Il teorema di Desargues, il teorema di Pappo e l'esistenza d'una reciprocità o d'una polarità.

(*Di* Beppo Levi, *a Cagliari.*)

È noto come, sul fondamento dei teoremi di Desargues e di Pappo-Pascal, si possa costruire l'intera geometria projettiva (*). Questa osservazione ha ispirato a vari geometri di ricercare le mutue dipendenze fra questi teoremi e le proposizioni che più comunemente usano mettersi a base della geometria projettiva: postulati metrici, postulati dell'ordine, postulati di continuità (d'Archimede e di Dedekind) (**).

L'ammettere il teorema di Desargues in una geometria piana in cui valgano le proprietà projettive di appartenenza (***) equivale (****) ad ammettere quel piano immergibile in uno spazio di tre dimensioni nel quale siano verificate le proprietà projettive e di appartenenza di punti, rette, piani (*****). Si può allora parlare di projezioni e sezioni nel significato più

(*) Si trova questa costruzione raccolta in modo sistematico nelle *Vorlesungen über die neuere Geometrie* del Pasch.

(**) Ricordo in particolar modo il Schur, lo Hilbert, il Schœnflies, lo Hessenberg: in connessione con queste ricerche fondamentali, molte altre di altri autori si ebbero in questi ultimi anni, che sarebbe qui lungo il ricordare. Io stesso me ne occupai sotto più punti di vista nella Memoria: *Fondamenti della metrica projettiva* (Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1904), che sarà ancora ricordata in seguito.

(***) Due punti individuano una retta cui essi appartengono; due rette individuano un punto, per cui passano.

(****) Cfr. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (2.te Auflage, Leipzig, Teubner, 1903), pag. 66-67.

(*****) Vale a dire che ai postulati di appartenenza enunciati nella nota (***) occorre aggiungere gli analoghi dello spazio: tre punti individuano un piano cui appartengono, due piani individuano una retta per cui essi passano.

vasto in cui ricorrono ordinariamente nella geometria projettiva, e, seguendo il CREMONA, il THOMAE, il PASCH, definire *collineari* od *omografiche* (o, trattando di sole forme di 1.ª specie, anche *projettive*) due forme di prima o di seconda specie che siano fra loro riferite mediante una corrispondenza definibile con una successione di projezioni e di sezioni (*). Non si può però affermare che tal corrispondenza sia interamente determinata da tre coppie (per le forme di 1.ª specie — quattro, per quelle di 2.ª) di elementi omologhi.

A stabilire questo fatto occorre appunto il teorema di PAPPO-PASCAL: « I punti d'incontro delle coppie di lati opposti di un esagono inscritto in una coppia di rette sono allineati. »

Si è questa proposizione che si può ritenere equivalente al teorema fondamentale di STAUDT; ed in virtù di essa si può costruire l'intera geometria projettiva lineare (**). Devesi però osservare — e ciò non fu forse spesso sufficientemente rilevato (***) — che tale equivalenza al teorema fondamentale

---

(*) Si può pure definire la collineazione fra due spazi (sovrapposti necessariamente se si pensa di restare in un determinato spazio di tre dimensioni); la nozione di projezione e della conseguente corrispondenza prospettica va allora completata colla condizione di collinearità (cioè che ogni retta si muta in una retta) che è allora indipendente da quella di prospettività. Cfr. PASCH, l. c.

Questa definizione della projettività si attribuisce di solito al THOMAE che la espose nella sua *Geometrie der Lage*. Ma prima della pubblicazione di questo, nel 1873, anche il CREMONA aveva già adottata questa definizione nelle sue *Lezioni*, e la troviamo riprodotta nella sua *Geometria projettiva*, pubblicata precisamente nello stesso anno 1873 di quella del THOMAE.

(**) Non naturalmente la geometria quadratica; non si potrà cioè asserire ancora nulla sull'esistenza di punti uniti d'una projettività e sulle questioni connesse a questa.

(***) Invero fu dimostrato dal PASCH (l. c.) e per via aritmetica dallo HILBERT (l. c., pag. 68 e 71) che il solo postulato di continuità che occorra per stabilire il teorema di PASCAL è quello d'ARCHIMEDE, e che si possono dopo ciò dimostrare tutte le proposizioni grafiche senza più far intervenire considerazioni di continuità: ma il PASCH finisce tali considerazioni osservando (pag. 125-126) che al postulato d'ARCHIMEDE (di apparenza metrica) si può sostituirne un'altro (forma projettiva del postulato di DEDEKIND — si possono a tal riguardo consultare le *Lezioni di Geometria projettiva* del BERZOLARI, Torino, 1894-95, o dell'ENRIQUES, Bologna, 1898), col quale si colma la lacuna indicata dal KLEIN (*Math. Ann.*, 7, pag. 532) nella dimostrazione di STAUDT. Ora, se il nuovo postulato (quando sia unito al postulato dell'ordine) include quello d'ARCHIMEDE, l'inverso non avviene, onde esso è esorbitante e non omogeneo al sistema del PASCH. Questa insufficiente distinzione nello scritto del PASCH fu causa, certo, che in scritti posteriori in cui non si aveva di mira la critica di questo punto particolare, si affermasse senz'altro una equivalenza che non sussiste. Così il PIERI, *Circa il teorema fondamentale di* STAUDT, ecc. Atti della R. Accad. di Torino, 1904; Introduzione.

