

Nuove applicazioni del principio di minimo.

(Il Problema di Lord Kelvin.)

(Di GUIDO FUBINI, a Genova.)

INTRODUZIONE.

In questo lavoro studio, col principio di minimo, il problema di costruire una funzione armonica U in un campo Γ , quando sul contorno σ di Γ è data la derivata normale di U , o, più precisamente, studio il problema di minimo, che Lord Kelvin ha sostituito al problema citato, e che, in certi casi, gli è equivalente. L'idea fondamentale è la stessa, che mi ha servito in altro lavoro (*); però la diversità del problema studiato porta svariate differenze nei singoli punti della trattazione. Il problema è studiato per il caso di tre variabili indipendenti: non avrebbe infatti avuto alcuno scopo lo studio della questione per il caso di due sole variabili. Io tratto il problema di Lord Kelvin soltanto a titolo d'esempio: metodo e risultato si estendono ai problemi dello stesso tipo per qualsiasi equazione lineare, o per qualsiasi sistema di equazioni lineari in modo analogo a quello esposto nei §§ 9-10 della mia Memoria citata. Il problema di Lord Kelvin è da noi scelto soltanto come un *problema tipico*, perchè il più conosciuto e il più semplice dei problemi dello stesso genere. E io credo fermamente che per equazioni differenziali lineari (e forse anche per equazioni non lineari, appena si sappia superare qualche difficoltà ancora non sormontata (**)) il metodo di minimo sia uno dei più potenti e semplici metodi per stabilire i teoremi di esistenza.

(*) *Il principio di minimo*, ecc. (Rend. del Circ. Matem. di Palermo, Tomo 23). In questa Mem., il lettore troverà notizie bibliografiche di altri lavori (di WEBER, HILBERT, LEVI) sul principio di DIRICHLET. Ricordo ancora una nota del Prof. ARZELÀ (*Rend. dell'Accademia di Bologna* 1897), in cui sono contenute molte eleganti osservazioni a proposito della validità del principio di minimo.

(**) Queste difficoltà non consistono già nel determinare la funzione, o le funzioni cercate, ma piuttosto nel verificare che questa funzione, o queste funzioni soddisfano all'equazione differenziale, o al sistema di equazioni differenziali proposto.

Sarà bene dare qui un'idea dei risultati, cui si perviene in questo ordine di studii. I problemi, di cui si tratta, si propongono di trovare, in un certo insieme di funzioni, una funzione U , la quale rende *minimo* un certo integrale $I(U)$, il cui integrando è una funzione definita positiva di U e delle sue derivate. Come ha osservato WEIERSTRASS, l'esistenza di un tale minimo ha bisogno di essere rigorosamente dimostrata: a priori si può soltanto affermare l'esistenza di un limite inferiore d . Nel campo di funzioni considerato si può dunque trovare una successione (minimizzante) di funzioni v_1, v_2, \dots , tali che, posto $I(u_n) = d + \frac{1}{6} \varepsilon_n$, si abbia $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. E anzi si può supporre che le ε_n tendano a zero con una rapidità grande ad arbitrio, che p. es. la serie $\sum_n \varepsilon_n^{\frac{1}{3}}$ sia convergente. Ora avviene questo fatto, che in alcuni punti del campo Γ il $\lim_{n=\infty} u_n$ esiste ed è uguale al valore della funzione U cercata; mentre in altri punti ciò può non avvenire (nè per la successione delle u_n , nè per alcuna successione subordinata, come HILBERT enunciò in un caso particolare). Questi punti eccezionali formano un aggregato, il quale da ogni piano, da ogni sfera, da ogni superficie φ regolare, che soddisfi cioè a certe condizioni di continuità, ecc.) è intersecato in un aggregato di punti di misura superficiale nulla, (vale a dire in un aggregato di punti, che si può trascurare, quando si calcolino, al modo di LEBESGUE, gli integrali di una funzione estesi a una porzione del piano, o della sfera, o della superficie φ in discorso). In altre parole, se Σ è un pezzo di una superficie regolare (piano, o sfera, ecc.), e $d\sigma$ ne è l'elemento d'area, si ha identicamente:

$$\int_{\Sigma} U d\sigma = \int_{\Sigma} \lim_{n=\infty} u_n d\sigma = \lim_{n=\infty} \int_{\Sigma} u_n d\sigma.$$

Naturalmente io qui parlo di sfere, di piani, ecc., perchè Γ è supposto a tre dimensioni. Se Γ fosse supposto a 2 dimensioni, dovrei parlare di rette, cerchi, ecc.; se Γ fosse supposto a n dimensioni, parlerei di ipersuperficie sferiche, o piane, ecc., ecc.

Mi spiegherò più chiaramente: Sia S una qualsiasi sfera, interna a Γ ; e supponiamo che sul contorno di S le u_i siano sviluppabili in serie di funzioni sferiche. Allora anche U è sviluppabile in serie di funzioni sferiche; e i coefficienti dello sviluppo si ottengono precisamente come limite dei coefficienti dello sviluppo in serie delle funzioni u_i .

Come si vede, pure non potendosi porre (in ogni punto di Γ) $U = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, si può ciononostante dire che U è la funzione limite delle u_n ; il teorema precedente infatti non vale soltanto per gli sviluppi in serie di funzioni sferiche, ma *per uno qualsiasi di quegli sviluppi in serie, i cui coefficienti si ottengono mediante quadrature.*

In questo lavoro io uso degli integrali del LEBESGUE, e cerco di approfondire i minimi dettagli dello studio. Si potrebbe fors'anche limitarci all'uso degli integrali del RIEMANN; ma la trattazione perderebbe la sua semplicità, per divenire di una ben maggiore complicazione. D'altra parte mi sia permesso esporre l'opinione che degli studii di questi ultimi anni sui fondamenti del calcolo il concetto di misura e di integrale secondo LEBESGUE è la più grande conquista. Per consiglio di autorevoli amici, e per essere più chiaro, nei §§ 1-2 ho riassunto nel modo più conciso la definizione e la proprietà di detti integrali: e forse il lettore potrà da essi riconoscere quante e quante questioni fondamentali si possano risolvere col loro mezzo, quanti teoremi guadagnino di *generalità* e di *semplicità*!

Nè si deve credere che il concetto di integrali del LEBESGUE sia un concetto, che esca assolutamente fuori del quadro delle idee abituali agli analisti d'oggi. Le seguenti considerazioni dimostrano anzi che esso vi rientra nel modo più semplice.

Si chiami *integrale* di una funzione continua, o di una funzione integrabile secondo RIEMANN, l'integrale di essa (definito come nelle solite esposizioni del calcolo integrale).

Si ponga poi *per definizione* uguale a zero l'integrale di una qualsiasi funzione, la quale è nulla dappertutto, eccetto che in un aggregato E di punti, il quale si possa racchiudere *in un numero finito, o in un'infinità numerabile di intervalli*, tali che la somma delle loro lunghezze sia minore di un numero prefissato, piccolo a piacere.

Se $f(x)$ è una funzione uguale a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, dove le $f_n(x)$ sono funzioni tutte inferiori a una stessa costante in valore assoluto, e per ciascuna delle quali in un modo qualunque si conosca il valore dell'integrale, si ponga *per definizione* $\int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx$.

Si può dimostrare che queste definizioni *non sono mai contraddittorie* (*):

(*) Che le precedenti definizioni esauriscano il campo delle funzioni limitate integrabili secondo LEBESGUE, segue da un teorema del prof. VITALI: « Ogni funzione misurabile è somma di una funzione di BAIER di classe 0, oppure 1, oppure 2, e di una funzione a integrale nullo.

e che, per mezzo di esse, molte funzioni, non integrabili secondo RIEMANN, acquistano un integrale perfettamente determinato. Si può dire che le precedenti definizioni costituiscano, rispetto alla definizione di integrali di RIEMANN, un progresso affatto simile a quello, che questa ultima definizione costituisce rispetto all'altra: « Dicesi integrale indefinito di una funzione $f(x)$ ogni funzione $F(x)$, che abbia $f(x)$ per derivata (quando una tal funzione $F(x)$ esiste ». Nè questi integrali sono una creazione arbitraria. Basti notare che, mentre la derivata $f'(x)$ di una funzione $f(x)$, pure essendo limitata, non è sempre (VOLTERRA) integrabile secondo RIEMANN, essa (se limitata) è *sempre* integrabile secondo LEBESGUE: il suo integrale indefinito è poi (a meno della solita costante additiva) uguale a $f(x)$.

Nel nostro caso l'ufficio dei nuovi integrali è massimamente quello di *ristabilire la continuità*. Mi spiegherò con un esempio. La funzione $\varphi(x)$ della x , nulla *per tutti e soltanto per* i valori irrazionali della x , non è integrabile secondo RIEMANN, ma è integrabile secondo LEBESGUE. E precisamente il suo integrale indefinito possiede in ogni punto derivata: e si ha $\frac{d}{dx} \int \varphi(x) = 0$.

Vale a dire la funzione $f(x) = \frac{d}{dx} \int \varphi(x) dx$ è una funzione *dappertutto continua*, mentre $\varphi(x)$ era *dappertutto discontinua*.

