Applicazione della teoria di Fredholm al problema del raffreddamento dei corpi.

(Di GIUSEPPE LAURICELLA, *a Catania.)*

Il PICARD nella sua elegante Memoria: *Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de* M. FREDHOLM (*) integra l'equazione delle vibrazioni delle membrane, introducendo la *funzione di* GREEN e facendo uso della nota teoria delle *equazioni integrali di* FREDHOLM, a simiglianza di quanto fa l'HILBERT in quistioni analoghe, nei suoi lavori dei *Nachrichten* di Gottinga. In tal modo Egli ritrova con notevole rapidità e generalità quei risultati, che erano stati ottenuti solo mediante l'applicazione del noto *lemma di* POINCARÉ.

L'estensione delle considerazioni del PICARD al problema del raffreddamento dei corpi richiede anzitutto che sia risoluto il problema delle temperature stazionarie, ed inoltre che siano generalizzate la *funzione di* GREEN ed alcune formole ricorrenti che ne seguono.

Una nuova ed elegante soluzione del problema delle temperature stazionarie si trova nella detta Memoria di PICARD, come applicazione dei risultati di FREDHOLM. La generalizzazione della *funzione di* GREEN e delle menzionate formole ricorrenti può farsi, seguendo, ad esempio, le orme di LIAPOUNOFF (**); benchè essa nei dettagli deve certamente offrire maggiori difficoltà di quelle che si presentano nello studio della *funzione di* GREEN e sue applicazioni. Fu appunto per evitare tali difficoltà ed anche in vista dell' estensione del *metodo di* NEUMANN ai campi non convessi, fatta dal POINCARÉ, che nella mia Memoria: *Sull'integrazione dell'equazione della propagazione del calore* (***) mi valsi esclusivamente del *metodo di* NEUMANN e non feci alcun uso della *funzione di* GREEN e delle sue generalizzazioni.

(*) *Rendiconti del Circolo Matematico*, tom. XXII, anno 1906.

(**) *Sur certaines questions*... (Journal de Mathématiques, s. 5.^{a}, tom. IV, anno 1898).

(***) *Memorie della Società italiana delle Scienze* (detta dei XL), s. 3.^{a}, tom. XII).

Nel presente lavoro, mediante l'uso di una conveniente equazione integrale, ritrovo i noti risultati del POINCARÉ sul raffreddamento dei corpi, indipendentemente dal problema delle temperature stazionarie, dal *lemma di* POINCARÉ, dalla *funzione di* GREEN e dalle sue estensioni. Le superficie, convesse o non convesse, che considero, e per le quali valgono così i detti risultati, sono generali quanto quelle per le quali si risolve il *problema di* DIRICHLET col *metodo di* FREDHOLM (*).

L'estensione dei risultati del POINCARÉ ai campi non convessi è stato oggetto di vari importanti lavori, tra i quali stanno in prima linea quelli dello STEKLOFF (**) e dello ZAREMBA (***); però i metodi a tal uopo escogitati fin qui, oltre di essere poco semplici, dipendono sempre dal *lemma di* POINCARÉ. Questo lemma è stato esteso, è vero, ai campi non convessi (****); ma con alcune restrizioni sulla natura della superficie limitante il campo, e non con quella generalità che, come si vedrà, apporta l'applicazione della *teoria di* FREDHOLM.

Dovendo, in ciò che segue, riferirmi spesso alle mie due citate Memorie, indicherò quella *Sull'integrazione delle equazioni,* ecc., col simbolo $(M)_1$, l'altra *Alcune applicazioni della teoria,* ecc., col simbolo $(M)_2$.

1. Sia S lo spazio finito limitato da una superficie σ ed S' lo spazio infinito limitato dalla medesima superficie.

Prendiamo per direzione positiva della normale n in ogni punto p di σ, quella rivolta verso il campo finito S; riferiamo i punti dello spazio ad una terna di assi cartesiani ortogonali; ed indichiamo con r il vettore congiungente due punti (x, y, z), (ξ, η, ζ) qualsiasi dello spazio, con r' il vettore congiungente due punti p, p' qualsiasi della superficie σ, con k un parametro variabile, il quale possa assumere qualunque valore reale o complesso, con h (*coefficiente di permeabilità*) una costante qualsiasi reale e non negativa. Po-

---

(*) Cfr. ad es. la mia Memoria: *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali . . .*, Cap. II, § 8 (Il Nuovo Cimento, anno 1907).

(**) *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique* (Annales de l'École Normale supérieure, anno 1902); *Théorie générale des fonctions fondamentales* (Annales de la Faculté des Sc. de Toulouse, 2.e s., VI).

(***) *Solution générale du problème de* FOURIER (Bulletin international de l'Acad. des Sc. de Cracovie; Février 1905).

(****) A. KORN, *Abhandlungen zur Potentialtheorie*, 4 (Berlin, 1902). — E. E. LEVI, *Su un lemma del* POINCARÉ (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XV).

niamo poi:

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\frac{d}{d n} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cos \widehat{n x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cos \widehat{n y} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \cos \widehat{n z},$$

$$\frac{\delta}{\delta n'} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \widehat{n' x} + \frac{\partial}{\partial y} \cos \widehat{n' y} + \frac{\partial}{\partial z} \cos \widehat{n' z},$$

intendendo nella terza formola che le derivazioni siano fatte nel punto $p \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ di σ e che n sia la direzione positiva della normale a σ nel punto p stesso, ed intendendo nell'ultima che le derivazioni siano fatte nel punto (x, y, z), preso ad arbitrio nello spazio, e che n' sia la direzione positiva della normale in un punto arbitrario $p' \equiv (x', y', z')$ della superficie σ.

Finalmente supponiamo che la superficie σ soddisfaccia alle seguenti condizioni:

1.° abbia un piano tangente determinato in ogni punto, variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2.° esista un numero finito positivo a tale che, presi su di essa superficie due punti arbitrari p e p' ed indicato con $\widehat{nn'}$ l'angolo acuto fatto dalle corrispondenti normali, si abbia:

$$\widehat{nn'} < a\, r'.$$

Estensione dei teoremi sulle funzioni potenziali.

2. Come caso particolare di teoremi sui potenziali ritardati (*), si hanno i seguenti, che sono una estensione di quelli noti sulle funzioni potenziali di spazio, di doppio strato e di strato.

I. Indichiamo con $\rho(x, y, z)$ una funzione del campo S finita e continua insieme alle sue derivate del primo ordine, i punti di σ al più esclusi

(*) V. Volterra, *Sul principio di* Huyghens (Nuovo Cimento, s. 3.^{a}, tom. XXXII e XXXIII).

per queste derivate; e costruiamo l'espressione:

$$\Psi_1(x, y, z; \sqrt{k}) = \frac{1}{4\pi}\int_S \rho(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\,dS. \tag{1}$$

Si ha che la funzione $\Psi_1(x, y, z; \sqrt{k})$, per qualsiasi valore finito di k, è finita e continua insieme alle sue derivate del primo ordine rispetto ad x, y, z in tutto lo spazio, ha le derivate del secondo ordine finite e continue in tutti i punti dell'interno di S (i punti di σ cioè al più esclusi), e soddisfa alla seguente equazione:

$$\text{(nei punti di } S) \qquad \Delta^2\Psi_1 + k\,\Psi_1(x, y, z; \sqrt{\ }) + \rho(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

II. Consideriamo sulla superficie σ un sistema ortogonale (α, β); ed indichiamo con $\rho(\alpha, \beta)$ una funzione finita e continua qualsiasi dei suoi punti $(\alpha, \beta) \equiv (\xi, \eta, \zeta)$. Posto:

$$\Psi_2(x, y, z; \sqrt{k}) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \rho(\alpha, \beta)\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\right)d\sigma, \tag{3}$$

si ha, per qualunque valore di k,

$$[\Psi_2(\alpha', \beta'; \sqrt{k})]_i = \quad \rho(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \rho(\alpha, \beta)\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)d\sigma, \tag{4}$$

$$[\Psi_2(\alpha', \beta'; \sqrt{k})]_e = -\rho(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \rho(\alpha, \beta)\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)d\sigma, \tag{5}$$

dove la notazione $[\ ]_i$ serve ad indicare il limite dei valori della funzione, che si considera, quando il punto (x, y, z) si avvicina indefinitamente al punto $(x', y', z') \equiv (\alpha', \beta')$ di σ, mantenendosi nell'interno del campo S, l'altra $[\ ]_e$ serve ad indicare il limite dei valori della funzione, che si considera, quando il punto (x, y, z) si avvicina indefinitamente al punto (α', β') di σ, mantenendosi nell'interno del campo S'.

