 1)
\end{array}\right\} \quad (35)^*$$

e per $P = \omega$:

$$\left.\begin{array}{c} B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} = A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} = 0, \quad \text{per} \quad \rho \neq \sigma; \\ (\rho,\ \sigma = 1,\ 2, \ldots,\ m;\ t_\rho = 0,\ 1, \ldots,\ e_\rho g_\rho - 1;\ \tau_\sigma = 0,\ 1, \ldots,\ e_\sigma g_\sigma - 1) \\ B_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho} = \delta_{u_\varrho + v_\varrho, e_\sigma - 1} \,.\, \mathfrak{S}^{(\rho)}_{e_\varrho};\ A_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho} = \delta_{u_\varrho + v_\varrho, e_\varrho} \,.\, \mathfrak{S}^{(\varrho)}_{e_\varrho}; \\ (\rho = 1,\ 2, \ldots,\ m;\ u_\rho,\ v_\rho = 0,\ 1, \ldots, e_\rho - 1). \end{array}\right\} \quad (35)'^*$$

Scriviamo le (35)* anche nel caso che P_ρ abbia il primo grado e sia $P_\rho = \omega - \omega_\rho$ (con $\omega_\rho \neq 0$). Abbiamo allora $g_\rho = 1$, $a^{(\varrho)}_{g_\varrho} = -\omega_\rho$ e prendendo $\Lambda^{(e_\varrho)}_\varrho = -\dfrac{1}{\omega_\rho}$, otteniamo le relazioni:

$$\left.\begin{array}{c} B_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho} = \delta_{u_\varrho + v_\varrho, e_\varrho - 1};\ A_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho} = \delta_{u_\varrho + v_\varrho, e_\varrho} + \omega_\rho\ \delta_{u_\varrho + v_\varrho, e_\varrho - 1}; \\ (\rho = 1,\ 2, \ldots,\ m;\ u_\rho,\ v_\rho = 0, \ldots,\ e_\rho - 1) \end{array}\right\} \quad (35)^{**}$$

che contengono le precedenti (per $\mathfrak{S}^{(\varrho)}_{e_\varrho} = 1$) e coincidono colle (28) del n.° 24, nelle quali si sia fatto $\omega_0 = \omega_\rho$.

Facciamo ancora un'osservazione. Siano $|x^{\varrho,t_\varrho}_k|, |y^{\sigma,\tau_\sigma}_i|$ due matrici canoniche, per le righe e per le colonne di $D(\omega)$, tra loro associate e si dicano $X^{(\varrho)}_k$, $Y^{(\sigma)}_i$ (i, $k = 1, 2, \ldots, \rho$, $\sigma = 1, 2, \ldots, m$) i polinomi corrispondenti. Dalla (16)*** del n.° 23 e dalle (35)* si traggono le identità notevolissime

$$\left.\begin{array}{l} C(Y^\sigma,\ X^\rho) = -\delta_{\rho\sigma} \,.\, \Lambda^{(\varrho)}_{e_\varrho} P^{e_\rho}_\varrho P_{\rho_1}, \quad (\rho,\ \sigma = 1,\ 2, \ldots,\ m) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (P_\rho \neq \omega) \\ \text{con } P_{\rho_1} = P_\rho - \omega^{g_\varrho} = a^{(\varrho)}_1 \omega^{g_\varrho - 1} + a^{(\varrho)}_2 \omega^{g_\varrho - 2}_\varrho +, \ldots, + a^{(\varrho)}_{g_\varrho}; \end{array}\right\} \quad (36)$$

e per $P_\rho = \omega$, $\mathfrak{S}^{(\varrho)}_{e_\varrho} = 1$, semplicemente:

$$C(Y^\sigma,\ X^\rho) = \delta_{\rho\sigma}\, \omega^{e_\varrho}. \qquad (36)$$

Osserviamo infine che è possibile, in modo molto semplice, trarre dai due sistemi canonici particolari definiti al n.° 19, due sistemi canonici (e quindi due matrici canoniche) associati. Si determinino infatti dei polinomî M_ρ, N_ρ ($\rho = 1, 2, \ldots, m$) definiti rispetto al modulo $P_\rho^{e_\rho}$ dalle congruenze:

$$M_\rho N_\rho Q_\rho \equiv -\Lambda^{(\varrho)}_{e_\varrho} \,.\, P_{\rho_1} \pmod{P^{e_\varrho}_\varrho}$$

essendo Q_ρ definito dalla (6) del n.° 19, fattovi $\alpha = \rho$ ed analoghe. Posto:

$$\overline{\overline{X}}_k^{(\rho)} \equiv M_\rho \overline{X}_k^{(\rho)}, \quad \overline{\overline{Y}}_i^{(\rho)} \equiv N_\rho \overline{Y}_i^{(\rho)} \pmod{P_\rho^{e_\rho}}, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m)$$

saranno $\overline{\overline{X}}_k^{(\rho)}$, $\overline{\overline{Y}}_i^{(\rho)}$ due sistemi canonici associati.

Riduzione a forma canonica di un fascio di forme bilineari. Il teorema di Weierstrass.

27. Siano:

$$A(u\, v) = \sum_1^n {}_{ik}\, a_{ik}\, u_i\, v_k, \quad B(u\, v) = \sum_1^n {}_{ik}\, b_{ik}\, u_i\, v_k \tag{37}$$

due forme bilineari in due serie di n variabili $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $v_1, v_2, \ldots, v_n$, la seconda delle quali abbia il determinante $|b_{ik}|$ diverso da zero. Il determinante:

$$D(\omega) = |\, a_{ik} - \omega\, b_{ik} \,|, \quad (i,\, k = 1, 2, \ldots, n)$$

si dirà il determinante del fascio $A - \omega B$. Sia R un campo determinato di razionalità (che contiene le a_{ik}, b_{ik}) e si decomponga, nel campo R, il determinante D nei suoi divisori elementari al modo seguente:

$$D(\omega) = (-1)^n\, |b_{ik}|\, .\, P_1^{e_1} P_2^{e_2} \ldots P_m^{e_m}$$

con: $$P_\rho = \omega^{g} + a_1^{(\rho)} \omega^{g_\rho - 1} + \cdots + a_{g_\rho}^{(\rho)}, \quad (\rho = 1, 2, \ldots m).$$

Sia inoltre:

$$B_{\rho, t_\rho; \sigma, \tau_\sigma}, \ (\rho,\ \sigma = 1\ 2, \ldots, m;\ t_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho g_\rho - 1;\ \tau_\sigma = 0, 1, \ldots, e_\sigma g_\sigma - 1)$$

una soluzione propria (appartenente ad R) delle relazioni fondamentali (32) e siano:

$$X \equiv |\, x_k^{\rho, t_\rho} \,|, \quad Y \equiv |\, y_i^{\sigma, \tau_\sigma} \,|$$

due matrici canoniche, l'una per le righe, l'altra per le colonne di $D(\omega)$, associate alla soluzione stessa.

Assumiamo, invece delle u, v, delle nuove variabili η_{ρ, t_ρ}, ζ_{ρ, t_ρ}, mediante le formule:

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \sum_1^m {}_\rho \sum_0^{e_\rho g_\rho - 1} {}_{t_\rho}\, y_i^{\rho, t_\rho}\, \eta_{\rho, t_\rho}, \\ v_k &= \sum_1^m {}_\rho \sum_0^{e_\rho g_\rho - 1} {}_{t_\rho}\, x_k^{\rho, t_\rho}\, \zeta_{\rho, t_\rho}, \end{aligned} \quad (i,\, k = 1, 2, \ldots, n); \right\} \tag{38}$$

per un tale cambiamento di variabili le forme $A(u\,v)$, $B(u\,v)$ ed il fascio $A - \omega B$ si mutano rispettivamente in

