Sulla teoria delle funzioni automorfe e delle loro trasformazioni.

(*Di* Guido Fubini, *a Genova.*)

INTRODUZIONE.

§ 1. Il problema più generale, che si può porre nella teoria delle funzioni automorfe, si può enunciare nel seguente modo:

Se G è un gruppo discontinuo di trasformazioni birazionali su n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e Γ è un gruppo, isomorfo a G oloedricamente o meriedricamente, di trasformazioni birazionali su m variabili $z_1, z_2, \ldots, z_m$, si trovino tutti i possibili sistemi di funzioni uniformi z delle variabili x, le quali, quando le x subiscono una trasformazione di G, subiscono la corrispondente trasformazione di Γ.

Questo, che io chiamerei il problema *fondamentale*, è ben lungi dall'essere risoluto in generale. Noi vedremo che è possibile risolverlo per ampie classi di gruppi di movimenti, di gruppi misti (*), di gruppi ciclici di trasformazioni birazionali. Risultati classici sono dovuti (**) a Poincaré e Picard; altri sono dovuti a Blumenthal, a E. Levi e all'Aut.

(*) Cfr. la Mem. dell'Aut., che noi citeremo con (A): *Sulla teoria dei gruppi discontinui* (Ann. di Matem., 1905).

(**) Cfr. i lavori di Poincaré e di Picard nei tomi 1-5 degli *Acta Mathem.*,
di Blumenthal, *Ueber die Modulfunctionen*, ecc. Math. Ann., 1903.
di Fubini, Mem. cit. (A),
idem *Sulle funzioni automorfe*, ecc. (Ann. di Matem., 1904),
idem *Applicazioni analitiche dei gruppi*, ecc. Mem. dell'Acc. Gioenia, Sez. 4, Tom. 17. Citerò questa Nota con (B),
di Poincaré, *Sur une classe nouvelle de trascendantes uniformes.* Journal de Liouville, 1890. Citerò questa Mem. con (P_0),
di Picard, *Sur une classe de trascendantes nouvelles.* Acta Mathem., Tomi 18 e 23. Citerò questa Mem. con (P_i),

Riassumere brevemente lo stato attuale delle ricerche, e cercare di generalizzare i risultati a nuove classi di gruppi G, Γ. Ecco lo scopo che si prefigge la prima parte del presente lavoro, alcuni paragrafi della quale non sono che un ampio svolgimento delle idee contenute nella Nota preliminare (B), citata più sopra a piè di pagina. Le dimostrazioni, che sono ovvia generalizzazione di dimostrazioni già note, non sono sviluppate completamente: ma è soltanto svolto quanto vi ha in esse di essenzialmente nuovo.

I metodi, qui seguiti, si inspirano principalmente:

1.°) alle serie, oramai classiche, di POINCARÉ, che già trovarono qualche generalizzazione;

2.°) alla terza Memoria di HILBERT sulle equazioni integrali, recentemente pubblicata nelle *Göttinger Nachrichten;*

3.°) alle Memorie di POINCARÉ e PICARD, sopra citate con (P_0) e (P_1);

4.°) alle idee geometriche, da me svolte nella mia Memoria già citata con (A), che, come dimostrai in (A) e in un altro mio lavoro (*), sono anche tanto utili per lo studio dei gruppi propriamente discontinui. Io sarò lieto se le seguenti pagine potranno dimostrarne l'efficacia per la teoria analitica delle funzioni automorfe, facendo vedere con quanta semplicità si possa p. es. estendere la teoria delle funzioni fuchsiane e zetafuchsiane a classi molto ampie di gruppi discontinui (**). Per non allungare troppo queste pagine, suppongo famigliari al lettore le Memorie classiche di POINCARÉ.

Nella seconda parte della presente Memoria mi occupo poi della trasformazione delle funzioni $\varphi(x_1)$ fuchsiane, o Kleiniane di una variabile x_1, e delle funzioni $\varphi(x_1, x_2)$ iperfuchsiane di due variabili x_1, x_2. Più precisamente ricerco i casi, in cui esiste un gruppo continuo G di trasformazioni, tale che passi una relazione algebrica tra il valore di φ in un punto x_1 (in un punto x_1, x_2) e il valore di φ nel punto trasformato di x_1 (di x_1, x_2) per una qualunque trasformazione di G. Questa ricerca è la più semplice generalizzazione del teorema di addizione delle funzioni ellittiche.