Per il presente lavoro, il concetto di *misura* secondo LEBESGUE è un concetto fondamentale: soltanto mercè sua io ho potuto compiere le presenti ricerche. Esso rientra però nel concetto più generale di integrale. La misura di un aggregato misurabile E di punti del segmento $(0, 1)$ non è che l'integrale, esteso a detto segmento, di una funzione uguale a 1 nei punti di E , nulla negli altri punti.

§ 1. MISURA E INTEGRALE SECONDO LEBESGUE.

Un insieme E di punti su una retta si dirà *limitato*, se esiste un segmento finito, che contiene tutti i punti dell'insieme. Indicheremo con l tanto questo segmento, quanto la sua lunghezza. Rinchiudiamo E in un numero finito, o in un'infinità numerabile di segmenti δ , interni a l , in guisa che ogni punto di E sia interno almeno a uno dei segmenti δ . Sia D la somma delle lunghezze dei segmenti δ ; le quantità D avranno un limite inferiore m_e .

che chiameremo *misura esterna* di E . I punti di l , che non sono punti di E , formano un insieme E' , che si dice l'insieme complementare di E . Se m_e è la misura esteriore di E' , noi chiameremo la quantità $m_i = l - m_e$ la *misura interiore* di E . Si dimostra che $m_i \leq m_e$. Gli insiemi E , per cui $m_i = m_e$, si dicono insiemi *misurabili*. La quantità $m = m_i = m_e$ si dice *misura* di E e si indica con $m(E)$. Si dimostra che :

1.° Due insiemi uguali (trasformati l'uno dell'altro mediante un movimento) hanno la stessa misura.

2.° L'insieme E somma d'un numero finito, o di un'infinità numerabile di insiemi E_i misurabili senza punti comuni a due a due, è anch'esso misurabile e ha per misura la somma delle misure degli insiemi E_i .

3.° La misura di tutti i punti di un intervallo ha per misura la lunghezza dell'intervallo.

4.° Un insieme numerabile di punti ha misura nulla.

5.° L'insieme comune a più insiemi E_1, E_2, E_3, \dots misurabili è misurabile; esso ha per misura il $\lim_{i=\infty} m(E_i)$, se ogni insieme E_i contiene quelli di indice maggiore.

6.° Condizione necessaria e sufficiente, affinché una funzione sia integrabile secondo RIEMANN è che i suoi punti di discontinuità formino un insieme di misura nulla.

Noi diremo che una funzione $f(x)$ è misurabile, se, qualunque sieno le costanti α, β , l'insieme dei punti, in cui $\alpha < f(x) < \beta$ (se $\alpha < \beta$), oppure l'insieme dei punti, in cui $\alpha > f(x) > \beta$ (se $\alpha > \beta$) è misurabile.

Il limite di una serie convergente di funzioni misurabili, o in particolare la somma di più funzioni misurabili è misurabile (LEBESGUE).

Quindi, poichè le funzioni $y = 1, y = x^n$ (n intero) sono evidentemente misurabili, ogni polinomio, ogni funzione limite di polinomi, e quindi in particolare ogni funzione continua, ogni funzione limite di funzioni continue (*) (funzione di BAIRE di prima classe), ogni funzione limite di tali funzioni, ecc., ecc., sono altrettante funzioni misurabili.

E viceversa si può dimostrare (VITALI) che se u è una funzione misurabile, esiste una funzione v di BAIRE di seconda classe (vale a dire una funzione limite di funzioni di BAIRE di prima classe) tale che $u - v$ è differente da zero soltanto in un aggregato di punti di misura nulla.

(*) Che è anche, per un teorema di WEIERSTRASS, limite di polinomi.

Sia $y = f(x)$ una funzione misurabile della x , definita in un aggregato limitato E di punti (p. es. un segmento finito). E siano l, L i limiti inferiori e superiori della y .

Se l, L sono finite, la funzione si dirà limitata. Supponiamo dapprima di essere in questo caso. Dividiamo l'intervallo $l - \varepsilon, L + \varepsilon$ in intervalli parziali per mezzo di numeri l_i ,

$$l - \varepsilon = l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_n = L + \varepsilon. \quad (\varepsilon = \text{cost.}, \varepsilon > 0).$$

Poniamo m_i ed m'_i uguale rispettivamente alla misura di quell'aggregato di punti, in cui $l_i \leq f(x) < l_{i+1}$, o $l_{i-1} < f(x) \leq l_i$. Le due somme

$$\sum_0^{n-1} l_i m_i, \quad \sum_1^n l_i m'_i \quad (1)$$

differiscono di una quantità non maggiore del prodotto della misura di E per la più grande delle differenze $l_{i+1} - l_i$. Se noi facciamo diminuire indefinitamente tutte queste differenze, le due sommatorie citate tendono a uno stesso limite, che si dirà l'integrale di y , esteso ad E . Questo integrale non dipende dal modo, con cui si fanno impicciolire le differenze $l_{i+1} - l_i$, e dipende soltanto dall'aggregato E e dalla funzione y . Se E è l'aggregato dei punti formanti il segmento $a \leq x \leq b$, l'integrale in discorso si indica col

simbolo $\int_a^b y dx$. E si pone poi $\int_b^a y dx = - \int_a^b y dx$. Si ha quindi:

Ogni funzione limitata misurabile è integrabile (ammette un integrale) (*).

Se una delle quantità l ed L non è finita, ossia, se la funzione misurabile y non è limitata, si scelgano infinite quantità

$$\dots l_{-2} < l_{-1} < l_0 < l_1 < l_2 \dots$$

il cui limite inferiore (superiore) sia $-\infty$ ($+\infty$). Ripetendo le considerazioni precedenti, saremo condotti allo studio delle (1), le quali però, non saranno più semplici sommatorie, ma vere e proprie serie. *Se si ammette la loro convergenza*, si può ancora dimostrare che esse tendono a uno stesso

(*) Se poi la funzione è integrabile secondo RIEMANN, l'integrale così definito coincide con l'integrale ordinario.

limite, quando la massima delle differenze $l_i - l_{i-1}$ tende a zero. E di nuovo si definisce l'integrale di y come uguale a questo limite. La funzione $f(x)$ è quindi integrabile, secondo LEBESGUE, allora e allora soltanto che $|f(x)|$ è integrabile. Si dimostra:

1.º) Se le funzioni misurabili $f_n(x)$ sono tutte inferiori a una stessa costante K in valore assoluto, e se $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, allora $f(x)$ è integrabile, e ha per integrale il limite dell'integrale di $f_n(x)$ per $n = \infty$. (LEBESGUE).

2.º) Se i resti di una serie di funzioni misurabili sono tutti inferiori a una stessa costante in valore assoluto, la serie si può integrare termine a termine. (LEBESGUE).

3.º) Se la serie $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ è convergente, e se converge la serie degli integrali delle funzioni $|u_i|$, la serie si può integrare termine a termine. (LEVI).

4.º) Se $f(x)$ è integrabile in ogni segmento interno a un segmento (a, b) (per il che occorre e basta che sia integrabile nel segmento (a, b)), la derivata di $\int_a^x f(x) dx$ è uguale a $f(x)$ in tutti i punti del segmento, escluso al più un aggregato di misura nulla. (LEBESGUE, LEVI, VITALI).

5.º) Il valore dell'integrale di una funzione $f(x)$ non muta, quando si cambino i valori di $f(x)$ in un aggregato di punti di misura nulla. Cosicché si può parlare di integrale di una funzione, anche quando questa funzione non è definita in un aggregato di punti di misura nulla.

Diremo che una funzione $f(x)$, definita in un segmento $a \leq x \leq b$, è assolutamente continua, se, dato un qualsiasi numero positivo ε , si può trovare un numero positivo δ tale che:

Se $(a_i \leq x \leq b_i)$, dove $a_i \geq a$, $b_i \leq b$ sono dei segmenti qualunque in numero finito, o formanti un'infinità numerabile, la somma delle lunghezze dei quali è inferiore a δ , allora:

$$\left| \sum_i (f(b_i) - f(a_i)) \right| < \varepsilon.$$

Vale allora il teorema (VITALI):

Condizione necessaria e sufficiente, affinché una funzione $f(x)$ posseda una derivata $f'(x)$ (escluso al più un aggregato di punti di misura nulla) tale che l'integrale indefinito di $f'(x)$ sia (a meno di una costante additiva) uguale a $f(x)$, è che la funzione $f(x)$ sia assolutamente continua.

Daremo ora un semplicissimo corollario della definizione d'integrale:

TEOREMA I. Se $f(x)$ è una funzione positiva definita nell'intervallo

$\alpha \leq x \leq \beta$, e se $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = L$, la misura dell'aggregato di punti, ove $f(x) \geq K$

(K costante qualunque) è non maggiore di $\frac{L}{K}$. Siano ora f_1, f_2, f_3, \dots infinite

funzioni positive definite nello stesso intervallo $\alpha \leq x \leq \beta$; e sia $\int_{\alpha}^{\beta} f_i dx \leq \varepsilon_i$.