$$\left.\begin{aligned} A(u\,v) &= A(\eta\,\zeta) = \sum A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}\,\eta_{\varrho t_\varrho}\,\zeta_{\sigma\tau_\sigma};\\ B(u\,v) &= B(\eta\,\zeta) = \sum B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}\,\eta_{\varrho t_\varrho}\,\zeta_{\sigma\tau_\sigma};\\ A(u\,v) - \omega B(u\,v) &= A(\eta\,\zeta) - \omega B(\eta\,\zeta) = \sum (A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} - \omega B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma})\,\eta_{\varrho t_\varrho}\,\zeta_{\sigma\tau_\sigma};\\ (\rho,\ \sigma &= 1, 2,\ldots, m;\ t_\rho = 0, 1,\ldots, e_\rho g_\rho - 1;\ \tau,\ \sigma = 0, 1,\ldots, e_\sigma g_\sigma - 1); \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

e per le (31), (32) del n.° 25 *i coefficienti dipendono soltanto dalla soluzione considerata* $B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}$ *delle* (32) *stesse.*

La (39) si dirà la forma *canonica* del fascio di forme bilineari:

$$A(u\,v) - \omega B(u\,v),$$

associata alla soluzione $B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}$.

Abbiamo così il teorema:

Se $(B_{\varrho t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma})$ *è una soluzione qualunque (propria) delle relazioni fondamentali* (32) *del n.*° 25, *il fascio di forme bilineari:*

$$A(u\,v) - \omega B(u\,v) = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\,(a_{ik} - \omega b_{ik})\,u_i\,v_k$$

può (in ∞^N *modi) ridursi alla forma canonica, associata alla soluzione considerata:*

$$A(\eta\,\zeta) - \omega B(\eta\,\zeta) = \sum (A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} - \omega B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma})\,\eta_{\varrho t_\varrho}\,\zeta_{\sigma\tau_\sigma},$$

nella quale le $A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}$ *si esprimono per la* $B_{\varrho,t_\varrho;\sigma\tau_\sigma}$ *nel modo dato dalle relazioni* (31).

Il risultato ottenuto può invertirsi al modo seguente.

Sia ancora $B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}$ una soluzione propria delle (32), ed il cambiamento (38) di variabili riduca il fascio $A - \omega B$ alla forma (39), essendo le $A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}$ espresse per le $B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}$ mediante le (31); allora, per quanto abbiam visto al n.° 25, saranno le matrici $|X|$ ed $|Y|$ due matrici canoniche, per le righe e le colonne di $D(\omega)$, associate alla soluzione considerata.

Ora i risultati del n.° 26 ci danno il modo di determinare infinite soluzioni proprie delle relazioni (32) (quando i divisori P_ρ sian lineari, dal n.° 24 ne abbiamo tutte le soluzioni); sappiamo inoltre (n.° 10) costruire la più generale matrice canonica per le righe di $D(\omega)$, dopo di che le prime tra (30) del n.° 25 determinano razionalmente la matrice canonica Y associata. Abbiamo dunque:

La più generale trasformazione di variabili che riduce il fascio $A - \omega B$ alla forma canonica associata ad una soluzione propria delle relazioni (32) *si ha considerando due matrici canoniche, per le righe e colonne di $D(\omega)$, associate alla soluzione stessa.*

Una tale trasformazione di variabili è determinabile razionalmente e contiene

$$N = n_0 + 2(n_1 + n_2 + \cdots n_n)$$

parametri arbitrarî, essendo n_r $(r = 0, 1, \ldots, n)$ il grado del m. c. d. $D_r(\omega)$ di tutti i minori di ordine $n - r$ del determinante $D(\omega)$ del fascio.