è essenzialmente connessa alla definizione adottata per l'omografia. Se appena si seguisse invece la definizione staudtiana « si dicono omografiche due forme di prima specie quando sono riferite in modo che ad ogni quaterna armonica corrisponda una quaterna armonica » (*), essa cesserebbe d'un tratto: la proposizione di STAUDT, che la corrispondenza è completamente definita da tre coppie di elementi omologhi, non si potrebbe stabilire senza ricorrere al postulato di DEDEKIND od a qualche altro più o meno equivalente (**).

(*) Cfr. *Geometrie der Lage*, pag. 50. Il PIERI ha rilevato che questa definizione in quanto chiede che il fatto si verifichi per *ogni* quaterna armonica, contiene del sovrabbondante (Cfr. *Sulla definizione Staudtiana dell'omografia fra forme semplici reali*. Periodico di Matematica, Vol. 21, 1905).

(**) Per es., è ben noto che al postulato di DEDEKIND, che involge l'esistenza di punti aventi per ascissa ogni numero irrazionale, basterà sostituirne un altro da cui derivi, sotto convenienti condizioni, l'esistenza di punti corrispondenti solo a radici di equazioni risolubili con una catena di equazioni quadratiche. Così opera il PIERI (*I principii della geometria di posizione*, ecc. Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1898, e ll. cc.) e così risulta già dalle ricerche del DARBOUX (*Sur la géométrie projective*, Math. Ann. 17, 1880, pag. 55 e seg.).

Da altro punto di vista, si può cercare di sostituire al post. di DEDEKIND un altro relativo alla natura dell'aggregato degli elementi di una forma di prima specie. Per vero, in seguito ad una nota osservazione del DARBOUX l. c. la questione assume la forma datale dal SEGRE (*Intermédiaire des mathématiciens*, t. I, 1894, pag. 182): « quali possono essere in un campo in cui non si verifichi o l'ordinamento lineare degli elementi, ovvero il postulato di DEDEKIND (o una parte conveniente di esso, come sopra si disse) le soluzioni del sistema d'equazioni funzionali $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(x^2)=[\varphi(x)]^2$? »

È facile vedere che la soluzione non è sempre la sola identità come vorrebbe il teorema di STAUDT, quando sia numerabile, od almeno ben ordinabile l'aggregato dei punti della retta (Cfr. VEBLEN and BUSSEY, *Finite projective geometries*. Transact. of the Amer. Math. Soc., 1906. — B. LEVI, *Geometrie projettive di congruenza e geometrie projettive finite*. Trans. of the Amer. Math. Soc., 1907. — VOLPI, *Sopra le funzioni che godono della proprietà distributiva*. Giornale di Battaglini, Vol. 35, 1897. — HAMEL, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Functionalgleichung* $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Math. Ann., 60, 1905).

[La questione proposta dal prof. SEGRE ha richiamato recentemente l'attenzione del signor LEBESGUE il quale ha dimostrato (*Sur les transformations ponctuelles etc.*, Atti della R. Acc. di Torino, Marzo 1907) che l'identità è la sola funzione φ definibile analiticamente. Mi si permetta di ricordare che in una Nota: *Sulla teoria delle funzioni e degli insiemi* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, Serie 5, Vol. IX, 2.e sem., 1900) io annunciavo una simile proposizione come conseguenza di una proposizione (prop. V; pag. 76) che non differisce essenzialmente dalle conseguenze della definibilità analitica su cui si fonda il LEBESGUE.

Ma poichè in quello studio io attribuivo molto maggior generalità alla definizione delle

Questa differenza essenziale fra le due forme del teorema fondamentale si riflette intensamente sulla definizione delle corrispondenze projettive fra forme di 2.ª specie: invero, mentre ammettendo la definizione della projettività fra forme di 1.ª specie e il teorema fondamentale nella forma dello STAUDT, si può accettare pure la definizione che questi dà di corrispondenza projettiva fra forme di 2.ª specie: « che per essa le forme fondamentali di prima specie si mutino in forme fondamentali di 1.ª specie » e dedurne una trattazione uniforme e simultanea di omografie e di reciprocità; ben diversamente avviene accettando la definizione di CREMONA, THOMAE e PASCH. Non si può infatti allora estendere alle reciprocità la definizione ricordata in principio per le omografie, che riduce queste a successioni di projezioni e sezioni, nè si può adottare la definizione staudtiana senza che cessi il teorema che la corrispondenza è determinata da quattro coppie di elementi omologhi (*). Perciò il PASCH definisce la reciprocità spaziale (e conseguentemente — mediante una projezione o una sezione — la reciprocità fra forme di 2.ª specie) come il prodotto di una omografia e di una polarità nulla, determinata questa mediante la projettività che su due rette reciproche segano le rette reciproche che le incontrano (**). Si potrebbe d'altronde evitare la considerazione dello spazio definendo direttamente la reciprocità (come caso particolare, la polarità) fra forme di 2.ª specie coll'assegnare le projettività da esse subordinate fra due coppie di forme di 1.ª specie omologhe.

---

funzioni, in una più completa redazione insorsero difficoltà circa la dipendenza di quella proposizione V dai procedimenti di definizione delle funzioni, onde quella Nota non ebbe per allora altro seguito.