III. Sia $\rho(\alpha, \beta)$ una funzione finita e continua qualsiasi dei punti di σ. Posto.

$$\Psi_3(x, y, z; \sqrt{k}) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \rho(\alpha, \beta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\,d\sigma, \tag{6}$$

si ha, per qualunque valore finito di k, che la funzione $\Psi_3(x, y, z; \sqrt{k})$ è finita e continua in tutti i punti dello spazio e nei punti $(\alpha', \beta') \equiv (x', y', z')$ di σ soddisfa alle equazioni:

$$\left[\frac{\delta \Psi_3}{\delta n'}\right]_i = -\rho(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \rho(\alpha, \beta)\frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right) d\sigma, \tag{7}$$

$$\left[\frac{\delta \Psi_3}{\delta n'}\right]_e = \rho(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \rho(\alpha, \beta)\frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right) d\sigma, \tag{8}$$

dove si è posto:

$$\frac{d}{dn'} = \frac{\partial}{\partial x'}\cos\widehat{n'x} + \frac{\partial}{\partial y'}\cos\widehat{n'y} + \frac{\partial}{\partial z'}\cos\widehat{n'z}.$$

Raffreddamento dei corpi nei casi di h finito.

3. Sia $f(x, y, z)$ una funzione finita e continua insieme alle sue derivate del primo ordine in tutto il campo S, i punti di σ al più esclusi per queste derivate. Poniamo:

$$H(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d}{dn'}\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r} dS - h\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r} dS\right]; \tag{9}$$

e consideriamo l'equazione integrale:

$$\varphi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left\{h\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'} - \frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\right\}\varphi(\alpha, \beta; \sqrt{k})d\sigma = H(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) \tag{10}$$

e la corrispondente equazione omogenea:

$$\psi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left\{h\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'} - \frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\right\}\psi(\alpha, \beta; \sqrt{k})\, d\sigma = 0. \tag{11}$$

Dimostriamo che *l'equazione omogenea* (11) *non ammette soluzione alcuna diversa da zero per k reale e negativa o complessa.*

Infatti formiamo con una qualsiasi soluzione dell'equazione (11) l'espressione:

$$\Psi(x, y, z; \sqrt{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \psi(\alpha, \beta; \sqrt{k}) \frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r} d\sigma.$$

Dalla (7), (8) si ricava, in virtù della continuità della $\psi(\alpha, \beta; \sqrt{k})$,

$$\left[\frac{\delta \Psi}{\delta n'}\right]_i = -\psi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \psi(\alpha, \beta; \sqrt{k}) \frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right) d\sigma, \tag{7'}$$

$$\left[\frac{\delta \Psi}{\delta n'}\right]_e = \psi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \psi(\alpha, \beta; \sqrt{\ }) \frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right) d\sigma; \tag{8'}$$

e quindi, in virtù della (11),

$$(\text{nei punti di } \sigma) \qquad \left[\frac{\delta \Psi}{\delta n'}\right]_i - h[\Psi]_i = 0.$$

Di qui, rammentando che la $\Psi(x, y, z; \sqrt{k})$ soddisfa all'equazione indefinita:

$$\Delta^2 \Psi + k \Psi(x, y, z; \sqrt{k}) = 0, \tag{12}$$

risulta, come è notorio, per k reale e negativa o complessa,

$$(\text{nei punti di } S) \qquad \Psi(x, y, z; \sqrt{k}) = 0;$$

ed ancora:

$$(\text{nei punti di } \sigma) \qquad \left[\frac{\delta \Psi}{\delta n'}\right]_i = 0. \tag{13}$$

Posto:

$$k = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega),$$

sarà:

$$e^{ir\sqrt{k}} = e^{-r\sqrt{\rho}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}} \cdot e^{ir\sqrt{\rho}\cos\frac{\omega}{2}}.$$

Questa ci dimostra che per ω diversa da zero e da 2π, ossia per k reale e negativa o complessa, il modulo dell'espressione $e^{ir\sqrt{k}}$, al crescere indefinito di r, diviene infinitesimo d'ordine superiore a qualsiasi ordine rispetto a $\frac{1}{r}$; e quindi si può alla funzione $\Psi(x, y, z; \sqrt{k})$, considerata nel campo infinito S', applicare il *lemma di* Green.

La $\Psi(x, y, z; \sqrt{k})$ è continua in tutto lo spazio; quindi si avrà nei punti di σ: $[\Psi]_e = 0$; ed allora tenendo conto dell'equazione indefinita (12) nei punti del campo S', ne segue, mediante l'applicazione del detto lemma, per k reale e negativa o complessa,

$$\text{(nei punti di } S') \quad \Psi(x, y, z; \sqrt{k}) = 0;$$

ed ancora:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\delta \Psi}{\delta n'}\right]_e = 0.$$

Questa, insieme alla (13) ed alle (7)', (8)', ci dà, come volevamo dimostrare,

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \psi(\alpha, \beta; \sqrt{k}) = 0.$$

4. Dal teorema, testè dimostrato, segue che il determinante $D'(\sqrt{k})$ dell'equazione integrale (10) è certamente diverso da *zero* per qualunque valore reale e negativo o complesso di k; quindi *esso non è identicamente nullo.* Dal fatto poi che la *funzione caratteristica* della detta equazione (10) è funzione olomorfa di $\sqrt{k}$, si deduce che *il determinante $D'(\sqrt{k})$ è anch' esso una funzione olomorfa di $\sqrt{k}$*; e quindi ancora che l'*equazione*:

$$D'(\lambda) = 0 \tag{14}$$

può avere al più un numero infinito di radici, ciascuna di ordine finito, e tali che qualunque porzione finita del piano della variabile complessa λ non può contenerne che un numero finito.