---

di E. LEVI, *Ricerche sulla teoria delle funzioni automorfe.* Rend. della R. Acc. dei Lincei. Dicembre, 1906.

La pubblicazione di questa Nota ebbe luogo, quando il presente lavoro era già in corso di stampa.

(*) *Sulla costruzione dei campi fondamentali,* ecc. Annali di Matematica, 1906.

(**) Parte delle ricerche di questa prima parte sono riassunte in un mio trattato, di prossima pubblicazione, sulla teoria delle funzioni automorfe.

PARTE PRIMA

I teoremi di esistenza. Generalizzazione delle serie tetafuchsiane di Poincaré.

§ 2. Questo paragrafo è dedicato a quel problema speciale, che si deduce dal problema fondamentale, supponendo che Γ si riduca alla sola trasformazione identica, ossia che si debbano costruire delle funzioni uniformi z delle variabili x, le quali rimangono inalterate quando le x subiscono le trasformazioni T_i $(i = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ del gruppo G. Faremo poi successivamente varie ipotesi sul gruppo G. Indicheremo con $T_i x$ le quantità trasformate delle x, mediante la T_i; e se $f(x)$ è una funzione delle x, indicheremo con $f(T_i x)$ il valore della f, quando al posto delle x si sostituiscano le $T_i x$. Porremo poi $x_k = \xi_k + i \eta_k$, dove ξ_k e η_k si considerano variabili reali, che noi spesso considereremo come coordinate cartesiane ortogonali in uno spazio euclideo S_{2n} a $2n$ dimensioni reali.

Indicheremo poi con $D_i(x)$ l'Iacobiano della trasformazione T_i; porremo $T_i x_k = T_i \xi_k + i\, T_i \eta_k$, dove indichiamo con $T_i \xi_k$, $T_i \eta_k$ rispettivamente la parte reale e la immaginaria delle $T_i x$. Indicheremo con A^0 la quantità immaginaria coniugata di una qualsiasi quantità A, e con Δ_i l'Iacobiano delle $T_i \xi$, $T_i \eta$ rispetto alle ξ, η. Si avrà $\Delta_i = D_i D_i^0 = (\mathrm{mod}\, D_i)^2$.

Indicheremo con $\theta(f, p, x)$ la serie (generalizzazione delle serie di Poincaré) definita dalle

$$\theta(f, x, p) = \sum_i f(T_i x)\, D_i^p(x) \tag{1}$$

dove f è una funzione delle x, che si supporrà uniforme, e quasi sempre addirittura razionale, e dove p è un intero positivo qualunque. Se noi consideriamo un'altra serie $\theta(\varphi, x, p)$, corrispondente a un'altra funzione φ delle x, e allo stesso valore dell'intero p, riconosciamo facilmente che la funzione $z(x)$ definita da

$$z(x) = \frac{\theta(f, x, p)}{\theta(\varphi, x, p)} \tag{2}$$

rimane formalmente invariata, se noi facciamo subire alle x una qualsiasi trasformazione T_i del gruppo G. Per dimostrare dunque l'esistenza di funzioni uniformi delle x, che rimangano invariate per il gruppo G, basterà dimostrare che in un intorno di un sistema generico di valori delle x la (1) converge assolutamente, e in ugual grado (*).

Ripetendo i ragionamenti usati da Poincaré nella dimostrazione dell'esistenza delle funzioni fuchsiane e Kleiniane, si trova che per dimostrare la convergenza delle (1), almeno per p sufficientemente grande, basta p. es. dimostrare che:

1.°) Il gruppo G è propriamente discontinuo in una regione S di S_{2n}.

2.°) Esiste in S una rete R di campi fondamentali per G, posta tutta a distanza finita, escluso al più un numero finito di campi fondamentali, che possono anche aver punti all'infinito. L'insieme dei punti di R, che sono singolari per f o sono equivalenti a un punto singolare per f, non formano un insieme denso in R.

3.°) In un intorno sufficientemente piccolo di un punto generico A, interno a R, il rapporto tra il massimo e il minimo valore assoluto di D_i (o di Δ_i) è compreso tra due costanti finite positive m, M, indipendenti da i.

Un primo metodo per studiare la convergenza della (1) è dunque quello di trovare i gruppi e le funzioni più generali, per cui sono soddisfatte le precedenti condizioni (1), (2), (3).