Ritengo perciò doveroso il riconoscere al sig. LEBESGUE la priorità del nuovo enunciato della proposizione e della pubblicazione d'una dimostrazione della medesima] (Ottobre 1907).

(*) Così in una geometria projettiva finita $PG(p^k)$, quali furono studiate dai signori VEBLEN e BUSSEY (cfr. la nota precedente) una collineazione in un piano di coordinate omogenee x_1, x_2, x_3 è definita dalle formole (l. c., p. 252)

$$\frac{x'_i}{x'_s} = \frac{\Sigma_j a_{ji} x_j^{p^k}}{\Sigma_j a_{is} x_j^{p^k}} \begin{pmatrix} i=1,\ 2, \quad j=1,\ 2,\ 3 \\ 0 \leq k < n \end{pmatrix}.$$

(V. pure VEBLEN, *Collineations in a finite projective Geometry*, Trans. of the Amer. Math. Soc., 1907, pag. 366).

Se allora si fissa che a 4 dati punti di coordinate numeri interi (per cui $x_j^{p^k} \equiv x_j \pmod p$) debbano corrispondere 4 punti di coordinate pure numeri interi, le a_{ji} risultano pure numeri interi indipendenti dalla scelta di k, e, attribuendo a k gli n valori di cui è capace, si ottengono n diverse collineazioni (secondo la definizione staudtiana) che stabiliscono la data corrispondenza fra le due quaterne.

(**) V. PASCH, l. c., pag. 140 e segg.

Per tal modo il teorema di Pappo-Pascal viene ad assumere, apparentemente almeno, una posizione essenziale nella possibilità di definire una reciprocità. Alcune osservazioni complementari paiono aggiungere interesse a queste osservazioni.

Si noti anzitutto che la legge di dualità, che si può verificare sui postulati projettivi prima di giungere al teorema di Pascal e alle ipotesi che ne concedono la dimostrazione, non può essere argomento perchè si possa inferirne (come potrebbe parere) l'esistenza di una reciprocità. Infatti la legge di dualità stabilisce fra due figure reciproche una corrispondenza *nominale*: ammessa l'esistenza di una determinata configurazione di punti e rette di un piano (per es.), essa permette di affermare l'esistenza della configurazione che, in parole, si definisce scambiando nella descrizione della prima le parole punto e retta; fra le due configurazioni essa permette altresì di stabilire una corrispondenza reciproca, e permette in seguito di estendere, in modo ben definito, tale corrispondenza a tutti gli elementi (punti e rette) che dalle due configurazioni si possono ottenere mediante sole operazioni lineari effettuate sugli elementi di esse: ma nulla dice la legge di dualità sulla possibilità di estendere, in modo ben definito tale corrispondenza ad altri elementi che in tal modo non possano generarsi. L'osservazione prende forma più precisa quando si introduca una rappresentazione per coordinate: due sistemi piani, punteggiato l'uno, rigato l'altro, si riferiscano a due sistemi di coordinate projettive (il che può farsi col solo sussidio del teorema di Desargues (*)): se allora queste coordinate potessero avere una rappresentazione comune, per es. mediante numeri dell'ordinaria aritmetica, si potrebbe definire una reciprocità fra i due sistemi piani chiamando corrispondenti elementi che abbiano le stesse coordinate: ma le coordinate nel senso generico qui considerato non sono già numeri aritmetici, bensì *gli elementi medesimi delle forme (di 1.ª specie) di riferimento,* onde non ha alcun senso parlare di « *stesse coordinate* » sopra due diverse forme di prima specie: le coordinate diverranno numeri solo coll'aggiunzione dei postulati che permettono di far corrispondere un'ascissa numerica agli elementi d'una forma di 1.ª specie, quindi solo coll'aggiunzione del postulato di Dedekind, se si esce dal campo delle ascisse razionali.

La dimostrazione del teorema di Pascal è riuscita, d'altronde, per più vie mediante l'uso dei postulati metrici: qual è la parte ch'essi hanno in

(*) Cfr. Hilbert, l. c., pag. 64.

tal deduzione? Se appena si esaminano le dimostrazioni diverse che ne furono date (indipendenti dal postulato d'ARCHIMEDE, perchè ammesso tal postulato — anche solo in una sua qualunque forma projettiva —, il teorema di PASCAL è immediata conseguenza di quello di DESARGUES (*)) tosto si rileva l'importanza che assume in essa l'ipotesi dell'esistenza d'una polarità — a definizione metrica (**).

È quindi naturale il chiedersi qual dipendenza esista fra l'ipotesi dell'esistenza di una reciprocità in una forma di 2.ª specie (ed in particolare di una polarità) e il teorema di PAPPO-PASCAL. Nel n.º 33 della mia Memoria: *Fondamenti della metrica projettiva* (***) ho trattato appunto questa questione: ma una svista incorsa alla pag. 59 (****) mi ha fatto concludere per l'equivalenza delle due proposizioni (quando sia ammesso il teorema di DESARGUES). Tale equivalenza non sussiste di fatto; le due proposizioni: « *Nella geometria considerata si può definire una reciprocità* », « *Nella geometria considerata si può definire una polarità* » possono intercalarsi successivamente fra il teorema di DESARGUES e il teorema di PAPPO-PASCAL: esse sono ordinatamente indipendenti fra loro e da queste due proposizioni, e rappresentano così una effettiva scomposizione dei postulati della geometria projettiva.