L'aggregato dei punti dove $f_i \geq \varepsilon_i^a$ ($a = \text{cost.}$) ha una misura non maggiore di ε_i^{-a} . L'aggregato S_i dei punti, dove vale almeno una delle disuguaglianze: $f_i \geq \varepsilon_i^a, f_{i+1} \geq \varepsilon_{i+1}^a, f_{i+2} \geq \varepsilon_{i+2}^a, \dots$ ha una misura non maggiore di $\varepsilon_i^{-a} + \varepsilon_{i+1}^{-a} + \varepsilon_{i+2}^{-a} + \dots$. Supponiamo che si possa trovare una costante a in guisa che $\sum \varepsilon_i^{-a}$ sia una serie convergente. Allora $\lim_{i \rightarrow \infty} (\varepsilon_i^{-a} + \varepsilon_{i+1}^{-a} + \varepsilon_{i+2}^{-a} + \dots) = 0$.

Notiamo ora che l'aggregato S_i contiene tutti gli aggregati S_{i+1}, S_{i+2}, \dots . L'aggregato S , comune a tutti gli aggregati S_i, S_{i+1}, \dots , ha quindi per misura il limite per $i = \infty$ della misura di S_i , ossia ha misura nulla. Ogni punto A , esterno a S , è poi esterno a tutti gli aggregati S_k , da un certo valore di k in poi, p. es. per $k > j$, dove j è un intero, che varierà generalmente col variare di A . E quindi, per $k > j$, sarà (nel punto A) $f_k < \varepsilon_k^a$. Quindi:

TEOREMA II. Se le funzioni positive f_i , definite in uno stesso intervallo

$\alpha < x < \beta$, soddisfano alle $\int_{\alpha}^{\beta} f_i dx < \varepsilon_i$, e se a è una costante tale, che la serie

$\sum_i \varepsilon_i^{-a}$ sia convergente, allora, escluso al più un aggregato di punto di misura nulla, esiste per ogni altro punto A del citato segmento un numero j , tale che per $i > j$ sia $f_i < \varepsilon_i^a$.

§ 2. GENERALIZZAZIONE ALLE FUNZIONI DI DUE O PIÙ VARIABILI.

La misura esteriore di un insieme E di punti, posti in un piano, si definisce come il limite inferiore della somma delle misure (aree) dei triangoli (in numero finito, o formanti un'infinità numerabile), nei quali si possono racchiudere i punti di E . La definizione è la stessa, che nel § 1 abbiamo dato

per gli insiemi di punti di una retta: soltanto che ai *segmenti* abbiamo ora sostituito dei *triangoli*. Come nel § 1 si definisce poi la misura *interiore*; si dicono *misurabili* gli aggregati, la cui misura interiore e esteriore sono uguali. Il valore comune di queste misure si dice *misura* dell'aggregato.

Per la misura degli aggregati di punti di un piano valgono proprietà affatto analoghe a quelle enunciate nel § 1 per la misura degli aggregati di punti posti sopra una retta.

Quando si voglia distinguere la misura di un aggregato, definita testè, dalla misura definita al § 1, si chiama quest'ultima misura *lineare*, e l'altra *misura superficiale*. Così p. es. un aggregato E di punti posti su una retta r di un piano π ha misura *superficiale* nulla, mentre può avere una qualsiasi misura *lineare*, e può anche non essere misurabile *linearmente*.

L'insieme comune a due o più aggregati si dirà *intersezione* degli aggregati stessi.

Un aggregato di punti del piano (x, y) si dice essere *linearmente* misurabile se la sua *intersezione* con una qualsiasi retta $x = \text{cost.}$, o $y = \text{cost.}$ è (linearmente) misurabile (nel senso del § 1). (Ricordo che con (x, y) indicherò qui e più avanti coordinate cartesiane ortogonali).

Un aggregato E di punti del piano (x, y) si dice (FUBINI) essere *linearmente nullo*, se i valori di un parametro K , tali che la retta $x = K$, o la retta $y = K$, o il cerchio $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = K^2$ (dove (α, β) è un punto fisso, ma qualunque del piano), o ecc., contenga almeno un punto di E , formano un aggregato di *misura nulla*. Gli aggregati linearmente nulli hanno misura superficiale nulla.

Oss. Per definire la misura esteriore di un aggregato posto in un piano (dove abbiamo dedotto i concetti di misura interiore, di aggregati misurabili, ecc.), siamo partiti dall'insieme dei triangoli del piano. Invece di triangoli, avremmo potuto usare rettangoli, o in particolare rettangoli con lati paralleli agli assi coordinati, o più generalmente ogni insieme Σ di aree σ , il quale goda delle due seguenti proprietà:

1.^a) Ogni area σ di Σ è misurabile.

2.^a) Preso un qualsiasi triangolo Δ del piano, si può trovare un numero finito, o un'infinità numerabile di aree σ di Σ , tale che ogni punto interno a Δ sia interno ad almeno una delle aree σ considerate, e che la somma di queste aree differisca dall'area di Δ di una quantità piccola a piacere. Tra tali sistemi di aree, ricorderemo, come specialmente notevole, il sistema dei quadrangoli, due lati dei quali sono segmenti di rette uscenti da un

punto O fisso, mentre gli altri due lati sono archi di cerchi, aventi il centro nel punto O . Questo sistema di aree serve, quando si usano coordinate polari. Considerazioni simili si possono ripetere per i sistemi più svariati di coordinate curvilinee.

Come nel § 1, si definiscono poi le funzioni $f(x, y)$ misurabili di due variabili x, y , e gli integrali di dette funzioni, estesi a un campo Γ del piano (x, y) ; si può dimostrare che *le funzioni $f(x, y)$ misurabili e limitate sono integrabili superficialmente*, e si possono estendere gli altri teoremi, enunciati nel § 1 per le funzioni di una sola variabile.

Se noi indichiamo con $\int_{\Gamma} f(x, y) dx dy$ l'integrale di $f(x, y)$ esteso a un campo Γ del piano (x, y) , si può dimostrare che detto integrale è *in ogni caso* (LEBESGUE, FUBINI) uguale a $\int dx \int f(x, y) dy = \int dy \int f(x, y) dx$.

Questa formola, che riconduce nel caso più generale il calcolo di integrali superficiali al calcolo di integrali lineari, si può estendere anche a coordinate polari, o ad altri sistemi di coordinate curvilinee.

In modo analogo si definiscono la misura a tre o più dimensioni di un aggregato di punti, e l'integrale di una funzione di tre, o più variabili; e si estendono a questo caso le proprietà enunciate per gli aggregati di punti su una retta, o su un piano, e per gli integrali delle funzioni a una o due variabili.

§ 3. LA COSTRUZIONE DI UNA FUNZIONE ARMONICA U IN UN CAMPO Γ DATO, QUANDO SIANO PREFISSI I VALORI DELLA DERIVATA NORMALE DI U SUL CONTORNO σ DI Γ .

Il problema enunciato nel titolo del presente paragrafo è stato, come è noto, trasformato da Lord KELVIN in un problema di minimo, che enuncieremo (per il momento sotto forma un po' grossolana) per il caso di campi a tre dimensioni:

Sia Γ un campo dello spazio a tre dimensioni, in cui (x, y, z) sono coordinate cartesiane ortogonali. E ne sia σ la superficie contorno. Sia f una funzione integrabile dei punti di σ . Si costruisca una funzione U , esistente in Γ ,

tale che

$$\int_{\sigma} f U d\sigma = 1 \quad (1)$$

(quando l'integrazione sia estesa a tutta la superficie σ , e si indichi con $d\sigma$ l'elemento d'area della σ), e che l'integrale $I(U) = \int_{\Gamma} \Delta_1 U d\tau$ (dove, al solito, ho indicato con $\Delta_1 U$ il parametro $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2$, con $d\tau$ l'elemento di volume di Γ , e dove l'integrazione è estesa a tutto il campo Γ) abbia il minimo valore possibile, compatibile con la (1). Dimostrare poi che U è armonica. Faremo anzitutto alcune osservazioni:

1.^a La funzione f dei punti di σ è una funzione, che differisce soltanto per un fattore costante dai valori prefissati della derivata normale di U . Ammessa per un momento l'esistenza della funzione armonica U , che risolve il problema di Lord KELVIN, e ammessa l'esistenza della derivata normale di U nei punti di σ , si può infatti (*) (con convenienti ipotesi restrittive di continuità, ecc., relativamente alla superficie σ , e alla derivata normale di U) dimostrare che la derivata normale della U è proporzionale alla funzione f . Il problema di Lord KELVIN è quindi più generale del problema, ricordato nel titolo dell'attuale paragrafo, non solo perchè il problema di Lord KELVIN impone alla f la sola condizione della integrabilità, ma anche perchè nell'enunciato di esso non figura per nulla la condizione che il contorno σ di Γ possieda normali.