Osserviamo ancora che la funzione $H(\alpha', \beta'; \sqrt{k})$ è olomorfa in $\sqrt{k}$; quindi la soluzione dell'equazione integrale (10) sarà una funzione meromorfa di $\sqrt{k}$ (*), la quale potrà avere dei poli nei punti corrispondenti ai valori di $\sqrt{k}$, che annullano il determinante $D'(\sqrt{k})$, e si potrà scrivere:

$$\varphi(\alpha, \beta; \sqrt{k}) = \frac{\Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})}{D'(\sqrt{k})}.$$

La $\Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})$ sarà funzione olomorfa di $\sqrt{k}$ e, in virtù della (10), sod-

(*) J. Plemelj, *Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung,* pag. 126 (Monatshefte für Math. und Physik, XV, Jahrg.).

disferà all'equazione integrale:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ h \frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'} - \frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\right\} \Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})\, d\sigma = \\ = D'(\sqrt{k}) \,.\, H(\alpha', \beta'; \sqrt{k}).\end{aligned}\right\} \quad (10)'$$

5. Ciò premesso, si costruisca la funzione:

$$P'(x, y, z; \sqrt{k}) = \frac{1}{4\pi}\int_S D'(\sqrt{k}) \,.\, f(\xi, \eta, \zeta) \frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r} dS + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k}) \frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r} d\sigma. \quad (15)$$

In virtù della formola (2), segue:

(nei punti di S) $\Delta^2 P' + k P'(x, y, z; \sqrt{k}) + D'(\sqrt{k}) \,.\, f(x, y, z) = 0.$ (16)

Si ha poi, in virtù della formola (7) e dell'equazione (10)',

$$\text{(nei punti di } \sigma\text{)} \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\delta P'}{\delta n'}\right]_i - h[P']_i = D'(\sqrt{k}) \,.\, \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d}{dn'}\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r} dS - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - h\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r} dS\right] - \\ &- \Phi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ h\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'} - \frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\right\}\Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})\, d\sigma = 0.\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Osserviamo che l'equazione: $D'(-\lambda) = 0$ ha le medesime radici, mutate di segno, dell'equazione (14); sicchè l'espressione:

$$D'(\lambda) \,.\, D'(-\lambda) = D(\lambda^2)$$

non è identicamente nulla ed è funzione olomorfa di λ^2. Ne concludiamo che la $D(k)$ *è funzione olomorfa di* k *e l'equazione:*

$$D(k) = 0 \quad (14)'$$

può avere al più un numero infinito di radici, ciascuna di ordine finito, aventi per unico valore limite il valore $k = \infty$.

Poniamo:

$$P'(x, y, z; \sqrt{k}) \,.\, D'(-\sqrt{k}) = P(x, y, z; \sqrt{k});$$

e moltiplichiamo ambo i membri delle (16), (17) per $D'(-\sqrt{k})$. Risulta:

$$\text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2 P(x,y,z;\sqrt{k}) + k\,.P(x,y,z;\sqrt{k}) + D(k)\,f(x,y,z) = 0, \tag{16'}$$

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\delta P}{\delta n'}\right]_i = h\,[P]_i. \tag{17'}$$

Da queste equazioni si ottiene ovviamente:

$$\text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2 \{ P(x,y,z;\sqrt{k}) - P(x,y,z;-\sqrt{k}) \} +$$

$$+ k \{ P(x,y,z;\sqrt{k}) - P(x,y,z;-\sqrt{k}) \} = 0,$$

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\delta}{\delta n'} \{ P(x,y,z;\sqrt{k}) - P(x,y,z;-\sqrt{k}) \} \right]_i =$$

$$= h\,[P(x,y,z;\sqrt{k}) - P(x,y,z;-\sqrt{k})]_i.$$

Queste ci dànno, come è noto, per k quantità reale e negativa o complessa,

$$\text{(in tutto } S) \quad P(x,y,z;\sqrt{k}) - P(x,y,z;-\sqrt{k}) = 0;$$

e quindi, osservando che il primo membro di questa uguaglianza è funzione olomorfa di $\sqrt{k}$, risulterà identicamente rispetto a $\sqrt{k}$:

$$\text{(in tutto } S) \quad P(x,y,z;\sqrt{k}) = P(x,y,z;-\sqrt{k}).$$

Adunque *la funzione* $P(x,y,z;\sqrt{k})$ è funzione pari di $\sqrt{k}$; sicchè essa *è funzione olomorfa di* k, e si può scrivere:

$$P'(x,y,z;\sqrt{k})\,.\,D'(-\sqrt{k}) = P(x,y,z;k).$$

Osserviamo ancora che la funzione $P'(x,y,z;\sqrt{k})$ e il determinante $D'(\sqrt{k})$ contengono esplicitamente l'unità immaginaria i nello stesso modo che contengono $\sqrt{k}$; quindi *la* $P(x,y,z;k)$ *è funzione reale di* k.

6. La funzione $P'(x,y,z;\sqrt{k})$, come risulta dalla (15), ha le derivate di primo ordine rispetto ad x, y, z finite e continue in tutto il campo S, i punti di σ al più esclusi; sicchè lo stesso avverrà della funzione $P(x,y,z;k)$;

e per conseguenza si potrà scrivere, come è noto, in virtù delle (16)', (17)',

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(nei punti di } S) & P(x, y, z; k) \\ \\ \text{(nei punti di } S') & 0\end{array}\right\} = \frac{1}{4\pi}\int_S \{ k P(\xi, \eta, \zeta; k) + D(k) \,.\, f(\xi, \eta, \zeta) \} \frac{dS}{r} + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{ \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{h}{r} \right\} [P]_i \, d\sigma.$$

Da queste formole risulta:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(nei punti di } S) & \dfrac{\partial^t P}{\partial k^t} \\ \\ \text{(nei punti di } S') & 0\end{array}\right\} = \frac{1}{4\pi}\int_S \left\{ k \frac{\partial^t P}{\partial k^t} + t \frac{\partial^{t-1} P}{\partial k^{t-1}} + \frac{\partial^t D}{\partial k^t} \cdot f(\xi, \eta, \zeta) \right\} \frac{dS}{r} + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{ \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{h}{r} \right\} \left[\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right]_i d\sigma. \qquad (15)'$$

La prima di queste ultime ci dà, in virtù del *teorema di* Poisson,

$$\text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2 \frac{\partial^t P}{\partial k^t} + k \frac{\partial^t P}{\partial k^t} + t \frac{\partial^{t-1} P}{\partial k^{t-1}} + \frac{\partial^t D}{\partial k^t} \cdot f(x, y, z) = 0. \quad (16)'$$

Dalla seconda risulta che esiste ed è finita e continua su σ l'espressione:

$$\left[\frac{\delta}{\delta n'}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \left[\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right]_i d\sigma\right]_e ;$$

di modo che si avrà, in virtù del *teorema di* Liapounoff (*),

$$\left[\frac{\delta}{\delta n'}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \left[\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right]_i d\sigma\right]_e = \left[\frac{\delta}{\delta n'}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \left[\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right]_i d\sigma\right]_i .$$

Ciò premesso, si avrà, da ambedue le (15)' e dalla formola di discontinuità della derivata normale di strato,

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\delta}{\delta n'}\left(\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right)\right]_i = h \left[\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right]_i . \qquad (17)''$$

(*) V. ad es. la Memoria $(M)_2$; Cap. III, § 14.

7. Ora sia k' una radice dell'equazione (14)' di ordine $t'+1$ $(t' \geqq 0)$. Sarà per $k = k'$:

$$0 = D = \frac{\partial D}{\partial k} = \frac{\partial^2 D}{\partial k^2} = \cdots = \frac{\partial^{t'} D}{\partial k^{t'}};$$

e risulterà dalle (16)', (17)', (16)'', (17)'' pure per $k = k'$:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{(nei punti di } S) & \text{(nei punti di } \sigma) \\
\Delta^2 P + k' P = 0, & \left[\frac{\delta P}{\delta n'}\right]_i = h\,[P]_i, \\
\Delta^2 \frac{\partial P}{\partial k} + k' \frac{\partial P}{\partial k} + P = 0, & \left[\frac{\delta}{\delta n'}\left(\frac{\partial P}{\partial k}\right)\right]_i = h \left[\frac{\partial P}{\partial k}\right]_i, \\
\Delta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial k^2} + k' \frac{\partial^2 P}{\partial k^2} + 2\,\frac{\partial P}{\partial k} = 0, & \left[\frac{\delta}{\delta n'}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}\right)\right]_i = h \left[\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}\right]_i, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\Delta^2 \frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}} + k' \frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}} + t' \frac{\partial^{t'-1} P}{\partial k^{t'-1}} = 0, & \left[\frac{\delta}{\delta n'}\left(\frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}}\right)\right]_i = h \left[\frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}}\right]_i.
\end{array}\right\} \quad (18)$$