Un caso specialmente importante è quello in cui si possa trovare uno spazio Σ a $2n$ dimensioni, in cui le ξ, η siano variabili coordinate, e in cui sia definita una metrica rispetto alla quale il gruppo G si possa considerare come gruppo di movimenti (**). Affinchè la metrica sia *reale*, le ξ, η dovranno in generale soddisfare a certe condizioni (definite da disuguaglianze); cosicchè le ξ, η non potranno variare a piacere; e lo spazio Σ avrà in S_{2n} per immagine una certa regione Λ, i cui punti saranno in corrispondenza biunivoca coi punti di Σ, quando si considerino come corrispondenti punti di Λ e di Σ, che abbiano le stesse coordinate ξ, η.

(*) Bisognerebbe, è vero, dimostrare di più che si possono scegliere le f, φ e la costante p in guisa che la funzione z, definita da (2) non sia costante. Ma ciò si compie nei casi qui sotto studiati con grande facilità. (Cfr. i citati lavori di Picard sulle funzioni iperfuchsiane.)

(**) Per il significato della parola «metrica» cfr. Bianchi, *Lezioni di Geom. differenz.*, 2.ª ediz., Tom. I.

Noi diremo, dal nome di Poincaré, che la metrica vigente in Σ è una metrica P, se

1.°) La regione Λ è in S_{2n} a distanza finita (o tale si può rendere con una opportuna trasformazione sulle x).

2.°) La nostra metrica possiede almeno un *invariante I non assoluto,* che soddisfa alla seguente condizione. Per ogni costante positiva δ si può trovare una costante d, tale che i valori di I in due punti qualsiasi di Σ, la cui distanza geodetica è inferiore a δ, abbiano un rapporto minore, in valore assoluto, di d.

Con le parole « invariante di una metrica » intendo una funzione delle ξ, η tale che, se noi eseguiamo un movimento M nella metrica, essa resti moltiplicata per la potenza k^{esima} ($k =$ costante) dell'Iacobiano di M. Dico poi che l'invariante è assoluto, se l'intero k corrispondente è uguale a zero (*).

Un gruppo di movimenti in una metrica P sarà detto un gruppo P.

Io dico allora:

Per $p \geqq 2$, le serie (1) *convergono, se G è un gruppo P, e se un punto generico di Λ non è punto limite di punti singolari per la funzione f, oppure equivalenti, rispetto al gruppo G, a tali punti singolari.* Quest'ultima condizione è p. es. soddisfatta, se i punti singolari della f sono esterni a Λ. Osserviamo che potremo supporre che la regione Λ sia a distanza finita in S_{2n}, perchè, per ipotesi, se Λ non è a distanza finita in S_{2n}, tale la possiamo rendere con una trasformazione sulle x. Tale trasformazione porta il gruppo G in un gruppo simile: ma, per i nostri problemi, il sostituire un gruppo a un gruppo simile nulla toglie alla generalità del risultato. Dimostreremo ora che, assumendo in S_{2n} la regione Λ come regione S, sono soddisfatte le condizioni (1), (2), (3) enunciate più sopra.

La (1) è senza dubbio soddisfatta per un teorema dato nella mia Mem. cit. (A) (§ 6).

La regione Λ è invariante per il gruppo G, perchè G è un gruppo di movimenti di una metrica, e Λ è la regione, ove questa metrica è reale e regolare. Per i risultati della mia Mem. cit. (*Ann. di Matem., 1906*) il gruppo G ha dunque in Λ una rete R di campi fondamentali, che è quindi posta tutta a distanza finita nello spazio euclideo immagine S_{2n}. Anche la condizione (2)

(*) Se la metrica è definita da una forma differenziale quadratica, il determinante dell'elemento lineare è un invariante non assoluto.

è perciò soddisfatta. Basta dunque limitarci a dimostrare soddisfatta la condizione terza. Sia k il grado (non nullo per ipotesi) dell'invariante considerato I. Sia α un intorno di un punto generico A di Σ, e siano rispettivamente $\bar{\alpha}$, $\bar{A}$ l'intorno e il punto corrispondente per una trasformazione T_i di G. Il quadrato $\Delta = D D^0$ del modulo dell'Iacobiano D di T_i è per ipotesi uguale a $\sqrt[k]{\frac{I}{T_i I}}$. Se noi vogliamo trovare il valore di Δ in un punto di α, basterà che noi in questo radicale sostituiamo a I il valore che esso ha nel punto considerato, e a $T_i I$ il valore di I nel punto corrispondente di $\bar{\alpha}$. Sia ora δ la massima distanza geodetica di due punti di α; poichè nella nostra metrica α ed $\bar{\alpha}$ sono congrui, la massima distanza geodetica di due punti di $\bar{\alpha}$ sarà ancora uguale a δ.