2.^a Nel problema ricordato nel titolo del presente paragrafo si ammette sempre, come è noto, che i valori f della derivata normale della funzione cercata soddisfino alla

$$\int_{\sigma} f d\sigma = 0. \quad (2)$$

Qual'è l'efficacia di questa condizione per il problema di Lord KELVIN? Se la (2) è soddisfatta, allora in virtù di (1), la funzione U non può essere una costante. E invece, se la (2) non fosse soddisfatta, la funzione U , che risolve il problema di Lord KELVIN, è uguale alla costante $\frac{1}{\int_{\sigma} f d\sigma}$. L'effetto

(*) Cfr., p. es., HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes* (1906), page 6.

dunque della (2) per il problema di Lord KELVIN è quello di assicurare che la funzione cercata U non sia una costante.

3.^a) Faremo ora un'ultima osservazione. Abbiamo detto nell'enunciato del problema di Lord KELVIN che $I(U) = \int_{\sigma} \Delta_1 U d\sigma$ ha il valore *minimo possibile*, compatibile con la (1). Ma in modo analogo a questo fu già osservato (LEVI) per il problema di DIRICHLET, si può dimostrare che il problema, così enunciato, non ammette in generale risoluzione. Ciò si evita precisando il problema di Lord KELVIN nel modo seguente:

Si potrebbe p. es. dire che una funzione $v(x, y, z)$ appartiene al campo funzionale (u) , se essa esiste in Γ , soddisfa su σ alla (1), ed ha in ogni punto A interno a Γ derivate prime $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$ continue, le quali possono anche crescere indefinitamente quando A si avvicina a σ , in guisa però che esista e sia finito l'integrale $I(v) = \int_{\Gamma} \Delta_1 v d\tau$. Ammessa per un momento l'esistenza

di tali funzioni, si dica d il limite inferiore dei valori di $I(v)$. Il problema di Lord KELVIN si può enunciare così:

Dimostrare che d è un minimo, ossia che in (u) esiste una funzione U , tale che $I(U) = d$. Dimostrare poi che U è armonica.

È però interessante notare, che le condizioni da noi imposte alle funzioni di (u) non sono tutte essenziali, e che, pure lasciando al campo (u) di funzioni una maggiore generalità, non si complicano per nulla le future considerazioni. E anzi il risultato che *ciononostante la funzione U minimizzante è unica ed è analitica* acquista maggior rilievo. Il campo (u) funzionale, a cui ci riferiremo, è il seguente:

α) Le funzioni di (u) esistono in ogni punto A interno a Γ , e vi sono continue. Per ogni funzione v di (u) esiste ed è finito $I(v)$.

β) I valori, assunti da una funzione v di (u) in un punto A di Γ , hanno, quando A tende a un punto di σ , limiti, che soddisfano la (1) (*).

γ) Sopra ogni retta coordinata, escluso al più un aggregato G di rette di misura nulla, ogni funzione v di (u) è assolutamente continua. (G potrebbe

(*) E, per quanto si è visto al § 1, potrebbe anche darsi che esistesse in σ un aggregato G di punti di misura nulla, tale che il valore di una funzione v di (u) in un punto A interno a Γ non tendesse ad alcun limite, quando A si avvicinasse a un punto di G . Naturalmente questo gruppo G potrebbe variare, al variare di v in (u) .

anche variare al variare di v in (u). Ricordo che con le parole: rette coordinate e piani coordinati indico, secondo una terminologia universalmente addottata, le rette e i piani paralleli rispettivamente agli assi e ai piani coordinati.

La condizione (γ) (Cfr. § 1) ha per conseguenza, che su una retta coordinata, p. es. una retta $y = y_0, z = z_0$, (escluso al più un aggregato di misura nulla di tali rette) esiste la $\frac{\partial v}{\partial x}$, e vale la

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial v(x_1, y_0, z_0)}{\partial x} = v(x_1, y_0, z_0) - v(x_0, y_0, z_0)$$

se il segmento congiungente i punti (x_0, y_0, z_0) e (x_1, y_0, z_0) è formato tutto di punti appartenenti a Γ . L'esistenza di funzioni $v(x, y, z)$ soddisfacenti alle precedenti condizioni è un fatto intuitivo, e si può dimostrare rigorosamente nei casi più ampi e svariati. Se infatti $w(x, y, z)$ è una funzione esistente in Γ , o in un campo più ampio, che entro Γ soddisfa alle (α), (γ), e su σ non soddisfa proprio alla $\int f w d\sigma = 1$, esiste una costante $h \neq 0$, tale che la funzione $v = h w$ soddisfa alla (β).

Sul campo Γ e sul contorno σ è necessario imporre qualche condizione: le condizioni si possono enunciare dicendo che il problema precedente deve avere un significato: vale a dire che si possa parlare di integrali estesi a Γ , o a σ , di punti interni a Γ , ecc. Nè diminuisce la generalità il supporre Γ connesso. Naturalmente si deve poi ammettere la integrabilità di f su σ , affinché le (1), (2) abbiano un significato. Nel § 5 però per semplicità imporrò alla funzione f , e alla superficie σ ulteriori condizioni, poco restrittive, che abbreviano la trattazione in qualche punto. Noi supporremo cioè:

α) che σ si possa suddividere in un numero finito di pezzi $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, ciascuno dei quali sia in relazione biunivoca con la sua proiezione (ortogonale) su almeno uno dei piani coordinati.

β) Che, se $\sigma_i (i \leq n)$ è in relazione biunivoca con la sua proiezione ortogonale σ'_i , p. es. sul piano $x = \text{cost.}$, esiste una costante finita L , tale che valga la

$$\int_{\sigma_i} |f \varphi| d\sigma_i \leq L \int_{\sigma'_i} |\varphi| dy dz$$

qualunque sia la funzione φ (purchè integrabile) dei punti di σ_i , o, ciò ch'è

lo stesso, dei punti di σ'_i . Questa ultima condizione è soddisfatta p. es. se f è una funzione limitata, e se σ_i ha in ogni punto un piano tangente variabile con continuità, e giammai normale al piano $x = 0$.

§ 4. LE SUCCESSIONI MINIMIZZANTI PER IL PROBLEMA DI LORD KELVIN.

Essendo d il limite inferiore dei valori di $I(v)$, quando v è una funzione dell'insieme (u) , noi potremo in infiniti modi scegliere in (u) una *successione* minimizzante di funzioni v_1, v_2, \dots : cioè una successione di funzioni tale che $I(v_n)$ abbia per $n = \infty$ il limite d , ossia che, posto $I(v_n) = d + \frac{\varepsilon_n}{6}$, sia $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. E anzi noi potremo sceglierla in guisa che $\varepsilon_1 < 1$, $\varepsilon_{n-1} > \varepsilon_n$, e che la serie $\sum_n \varepsilon_n^{\frac{1}{3}}$ sia convergente. Se $k \geq \frac{1}{3}$, la serie $\sum_n \varepsilon_n^k$ ha per n^{esimo} termine la quantità $\varepsilon_n^k = \varepsilon_n^{\frac{1}{3}} \varepsilon_n^{k - \frac{1}{3}}$. Ossia (poichè $k - \frac{1}{3} \geq 0$, $0 < \varepsilon < 1$, e quindi $\varepsilon_n^{k - \frac{1}{3}} \leq 1$) i termini della serie $\sum_n \varepsilon_n^k$ sono minori dei termini della serie $\sum_n \varepsilon_n^{\frac{1}{3}}$; quindi la serie $\sum_n \varepsilon_n^k$ è pure convergente. Noi dunque potremo riferirci a una successione minimizzante v_1, v_2, \dots tale che, posto $I(v_n) = d + \frac{\varepsilon_n}{6}$, sia $\varepsilon_1 < 1$, $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1}$, per $n = 1, 2, 3, \dots$, e che la serie $\sum_n \varepsilon_n^k$ converga per $k \geq \frac{1}{3}$. Porremo $M_i = v_i - v_{i-1}$.

Studieremo ora il comportamento della successione delle v_n sulle rette coordinate: noi parleremo delle rette $y = z = \text{cost}$. Ma naturalmente quanto diremo per esse varrà ancora per le rette parallele all'asse delle y , o a quello delle z . Le rette parallele all'asse delle x si divideranno in due categorie: rette *regolari* e rette *eccezionali*. Diremo rette *regolari* quelle, su cui sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1.^a) Le funzioni v_i (considerate come funzioni della sola x) vi sono assolutamente continue.

2.^a) L'integrale $\int_l \left(\frac{\partial M_i}{\partial x}\right)^2 dx$ (dove $M_i = v_i - v_{i-1}$) esteso a un qualsiasi segmento, o a un qualsiasi gruppo di punti l della retta considerata, tutto interno a Γ , è, da un certo valore di i in poi (che varierà in generale col variare della retta considerata) minore o uguale a $\varepsilon_i^{\frac{2}{3}}$. Chiameremo rette *eccezionali* quelle, su cui non è soddisfatta l'una o l'altra delle precedenti proprietà.

Vale il teorema:

Le rette eccezionali formano un aggregato di misura (superficiale) nulla.

Infatti, siccome per ipotesi ogni funzione v appartiene all'insieme (u) , le rette, su cui una qualunque delle v , p. es. la v_i , non è assolutamente continua formano un aggregato di misura nulla. E, poichè la somma di un'infinità numerabile di aggregati di misura nulla è ancora un aggregato di misura nulla, le rette, su cui non è soddisfatta la prima delle due condizioni enunciate più sopra, formano un aggregato di misura nulla.