Queste equazioni ci dànno per k' quantità complessa o negativa, come è noto,

$$\text{(nei punti di } S) \quad P = \frac{\partial P}{\partial k} = \cdots = \frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}} = 0.$$

Applicando il lemma di Green, si ricava ancora dalle (18):

$$\int_S P^2\, d\,S = 0, \int_S \left\{ P \frac{\partial^2 P}{\partial k^2} - 2\left(\frac{\partial P}{\partial k}\right)^2 \right\} d\,S = 0, \ldots$$

$$\ldots, \int_S \left\{ (t'-1) \frac{\partial^{t'-2} P}{\partial k^{t'-2}} \cdot \frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}} - t' \left(\frac{\partial^{t'-1} P}{\partial k^{t'-1}}\right)^2 \right\} d\,S = 0;$$

e quindi, poichè la $P(x, y, z; k)$ è funzione reale di k, avremo in tutto il campo S per k' quantità reale:

$$P = \frac{\partial P}{\partial k} = \frac{\partial^2 P}{\partial k^2} = \cdots = \frac{\partial^{t'-1} P}{\partial k^{t'-1}} = 0. \tag{19}$$

In conclusione si ha che se k' è radice multipla dell'ordine $t'+1$ dell'equazione (14)', si può scrivere:

$$D = (k'-k)^{t'+1}.\,D_1, \quad P = (k'-k)^{t'}.\,P_1 \tag{20}$$

con D_1 funzione olomorfa di k, che non si annulla per $k = k'$ e con $P_1(x, y, z; k)$ funzione finita e continua insieme alle derivate prime e seconde rispetto ad x, y, z in tutto S, i punti di σ al più esclusi per queste derivate, e tale che l'espressione:

$$\left[\frac{\delta P_1}{\delta n'}\right]_i$$

è finita e continua in tutti i punti (α', β') di .

8. Se la $\dfrac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}}$ per $k = k'$ (quantità reale e non negativa) non è identicamente nulla in tutto il campo S, si avrà, dalle ultime due equazioni delle (18) e dalle (19),

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(nei punti di } S) & \Delta^2 \dfrac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}} + k' \dfrac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}} = 0, \\ \text{(nei punti di } \sigma) & \left[\dfrac{\delta}{\delta n'}\left(\dfrac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}}\right)\right]_i = h \left[\dfrac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}}\right]_i ; \end{array}\right\} \tag{21}$$

e sarà ancora, in virtù della seconda delle (20),

$$\left(\frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}}\right)_{k=k'} = (-1)^{t'} . \pi(t') . (P_1)_{k=k'} . \tag{22}$$

Da tutto ciò che precede risulta che *la funzione:*

$$w(x, y, z; k) = \frac{P(x, y, z; k)}{D(k)} \tag{23}$$

è meromorfa in k. Essa può solamente avere una serie finita o infinita di poli semplici, corrispondenti alla serie finita od infinita di radici reali e non negative dell'equazione (14)'. *Questa serie di radici, nel caso che è infinita, ha per unico valore limite il valore* $k = \infty$. *La funzione* w, *per i valori di* k *per i quali non ha poli, è finita e continua in tutto lo spazio, ha le derivate dei due primi ordini rispetto ad* x, y, z *finite e continue in qualunque campo interno al campo* S, *è tale ancora che l'espressione* $\left[\dfrac{\delta w}{\delta n'}\right]_i$ *è finita e continua in tutti i punti* (α', β') *di* σ, *e,* in virtù delle (16)', (17)', *soddisfa alle equazioni:*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(nei punti di } S) & \Delta^2 w + k w(x, y, z; k) + f(x, y, z) = 0, \\ \text{(nei punti di } \sigma) & \left[\dfrac{\delta w}{\delta n'}\right]_i = h [w]_i . \end{array}\right\} \tag{24}$$

Per ogni valore k' di k, per cui la w diviene infinita, il residuo:

$$p'(x,\ y,\ z) = \lim_{k=k'} (k'-k)\, w = \left(\frac{P_1}{D_1}\right)_{k=k'} = \frac{(-1)^{t'}}{\pi(t').(D_1)_{k=k'}} \left(\frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}}\right)_{k=k'},$$

è funzione di x, y, z della medesima natura della funzione P e soddisfa alle equazioni:

$$\text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2 p' + k' p' = 0, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\delta p'}{\delta n'}\right]_i = h[p']_i. \quad (21)'$$

Diremo che k' è un *valore eccezionale* e p' una corrispondente *soluzione eccezionale.*

Caso di perfetta permeabilità ($h = \infty$).

9. In questo caso si consideri, in luogo dell'equazione integrale (10), la seguente:

$$\varphi(\alpha',\ \beta';\ \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\varphi(\alpha,\ \beta;\ \sqrt{k})\, d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int_S f(\xi,\ \eta,\ \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\, dS; \quad (25)$$

e, in luogo della (11), la corrispondente equazione omogenea:

$$\psi(\alpha'\ \beta';\ \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\psi(\alpha,\ \beta;\ \sqrt{k})\, d\sigma = 0. \quad (26)$$

Si può dimostrare, ragionando come al § 3, che l'equazione integrale coniugata a quest'ultima non ammette soluzione alcuna diversa da *zero* per k reale e negativa o complessa. Lo stesso sarà allora della (26) medesima; e quindi avremo che il determinante $D'(\sqrt{k})$ dell'equazione integrale (25) è certamente diverso da *zero* per k reale e negativa o complessa.

Osserviamo poi che la funzione caratteristica della medesima equazione (25) è funzione olomorfa di $\sqrt{k}$; per conseguenza *il determinante $D'(\sqrt{k})$ dell'equazione* (25) *è funzione olomorfa di $\sqrt{k}$ e non è identicamente nullo.*

Risulta ancora, come al § 4, che la soluzione dell'equazione (25) si può scrivere sotto la forma:

$$\varphi(\alpha,\ \beta;\ \sqrt{k}) = \frac{\Phi(\alpha,\ \beta;\ \sqrt{k})}{D'(\sqrt{k})}$$

dove *la* $\Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})$ *è funzione olomorfa di* $\sqrt{k}$, *che soddisfa all'equazione integrale:*

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) + \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})\, d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int_S D'(\sqrt{k})\,.\, f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\, dS.\end{aligned}\right\} \quad (25)_1$$

10. Analogamente a quanto fu fatto al § 5, si costruisca con questa $\Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})$ la funzione:

$$\left.\begin{aligned}&P'(x, y, z; \sqrt{k}) = \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_S D(\sqrt{k})\,.\, f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\, dS + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\right) d\sigma.\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Dalla (2), dalla (4) e dalla $(25)_1$ risulta per questa funzione:

$$\left.\begin{aligned}&\text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2 P' + k P'(x, y, z; \sqrt{k}) + D'(\sqrt{k})\,.\, f(x, y, z) = 0, \\ &\qquad\text{(nei punti di } \sigma) \quad [P(\alpha', \beta'; \sqrt{k})]_i = 0;\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

e quindi, ponendo:

$$D(k) = D'(\sqrt{k})\,.\, D'(-\sqrt{k}),$$

$$P(x, y, z; k) = P'(x, y, z; \sqrt{k})\,.\, D'(-\sqrt{k}),$$

e ragionando come al § 5, si avrà:

$$\left.\begin{aligned}&\text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2 P + k P(x, y, z; k) + D(k)\,.\, f(x, y, z) = 0, \\ &\qquad\text{(nei punti di } \sigma) \quad [P(\alpha', \beta'; k)]_i = 0.\end{aligned}\right\} \quad (28)'$$