28. Dal teorema dimostrato segue, come corollario immediato, il *teorema di* Weierstrass (*):

Condizione necessaria e sufficiente perchè due fasci di forme bilineari in due serie di n variabili, i cui determinanti non siano identicamente nulli, siano equivalenti, è che i determinanti dei due fasci abbiano gli stessi divisori elementari.

Due fasci di forme bilineari $A - \omega B$, $A' - \omega B'$ si dicono, come è noto, equivalenti, quando esiste una trasformazione di variabili, *indipendente da* ω, che muta la forma generica $A - \omega B$ del 1° fascio nella $A' - \omega B'$ del secondo, corrispondente allo stesso valore di ω. L'ipotesi che i determinanti delle due forme B, B' siano diversi da zero, è inoltre, come subito si riconosce, equivalente all'altra che i determinanti dei due fasci non siano identicamente nulli (**).

Ciò premesso, è chiaro che la condizione enunciata nel teorema di Weierstrass è necessaria per l'equivalenza dei due fasci $A - \omega B$, $A' - \omega B'$; dimostriamone la sufficienza.

Siano $D(\omega)$, $D'(\omega)$ i determinanti dei due fasci; poichè essi hanno, per ipotesi, gli stessi divisori elementari, avranno comuni le relazioni fondamen-

(*) Cf. Muth, l. c., pag. 61.
(**) Cf. Muth, l. c., pag. 84.

tali (32) e le (31) del n.° 25 e quindi anche le soluzioni relative. Fissata una qualunque soluzione (propria) $B_{\rho, t_\rho; \sigma, \tau_\sigma}$ delle relazioni stesse, è possibile ridurre (in modo razionale) l'uno e l'altro fascio alla forma canonica associata alla soluzione considerata; i due fasci sono dunque equivalenti. È inoltre chiaro che:

Si può determinare, in modo razionale, la più generale trasformazione dell'uno nell'altro fascio. Una tale trasformazione contiene

$$N = n_0 + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_n)$$

parametri arbitrari.

Se infatti S è la più generale trasformazione di variabili (data dalle (38)) che porta il fascio $A - \omega B$ nella forma canonica (39), T_1 una particolare che porta il fascio $A' - \omega B'$ nella stessa forma canonica, la più generale trasformazione che porta il fascio $A - \omega B$ nell'altro $A' - \omega B'$ sarà data da $S T_1^{-1}$, il che dimostra quanto abbiamo affermato.

Facciamo ancora l'osservazione seguente.

Siano $P_1, P_2, \ldots, P_m$ dei polinomi in ω, uguali o diversi, primi nel campo R, dei gradi $g_1, g_2, \ldots, g_m$, ed indicando con $e_1, e_2, \ldots, e_m$ dei numeri interi non minori di uno, si ponga $n = e_1 g_1 + e_2 g_2 + \cdots + e_m g_m$; si considerino quindi le relazioni (32) del n.° 25 (dove le $a_\mu^{(\rho)}$ hanno i valori corrispondenti al polinomio P_ρ, $(\rho = 1, 2, \ldots, m)$) e ne sia $B_{\rho, t_\rho; \sigma, \tau_\sigma}$ una soluzione propria, affatto arbitraria (ad es. determinata come al n.° 26). Il fascio (39) di forme bilineari nelle variabili η e ζ ha i divisori elementari $P_1^{e_1}, P_2^{e_2}, \ldots, P_m^{e_m}$. Consideriamo infatti il determinante del fascio ed aggiungiamo alla colonna $(\rho, 0)$ di esso le colonne $(\rho, v g_\rho + u)$ moltiplicate per

$$\omega^u P_\varrho^v, \quad (v = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1;\ u = 0, 1, \ldots, g_\rho - 1;\ \rho = 1, 2, \ldots, m);$$

la colonna $(\rho, 0)$, per le (31) del n.° 25, verrà a contenere il fattore $P_\varrho^{e_\varrho}$ (cfr. n.° 3), donde, poichè $\sum_1^m {}_\rho\, e_\rho g_\rho = n$, ordine del determinante, segue senz'altro la nostra asserzione)