Il rapporto dei valori di I in due punti di α sarà in valore assoluto inferiore a d; e altrettanto avverrà dei rapporti dei valori di I in due punti di $\bar{\alpha}$. Quindi il rapporto dei valori di Δ in due punti di α sarà minore in valore assoluto di $\sqrt[k]{d^2}$, che è una costante, indipendente dalla trasformazione T_i considerata. La condizione (3) è dunque anch'essa soddisfatta.

Il teorema testè dimostrato ci assicura della convergenza delle serie (1) per una vasta classe di gruppi di movimenti: l'importanza di questo teorema sta in ciò che tutti i casi finora noti, in cui le (1) convergono (eccetto il caso dei gruppi Kleiniani), e anche alcuni casi nuovi sono altrettanti casi particolari di esso. Ciò che risulta facilmente dai teoremi del seguente paragrafo.

Di alcune metriche P.

§ 3. Teor. I). *Le metriche* (a due dimensioni, a curvatura costante), *che ammettono come movimenti quelle trasformazioui*

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ costanti})$$

che trasformano in sè uno stesso cerchio reale C del piano π della variabile completa x, sono metriche P.

Come è ben noto dalla teoria delle superficie pseudosferiche, noi potremo supporre, senza diminuire la generalità, che l'elemento lineare della nostra metrica sia $4 \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2}$, se $x = \xi + i\eta$.

Come invariante I, sceglieremo la radice ottava del discriminante di questo elemento lineare; porremo cioè:

$$I = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}} \cdot$$

Se indichiamo con r la distanza geodetica del punto (ξ, η) dal punto $(0, 0)$, si ha

$$\xi^2 + \eta^2 = \operatorname{tangh}^2 \frac{r}{2} \qquad I = \sqrt{2} \cosh \frac{r}{2} \cdot$$

Siano ora A, B due punti, la cui distanza geodetica AB sia minore di δ, e le cui distanze geodetiche da O sieno rispettivamente r_1, r_2. Sarà chiaramente $\left| \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} \right| < \frac{\delta}{2} \cdot$ Il rapporto Q dei valori di I in A e in B sarà

$$\frac{\cosh \frac{r_1}{2}}{\cosh \frac{r_2}{2}} \cdot$$

Se $r_1 \geqq r_2$, avremo che

$$1 \leqq Q \leqq \frac{\cosh\left(\frac{r_2}{2} + \frac{\delta}{2}\right)}{\cosh \frac{r_2}{2}} = \cosh \frac{\delta}{2} + \operatorname{tangh} \frac{r_2}{2} \operatorname{senh} \frac{\delta}{2} <$$

$$< \cosh \frac{\delta}{2} + \operatorname{senh} \frac{\delta}{2} \cdot$$

Se poi $r_1 < r_2$, avremo naturalmente

$$1 > Q > \frac{1}{\cosh \frac{\delta}{2} + \operatorname{senh} \frac{\delta}{2}} \cdot$$

Esiste dunque una costante $d = \cosh \frac{\delta}{2} + \operatorname{senh} \frac{\delta}{2}$, a cui Q è in ogni caso inferiore in valore assoluto.

Osserviamo poi che, nel nostro caso, il piano π fa l'ufficio, che nel caso generale faceva lo spazio S_{2n} e che la regione A è nel caso attuale la regione interna al cerchio $C(\xi^2 + \eta^2 = 1)$ ed è quindi a distanza finita in π.

La metrica considerata è dunque una metrica P.