Dalla (27) segue che la funzione $P'(x, y, z; \sqrt{k})$ ha le derivate dei due primi ordini rispetto ad x, y, z finite e continue in ogni campo interno al campo S, e che si può invertire l'ordine di derivazione in qualsiasi derivata di $P'(x, y, z; \sqrt{k})$ di un ordine qualsiasi rispetto a $\sqrt{k}$ e di primo o di secondo ordine rispetto ad x, y, z; e poichè le derivate di $P(x, y, z; k)$ si possono esprimere linearmente per le derivate di $P'(x, y, z; \sqrt{k})$ (queste ultime moltiplicate per le derivate di $D'(-\sqrt{k})$ e per potenze positive e negative di $\sqrt{k}$), ne segue, per $k \neq 0$ (*), che l'ordine di derivazione si può scambiare

(*) Si esclude il valore $k = 0$, che non avremo a considerare, per risparmio di ulteriori discussioni.

pure nelle derivate di $P(x, y, z; k)$ di un ordine qualsiasi rispetto a k e di primo o di secondo ordine rispetto ad x, y, z.

Ciò posto, per $k \neq 0$ si avrà dalle (28)', derivando t volte rispetto a k,

$$\left.\begin{array}{l} \text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2 \dfrac{\partial^t P}{\partial k^t} + k \dfrac{\partial^t P}{\partial k^t} + t \dfrac{\partial^{t-1} P}{\partial k^{t-1}} + \dfrac{\partial^t D}{\partial k^t} \cdot f(x, y, z) = 0, \\ \qquad\qquad \text{(nei punti di } \sigma) \quad \left[\dfrac{\partial^t P}{\partial k^t}\right]_i = 0. \end{array}\right\} \quad (28)''$$

Osserviamo ancora che l'equazione omogenea (26) per $k = 0$ non ammette soluzione alcuna diversa da zero (*), ossia che il determinante $D'(\sqrt{k})$ non si annulla per $k = 0$; di modo che *l'equazione:*

$$D(k) = 0$$

non è verificata dal valore $k = 0$.

Arrivati a questo punto, basterà ripetere i ragionamenti dei §§ 7 e 8 per concludere che *il teorema enunciato al* § 8 *sulla funzione* $w(x, y, z; k)$, *data dalla formola* (23), *vale anche nel caso di* $h = \infty$, ossia nel caso in cui le condizioni nei punti di σ sono:

$$[w]_i = 0, \quad [p']_i = 0,$$

invece di quelle che compariscono nelle (24), (21)'.

S'intende che in questo caso la funzione $P(x, y, z; k)$, che va scritta nella formola (23), è quella introdotta nel presente paragrafo

Esistenza di infiniti valori eccezionali.

11. Dimostriamo, indipendentemente dal teorema del § 8, che *i possibili valori eccezionali sono radici dell'equazione* (14)'.

Infatti, come è noto, una soluzione eccezionale $p(x, y, z; k)$ può sempre esprimersi mediante la formola:

$$p(x, y, z; k) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left\{ \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\right) - h \frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r} \right\} p(\alpha, \beta; k)\, d\sigma,$$

(*) Cfr. ad es. la Memoria $(M)_2$; Cap. III, §§ 4 e 5.

la quale ci dà, in virtù della (4),

$$p(\alpha', \beta'; k) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ h\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'} - \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\right\} p(\alpha, \beta; k)\, d\sigma = 0.$$

Questa equazione integrale omogenea è coniugata alla (11); quindi perchè la $p(\alpha, \beta; k)$ sia generalmente diversa da *zero*, è necessario che il valore di k sia radice dell'equazione (14)', come si voleva dimostrare.

Nel caso di $h = \infty$, dopo di avere osservato che ogni soluzione eccezionale ammette nei punti σ la derivata normale finita e continua, basterà ripetere su questa derivata i precedenti ragionamenti.

Il teorema ora dimostrato ci dà, a complemento del teorema enunciato al § 8, che *l'integrale $w(x, y, z; k)$ delle equazioni* (24) *è certamente unico per tutti i valori di k, che non sono radici dell'equazione* (14)'.

12. Rammentiamo (§ 10) che *l'equazione* (14)' *nel caso di $h = \infty$ non è soddisfatta dal valore $k = 0$.* Ora vogliamo dimostrare che *anche per h finita e diversa da zero ($h > 0$) l'equazione* (14)' *non è soddisfatta dal valore $k = 0$.*

Infatti si costruisca con una soluzione qualsiasi $\psi(\alpha, \beta)$ dell'equazione omogenea (11) per $k = 0$ lo strato $\Psi(x, y, z)$. Esso si può ottenere dalla funzione $\Psi(x, y, z; \sqrt{k})$ del § 3 ponendo $k = 0$; e si può dimostrare, come in quel paragrafo, che si ha:

$$(\text{nei punti di } S) \quad \Psi(x, y, z) = 0,$$

da cui, come è notorio, risulta:

$$(\text{nei punti di } S') \quad \Psi(x, y, z) = 0.$$

Avremo allora:

$$(\text{nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\delta \Psi}{\delta n'}\right]_i = 0, \quad \left[\frac{\delta \Psi}{\delta n'}\right]_e = 0;$$

e quindi dalle (7)', (8)', scritte per $k = 0$, si ricava, come si voleva dimostrare,

$$(\text{nei punti di } \sigma) \quad \psi(\alpha, \beta) = 0.$$

Per $h = 0$ l'equazione (14)' *ammette invece la radice $k = 0$.* Infatti, come è noto, l'equazione coniugata alla (11) per $h = 0$, $k = 0$, ossia l'equazione integrale omogenea:

$$\chi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r'}}{dn}\chi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0$$

ammette l'unica soluzione diversa da zero: $\chi(\alpha, \beta) = C$ (costante) (*).

13. Allora per $h > 0$ (finita) e $k = 0$ la soluzione dell'equazione integrale (10) sarà finita, per $k = 0$ la soluzione dell'equazione integrale (25) ($h = \infty$) sarà anch'essa finita; quindi *per* $k = 0$ *ed* $h > 0$ (*finita od infinita*) *la soluzione delle equazioni* (24) *sarà finita e unica.*

Per $h = 0$, $k = 0$ invece la soluzione dell'equazione integrale (10) non è finita. Condizione necessaria e sufficiente affinchè essa sia finita è (**) che si abbia:

$$0 = \int_\sigma H(\alpha, \beta;\, 0)\,.\, C\, d\sigma = \int_\sigma C\left[\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dn}\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{dS}{r}\right] d\sigma =$$

$$= \int_S f(\xi, \eta, \zeta)\left[\frac{C}{4\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\sigma\right] dS = C\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\, dS,$$

ossia:

$$\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\, dS = 0. \tag{29}$$

Se questa condizione è soddisfatta, l'integrale delle equazioni (24) per $h = k = 0$ sarà finito e, come è noto, determinato a meno di una costante additiva.

Se la condizione (29) non è soddisfatta, determiniamo una costante p_0 in modo che si abbia:

$$\int_S \{f(\xi, \eta, \zeta) - p_0\}\, dS = 0.$$

Allora la soluzione dell'equazione integrale, che si ottiene dalla (10) ponendo $f(x, y, z) - p_0$ al posto di $f(x, y, z)$, sarà finita per $h = k = 0$, conseguentemente la soluzione $w_0(x, y, z;\, k)$ delle equazioni, che si ottengono

(*) Cfr. la Memoria $(M)_2$; Cap. III, § 7.