Abbiamo così il risultato:

Siano $P_1, P_2, \ldots, P_m$ dei polinomi in ω, uguali o diversi, dei gradi $g_1, g_2, \ldots, g_m$, primi nel campo R (ma del resto affatto arbitrari) e siano $e_1, e_2, \ldots, e_m$ dei numeri interi non minori di uno, e si ponga:

$$n = e_1 g_1 + e_2 g_2 +, \ldots, + e_m g_m.$$

Esistono infiniti fasci di forme bilineari in due serie di n variabili, che hanno i divisori elementari $P_1^{e_1}, P_2^{e_2}, \ldots, P_m^{e_m}$ (*).

29. È da osservare in modo speciale la forma canonica del fascio $A - \omega B$, associata alla soluzione *principale* delle relazioni (32). Questa forma si dirà semplicemente *canonica*. Le (35)* del n.° 26 dànno:

$$A(\eta\zeta) - \omega B(\eta\zeta) = \sum_1^m {}_\varrho \Lambda_{e_\varrho}^{(\varrho)} \{ A^{(\rho)}(\eta\zeta) - \omega B^{(\rho)}(\eta\zeta) \} \tag{40}$$

essendo, per $P_\varrho \neq \omega$:

$$\left.\begin{array}{c} A^{(\rho)}(\eta\zeta) - \omega B^{(\rho)}(\eta\zeta) = \sum_0^{g_\varrho} {}_t (a_{g_\varrho - t+1}^{(\varrho)} - \omega a_{g_\varrho - t}^{(\varrho)}) B_t^{(\varrho)}(\eta\zeta) - \sum_0^{e_\varrho - 1} {}_u P_u^{(\varrho)}(\eta) P_{e_\varrho - u-1}^{(\varrho)}(\zeta) \\ B_t^{(\varrho)}(\eta\zeta) = \sum_t \eta_{\rho, u_\varrho} \zeta_{\rho, v_\varrho}; \text{ con } u_\rho + v_\rho = e_\rho g_\rho + t - 1; u_\rho, v_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho g_\rho - 1; \\ B_{g_\varrho - 1}^{(\varrho)}(\eta, \zeta) = 0. \quad \text{per} \quad e_\rho = 1; \\ P_u^{(\varrho)}(\eta) = \sum_0^{g_\varrho - 1} {}_t a_{g_\varrho - t}^{(\varrho)} \eta_{\varrho, u g_\varrho + t}, \quad P_v^{(\varrho)}(\zeta) = \sum_0^{g_\rho - 1} {}_t a_{g_\varrho - t}^{(\varrho)} \zeta_{\rho, v g_\varrho + t}; \end{array}\right\} \tag{41}$$

e convenendo insieme di porre $a_0^{(\varrho)} = a_{g_\varrho + 1}^{(\varrho)} = 0$; per $P_\rho = \omega$ si ha invece semplicemente (facendo $\vartheta_{e_\varrho}^{(\varrho)} = 1$):

$$B^{(\rho)}(\eta\zeta) = \sum_0^{e_\varrho - 1} {}_u \eta_{\rho u} \zeta_{\rho, e_\varrho - u - 1}; \; A^{(\rho)}(\eta, \zeta) = \sum_1^{e_\varrho - 1} {}_u \eta_{\rho, u} \zeta_{\rho, e_\varrho - u}. \tag{41)'$$

Abbiamo quindi:

Il fascio $A(\eta\zeta) - \omega B(\eta\zeta)$ si decompone nella somma di m fasci:

$$A^{(\rho)}(\eta\zeta) - \omega B^{(\rho)}(\eta\zeta), \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m),$$

corrispondenti ai singoli divisori elementari del determinante $D(\omega)$. Il fascio corrispondente al divisore elementare $P_\varrho^{e_\varrho}$, di grado $e_\rho g_\rho$, contiene due serie di $e_\rho g_\rho$ variabili $\eta_{\rho, u_\varrho}, \zeta_{\rho, v_\varrho}$, $(u_\rho, v_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho g_\rho - 1)$ ed ha la forma ridotta data dalle (41), (41)′ (**).