Teor. 2.° *Le metriche Hermitiane di tipo iperbolico* (*) *sono metriche P.* Le metriche Hermitiane reali sono definite dalle forme Hermitiane, riducibili al tipo $z_1 z_1^0 + \cdots + z_{n-1} z_{n-1}^0 \pm z_n z_n^0$. Il caso più interessante è quello in cui vale il segno inferiore, che noi abbiamo chiamato « di tipo iperbolico ». Supposto per fissare le idee che $n = 3$, e posto $\frac{z_1}{z_3} = x_1$, $\frac{z_2}{z_3} = x_2$, l'elemento lineare della nostra metrica è (**)

$$\frac{(1 - x_2 x_2^0)\, dx_1\, dx_1^0 + (1 - x_1 x_1^0)\, dx_2\, dx_2^0 + x_1 x_2^0\, dx_2\, dx_1^0 + x_2 x_1^0\, dx_1\, dx_2^0}{(1 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0)^2}.$$

Questa metrica è una metrica reale, come facilmente si vede (ponendo $x_k = \xi_k + i\,\eta_k$ $[k = 1, 2]$) nella regione A (a distanza finita) luogo dei punti interni all'ipersfera assoluto

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_2^2 + \eta_2^2 = 1.$$

I movimenti nella nostra metrica sono poi quelle trasformazioni lineari fratte sulle x, che si deducono dalle trasformazioni lineari intere sulle z, che trasformano in sè la nostra forma Hermitiana.

Si trova, come sopra, che si può porre

$$I = \frac{1}{\sqrt{1 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}.$$

(*) Le metriche Hermitiane furono da me date la prima volta in una Mem. dell'*Acc. Gioenia di Catania* (Ser. 4, Vol. 17) e più estesamente in una Nota dell'*Istituto Veneto di Scienze, ecc.* (1904, Tom. 69), che hanno rispettivamente per titolo: *Sulla teoria delle forme quadratiche, Hermitiane, ecc.* e *Sulle metriche definite da una forma Hermitiana*. Esse furono più tardi ritrovate dallo Study nel vol. 60 dei *Math. Ann.* Ad alcune, secondo me, ingiustificate obbiezioni rivolte dallo Study alla mia trattazione io risposi in una breve Nota pubblicata nel *Boll. dell'Acc. Gioenia.*

(**) In generale, per n qualunque, l'elemento lineare in discorso è del tipo:

$$E = \frac{1}{\left\{\sum_{r=1}^{n-1} x_r x_r^0 - 1\right\}^2} \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & \sqrt{-1} \\ dx_1 & dx_2 & \dots & dx_{n-1} & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} dx_1^0 & dx_2^0 & \dots & dx_{n-1}^0 & 0 \\ x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_{n-1}^0 & \sqrt{-1} \end{matrix} \right\|.$$

Posto poi $x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 = \text{tangh}^2 r$, si ha $I = \cosh r$; e la dimostrazione procede come nel precedente teorema.

§ 4. Se noi abbiamo più forme differenziali $E_1, E_2, \ldots, E_s$ dello stesso grado, e la E_i dipende dalle variabili $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_{n_i}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s;\ n_i \geqq 2)$ ed è affatto indipendente dalle $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(i-1)}, y^{(i+1)}, \ldots, y^{(s)}$, io dirò, con linguaggio analogo a quello già usato nei lavori citati, che la metrica definita dalla forma $E = \sum_i E_i$ è una metrica *mista,* somma delle metriche *parziali* definite dalle E_i. Una trasformazione Q sulle y, che sia prodotto di s trasformazioni $Q_i\,(i \leqq s)$, la i^{esima} delle quali è un movimento nella metrica E_i, sarà un movimento nella metrica E. Un gruppo G di tali movimenti Q sarà detto un gruppo *misto*, prodotto di più gruppi *parziali* G_i. Il gruppo G_i è quello generato dalle trasformazioni Q_i, corrispondenti alle trasformazioni Q di G.

Si ha il teorema:

Teor. III. *Una metrica, somma di più metriche parziali P, è una metrica P; e quindi il gruppo dei corrispondenti movimenti è un gruppo P.*

Siano $I_1, I_2, \ldots, I_s$ rispettivamente gli invarianti non assoluti, che si considerano per ognuna delle metriche $E_1, E_2, \ldots, E_s$. Ne siano $k_1, k_2, \ldots, k_s$ rispettivamente i gradi. Posto $k = \prod_i k_i$, avremo evidentemente che la quantità I, definita dalla

$$I = I_1^{\frac{k}{k_1}}\, I_2^{\frac{k}{k_2}} \ldots I_s^{\frac{k}{k_s}},$$

è evidentemente un invariante non assoluto di grado k nella metrica E.