(**) FREDHOLM, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, pag. 378 (Acta mathematica, tome 27).

dalle (24) facendo $h=0$ e ponendo $f(x, y, z) - p_0$ al posto di $f(x, y, z)$, sarà finita per $k=0$; e quindi, come si verifica immediatamente, *l'integrale delle equazioni* (24) *per* $h=0$ *avrà la forma:*

$$w(x, y, z; k) = -\frac{p_0}{k} + w_0(x, y, z; k). \tag{30}$$

14. Nel caso di h finita, l'integrale delle equazioni (24) per $k=0$, ossia l'integrale delle equazioni:

$$\text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2 v' + f(x, y, z) = 0, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \frac{d v'}{d n} = h v' \tag{31}$$

si può esprimere mediante la formola:

$$v'(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{h}{r}\right) v'(\alpha, \beta)\, d\sigma. \tag{32}$$

Quindi la v' nei punti di σ, ossia la $v'(\alpha, \beta)$, soddisferà all'equazione integrale:

$$v'(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left(\frac{h}{r'} - \frac{d\frac{1}{r'}}{dn}\right) v'(\alpha, \beta)\, d\sigma = K(\alpha', \beta'), \tag{33}$$

dove:

$$K(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi}\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{dS}{r}.$$

L'equazione integrale omogenea corrispondente all'equazione (33) è coniugata all'equazione (11) per $k=0$; quindi (§ 12) per $h>0$ l'equazione (33) ha il suo determinante diverso da zero e, per conseguenza, ammette una soluzione finita, la quale sarà unica e si potrà esprimere mediante la formola (*):

$$v'(\alpha', \beta') = K(\alpha', \beta') + \int_\sigma F(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \,.\, K(\alpha, \beta)\, d\sigma,$$

con $F(\alpha, \beta; \alpha'\ \beta')$ funzione analoga alla funzione caratteristica della (33),

(*) J. Plemelj, l. c., pag. 124.

ossia finita e continua per tutti i valori che possono assumere α, α', β, β' ad eccezione dei valori $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, per i quali si comporta come $\frac{1}{r'}$.

Di qui risulta:

$$\int_\sigma |F(\alpha, \beta; \alpha', \beta')| \, d\sigma \leqq A,$$

con A quantità finita ed indipendente da α', β'.

Dalla nota *disuguaglianza di* SCHWARZ si ha:

$$|K(\alpha', \beta')| \leqq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_S \frac{dS}{r^2}} \cdot \sqrt{\int_S f^2 \, dS};$$

quindi si avrà:

$$|v'(\alpha', \beta')| \leqq \frac{1 + A}{2\pi} \sqrt{\int_S \frac{dS}{r^2}} \cdot \sqrt{\int_S f^2 \, dS}.$$

Adunque per h finita è maggiore di *zero* si può scrivere, in virtù della (32),

$$|v'(x, y, z)| \leqq B \sqrt{\int_S f^2 \, dS}, \tag{34}$$

$$|v'(x, y, z)| \leqq E . M, \tag{34$'$}$$

dove M è il massimo valore assoluto della funzione $f(x, y, z)$, e dove B ed E sono due costanti finite e positive, indipendenti dal punto (x, y, z) e dalla funzione $f(x, y, z)$.

15. Nel caso di $h = \infty$ la soluzione dell'equazione integrale (25) per $k = 0$ si può esprimere mediante la formola:

$$\varphi(\alpha' \beta') = -\frac{1}{2} K(\alpha', \beta') + \int_\sigma F_1(\alpha, \beta; \alpha', \beta') . K(\alpha, \beta) \, d\sigma$$

con $F_1(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$ funzione della medesima natura della $F(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$; quindi, ragionando come precedentemente e sostituendo alla formola (32) l'altra:

$$v'(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S f(\xi, \eta, \zeta) \frac{dS}{r} + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \varphi(\alpha, \beta) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \, d\sigma, \tag{32$'$}$$

risulterà:

$$|\varphi(\alpha', \beta')| \leqq G.M \tag{34)''}$$

con G costante finita e positiva, analoga alle B, E, ed inoltre risulteranno valide anche per $h = \infty$ le (34), (34)'.

16. Per esaminare il caso $h = 0$, si consideri l'equazione integrale:

$$\varphi(\alpha', \beta'; \lambda) + \frac{\lambda}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\varphi(\alpha, \beta; \lambda)\, d\sigma = K(\alpha', \beta') \tag{35}$$

e la corrispondente equazione omogenea:

$$\psi(\alpha' \beta'; \lambda) + \frac{\lambda}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\psi(\alpha, \beta; \lambda)\, d\sigma = 0. \tag{35)'}$$

Per $\lambda = -1$ l'equazione (35)' ammette l'unica soluzione $\psi(\alpha, \beta; -1) = C$ (costante) e l'equazione omogenea coniugata l'unica soluzione $\varphi_1(\alpha, \beta)$, la quale, come è noto, risolve il problema dell'elettrostatica, ossia è tale che si ha (*):

$$\text{(nei punti di } S) \quad \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{r}\, d\sigma = C_1 \text{ (costante).}$$

La $\varphi_1(\alpha, \beta)$ è determinata a meno di un fattore costante e l'integrale di $\varphi_1(\alpha, \beta)$ esteso a σ è diverso da zero (**). Allora, se supponiamo soddisfatta la condizione:

$$\int_\sigma \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 1,$$

la soluzione dell'equazione (35) avrà la forma:

$$\varphi(\alpha' \beta'; \lambda) = K(\alpha', \beta') + \int_\sigma F(\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \lambda) . K(\alpha, \beta)\, d\sigma,$$

dove (***):

$$F(\alpha, \beta; \alpha' \beta'; \lambda) = \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\lambda + 1} + L(\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \lambda),$$

(*) V. la Memoria $(M)_2$; Cap. III, § 7.

(**) Ibid.; Cap. III, § 12.

(***) V. PLEMELJ: l. c., pag. 127.

essendo $L(\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \lambda)$, per $\lambda = -1$ e nelle vicinanze di $\lambda = -1$, della medesima natura della funzione caratteristica dell'equazione (35).

Supposto che la funzione $f(x, y, z)$ soddisfaccia alla condizione (29), si avrà:

$$\int_\sigma \varphi_1(\alpha, \beta) \,.\, K(\alpha, \beta)\, d\sigma = \int_\sigma \left[\varphi_1(\alpha, \beta) \frac{1}{2\pi} \int_S f(\xi, \eta, \zeta) \frac{dS}{r}\right] d\sigma =$$

$$= \int_S \left[f(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{r} d\sigma\right] dS = C_1 \int_S f(\xi, \eta, \zeta)\, dS = 0;$$

e quindi risulterà per la soluzione dell'equazione (35) nell'ipotesi di $\lambda = -1$, ossia per la soluzione dell'equazione (33) nell'ipotesi di $h = 0$:

$$v'(\alpha', \beta') = \varphi(\alpha', \beta'; -1) = K(\alpha' \beta') + \int_\sigma L\, \alpha, \beta; \alpha', \beta'; -1) \,.\, K(\alpha, \beta)\, d\sigma.$$

Da questa formola si possono dedurre, come al § 14, le formole (34), (34)' nell'ipotesi che sia $h = 0$ e che la funzione $f(x, y, z)$ soddisfaccia alla condizione (29).

17. Ciò premesso, si considerino successivamente le equazioni:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(nei punti di } S) & \text{(nei punti di } \sigma) \\ \Delta^2 v_0 + f\,(x, y, z) = 0, & \dfrac{d v_0}{d n} = h\, v_0\,; \\ \Delta^2 v_1 + v_0(x, y, z) = 0, & \dfrac{d v_1}{d n} = h\, v_1\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (36)$$

nelle quali h abbia un valore reale qualsiasi del campo $(0, \infty)$ (gli estremi inclusi), e con la condizione che la funzione arbitraria $f(x, y, z)$ nel caso di $h = 0$ soddisfaccia alla (29).