Egli è ciò che mi propongo di mostrare in questo breve scritto.

Si immaginino perciò due piani (eventualmente sovrapposti) riferiti ciascuno ad un sistema di coordinate (desarguiane (*****)) non omogenee (ξ, η)

(*) Al modo medesimo che, in conseguenza del postulato d'ARCHIMEDE e della definizione Euclidea delle proporzioni, si stabilisce la commutabilità dei medi in una proporzione, e quindi il teorema di PAPPO.

(**) Così nella dimostrazione dello SCHUR (*Math. Ann.*, 51) in cui si fa uso dello spazio, ma non si fanno limitazioni circa l'ipotesi euclidea, si ricorre alla considerazione di simmetrie rispetto a piani e quindi, implicitamente, alla considerazione della polarità assoluta. In altre dimostrazioni, in cui invece si evita la considerazione dello spazio, e si deve perciò distinguere quale delle tre ipotesi sulle rette parallele si voglia ammettere, l'uso di polarità metriche compare diversamente: così nella dimostrazione dello HILBERT (*Math. Ann.*, 57 e *Grundlagen der Geometrie*, II Auflage, Anhang III, pag. 107) relativa al piano di LOBACEWSKY e in quella dello HESSENBERG (*Math. Ann.*, 61) relativa alla sfera (piano di RIEMANN) compie ancora funzione essenziale la polarità assoluta (che in queste geometrie non è degenere) e nella dimostrazione dello HILBERT (*Grundlagen der Geometrie*, § 14. — Cfr. pure B. LEVI, *Supplemento al periodico di Matematica*, 1903. MOLLERUP, *Math. Ann.*, 56) relativa al piano euclideo hanno parte essenziale le proprietà del cerchio.

(***) *Memorie della R. Accad. delle Sc. di Torino*, 1904.

(****) Della *Memoria*, pag. 339 del volume.

(*****) Cfr. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, l. c., §§ 24-29 e la mia Memoria citata, e (x, y) rispettivamente, in cui l'origine del primo abbia per corrispondente la retta all'infinito del secondo. Al punto $(\xi\,\eta)$ corrisponderà generalmente una retta

$$a(\xi\,\eta)\,x + b(\xi\,\eta)\,y + 1 = 0; \tag{1}$$

questa equazione (1) può dunque considerarsi come la rappresentazione analitica della reciprocità. Dall'ipotesi che all'origine del piano $\xi\,\eta$ corrisponda la retta all'infinito del piano $x\,y$ si ha

$$a(0\,0) = b(0\,0) = 0.$$

Si semplificano ancora notevolmente i calcoli supponendo che nel piano $x\,y$ gli assi $x = 0$, $y = 0$ siano le rette reciproche ai punti all'infinito degli assi $\eta = 0$, $\xi = 0$, rispettivamente. Se allora si pone in (1) $y = 0$, l'equazione risultante

$$a(\xi\,\eta) = -\frac{1}{x}$$

deve essere equivalente (nelle variabili ξ, η) a

$$\xi = \text{cost.},$$

questa cost. dipendendo biunivocamente dal valore di x.

Quindi $a(\xi\,\eta)$ è funzione della sola ξ, e si può porre

$$a(\xi\,\eta) = \rho(\xi) \quad \text{e analogamente} \quad b(\xi\,\eta) = \sigma(\eta).$$

Si osservi inoltre che, se il punto $(\xi\,\eta)$ si muove su una retta per l'origine, la (1) deve descrivere un fascio di rette parallele; ciò equivale a dire che *se ξ ed η si moltiplicano posteriormente per uno stesso numero* λ, $\rho(\xi)$ e $\sigma(\eta)$ *debbono moltiplicarsi anteriormente per uno stesso numero;* in simboli:

$$\sigma(\eta\cdot\lambda)\,\frac{1}{\sigma(\eta)} = \rho(\xi\cdot\lambda)\,\frac{1}{\rho(\xi)}\,.$$

Mantenendo fisso η e facendo variare ξ si vede così che $\rho(\xi\cdot\lambda)\,\frac{1}{\rho(\xi)}$ è fun-

pag. 34 e segg. (314 e segg. del volume): particolarmente quest'ultimo luogo per le avvertenze da usarsi nel calcolo con questi numeri, per cui si suppone valgano le proprietà fondamentali delle operazioni con numeri razionali, salvo la proprietà commutativa del prodotto.

zione della sola λ; indicando con $\tau(\lambda)$ questa funzione e ponendo

$$\rho(1) = r \qquad \sigma(1) = s \tag{2}$$

si ha

$$\rho(\lambda) = \tau(\lambda)\, r \qquad \sigma(\lambda) = \tau(\lambda)\, s$$

e l'equazione (1) diviene

$$\tau(\xi)\, r\, x + \tau(\eta)\, s\, y + 1 = 0 \tag{1'}$$

con

$$\tau(1) = 1, \qquad \tau(0) = 0. \tag{3}$$

Si consideri la costruzione con cui si ottiene il punto $\xi_1 + \xi_2$ (*); ad essa la reciprocità farà corrispondere là costruzione seguente (fig. 1):