Un punto di E è individuato dalle $\sum_i n_i$ coordinate $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(s)}$. Sia Σ lo spazio in cui vige la metrica E, e sia S_ν il solito spazio euclideo rappresentativo a $\nu = \sum_i n_i$ dimensioni, in cui le y sono coordinate cartesiane ortogonali. Così pure sia Σ_i uno spazio, in cui vige la metrica E_i, e sia $S_{n_i}^{(i)}$ uno spazio euclideo, in cui le $y^{(i)}$ sono coordinate cartesiane ortogonali. Per ipotesi Σ_i sarà rappresentato in una regione Λ_i di $S_{n_i}^{(i)}$, posta a distanza finita. Osserviamo ora che per dare un punto A di Σ basta darne le corrispondenti coordinate $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(s)}$; ma, date le $y^{(i)}$, resta individuato un punto A_i di Σ_i o di $S_{n_i}^{(i)}$, che noi potremo chiamare la proiezione di A su Σ_i o su $S_{n_i}^{(i)}$. Ne verrà tosto che, per dare un punto A di Σ o di S_ν, basta darne le proiezioni A_i sugli spazii parziali Σ_i o $S^{(i)}$. Ora Λ_i è in $S^{(i)}$ la regione immagine di Σ_i. Per ipotesi noi la potremo supporre a distanza finita. Quei punti di S_ν, la cui proiezione su ogni spazio $S^{(i)}$ è interna a Λ_i, $(i = 1, 2, \ldots, s)$ riempiranno dunque una regione Λ, a distanza finita, immagine di Σ.

Sia ora h il grado delle E_i; e siano A, B due punti di Σ, le cui proiezioni su Σ_i saranno da noi indicate con A_i, B_i. Sia r la distanza geodetica AB misurata in Σ, e sia r_i la distanza geodetica $A_i B_i$, misurata in Σ_i. Sarà evidentemente

$$r^h = \sum_i r_i^h .$$

Se dunque $r < \delta$, sarà a fortiori $r_i < \delta$. Ma, per ipotesi, il rapporto dei valori di I_i in A_i e in B_i è minore di una costante d_i, dipendente solo da δ. Quindi il rapporto dei valori di I in A e B è inferiore alla costante

$$d = d_1^{\frac{k}{k_1}} \, d_2^{\frac{k}{k_2}} \ldots \, d_s^{\frac{k}{k_s}}$$

la quale dipende soltanto da δ. Il nostro teorema è quindi dimostrato.

Una applicazione funzionale
(ai gruppi iperfuchsiani misti).

§ 5. I teor. 1.° e 2.° del § 3, ci danno esempi di metriche P: il teorema 3.° ci permette di trovare, date più metriche P, una nuova metrica P. Alle metriche, così determinate, noi applicheremo ora i teoremi del § 2.

Noi indicheremo con $x_t^{(i)}$ delle variabili complesse, con s un intero positivo, e con n_i degli interi positivi, maggiori di 1; e noi supporremo che i possa variare da 1 a s, e che t possa variare da 1 a $n_i - 1$. Porremo poi

$$x_t^{(i)} = \xi_t^{(i)} + \sqrt{-1}\,\eta_t^{(i)} \text{ (dove } \xi, \eta \text{ sono variabili reali).}$$

Indicando con a, b delle costanti, noi chiameremo gruppo *iperfuchsiano misto* (con locuzioni analoghe a quelle usate da Picard e da me nelle Memorie citate) un gruppo, le cui trasformazioni T sono del tipo seguente

$$x_k^{(i)\prime} = \frac{\sum_t a_{kt}^{(i)} x_t^{(i)} + a_s^{(i)}}{\sum_t b_t^{(i)} x_t^{(i)} + b^{(i)}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s;\ k,\ t = 1, 2, \ldots, n_i - 1)$$

e trasformano in sè stesso il sistema delle equazioni

$$x_1^{(i)} x_1^{(i)0} + \cdots + x_{n_i-1}^{(i)} x_{n_i-1}^{(i)0} - 1 = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, t).$$

Io dico che

Un gruppo G iperfuchsiano misto è un gruppo P.