Le precedenti equazioni sono della medesima natura delle (31), e determinano una serie $v_0, v_1, v_2, \ldots$ di funzioni finite e continue del campo S (i punti di σ inclusi).

Nel caso $h = 0$ l'integrale v_0 è determinato a meno di una costante arbitraria; e noi disporremo di questa costante in modo che sia soddisfatta la condizione:

$$\int_S v_0(\xi, \eta, \zeta)\, dS = 0.$$

Lo stesso faremo per le successive funzioni $v_1, v_2, \ldots$

Nel caso di $h = \infty$ indicheremo con $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ le funzioni analoghe alla funzione $\varphi(\alpha, \beta)$ del § 15 e corrispondenti rispettivamente agli integrali $v_0, v_1, v_2, \ldots$ delle equazioni (36).

18. Dalla (34)' si ha in tutti i casi:

$$|v_0(x, y, z)| \leqq E \cdot M, \quad |v_1(x, y, z)| \leqq E^2 \cdot M, \quad |v_2(x, y, z)| \leqq E^3 \cdot M, \ldots;$$

e dalla (34)'' si ha nel caso di $h = \infty$:

$$|\varphi_0(\alpha', \beta')| \leqq G \cdot M, \quad |\varphi_1(\alpha', \beta')| \leqq G \cdot E \cdot M, \quad |\varphi_2(\alpha', \beta')| \leqq G \cdot E^2 \cdot M, \ldots$$

Risulta quindi per h qualsiasi che *la serie*:

$$v = v_0 + v_1 k + v_2 k^2 + \cdots \tag{37}$$

è convergente in ugual grado in tutto il campo S (i punti di σ inclusi) per tutti i valori di k di modulo inferiore ad un certo numero k_1 maggiore di zero; e per $h = \infty$ che *la serie*.

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 k + \varphi_2 k^2 + \ldots \tag{37'}$$

è convergente in ugual grado su σ anche essa per tutti i valori di k di modulo inferiore a k_1.

In virtù delle (31) si ha, insieme alla formola (32), l'altra:

$$(\text{nei punti di } S') \quad 0 = \frac{1}{4\pi}\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{h}{r}\right)v'(\alpha, \beta)\, d\sigma.$$

Applicando questa e la (32) e integrando per serie, risulta per h finita:

$$(\text{nei punti di } S) \quad v(x, y, z; k) = \frac{1}{4\pi}\int_S (f + k v)\frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{h}{r}\right)v(\alpha, \beta)\, d\sigma, \tag{38}$$

$$(\text{nei punti di } S') \quad 0 = \frac{1}{4\pi}\int_S (f + k v)\frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{h}{r}\right)v(\alpha, \beta)\, d\sigma. \tag{38'}$$

Dalla seconda di queste formole segue che il doppio strato:

$$\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} v(\alpha, \beta)\, d\sigma,$$

considerato nel campo infinito S', è tale che nei punti di σ ammette la derivata normale finita e continua; quindi, in virtù della continuità della funzione v e del *teorema di* LIAPONNOFF (*), esso ammetterà la derivata normale nei punti di σ, anche quando viene considerato nel campo finito S, e i valori negli stessi punti di σ delle due derivate normali saranno uguali.

Dalla (38) segue poi che la funzione v in ogni campo interno al campo S ha le derivate del primo ordine rispetto ad x, y, z finite e continue.

Questi risultati sono sufficienti per concludere, servendosi ancora delle (38), (38)', che per h finita la funzione $v(x, y, z; k)$, determinata dalla serie (37), soddisfa alle equazioni:

$$\left.\begin{array}{r}(\text{nei punti di } S)\quad \Delta^2 v + k\, v(x, y, z;\ k) + f(x, y, z) = 0,\\ (\text{nei punti di } \sigma)\quad \dfrac{d v}{d n} = h\, v.\end{array}\right\} \qquad (24)'$$

Nel caso di $h = \infty$ si ha, applicando la (32)' e integrando per serie,

$$(\text{nei punti di } S)\quad v(x, y, z; k) = \frac{1}{4\pi}\int_S (f + k v)\frac{d S}{r} + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi(\alpha, \beta)\frac{d\frac{1}{r}}{d n}\, d\sigma; \qquad (38)'$$

e da questa segue che il risultato precedentemente enunciato per la funzione $v(x, y, z; k)$ vale anche nel caso di $h = \infty$.

19. Le equazioni (24)' coincidono con le (24); quindi, in virtù del teorema di unicità del § 11, si ha che *l' integrale $w(x, y, z; k)$ delle equazioni* (24) *coincide per $|k| < k_1$ con la funzione v, data dalla serie* (37).

Da questo risultato e da quello dei §§ 8 e 10 segue che *il raggio k_1* (> 0) *di convergenza della serie* (37), *se è finito, corrisponde ad un primo polo (del 1° ordine) dell' integrale w delle equazioni* (24).

S' intende qui che per $h = 0$ la funzione arbitraria $f(x, y, z)$ deve soddisfare alla condizione (29).

20. Posto:

$$W_{s,t} = \int_S v_s \,.\, v_t \, d S,$$

si dimostra facilmente (**) che l'espressione $W_{s,t}$ dipende solo dalla somma

(*) Cfr. la Memoria $(M)_2$; Cap. III, § 14.

(**) Vedi ad es. la Memoria $(M)_1$; Cap. II, §§ 11 e 12.

dei suoi indici; per cui si può scrivere:

$$W_{s,t} = W_{s+t};$$

e si dimostra ancora che le espressioni W_i sono tutte positive e soddisfano alla serie di disuguaglianze:

$$\frac{W_1}{W_0} \leqq \frac{W_2}{W_1} \leqq \cdots \leqq \frac{W_i}{W_{i-1}} \leqq \cdots \tag{39}$$

Moltiplicando i termini della serie (37) per v_0 e applicando il teorema dell'integrazione per serie, risulta che la serie:

$$W = W_0 + W_1 k + W_2 k^2 + \cdots$$

è certamente convergente per $|k| < k_1$ $(k_1 > 0)$.

Se ne deduce che la serie dei rapporti, che compariscono nella (39), deve avere un limite c finito $\left(\leqq \frac{1}{k_1}\right)$ e maggiore di *zero* $\left(\geqq \frac{W_1}{W_0}\right)$; e quindi che il valore reale e positivo di k_1 deve essere finito $\left(\leqq \frac{1}{c} \leqq \frac{W_0}{W_1}\right)$.