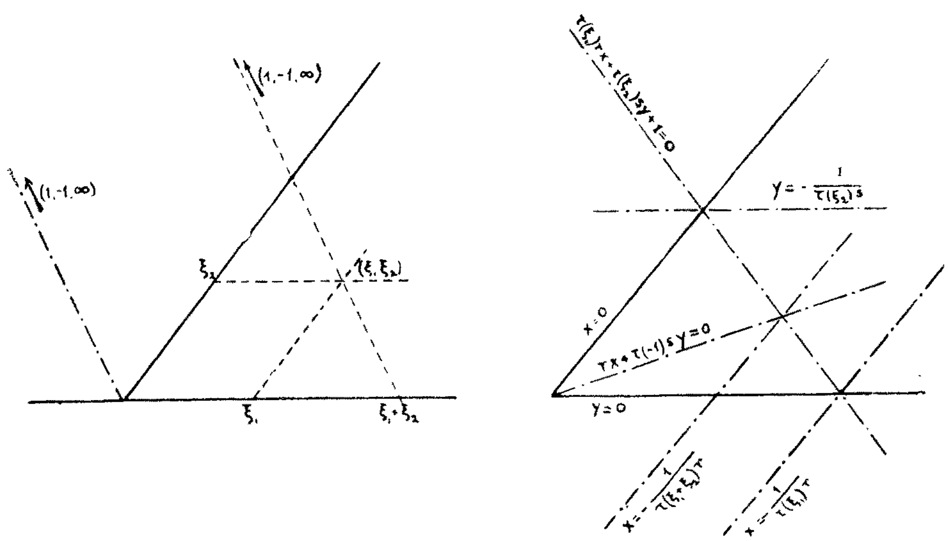

Fig. 1.

Si consideri la retta $\tau(\xi_1)\, r\, x + \tau(\xi_2)\, s\, y + 1 = 0$, reciproca del punto (ξ_1, ξ_2), la si seghi colla retta $r\, x + \tau(-1)\, s\, y = 0$. La parallela alla $x = 0$ pel punto d'intersezione è la retta $x = -\dfrac{1}{\tau(\xi_1 + \xi_2)\, r}$, reciproca del punto $(\xi_1 + \xi_2, 0)$.

(*) Cfr. Hilbert, l. c., pag. 54.

Esprimendo analiticamente si ha

$$-\frac{1}{\tau(\xi_1+\xi_2)\,r} = -\frac{1}{\left[\tau(\xi_1) - \tau(\xi_2)\,\dfrac{1}{\tau(-1)}\right] r}\,.$$

Osservando che $\xi_1 + \xi_2 = \xi_2 + \xi_1$, si ricava da questa stessa uguaglianza che deve essere $\tau(-1) = -1$, e quindi

$$\tau(\xi_1+\xi_2) = \tau(\xi_1) + \tau(\xi_2). \tag{4}$$

Del pari, alla costruzione sul piano $\xi\,\eta$ del punto $(0, \xi_1\,\xi_2)$ (*) corrisponde, per la reciprocità, nel piano $x\,y$, la seguente (fig. 2):

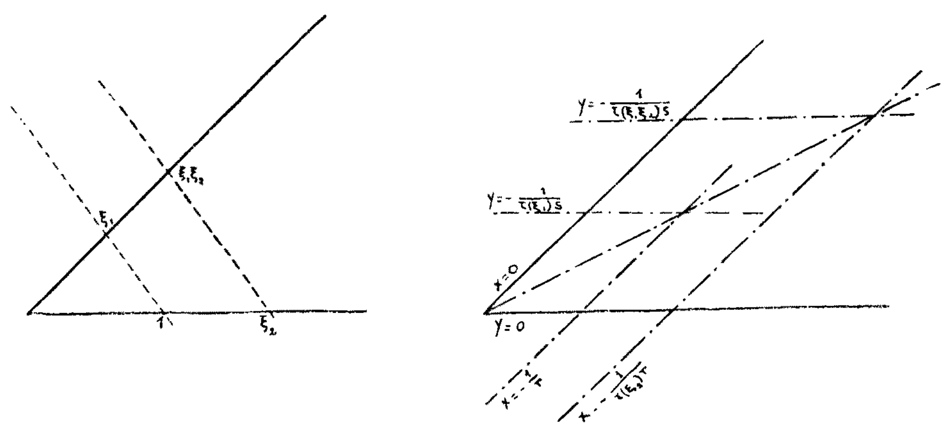

Fig. 2.

Si consideri la retta $(0, 0)\left(-\frac{1}{r}, -\frac{1}{\tau(\xi_1)\,s}\right)$; la si seghi colla retta $x = -\frac{1}{\tau(\xi_2)\,r}$; la parallela alla $y = 0$ pel punto d'intersezione è la retta $y = -\frac{1}{\tau(\xi_1\,\xi_2)\,s}$, reciproca di $(0, \xi_1\,\xi_2)$.