Infatti ogni trasformazione T di G è prodotto di più trasformazioni parziali T_i $(i \leq s)$, la i^{esima} delle quali trasforma soltanto le $x^{(i)}$, e, considerata come una trasformazione sulle corrispondenti $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$, è un movimento in una metrica Hermitiana. La T_i genera dunque, al variare di T, un gruppo P (teor. 2.°, § 3). Per il teor. 3.° del § 3.°, anche il gruppo G dato è un gruppo P. La metrica *mista*, in cui G è un gruppo di movimenti, si dirà una metrica *Hermitiana mista.* Dai risultati precedenti possiamo così dedurre:

« *Se G è un gruppo iperfuchsiano misto qualunque, privo di trasformazioni infinitesime, esistono sempre delle funzioni uniformi, invarianti per G.*

Questo teorema comprende come caso particolare il teorema di Poincaré sulle funzioni Fuchsiane ($s = 1$, $n_1 = 2$), i teoremi di Picard ($s = 1$; $n_1 = 3$), e i teoremi di Hilbert-Blumenthal che si riferiscono a certi gruppi particolari, per cui $n_1 = n_2 = \cdots = n_s = 2$.

Le funzioni zeta-fuchsiane e zeta-Kleiniane (Cfr. §§ 7-8-9).

§ 6. Questo paragrafo, e i seguenti, sono dedicati allo studio del nostro problema fondamentale, quando il gruppo Γ non è più ridotto alla sola trasformazione identica. Eccetto però nell'ultimo paragrafo, noi supporremo che i gruppi G, Γ siano gruppi di trasformazioni lineari. Prima di tutto, supporrò che G sia un gruppo fuchsiano o Kleiniano in una sola variabile x. Il caso che il gruppo G sia un gruppo fuchsiano fu studiato da Poincaré nelle Mem. cit., in cui però non è dato in generale il teorema di esistenza per le funzioni z. Noi, servendoci dei risultati sulle equazioni integrali di Fredholm e di Hilbert, vedremo che con grande semplicità si può stabilire l'esistenza delle funzioni z, sia per un gruppo G fuchsiano, che per un gruppo G Kleiniano. Sia K un poligono fondamentale di G sul piano complesso π della variabile x: supporremo che esso abbia un numero finito di vertici. È facile vedere che il nostro problema (appunto come il problema dell'esistenza delle funzioni fuchsiane e Kleiniane) si riduce alla costruzione in K di una o più coppie di funzioni reali armoniche coniugate, i cui valori al contorno sono legati da certe relazioni, individuate dai gruppi G, Γ. E, come avviene in generale per i problemi al contorno, anche questo problema si riduce a risolvere una equazione integrale, cui potremmo applicare i metodi di FREDHOLM-HILBERT. La terza Memoria di HILBERT ci risparmia però lo studio diretto, perchè facilmente si vede che il nostro problema si può ridurre al *problema di inversione di* RIEMANN, risoluto esplicitamente da HILBERT nel lavoro citato.

Supponiamo per il momento che G sia un gruppo di genere zero: esisterà allora una funzione X uniforme della x, la quale in K riprende ogni suo valore una volta e una volta sola, cosicchè sarà stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti di K, e i punti del piano della X. Al passaggio della x da un punto di K a un punto equivalente di un altro campo fondamentale corrisponderanno nel piano della X dei giri attorno ad alcuni punti a_1, $a_2, \ldots$, a_h, immagini dei vertici di K. Se noi dunque consideriamo le funzioni cercate z come funzioni di X, si vede che il nostro problema diventa quello di costruire delle funzioni di X, le quali subiscono delle trasformazioni lineari prefissate, quando X gira attorno ai punti a. Il nostro problema è così senz'altro ricondotto al problema risoluto da HILBERT.

Per studiare ora il caso in cui il genere di G è maggiore di zero, potremmo p. es. cercare di estendere alle superficie Riemanniane (*) la risoluzione, che HILBERT diede del problema di inversione per il caso del piano. Ma è facile vedere che si può evitare lo studio diretto, riconducendo il nostro problema a quello testè trattato. È facile infatti riconoscere che, se $z_1, \ldots, z_m$ sono m funzioni su una data superficie Riemanniana T a r fogli, le quali subiscono un dato gruppo G di trasformazioni lineari, quando si faccia descrivere a un punto della superficie T un qualsiasi cammino chiuso (su T), noi possiamo subito dedurne un sistema di mr funzioni v di una sola variabile ξ, le quali subiscono un dato gruppo di trasformazioni lineari, quando la ξ descrive cammini chiusi nel suo piano. Il problema di costruire le z è così ridotto al problema di costruire le v.