Basterà dunque dimostrare che le rette, su cui non è soddisfatta la seconda delle due condizioni precedenti, formano anch'esse un aggregato di misura nulla. Si può infatti dimostrare che $I(M_i) \leq \varepsilon_i$ (*). Ora, per i teoremi del § 2, si ha

$$I(M_i) = \int dy dz \int \Delta_1 M_i dx \leq \varepsilon_i.$$

E quindi, per il Teor. II del § 1 (che si estende immediatamente alle funzioni di due variabili) si ha che esiste al più un aggregato di rette di misura nulla, in cui non è soddisfatta, a partire da un certo valore di i (variabile in generale al variare della retta considerata) la $\int \Delta_1 M_i dx \leq \varepsilon_i^{1-\frac{1}{3}} = \varepsilon_i^{\frac{2}{3}}$.

(La quantità α , cui si accenna nell'enunciato del citato Teor. II è nel nostro caso uguale a $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$). *A fortiori* resta dimostrato il nostro teorema, perchè $\left(\frac{\partial M_i}{\partial x}\right)^2 \leq \Delta_1 M_i$.

(*) LEVI, *Sul principio di DIRICHLET* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo 22), §§ 30-31; e FUBINI (loc. cit.), § 2. Il teorema in discorso è il seguente: *Se v, w sono funzioni di (u) , se $I(v) \leq I(w) \leq d + \varepsilon$, allora $I(v - w) \leq 6\varepsilon$.*

Studieremo ora i piani coordinati, e ci riferiremo ai piani $x = \text{cost.}$ Divideremo i piani $x = \text{cost.}$ in due categorie: i piani *regolari*, e i piani *eccezionali*. Diremo piani *regolari* quelli, che soddisfano alle due seguenti proprietà:

1.^a) Su un tal piano $\iint \left[\left(\frac{\partial M_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_i}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz$ è, a partire da un certo valore dell'indice i (variabile in generale col variare del piano), minore di $\varepsilon_i^{\frac{2}{3}}$, quando l'integrale sia esteso a una qualsiasi porzione, o a un qualsiasi gruppo di punti del piano considerato, che è interno a Γ .

2.^a) Le rette eccezionali, parallele all'asse delle y o all'asse delle z , poste su un tal piano, formano un aggregato che ha misura (lineare) nulla.

Vale il teorema:

I piani eccezionali formano un aggregato di misura (lineare) nulla.

Poichè $I(M_i) = \int \Delta_1 M_i d\tau \leq \varepsilon_i$, e, per i risultati del § 2,

$$\int \Delta_1 M_i d\tau = \int dx \int \Delta_1 M_i dy dz,$$

si ha, per il Teor. II del § 1, che esiste al più un aggregato di piani $x = \text{cost.}$, di misura nulla, in cui, a partire da un certo valore dell'indice i (variabile in generale da piano a piano) non è soddisfatta la

$$\int \Delta_1 M_i dy dz \leq \varepsilon_i^{\frac{2}{3}}. \quad \text{Poichè} \quad \left(\frac{\partial M_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_i}{\partial z} \right)^2 \leq \Delta_1 M_i,$$

ne segue immediatamente che i piani, i quali non godono della prima delle due citate proprietà, formano un aggregato di misura (lineare) nulla.

Consideriamo ora le rette eccezionali parallele, p. es., all'asse delle y . Esse formano un aggregato di misura (superficiale) nulla: vale a dire esse intersecano il piano $y=0$ in un aggregato E di punti di misura (superficiale) nulla.

Ma per i teoremi del § 2 tale misura si ottiene integrando rapporto a x la misura (lineare) dell'aggregato, in cui E è intersecato da una retta $x = \text{cost.}$ Le rette $x = \text{cost.}$ del piano $y=0$, su cui questa misura o non esiste, o è differente da zero, formano dunque un aggregato di misura (lineare) nulla. Perciò i piani $x = \text{cost.}$, che contengono un aggregato di rette eccezionali parallele all'asse delle y , la cui misura lineare o non esiste, o non è nulla,

formano un aggregato di misura nulla. Altrettanto si può ripetere per le rette parallele all'asse delle z : e resta così dimostrato completamente il teorema enunciato.

Teorema fondamentale. *Se la successione minimizzante delle v_i converge in un punto A di una retta regolare r , essa converge uniformemente in ogni segmento l di r , interno a Γ e contenente il punto A .*

Sia B un punto qualunque di tale segmento l . Sarà, a partire da un certo valore di i

$$\int_A^B \left(\frac{\partial M_i}{\partial x} \right)^2 dx \leq \int_l \left(\frac{\partial M_i}{\partial x} \right)^2 dx \leq \varepsilon_i^{\frac{2}{3}}.$$

Ora per la formola di SCHWARZ, che vale anche per gli integrali del LEBESGUE (*), se ne deduce:

$$\left| \int_A^B \frac{\partial M_i}{\partial x} dx \right| \leq \sqrt{l} \varepsilon_i^{\frac{1}{3}} \quad (l = \text{lunghezza del segmento } l).$$

Poichè r è una retta regolare, se ne deduce

$$|M_i(B) - M_i(A)| \leq \sqrt{l} \varepsilon_i^{\frac{1}{3}}$$

ossia

$$M_i(B) = M_i(A) + \theta_i \sqrt{l} \varepsilon_i^{\frac{1}{3}} \quad (-1 \leq \theta_i \leq 1).$$

Questa disuguaglianza vale, a partire da un certo valore di i , dipendente dalla retta r considerata, per tutti i punti B di l .

Ora la convergenza della successione delle v_i equivale alla convergenza della serie $v_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (v_{i+1} - v_i)$, ossia alla convergenza della serie $\sum M_i$. Questa serie converge dunque per ipotesi nel punto A ; e, poichè la serie $\sum \varepsilon_i^{\frac{1}{3}}$ è asso-

(*) LEVI, loc. cit., n.° 27. Veramente noi qui adoperiamo soltanto un caso particolare della formola di SCHWARZ: che cioè l'integrale di una funzione φ , esteso a un aggregato A di misura α , è minore in valore assoluto del prodotto della radice quadrata di α per la radice quadrata dell'integrale di φ^2 , esteso allo stesso aggregato A .

lutamente convergente, dalla uguaglianza precedentemente stabilita segue che la serie $\sum M_i$ converge *uniformemente* nel segmento l . c. d. d.

Osserviamo ora che, essendo Γ per ipotesi un campo connesso, due punti di Γ si potranno sempre (e in infiniti modi) congiungere con una spezzata rettilinea, formata tutta di segmenti interni a Γ e paralleli a uno degli assi coordinati. Una tale spezzata si dirà una *spezzata coordinata*.

Diremo poi che una spezzata coordinata è *regolare*, se i suoi lati sono tutti rette coordinate regolari.

Dal teorema precedente si deduce:

Se la successione delle v_n è convergente in un punto A , essa converge in tutti i punti B , che si possono congiungere con A mediante una spezzata coordinata regolare.

È poi ben evidente che:

Se S è un'area piana, connessa, interna a Γ , posta su un piano coordinato π (parallelo, p. es., al piano delle x) e regolare, due punti A e B di S sono sempre congiungibili mediante una spezzata regolare, se l'uno e l'altro sono posti su una retta coordinata regolare del piano π .

Infatti siano r, r' le due rette, su cui sono posti rispettivamente i punti A, B ; e supponiamole dapprima concorrenti in un punto C , tale che i segmenti AC, CB siano interni a Γ . La spezzata ACB congiunge i punti A, B ed è regolare.

Se invece non è soddisfatta l'ipotesi, da cui siamo partiti, è ben evidente che potremo congiungere i punti A, B con una spezzata $AC_1C_2\dots C_nB$, tale che i lati AC_1, C_nB siano posti rispettivamente sulle rette r, r' ; e che ogni altro lato della spezzata sia una retta coordinata del piano π .

Le rette coordinate eccezionali di π formano aggregati di misura (lineare) nulla. Quindi le rette regolari formano aggregati dappertutto densi in S ; potremo dunque sostituire ai punti C altri punti C' , vicini quanto si vuole ai corrispondenti punti C , in guisa che la spezzata $AC'_1C'_2\dots C'_nB$ sia una spezzata regolare c. d. d.

Sia ora S una qualsiasi regione piana connessa, interna a Γ . Essa si potrà evidentemente dividere in un numero finito, o in un'infinità numerabile di pezzi S_1, S_2, S_3, \dots ciascuno dei quali si può proiettare ortogonalmente in un pezzo, tutto interno a Γ , di un piano coordinato regolare (*).

(*) Infatti i piani coordinati non regolari (eccezionali) formano aggregati di misura nulla; e quindi i piani regolari formano aggregati dappertutto densi in F .