Esprimendo analiticamente si ha

$$-\frac{1}{\tau(\xi_1\,\xi_2)\,s} = -\frac{1}{\tau(\xi_1)\,s}\cdot\frac{1}{\tau(\xi_2)} = -\frac{1}{\tau(\xi_2)\,\tau(\xi_1)\,s}\,.$$

(*) Cfr. HILBERT, l. c., pag. 54.

ossia

$$\tau(\xi_1 \xi_2) = \tau(\xi_2)\,\tau(\xi_1). \tag{5}$$

Dalle equazioni (3), (4), (5) si ha tosto che *qualunque sia il numero* λ **razionale** (*) *sarà*

$$\tau(\lambda) = \lambda. \tag{I}$$

In generale poi le relazioni (4) e (5) si riassumono nell'unica seguente:

Sia $R(1, \xi, \eta, \ldots)$ *un'espressione razionale a coefficienti razionali nelle* $\xi, \eta, \ldots$: *cioè una somma di termini ciascuno dei quali sia il prodotto di un coefficiente numerico razionale, di altri fattori, potenze delle* $\xi, \eta, \ldots$ *e infine di fattori della forma* $\frac{1}{R'}$, *dove* R' *è una espressione razionale della stessa natura (e, naturalmente, più semplice* (**)). *Si chiami* $\overline{R}(1, \xi, \eta, \ldots)$ *la funzione che si ottiene scrivendo in ogni termine di* R *i fattori, diversi dal coefficiente numerico, in ordine invertito, coll'avvertenza che, per ogni fattore della forma* $\frac{1}{R'}$, *oltre all'operare lo spostamento richiesto da questa inversione, si sostituisca all'espressione* R' *la corrispondente espressione* $\overline{R'}$. *Dovrà allora essere:*

$$\tau\Big[R(1, \xi, \eta, \ldots)\Big] = \overline{R}\Big(1, \tau(\xi), \tau(\eta), \ldots\Big). \tag{II}$$

Tosto che una funzione τ soddisfacente a questa condizione sia nota, l'equazione (1'), qualunque siano le costanti r ed s, definirà una reciprocità fra i piani $(\xi\eta)$ ed $(x y)$. Ad ogni punto $(\xi\eta)$ essa fa corrispondere infatti la retta rappresentata dalla (1') per quei valori particolari di ξ e di η; e se il punto $(\xi\eta)$ si muove sulla retta

$$\alpha\xi + \beta\eta + 1 = 0 \qquad (\alpha, \beta \text{ costanti}),$$

(*) Ogni sistema di numeri desarguiani contiene come parte il sistema dei razionali: in ogni prodotto i fattori razionali sono commutabili con tutti gli altri (Cfr. HILBERT e B. LEVI, ll. cc.).

(**) Per modo che, esaminando i termini di R' e in questi i fattori della forma $\frac{1}{R'}$, e così proseguendo, si giunga alfine (dopo un numero finito di passaggi) a termini che non contengono più fattori di questa forma.

si avrà, per le (II),

$$\tau(\xi)\,\tau(\alpha)+\tau(\eta)\,\tau(\beta)+1=0$$

cosicchè tutte le corrispondenti rette (1') passeranno pel punto

$$x=\frac{1}{r}\,\tau(\alpha),\quad y=\frac{1}{s}\,\tau(\beta).$$

Il problema della definizione di una reciprocità assume così una forma funzionale singolarmente analoga a quella che risulta dalle considerazioni del Darboux pel problema della definizione di una corrispondenza armonica in una forma di 1.ª specie.

La reciprocità diverrà una polarità quando $(\xi\,\eta)$, $(x\,y)$ si interpretino come simboli diversi per le stesse coordinate e la funzione τ sia tale che, qualunque sia λ,

$$\tau(r)\,\tau^2(\lambda)=r\,\lambda\quad \tau(s)\,\tau^2(\lambda)=s\,\lambda.$$

Facendo λ razionale, per cui $\lambda=\tau(\lambda)=\tau^2(\lambda)$, si ha

$$\tau(r)=r\quad \tau(s)=s \tag{III}$$

onde segue che, *per ogni* λ, dovrà essere

$$\tau^2(\lambda)=\lambda. \tag{IV}$$

*
* *

Le condizioni (I) e (II) che definiscono una reciprocità generica si soddisfano immediatamente ogni volta che il campo numerico in cui si possono scegliere arbitrariamente le coordinate delle nostre forme di 2.ª specie *ammetta una base;* esista cioè un gruppo, finito o non, di numeri (*) razionalmente indipendenti

$$1,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ldots$$

tale che ogni altro numero del campo si ottenga da essi mediante opera-

(*) Numeri desarguiani, non necessariamente numeri aritmetici (razionali od irrazionali), come fu ricordato al principio del paragrafo precedente.

zioni razionali: basterà allora indicare con 1, λ'_1, λ'_2,... un'altra base del campo, quale si otterrebbe, per es. moltiplicando le λ_i per numeri razionali arbitrari, ovvero facendo loro subire una sostituzione lineare a determinante non nullo, e porre, per es.,

$$\tau(1) = 1 \quad \tau(\lambda_i) = \lambda'_i \quad (i = 1, 2, \ldots);$$

ogni altro numero del campo sarà un'espressione razionale nelle λ,

$$R(1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots),$$

e la (II) definirà il suo trasformato per l'operazione τ

$$\tau[R(1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)] = \overline{R}(1, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots).$$