La formola ricorrente (34) ci dà poi che il raggio di convergenza k_1 della serie (37) non è inferiore al raggio di convergenza $\frac{1}{c}$ della serie:

$$\sqrt{W_0} + k\sqrt{W_2} + k^2\sqrt{W_4} + \cdots,$$

ossia ci dà:

$$k_1 \geqq \frac{1}{c}.$$

In conclusione risulta: $k_1 = \frac{1}{c}$; e così, riepilogando, si ha che *l'integrale* $w(x, y, z; k)$ *delle equazioni* (24) *ha un primo polo del primo ordine per il valore finito e maggiore di zero:*

$$k = k_1 = \frac{1}{c} = \lim_{i=\infty} \frac{W_{i-1}}{W_i}.$$

21. Indichiamo con p_1 il residuo (*soluzione eccezionale* corrispondente al *valore eccezionale* k_1) della funzione $w(x, y, z; k)$ nel polo k_1; e poniamo:

$$w(x, y, z; k) = \frac{p_1}{k_1 - k} + w_1(x, y, z; k). \tag{40}$$

Se si tiene conto del fatto che la funzione p_1 soddisfa alle equazioni:

$$(\text{nei punti di } S)\quad \Delta^2 p_1 + k_1 p_1 = 0,\quad (\text{nei punti di } \sigma)\quad \frac{d p_1}{d n} = h p_1,$$

e che la $w(x, y, z; k)$ soddisfa alle equazioni (24), si verifica immediatamente che *la* $w_1(x, y, z; k)$ *soddisfa alle seguenti equazioni:*

$$\left.\begin{aligned} &(\text{nei punti di } S)\quad \Delta^2 w_1 + k\, w_1(x, y, z; k) + (f - p_1) = 0,\\ &(\text{nei punti di } \sigma)\quad \frac{d w_1}{d n} = h\, w_1. \end{aligned}\right\} \qquad (24)_1$$

Si ha poi (cfr. § 8) che *la funzione* $w_1(x, y, z; k)$ *è certamente finita per* k *complessa e per* $k \leq k_1$; *essa può solamente avere una serie finita o infinita di poli del 1.° ordine per valori di* k *reali e superiori a* k_1. *Questa serie di poli, nel caso che sia infinita, ha il solo punto limite* $k = \infty$.

Nel caso di $h = 0$ abbiamo supposto che la funzione $f(x, y, z)$ soddisfaccia alla condizione (29). Se questa condizione non è verificata, la $w(x, y, z; k)$ avrà la forma (30), la funzione $f(x, y, z) - p_0$ soddisferà alla condizione (29) e la funzione $w_0(x, y, z; k)$, che comparisce nella (30), avrà la forma (40). Quindi *nel caso di* $h = 0$, *se la condizione* (29) *non è verificata, avremo*:

$$w(x, y, z; k) = -\frac{p_0}{k} + \frac{p_1}{k_1 - k} + w_1(x, y, z; k). \qquad (40)'$$

22. Arrivati a questo punto, basterà porre nelle equazioni (36) la funzione $f(x, y, z) - p_1(x, y, z)$ (*) al posto della $f(x, y, z)$ e ripetere le considerazioni dei §§ 17, ... 21, per dimostrare che l'integrale $w_1(x, y, z; k)$ delle equazioni $(24)_1$ ha un primo polo semplice per $k = k_2$, con k_2 numero reale, positivo e maggiore di k_1; e quindi che *l'integrale* $w(x, y, z; k)$ *delle equazioni* (24) *ha un secondo polo* (*terzo nel caso di* $h = 0$) *del primo ordine per* $k = k_2 > k_1$.

Indicando con $p_2(x, y, z)$ il residuo (*soluzione eccezionale* corrispondente al *valore eccezionale* k_2) di $w(x, y, z; k)$ nel polo k_2, si potrà scrivere (**):

$$w(x, y, z; k) = \frac{p_1}{k_1 - k} + \frac{p_2}{k_2 - k} + w_2(x, y, z; k),$$

(*) Nel caso di $h = 0$ la funzione $f - p_0 - p_1$.

(**) È superfluo qui notare le modificazioni occorrenti nel caso di $h = 0$.

la funzione $w_2(x, y, z; k)$ sarà certamente finita per k complessa e per $k \leqq k_2$, e soddisferà alle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} &(\text{nei punti di } S) \quad \Delta^2 w_2 + k\, w_2(x, y, z; k) + f - p_1 - p_2 = 0, \\ &(\text{nei punti di } \sigma) \quad \frac{d\, w_2}{d\, n} = h\, w_2. \end{aligned}\right\} \qquad (24)_2$$

Evidentemente si può seguitare a ragionare sempre nella medesima guisa, a meno che dopo un certo numero $i\ (\geqq 1)$ di operazioni non risulti identicamente in tutto il campo S:

$$f(x, y, z) - p_1 - p_2 - \cdots - p_i = 0. \qquad (41)$$

In questo caso l'integrale regolare delle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} &(\text{nei punti di } S) \quad \Delta^2 w_i + k\, w_i(x, y, z; k) + f - p_1 - p_2 \cdots - p_i = 0, \\ &(\text{nei punti di } \sigma) \quad \frac{d\, w_i}{d\, n} = h\, w_i \end{aligned}\right\} \qquad (24)_i$$

sarà $w_i(x, y, z; k) = 0$; e quindi risulterà:

$$w(x, y, z; k) = \frac{p_1}{k_1 - k} + \frac{p_2}{k_2 - k} + \cdots + \frac{p_i}{k_i - k}.$$

Importa osservare allora che la funzione $f(x, y, z)$, come le $p_1, p_2, \ldots, p_i$ che la compongono, deve necessariamente soddisfare nei punti di σ alla condizione:

$$\frac{d\, f}{d\, n} = h\, f. \qquad (42)$$

Se la funzione $f(x, y, z)$ non soddisfa a questa condizione, non potrà mai aver luogo la (41); e quindi *l'integrale $w(x, y, z; k)$ delle corrispondenti equazioni* (24) *avrà certamente una serie infinita di poli del primo ordine.*

Finalmente, se osserviamo che si può sempre scegliere una funzione $f(x, y, z)$, la quale non soddisfaccia alla condizione (42), se rammentiamo (§ 8) che i poli della funzione $w(x, y, z; k)$ sono valori eccezionali e ancora radici dell'equazione (14)', e che le radici di questa equazione sono tali (§ 4) che qualunque porzione finita dal piano della variabile k ne contiene sempre un numero finito, se ne deduce, come si voleva dimostrare, che *esiste una serie G infinita di valori eccezionali* (*reali e non negativi*), *aventi per unico valore limite il valore $k = \infty$.*

Sappiamo poi che *solo nel caso $h = 0$ fa parte della serie G di valori eccezionali il valore $k = 0$* (§ 13).

Sviluppi in serie di soluzioni eccezionali.

23. I risultati fin qui ottenuti sono sufficienti per dimostrare che *quando la funzione $f(x, y, z)$ soddisfa nei punti di σ alla condizione* (42) *ed è finita e continua insieme alle sue derivate parziali dei primi tre ordini in tutto il campo S (i punti di σ al più esclusi per le derivate terze), si ha che essa è sempre uguale alla somma della serie finita* [form. (41)] *od infinita delle corrispondenti soluzioni eccezionali* (*) $p_1, p_2, p_3, \ldots$

Basterà infatti ripetere i ragionamenti dei §§ 32, 33, 34, 35 (Cap. II) della Memoria $(M)_1$.

Si può ottenere il medesimo risultato ponendo per la funzione $f(x, y, z)$ condizioni un po' meno restrittive. A tal uopo basterà ripetere i ragionamenti che lo Stekloff fa nei n.i 25, 26, 27 (Cap. II, § III) della sua citata Memoria degli *Annales de l'École Normale*, i quali però sono meno semplici di quelli sopra richiamati della Memoria $(M)_1$.

Problema del raffreddamento dei corpi solidi omogenei.

24. Dimostrata in un modo qualsiasi la sviluppabilità in serie (finita od infinita) di *soluzioni eccezionali* della funzione arbitraria $f(x, y, z)$, la risoluzione del problema del raffreddamento dei corpi solidi omogenei, che inizialmente hanno la temperatura arbitraria $f(x, y, z)$, immersi in un mezzo il quale nei punti della superficie contatto ha la temperatura *zero*, non presenta più alcuna difficoltà. Infatti basterà ripetere le considerazioni, assai semplici, dei §§ 37, ... 40 (Cap. II) della Memoria $(M)_1$.

Catania, Luglio 1907.

(*) Aggiungere la p_0 nel caso di $h=0$, se la $f(x, y, z)$ non verifica la condizione (29).