Sia p. es. S_1 proiettato ortogonalmente in un pezzo S'_1 di un piano π_1 regolare, coordinato, e parallelo al piano delle x . I punti di S_1 , S'_1 sono in corrispondenza biunivoca. Le rette eccezionali parallele all'asse delle x formano un aggregato di misura nulla. Quindi, escluso al più un aggregato di punti di misura nulla di S_1 , ogni altro punto di S_1 è unito al corrispondente di S'_1 da una retta *regolare*. I punti di S'_1 , che non sono posti su alcuna retta regolare di π_1 , formano un aggregato di misura nulla. Escluso quindi al più un nuovo aggregato di punti di misura nulla, ogni altro punto di S_1 è congiungibile mediante una *retta regolare a un punto di π_1 , posto su una retta coordinata regolare di π_1 .*

Ripetendo analoghi ragionamenti per S_2, S_3, \dots e ricordando che un aggregato, somma di un numero finito o di un'infinità numerabile di aggregati di misura nulla, è pure di misura nulla, otteniamo: *Se S è una qualsiasi regione piana connessa interna a Γ , ogni punto di S (escluso al più un aggregato di punti di misura nulla) è congiungibile con una retta coordinata regolare a un punto posto su una retta coordinata regolare di un piano coordinato regolare.*

Siano ora S, S' due aree piane interne a Γ , che supporremo senz'altro poste su due piani π, π' regolari (*). È ben evidente che noi potremo trovare due aree S_1, S'_1 interne rispettivamente a S, S' e un numero finito di piani $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$, in modo che ogni punto di S_1 sia congiungibile a un punto di S'_1 mediante una spezzata coordinata, i cui vertici sono posti su $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$. E anzi, se escludiamo un aggregato di punti di misura nulla su S_1, S'_1 , potremo supporre che questa spezzata sia regolare. E, se escludiamo altri aggregati di misura nulla, potremo supporre che punti corrispondenti di S_1, S'_1 siano posti rispettivamente su rette regolari dei corrispondenti piani π, π' . Dunque:

Se π, π' sono piani coordinati regolari, possiamo sempre trovare, data una regione S di π interna a Γ e una regione S' di π' interna pure a Γ , un punto A di S , e un punto A' di S' , posti l'uno su una retta regolare di π , l'altro su una retta regolare di π' , i quali siano congiungibili mediante una spezzata regolare. Se ora ricordiamo i risultati fin qui ottenuti, e ricordiamo che, se un punto A è congiungibile tanto a un punto B , che a un punto C me-

(*) Potrebbe anche darsi che π, π' coincidessero in uno stesso piano π , che l'intersezione di π_1 e di Γ risultasse composta di più aree distinte R_1, R_2, \dots , e che S, S' fossero parti di due di queste aree, non connesse tra di loro.

dianete una spezzata regolare, anche i punti B, C sono congiungibili mediante una spezzata regolare, troviamo:

Sia A un punto di un piano regolare π , posto su una retta regolare di π . I punti di Γ non congiungibili con A mediante una spezzata regolare formano su ogni piano (coordinato, o no) un aggregato di misura superficiale nulla, e in particolare formano su ogni piano regolare π' un aggregato $E_{\pi'}$, tale che le rette coordinate, le quali contengono un punto di $E_{\pi'}$, formano aggregati di misura (lineare) nulla. L'insieme E di questi punti ha dunque misura (a tre dimensioni) nulla. Se esiste ed è finito in A il $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$, questo limite esiste ed è finito

in tutto Γ , esclusi al più i punti di E . Le rette coordinate che contengono un punto di E formano aggregati di misura (superficiale) nulla. L'intersezione di E con un piano coordinato regolare è un aggregato linearmente nullo. Ad altri e analoghi risultati perverremmo, se, in luogo di coordinate cartesiane ortogonali, usassimo coordinate polari, o altre coordinate curvilinee.

Osserviamo ora che in virtù della (2) (§ 3), se una funzione v appartiene a (u) , anche la funzione $v + \text{cost.}$ appartiene a (u) . Se v_1, v_2, \dots è una successione minimizzante, e h_1, h_2, h_3, \dots sono costanti arbitrarie, anche $v_1 + h_1, v_2 + h_2, \dots$ è una successione minimizzante, che ha a comune con la successione iniziale rette e piani coordinati regolari. Noi potremo servirci di queste costanti additive, che sono in nostro arbitrio, in guisa che la successione minimizzante $v_1 + h_1, v_2 + h_2, \dots$ converga nel punto A verso un valore finito. E, per non introdurre nuove notazioni, indicheremo questa successione ancora con v_1, v_2, \dots . Essa convergerà in tutto Γ , esclusi al più i punti dell'aggregato E ; ossia (come potremo dire con linguaggio analogo a quello della mia Mem. cit.) sarà quasi-convergente in Γ . Di più, per quanto abbiamo visto, la funzione limite $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ sarà una funzione continua su ogni retta regolare, non contenente punti di E . In modo ancora più semplice si potrebbe dimostrare che i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial v_n}{\partial x}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial v_n}{\partial y}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial v_n}{\partial z}$ esistono in tutti i punti di Γ , eccetto che in un aggregato F di misura nulla (*). Ma ciò ha per noi scarso interesse.

(*) Del teor. II del § 1 si deduce che, escluso al più un aggregato di punti di misura nulla, esiste per ogni altro punto A di Γ un intero k , tale che per $i > k$, si ha (in A) $\Delta_1 M_i \leq \epsilon_i^{\frac{2}{3}}$, e quindi anche a fortiori $\left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| \leq \epsilon_i^{\frac{1}{3}}, \left| \frac{\partial M_i}{\partial y} \right| \leq \epsilon_i^{\frac{1}{3}}, \left| \frac{\partial M_i}{\partial z} \right| \leq \epsilon_i^{\frac{1}{3}}$. In questi punti convergono dunque le serie $\sum_i \frac{\partial M_i}{\partial x}, \sum_i \frac{\partial M_i}{\partial y}, \sum_i \frac{\partial M_i}{\partial z}$; ed esistono quindi i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial v_n}{\partial x}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial v_n}{\partial y}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial v_n}{\partial z}$.

§ 5. LA FUNZIONE ARMONICA LIMITE.

Noi dimostreremo ora che *esiste in Γ una funzione armonica U , la quale coincide con $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ in tutti i punti, esclusi al più i punti di un aggregato E' di misura nulla*, e che di più *le rette coordinate, che contengono un punto di E o di E' formano un aggregato di misura (superficiale) nulla. Dimostreremo poi che U è la funzione che risolve il nostro problema.* Premetteremo lo studio di alcune proprietà della v , a cui abbiamo già alluso nell'introduzione. Sia π un piano coordinato $x = \alpha$ ($\alpha = \text{cost.}$) regolare. Sia R un rettangolo posto su π , interno a Γ , coi lati paralleli agli assi coordinati. Le rette eccezionali di π formano un aggregato di misura (lineare) nulla: quindi le rette regolari di π formano un aggregato dappertutto denso. Sia $y = y_0$ una retta regolare, intersecante R . Se le integrazioni sono estese a un qualsiasi segmento l di questa retta, interno a R , la serie $\int_l |v_1| dz + \int_l |M_2| dz + \int_l |M_3| dz + \dots$ è uniformemente convergente. (Cfr. il Teor. fond. del § 4). Sia $y = y_1$ un'altra retta, regolare o no, parallela alla precedente, e intersecante R . Sia l' un segmento di questa retta, tale che l, l' formino due lati opposti di un rettangolo R' , interno a R . Si ha (se z_0, z_1 sono le terze coordinate degli estremi di l o di l')

$$\left| \int_{l'} |M_k| dz - \int_l |M_k| dz \right| \leq \int_{z_0}^{z_1} |(M_k)_{y=y_0} - (M_k)_{y=y_1}| dz \leq \int_{R'} \left| \frac{\partial M_k}{\partial y} \right| dy dz. \quad (\alpha)$$

Poichè π è un piano coordinato regolare, l'integrale di $\left(\frac{\partial M_k}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial M_k}{\partial z}\right)^2$, ed « a fortiori » l'integrale di $\left(\frac{\partial M_k}{\partial y}\right)^2$, esteso a una qualsiasi regione, posta su π e interna a Γ , e quindi anche in particolare l'integrale di $\left(\frac{\partial M_k}{\partial y}\right)^2$ esteso a R' , è minore di $\frac{2}{\varepsilon_k^3}$, almeno a partire da un certo valore di k in poi (valore, che dipende soltanto dal piano π). Se ρ' è l'area di R' , si ha per una formola di SCHWARZ già citata (Cfr. il teor. fondam. del § 4):

$$\iint_{R'} \left| \frac{\partial M_k}{\partial y} \right| dy dz \leq \sqrt{\rho'} \sqrt{\iint_{R'} \left| \frac{\partial M_k}{\partial y} \right|^2 dy dz} \leq \sqrt{\rho'} \varepsilon_k^{\frac{1}{3}} \quad (\beta)$$

e, se ρ è l'area di R , ($\rho \geq \rho'$) si ha *a fortiori*

$$\iint_{R'} \left| \frac{\partial M_k}{\partial y} \right| d y d z \leq \sqrt{\rho} \varepsilon_k^{\frac{1}{3}} \quad (\beta')$$

almeno a partire da un certo valore di k . Ma dalla (α), (β') scende

$$\int_l |M_k| dz = \int_l |M_k| dz + \theta \sqrt{\rho} \varepsilon_k^{\frac{1}{3}} \quad (-1 \leq \theta \leq 1).$$

Ora, per le ipotesi fatte su l e sulle ε , le serie

$$\sum_k \int_l |M_k| dz, \quad \sum_k \varepsilon_k^{\frac{1}{3}}$$

sono convergenti (e la prima converge anzi in ugual grado). Quindi la serie

$\sum_k \int_l |M_k| dz$ converge: per un teor. (del LEVI) ricordato al § 1, segue che

su l' , ossia su ogni segmento parallelo all'asse delle z , posto su π , la serie $v_1 + M_2 + M_3 + \dots$ è integrabile termine a termine; e la serie degli integrali rappresenta l'integrale della serie, ossia l'integrale di $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ esteso al segmento considerato.