È da notare che, se ξ_1, ξ_2,... sono numeri del campo, e, indicando con Ξ_1, Ξ_2,... espressioni razionali, è precisamente

$$\xi_i = \Xi_i(1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots),$$

la condizione (II)

$$\tau[R(1, \xi_1, \xi_2, \ldots)] = \overline{R}(1, \tau(\xi_1), \tau(\xi_2), \ldots)$$

sarà identicamente soddisfatta, poichè, se si pone

$$R(1, \xi_1, \xi_2, \ldots) = R[1, \Xi_1(1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots), \Xi_2(1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots), \ldots]$$
$$= S(1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$$

si ha

$$\overline{R}(1, \tau(\xi_1), \tau(\xi_2), \ldots) = \overline{R}[1, \overline{\Xi}_1(1, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots), \overline{\Xi}_2(1, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots), \ldots]$$
$$= \overline{S}(1, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots).$$

Ne segue che, nell'ipotesi considerata, la possibilita di definire una reciprocità non impone nulla riguardo alla proprietà commutativa della moltiplicazione e quindi riguardo al verificarsi o meno del teorema di Pappo-Pascal.

Ma si supponga che dal campo numerico totale non si sappia estrarre una base: ciò avviene per es., almeno nello stato attuale delle nostre conoscenze, per il campo di tutti i numeri reali. È assai probabile che in questo caso non si riesca a definire una funzione τ per cui sia soddisfatta la (II), altrimenti che ponendo, *per ogni* λ

$$\tau(\lambda) = \lambda$$

e supponendo che sia quindi

$$R(1, \xi, \eta, \ldots) = \overline{R}(1, \xi, \eta, \ldots).$$

Se allora ξ, η sono due numeri qualunque del campo, sarà $\xi\eta = \eta\xi$; vale dunque la proprietà commutativa della moltiplicazione e il teorema di Pappo (*).

È naturale che si ricadrebbe in una ovvia generalizzazione del 1.° caso quando, in luogo di supporre che pel nostro campo di numeri esista una base costituita di una determinata successione di numeri fra loro razionalmente indipendenti, si supponesse che il campo risultasse da tutte le espressioni razionali composte mediante i numeri di un certo gruppo di campi parziali, ciascuno dei quali possa non ammettere una base ma ammetta la proprietà commutativa pei prodotti di numeri che ad esso esclusivamente appartengono.

Se si considera la difficoltà quasi insormontabile che si presenta a voler esemplificare in modo esplicito la possibilità di numeri desarguiani, non pascaliani i quali non posseggano una base, almeno nel senso più generale esposto ora, si vede che se l'ipotesi dell'esistenza di una reciprocità non può mostrarsi come conseguenza del teorema di Desargues, *essa aggiunge però ben poco a questo teorema.*

*
* *

Ben diversamente avviene quando si chiede invece l'esistenza di una polarità, per i più stretti vincoli imposti dalla (IV).

Si consideri, per es., un campo di numeri desarguiani avente la base

$$1,\ t,\ u$$

coll'ipotesi

$$t^2 = -1 \quad k\,t\,u = u\,t$$

(*) Si ricordi che in ogni geometria desarguiana il teorema di Pappo è equivalente alla proprietà commutativa del prodotto (Cfr. Hilbert, l. c., Kap. VI, §§ 31-34).

ove k sia un numero razionale; basterà supporre che le diverse potenze di u non siano fra loro legate da alcuna relazione lineare con un numero finito od infinito di termini, a coefficienti appartenenti al campo definito dalla base (1, t), perchè k possa essere un numero qualunque. Ogni numero del campo potrà rappresentarsi nella forma:

$$\mathfrak{P}(u) + t\,\mathfrak{P}'(u)$$

dove $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{P}'$ sono serie di potenze intere (positive o negative), ascendenti di u, con coefficienti razionali. Dovrà essere

$$[\tau(t)]^2 = \tau(t^2) = \tau(-1) = -1;$$

onde, ponendo $\tau(t) = \mathfrak{P}(u) + t\,\mathfrak{P}'(u)$, e indicando con $\mathfrak{P}_k(u)$, $\mathfrak{P}'_k(u)$,... le serie che si ottengono sostituendo in $\mathfrak{P}(u)$, $\mathfrak{P}'(u)$,..., u con $k\,u$

$$\{\mathfrak{P}(u)^2 - \mathfrak{P}'(u)\,\mathfrak{P}'_k(u)\} + t\,\mathfrak{P}'(u)\,\{\mathfrak{P}(u) + \mathfrak{P}_k(u)\} = -1.$$

Segue

$$\mathfrak{P}'(u)\,\{\mathfrak{P}(u) + \mathfrak{P}_k(u)\} = 0$$

$$\mathfrak{P}(u)^2 = \mathfrak{P}'(u)\,\mathfrak{P}'_k(u) - 1.$$

Se $k \neq -1$ è sempre $\mathfrak{P}(u) + \mathfrak{P}_k(u) \neq 0$ tosto che $\mathfrak{P}(u) \neq 0$; ma allora la 1.ª equazione dà $\mathfrak{P}'(u) = 0$ e la 2.ª dà la condizione impossibile $\mathfrak{P}(u)^2 = -1$; dovrà quindi essere

$$\mathfrak{P}(u) = 0, \quad \mathfrak{P}'(u)\,\mathfrak{P}'_k(u) = 1,$$

onde $\mathfrak{P}'(u)$ deve essere indipendente da u e precisamente $\mathfrak{P}'(u) = \mathfrak{P}'_k(u) = \pm 1$, e