(*) Cf. Muth, l. c., pag. 86.

(**) Il decomporsi il fascio $A - \omega B$ negli m fasci $A^{(\varrho)} - \omega B^{(\varrho)}$ è evidentemente conseguenza delle sole:

$B_{\varrho, t_\varrho; \sigma, \tau_\sigma} = 0, \quad (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, m; \; \rho \neq \sigma, \; \tau_\varrho = 0, 1, \ldots, e_\varrho g_\varrho - 1; \; \tau_\sigma = 0, 1, \ldots, e_\sigma g_\sigma - 1).$

30. Consideriamo infine alcuni casi particolari.

a) Il divisore P_ρ sia lineare, $P_\rho = \omega - \omega_\rho$ (con $\omega_\rho \mid\!\!\!\!\!\!\;- 0$). Facendo $\Lambda^{(\varrho)}_{e_\varrho} = -\frac{1}{\omega_\rho}$, si ha semplicemente (*):

$$\left.\begin{aligned} \Lambda^{(\varrho)}_{e_\varrho}(A^{(\rho)} - \omega B^{(\rho)}) = (\omega_\rho - \omega)\,(\eta_{\rho 0}\,\zeta_{\varrho,e_\varrho-1} + \eta_{\varrho 1}\,\zeta_{\varrho,e_\varrho-2} + \cdots + \eta_{\varrho,e_\varrho-1}\,\zeta_{\rho 0}) \\ + (\eta_{\rho 1}\,\zeta_{\varrho,e_\varrho-1} + \eta_{\rho 2}\,\zeta_{\varrho,e_\varrho-2} + \cdots + \eta_{\varrho,e_\varrho-1}\,\zeta_{\rho 1}) \end{aligned}\right\} \quad (42)'$$

(e la seconda parte mancherà per $e_\rho = 1$); e questa forma, come è chiaro dalla (41)', comprende anche il caso di $\omega_\rho = 0$, cioè di $P = \omega$.

b) Il divisore P_ρ abbia il 2.° grado, e sia:

$$P_\rho = \omega^2 + a_1^{(\varrho)}\,\omega + a_2^{(\varrho)}.$$

Si ha in tal caso:

$$\left.\begin{aligned} A^{(\rho)} - \omega B^{(\rho)} = & - a_2^{(\varrho)}\,\omega\,(\eta_{\rho 0}\,\zeta_{\varrho,2e_\varrho-1} + \eta_{\rho 1}\,\zeta_{\varrho,2e_\varrho-2} + \cdots + \eta_{\varrho,2e_\varrho-1}\,\zeta_{\rho 0}) \\ & + (a_2^{(\varrho)} - a_1^{(\varrho)}\,\omega)\,(\eta_{\rho 1}\,\zeta_{\varrho,2e_\varrho-1} + \eta_{\rho 2}\,\zeta_{\varrho,2,e_\varrho-2} + \cdots + \eta_{\varrho,2e_\varrho-1}\,\zeta_{\rho 1}) \\ & + a_1\,(\eta_{\rho 2}\,\zeta_{\varrho,2e_\varrho-1} + \eta_{\rho 3}\,\zeta_{\varrho,2e_\varrho-2} + \cdots + \eta_{\rho,2e_\varrho-1}\,\zeta_{\rho 2}) \\ & - \sum_0^{e_\varrho-1}{}_u\,(a_2^{(\varrho)}\,\eta_{\rho,2u} + a_1^{(\varrho)}\,\eta_{\rho,2u+1})\,(a_2^{(\varrho)}\,\zeta_{\varrho,2(e_\varrho-u-1)} + a_1^{(\varrho)}\,\zeta_{\varrho,2(e_\varrho-u)-1}), \end{aligned}\right\} \quad (42)''$$