Notiamo poi che le M_k sono per ipotesi continue; quindi $\int_{z_0}^{z_1} M_k dz$ è una

funzione continua della y . La serie $\sum_k \int_{z_0}^{z_1} M_k dz$ converge, come abbiamo dimostrato testè, uniformemente. Essa rappresenta quindi una funzione con-

tinua della y . Ossia $\int_{z_0}^{z_1} v dz$ è, su π , una funzione continua della y .

Da quanto abbiamo detto fin qui, si deduce facilmente che anche la serie, ottenuta integrando (superficialmente) termine a termine la serie $v_1 + |M_2| + |M_3| + \dots$ in una qualsiasi regione di π , interna a Γ , converge; e che quindi la serie $v_1 + M_2 + M_3 + \dots$ si può integrare superficialmente termine a termine in una qualsiasi regione di π , interna a Γ : la serie così ottenuta rappresenta proprio l'integrale di v esteso a detta regione.

Nello stesso modo, con cui dall'integrabilità termine a termine della serie $v_1 + M_2 + M_3 + \dots$ su una retta regolare di π abbiamo dedotto l'integrabilità termine a termine su ogni altra retta regolare, o no, di π , così

dall'integrabilità termine a termine della solita serie in una qualsiasi regione di π , interna a Γ , possiamo dedurre l'integrabilità termine a termine della serie $v_1 + M_2 + M_3 + \dots$ in una qualsiasi regione di un altro piano coordinato, regolare o no. Anzi con lo stesso metodo potremmo dedurre l'integrabilità termine a termine in un qualsiasi pezzo di una superficie S , appartenente a Γ , che si proietti biunivocamente su una regione S' di un piano π coordinato, in guisa che il rapporto tra la misura (superficiale) di una porzione di S o di un aggregato di punti di S , e la misura della sua proiezione su π sia inferiore a una costante K . Noi potremo anzi dimostrare una formola più generale, da cui in particolare potremo dedurre che v soddisfa la (1).

Sia S una superficie che goda delle citate proprietà: e sia π un piano $x = \text{cost.}$ Le proprietà volute saranno soddisfatte, se p. es. S è rappresentata da un'equazione $x = \psi(y, z)$, dove ψ è una funzione che posseda derivate prime finite. Sia f una funzione limitata dei punti di S , e quindi anche delle y, z . E sia p. es. $|f| \leq H$ ($H = \text{cost.}$). La misura M di un aggregato G di punti di S sia minore di Km , dove $K = \text{cost.}$, m è la misura della proiezione di G su π , o, ciò che è lo stesso, su S' .

Se φ è una qualsiasi funzione dei punti di S , integrabile in S , si avrà

$$\int_S |f\varphi| d\sigma \leq L \int_{S'} |\varphi| dy dz \quad (L = HK)$$

quando con $d\sigma$ si intende l'elemento d'area di S . Quindi per dimostrare che la serie $\sum_k \int_S |fM_k| d\sigma$ è convergente, basterà dimostrare che è convergente

la serie $\sum_k \int_S |M_k| d\sigma'$, (quando con la notazione $\int_S \varphi d\sigma'$ si intenda l'integrale esteso a S di una funzione φ dei punti di S , calcolato con la *convenzione* di assumere come misura di una porzione, o di un aggregato di punti di S la misura della sua proiezione su S'). Come precedentemente (*) si dimostra

(*) Come sopra, si comincia coll'osservare che

$$\left| \int_S |M_k| d\sigma' - \int_{S'} |M_k| dy dz \right| \leq \int_R \left| \frac{\partial M_k}{\partial x} \right| dx dy dz \leq \sqrt{\rho} \varepsilon_k^{\frac{1}{2}}$$

dove con R si indica quella regione di Γ , che è luogo delle normali calate dai punti di S sul piano π , e con ρ il volume di R . Questa formola si dimostra come le precedenti (α), (β), e ha nella attuale questione un ufficio affatto analogo, a quello che le (α), (β) avevano nella questione precedente.

una tale convergenza, dalla quale si deduce la integrabilità termine a termine della serie

$$f v_1 + f M_2 + f M_3 + \dots,$$

quando l'integrazione sia estesa a S .

In particolare per il contorno σ di Γ si deduce che

$$\int_{\sigma} f v d\sigma = \int (f v_1 + f M_2 + f M_3 + \dots) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f v_n d\sigma = 1.$$

La funzione v soddisfa quindi sul contorno σ di Γ alla condizione (1), imposta alle funzioni di (u).

Come nel caso precedente abbiamo dimostrato che $\int_{z_0}^1 v dz$ (funzione chiaramente continua delle z_0, z_1) è funzione continua della y , così ora si può dimostrare (se il parallelepipedo avente per spigoli rette coordinate, e per vertici opposti i punti $(0, 0, 0)$ e (x, y, z) è tutto interno a Γ) che gli integrali $\int_0^x \int_0^y v dx dy$, $\int_0^y \int_0^z v dy dz$, $\int_0^x \int_0^z v dx dz$ (e quindi anche *a fortiori* gli integrali $\int_0^x \int_0^y \int_0^z v dx dy dz$, $\int_0^x d x \int_0^y d x \int_0^z d y \int_0^z v dz$, ecc.) sono funzioni continue delle x, y, z . Per dimostrare che la nostra funzione U esiste ed è armonica, ci serviremo delle proprietà testè dimostrate degli integrali della v . Siccome la v può non esistere in qualche punto di Γ , bisogna cercare di dedurre da essa una funzione U , che differisca dalla v soltanto in un aggregato E' , e che esista in tutto Γ . Poichè deve essere $v - U = 0$ in tutti i punti interni a Γ , escluso al più un aggregato E' , che per ipotesi deve essere intersecato da ogni superficie in un aggregato di misura nulla, gli integrali di v, U , estesi a uno stesso pezzo di superficie interno a Γ , devono essere uguali. Noi dunque conosciamo i valori dell'integrale di U esteso a un qualsiasi pezzo di superficie, interno a Γ . Si tratta di ricavare da questo fatto una determinazione di U in ogni punto interno a Γ . Tra le proprietà delle funzioni armoniche che potremmo utilizzare vi sono le seguenti due:

1.º) La formola di Poisson, che esprime il valore di U in un punto interno a una sfera per mezzo di un integrale esteso al contorno della sfera.

2.º) La formola di GREEN, che esprime il valore di U in un punto interno a una superficie chiusa S , mediante un integrale esteso al contorno di S di una espressione dipendente dai valori di U e della sua derivata normale sul contorno di S .

Tanto l'una, che l'altra di queste formole possono servire allo scopo nostro (*); ma io per ragione di brevità non me ne occuperò, rinviando il lettore ai §§ 6-7 della mia Mem. più volte citata.

Noi procederemo più semplicemente con un metodo, che è in sostanza l'applicazione al caso nostro di un'idea di HILBERT.

Supporremo per un momento già dimostrato il nostro asserto.

Noi osserveremo allora che, poichè si ha $\int U d\sigma = \int v d\sigma$, quando l'integrazione sia estesa a una qualsiasi superficie S , di cui con $d\sigma$ si indica l'elemento d'area, si ha pure in particolare

$$\int \int v dx dy = \int \int U dx dy; \quad \int \int v dy dz = \int \int U dy dz;$$

$$\int \int v dz dx = \int \int U dz dx,$$

quando le integrazioni siano estese rispettivamente a un pezzo di un piano $z = \text{cost.}$, o $x = \text{cost.}$, o $y = \text{cost.}$ E siamo così condotti a definire U come uguale a

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int \int v dx dy, \quad \text{o a} \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \int \int v dy dz, \quad \text{o a} \quad \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \int \int v dz dx.$$

Per simmetria, noi definiremo senz'altro U come uguale a

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \int \int \int v dx dy dz$$

e ne studieremo le proprietà, partendo appunto da questa definizione. Consideriamo un qualsiasi parallelepipedo R , interno a Γ ; e ne siano $(0, 0, 0)$ e (a, b, c) ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$) due vertici opposti.

(*) Nel secondo caso compariscono anche integrali della derivata di U ; dovremmo quindi utilizzare l'ultimo risultato del § 4, assumendo come superficie S p. es. una superficie sferica generica e quindi intersecante F in un aggregato di misura *superficiale* nulla.