$$\tau(t) = \pm t.$$

Si ponga ancora $\tau(u) = \mathfrak{P}(u) + t\,\mathfrak{P}'(u)$, $\tau_k(u) = \mathfrak{P}_k(u) + t\,\mathfrak{P}'_k(u)$.
Deve pure essere

$$\tau^2(t\,u) = t\,u$$

e d'altra parte, in forza della (II) e della precedente relazione, si ha

$$\tau(t\,u) = \pm\,\tau(u)\,t = \pm\,t\,\tau_k(u)$$

$$\tau^2(t\,u) = \tau[\pm\,t\,\tau_k(u)] = \tau_k[\tau(u)]\,t = t\,\tau_k[\tau_k(u)];$$

quindi, poichè $\tau_k[\tau_k(u)]$ si ottiene sostituendo $k^2 u$ ad u in $\tau[\tau(u)] = \tau^2(u) = u$,

$$u = k^2 u \quad k^2 = 1 \quad k = \pm 1.$$

In un campo DESARGUIANO *avente per base* $(1, t, u)$ *con* $t^2 = -1$, $k\,t\,u = u\,t$ e $k \neq \pm 1$ *non può dunque esistere una polarità.* Ma *dall'esistenza della polarità non seguirà ancora il teorema di* PAPPO, *perchè, per* $k = -1$ *la moltiplicazione non è commutativa.*

*
* *

Risulta da questa discussione che nella dimostrazione del teorema di PASCAL mediante proprietà metriche diverse dai postulati della continuità, queste hanno una parte maggiore di quella costituita della semplice esistenza della polarità assoluta: è facile riconoscere che questo maggior contributo è portato da ipotesi che toccano fatti di 2.° grado: tali sono per la metrica iperbolica l'esistenza dei due punti all'infinito su ciascuna retta metrica, per la metrica parabolica e per l'ellittica le proprietà della circonferenza (*).

Nella forma projettiva ch'è più propria del presente lavoro, una tale proprietà potrebbe essere la seguente:

Assegnato alla ξ un valore costante, mentre si lascia variare la η, il punto $(\xi\,\eta)$ e la sua polare descrivono due forme projettive nel senso di STAUDT: nello stesso senso sono allora projettivi il fascio di queste polari e il fascio delle corrispondenti rette $y = \eta$ che dal punto all' infinito dell'asse delle x projettano i loro poli; si chiami *conica* il luogo delle intersezioni delle rette omologhe dei due fasci.

Si ammetterà che, *qualunque sia il valore di* x_0, *esiste un numero razionale* k *tale che la retta* $x = k\,x_0$ *interseca la conica* (**).

(*) Invero l'HILBERT ha mostrato, per la metrica parabolica, la dipendenza del teorema di PAPPO dall'ipotesi dell'uguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele; si consideri il cerchio definito come luogo delle intersezioni delle rette ortogonali uscenti da due punti fissi: si potrà considerare tale uguaglianza come equivalente all'esistenza delle intersezioni della circonferenza con ogni retta uscente dal centro. Riguardo alla geometria ellittica i procedimenti dell'HESSENBERG la riconducono alla parabolica.

(**) Si noti l'analogia di questa richiesta con quella che le rette di una certa striscia o d'un certo angolo incontrino una circonferenza.

Per rappresentare analiticamente questa ipotesi, si osservi che la conica sarà rappresentata, nelle variabili x, y, da

$$\tau(\xi)\, r\, x + \tau(y)\, s\, y + 1 = 0;$$

così il postulato enunciato si esprimerà in ciò che, qualunque sia il numero x_0, esiste un k razionale tale che l'equazione

$$\tau(y)\, s\, y = -1 - k\, \tau(\xi)\, r\, x_0$$

ammette soluzioni (*); sia y_0 una di queste soluzioni: dalla

$$k\, \tau(\xi)\, r\, x_0 + \tau(y_0)\, s\, y_0 + 1 = 0$$

segue, operando sui due membri coll'operazione τ

$$k\, \tau(x_0)\, r\, \xi + \tau(y_0)\, s\, y_0 + 1 = 0$$

a causa della (II) e della (IV); quindi

$$\tau(\xi)\, r\, x_0 = \tau(x_0)\, r\, \xi.$$

Si faccia anzitutto $r\, x_0$ razionale: essendo allora $\tau(x_0)\, r = \tau(r\, x_0) = r\, x_0$, risulterà $\tau(\xi) = \xi$; si faccia poi $x_0 = \lambda\, r\, \xi$; si otterrà $\xi\, r\, \lambda\, r\, \xi = \xi\, r\, \tau(\lambda)\, r\, \xi$ ossia, *qualunque sia* λ,

$$\tau(\lambda) = \lambda.$$

Se infine per λ si assume un prodotto qualunque $\lambda = \mu\, \nu$, risulterà da $\tau(\mu\, \nu) = \tau(\nu)\, \tau(\mu)$, $\mu\, \nu = \nu\, \mu$ onde la proprietà commutativa del prodotto.

(*) Almeno due, perchè se y_0 è una prima soluzione, sarà pure soluzione della stessa equazione $-y_0$.

Gennaio, 1907.