(ed il terzo termine mancherà per $e_\rho = 1$).

c) Il divisore P_ρ abbia un grado arbitrario g_ρ e sia $e_\rho = 1$. È in questo caso $B^{\varrho}_{g_\varrho-1}(\eta\,\zeta) = 0$ e si ha:

$$\left.\begin{aligned} A^{(\rho)} - \omega B^{(\rho)} = & - a^{(\varrho)}_{g_\varrho}\,\omega\,(\eta_{\rho 0}\,\zeta_{\varrho,g_\varrho-1} + \eta_{\rho 1}\,\zeta_{\varrho,g_\varrho-2} + \cdots + \eta_{\varrho,g_\varrho-1}\,\zeta_{\rho 0}) \\ & + (a^{(\varrho)}_{g_\varrho} - a^{(\varrho)}_{g_\varrho-1}\,\omega)\,(\eta_{\rho 1}\,\zeta_{\varrho,g_\varrho-1} + \eta_{\rho 2}\,\zeta_{\varrho,g-2} + \cdots + \eta_{\varrho,g_\varrho-1}\,\zeta_{\rho 1}) \\ & + \cdot\;\cdot + \\ & + (a_2^{(\varrho)} - a_1^{(\varrho)}\,\omega)\,\eta_{\varrho,g_\varrho-1}\,\zeta_{\varrho,g-1} - \\ & - (a_1^{(\varrho)}\,\eta_{\varrho,g_\varrho-1} + a_2^{(\varrho)}\,\eta_{\varrho,g_\varrho-2} + \cdots + a^{(\varrho)}_{g_\varrho}\,\eta_{\rho,0}). \\ & \qquad (a_1^{(\varrho)}\,\zeta_{\varrho,g_\varrho-1} + a_2^{(\varrho)}\,\zeta_{\varrho,g_\varrho-2} + \cdots + a^{(\varrho)}_{g_\varrho}\,\zeta_{\rho 0}). \end{aligned}\right\} \quad (42)'''$$

d) Quando tutti i divisori P_ρ abbiano il 1.° grado e sia $e_\rho = 1$, ($\rho = 1, 2, \ldots, m$) e quindi il determinante D decomposto nei suoi divisori elemen-

(*) Cf. Muth, p. 82.

tari sia:

$$D(\omega) = (-1)^n \mid b_{ik} \mid \prod_1^n{}_\rho (\omega - \omega_\rho),$$

ponendo per brevità $\eta_{\rho 0} = \eta_\rho$, $\zeta_{\rho 0} = \zeta_\rho$, $(\rho = 1, 2, \ldots, n)$ e facendo (per $\omega_\rho \neq 0$) $\Lambda_{e_\rho}^{(\rho)} = -\frac{1}{\omega_\rho}$, si ha la forma semplicissima:

$$A(\eta\zeta) - \omega B(\eta\zeta) = \sum_1^n{}_\rho (\omega_\rho - \omega)\, \eta_\rho \zeta_\rho. \qquad (42)''$$

Inversamente questa forma può aversi soltanto in questo caso (*).

c) Una tal forma si ha in particolare quando sia $a_{ik} = 0$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ e $\mid b_{ik} \mid \neq 0$. È infatti allora $P_\rho = \omega$, per $\rho = 1, 2, \ldots, n$. Si ha così il teorema (cfr. n.[i] 8, *c*) e 12, *d*)):

Qualunque forma bilineare B in due serie di n variabili, il cui determinante sia diverso da zero, può trasformarsi, in infiniti modi, nella forma unità:

$$E = \eta_1 \zeta_1 + \eta_2 \zeta_2 + \cdots + \eta_n \zeta_n.$$

La più generale di tali trasformazioni è determinabile razionalmente e contiene n^2 parametri arbitrari.

(*) Cf. MUTH, l. c., pag. 93.