Porremo in ogni punto x, y, z interno a R

$$U = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \int_0^x \int_0^y \int_0^z v \, dx \, dy \, dz. \quad (3)$$

Noi dovremo dimostrare che U esiste in ogni punto di R , e che vi rappresenta una funzione armonica. Poniamo

$$V = \int_0^x \int_0^y \int_0^z v \, dx \, dy \, dz.$$

Si ha che V esiste in ogni punto di R , e che

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \int_0^y \int_0^z v_n \, dx \, dy \, dz.$$

Se noi seguiamo un metodo analogo a quello di HILBERT (*) troviamo, posto

$$W = \int_0^x d x \int_0^x d x \int_0^y d y \int_0^y d y \int_0^z d z \int_0^z V \, dz,$$

che

$$\Delta_2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = A + x B + x^2 C + L + y M + y^2 N + \\ + P + z Q + z^2 R$$

dove $A, B, C, (L, M, N), (P, Q, R)$ sono funzioni indipendenti dalla x (dalla y), (dalla z). Ora $\Delta_2 W$ è nullo per $x=0$, perchè V si annulla per definizione sul piano $x=0$.

Quindi $A = -(L + y M + y^2 N)_{x=0} - (P + z Q + z^2 R)_{x=0}$. Sostituendo ad A questo suo valore, e scrivendo L, M , ecc., al posto di $L - (L)_{x=0}, M - (M)_{x=0}$, ecc., troviamo potersi supporre $A=0$. Nello stesso modo troviamo potersi anche supporre $P=0, L=0$. Ma, com'è ben evidente, $\Delta_2 W$ ammette derivata prima rapporto p. es. alla x ; poichè $x B + x^2 C$ ammette derivata prima rapporto a x , anche $y M + y^2 N + z Q + z^2 R$ ammette deri-

(*) Math. Ann., tomo 59; Ueber Dirichlet's Princip.

vata prima rapporto a x . Supponiamo, per fissare le idee, che $c > 2$; ponendo successivamente $z = 1$, $z = 2$ troviamo che anche

$$y (M)_{z=1} + y^2 (N)_{z=1} + Q + R$$

$$y (M)_{z=2} + y^2 (N)_{z=2} + 2 Q + 4 R$$

e quindi anche le

$$2 R + y \left\{ (M)_{z=2} - 2 (M)_{z=1} \right\} + y^2 \left\{ (N)_{z=2} - 2 (N)_{z=1} \right\}$$

$$2 Q + y \left\{ 4 (M)_{z=1} - (M)_{z=2} \right\} + y^2 \left\{ 4 (N)_{z=1} - (N)_{z=2} \right\}$$

ammettono derivata prima rapporto x . Noi indicheremo queste due ultime espressioni rispettivamente con

$$2 (R + y X + y^2 X_1); \quad 2 (Q + y X_2 + y^2 X_3)$$

dove X, X_1, X_2, X_3 sono funzioni della sola x .

Così pure si troverebbe, indicando con Y, Y_1, Y_2, Y_3 delle funzioni della sola y , che

$$2 (R + x Y + x^2 Y_1); \quad 2 (Q + x Y_2 + x^2 Y_3)$$

ammettono derivata prima rapporto a y , ossia che

$$2 R_1 = 2 (R + x Y + x^2 Y_1 + y X + y^2 X_1)$$

$$2 Q_1 = 2 (Q + x Y_2 + x^2 Y_3 + y X_2 + y^2 X_3)$$

sono funzioni della y e della x , derivabili tanto rispetto alla x , che rispetto alla y . Ma si può scrivere :

$$\begin{aligned} \Delta_2 W = & z Q_1 + z^2 R_1 + x (B - Y_2 z - Y z^2) + x^2 (C - Y_1 z^2 - Y_3 z) \\ & + y (M - X_2 z - X z^2) + y^2 (N - X_1 z^2 - X_3 z) \end{aligned}$$

ossia, con notazioni, che è superfluo spiegare :

$$\Delta_2 W = z Q_1 + z^2 R_1 + x B_1 + x^2 C_1 + y M_1 + y^2 N_1,$$

dove Q_1 ed R_1 sono derivabili tanto rispetto alla y , che alla x .

Se ne deduce c. s. che $x B_1 + x^2 C_1 + y M_1 + y^2 N_1$ è derivabile rispetto a ciascuna delle variabili x, y, z .

Con metodo analogo al precedente si dimostra che questa espressione si può scrivere sotto la forma $x B_2 + x^2 C_2 + y M_2 + y^2 N_2$, dove $B_2, C_2 (M_2, N_2)$ sono indipendenti da $x (y)$, e dove B_2, C_2, M_2, N_2 sono derivabili rapporto a z .

Poichè poi $x B_2 + x^2 C_2$ ammette derivata rapporto a x , altrettanto avverrà di $y M_2 + y^2 N_2$, qualunque sia la y . E quindi M_2, N_2 ammettono derivata rapporto a x . In simile modo si riconosce che B_2, C_2 ammettono derivata rapporto a y . In conclusione dunque vediamo che si può porre (con notazioni evidenti):

$$\Delta_2 W = z Q + z^2 R + x B + x^2 C + y M + y^2 N$$

dove $Q, R (B, C), (M, N)$ sono funzioni delle sole $y, x, (y, z), (x, z)$, che hanno derivate prime (finite e continue).

Si sa allora che esistono (*) delle funzioni derivabili $\kappa, \rho, (\beta, \gamma), (\mu, \nu)$ delle sole variabili $y, x (y, z), (x, z)$ tali che $\Delta_2 \kappa = Q, \Delta_2 \rho = B, \Delta_2 \beta = C$, ecc.

Quindi

$$\Delta_2 (W - z \kappa - z^2 \rho - x \beta - x^2 \gamma - y \mu - y^2 \nu) = -2 \rho - 2 \gamma - 2 \nu.$$

Esiste pure una funzione $r(c) (n)$ delle sole variabili $y, x, (y, z), (x, z)$

tale (**) che $\Delta_2 r = 2 \rho, \Delta_2 c = +2 \gamma, \Delta_2 n = +2 \nu$.

Quindi, posto

$$T = W - z \kappa - z^2 \rho - x \beta - x^2 \gamma - y \mu - y^2 \nu + r + c + n,$$

si avrà $\Delta_2 T = 0$. La funzione T è dunque armonica, ed ha quindi derivate di tutti gli ordini, che sono pure armoniche. *In particolare dunque è armonica la funzione*

$$U = \frac{\partial^3 T}{\partial x^3 \partial y^3 \partial z^3}.$$

Ma ora è facile dimostrare che l'equazione precedente equivale alla

$$U = \frac{\partial^3 W}{\partial y^3 \partial x^3 \partial z^3}$$

e quindi anche alla (3) del presente paragrafo.

(*) In virtù, p. es., dei noti teoremi sugli integrali di POISSON, che valgono, quando la densità ha derivata prima limitata integrabile.

(**) Infatti γ, ρ, ν hanno derivate prime, e si può quindi applicare il ragionamento precedente.

Infatti una qualsiasi derivata di una funzione a più variabili si può definire come il limite di un rapporto incrementale: così p. es.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \lim_{h=0} \frac{T(x+h, y, z) - T(x, y, z)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = \lim_{\substack{h=0 \\ k=0}} \frac{T(x+h, y+k, z) - T(x+h, y, z) - T(x, y+k, z) + T(x, y, z) \text{ ecc.}}{h k}$$

Se noi definiamo in modo analogo la $\frac{\partial^3}{\partial x^3 \partial y^3 \partial z^3}$, riconosciamo subito l'equivalenza delle due definizioni date più sopra per la funzione U .

Ripetendo questi ragionamenti per ogni parallelepipedo interno a Γ , e ricordando i teoremi sulle derivate degli integrali (*) deduciamo che $U = v$, tranne al più in un aggregato E' di misura nulla. Le rette coordinate parallele p. es. all'asse delle x , che intersecano E od E' in un aggregato di misura (lineare) non nulla, formano dunque un aggregato di misura nulla. Ma su ogni altra retta r tanto v che U sono funzioni continue; quindi esse devono essere uguali *in ogni punto di r* , in quanto che esse sulla r differiscono per ipotesi soltanto in un aggregato di misura (lineare) nulla, e quindi coincidono in un aggregato di punti denso su tutta r (**).

In particolare ne scende che $U = v$ in tutti i punti del contorno Γ , escluso al più un aggregato di misura nulla. E quindi U soddisfa pure la (1).

Poichè poi gli integrali superficiali di U e di v , estesi p. es. a una superficie sferica interna a Γ , coincidono, segue pure il teorema enunciato nell'introduzione.

Il teorema di esistenza propostoci è così completamente dimostrato. E sarebbe ben facile dimostrare (Cfr. LEVI, loc. cit., HILBERT, loc. cit.) che si ha proprio $I(U) = d$.

(*) Cfr. il § 1.

(**) Due funzioni continue, che coincidono in un aggregato di punti dappertutto denso, coincidono in ogni punto: questo teorema è immediata conseguenza della definizione di *funzioni continue*.