(*) Nel caso che il genere di G sia maggiore di zero, si possono trovare due funzioni X, Y, invarianti per G e legate da una relazione algebrica definente una superficie Riemanniana T in guisa da avere una corrispondenza biunivoca tra i punti di K e i punti di T. Questa superficie T avrebbe, nel caso attuale, l'ufficio, che nel caso precedente aveva il piano di X.

Siano infatti ξ, η due variabili, legate da una relazione algebrica di grado r nella η, che definisca la nostra superficie T. Ad un punto generico A del piano di ξ corrisponderanno r punti sovrapposti sulla T: $A_1, A_2, \ldots, A_r$. E noi potremo segnare sul piano della ξ $r-1$ cammini chiusi $C_1, C_2, \ldots, C_{r-1}$, tali che, se A descrive uno di questi cammini, p. es. il cammino C_s $(s \leqq r-1)$, il punto A_1 corrispondente descrive su T un cammino chiuso γ_s, che lo porta nel punto A_{s+1}. A ogni altro cammino chiuso descritto da A corrisponde sulla superficie T un cammino, che porta il punto A_1 o in sè stesso, oppure in uno dei punti $A_2, A_3, \ldots, A_r$: un cammino cioè, che, se non è chiuso, si può decomporre nel prodotto di un cammino chiuso per uno dei cammini $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1}$.

Le $z_1, z_2, \ldots, z_m$, in un intorno di A_1, si possono considerare come funzioni della ξ: restano così definiti, in un intorno di A, m elementi di funzioni analitiche $v_1, v_2, \ldots, v_m$ Se noi li prolunghiamo lungo C_s $(s \leqq r-1)$, ritornando poi in A, otterremo nel punto A m nuovi elementi di funzioni analitiche, che indicheremo con $v_{sm+1}, v_{sm+2}, \ldots, v_{(s+1)m}$. Ogni altro cammino chiuso sul piano della ξ, o corrisponde a un cammino chiuso sulla T, oppure, per quanto abbiamo visto, è prodotto di uno dei cammini C_s per un cammino, a cui sulla T corrisponde un cammino chiuso. Poichè noi sappiamo come C_s trasforma le $v_1, v_2, \ldots, v_m$, e per ipotesi è dato il gruppo Γ delle trasformazioni prodotte sulle z dai cammini chiusi descritti sulla T, noi verremo a conoscere l'effetto, che ogni cammino chiuso sul piano della ξ produce sulle $v_1, v_2, \ldots, v_m$, e quindi anche su tutte le altre v $(v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_{mr})$. La determinazione delle funzioni z sulla superficie T è così ricondotta a determinare le rm funzioni v sul piano della ξ, ossia è ricondotto proprio al problema, che è stato risoluto da HILBERT.

LE FUNZIONI ZETAIPERELLITICHE E ZETAIPERFUCHSIANE.

§ 7. Questo paragrafo è dedicato alla risoluzione (per mezzo di sviluppi in serie, cfr. § 6) del nostro problema fondamentale, quando G è un gruppo iperfuchsiano puro o misto (*) (§ 5), e Γ è un gruppo di trasforma-

---

(*) Può essere interessante anche lo studio del caso, in cui G è un gruppo di movimenti euclidei (le metriche euclidee sono caso limite di metriche Hermitiane) o in particolare del zioni lineari, intere, omogenee. Esso costituisce un ampio sviluppo delle idee, svolte nella Nota preliminare (B) citata al § 1. Il metodo che seguiremo consiste nel generalizzare la serie, che Poincaré ha dato per il caso delle funzioni zetafuchsiane, e nel dimostrarne la convergenza. Indicheremo con H_1, $H_2, \ldots, H_m$ m funzioni delle x, con T_i una trasformazione generica di G, con τ_i la trasformazione corrispondente di Γ; di più, se $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ sono m quantità qualunque, indicheremo con $\tau_i \lambda_1, \ldots, \tau_i \lambda_m$ le loro trasformate mediante una trasformazione τ_i di Γ. Consideriamo le m serie

$$\xi_\mu = \sum_i \{ \tau_i^{-1} [H_\mu (T_i x)] \} D_i^p \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{5}$$

dove p è un intero, che per ora lasciamo arbitrario.

I quozienti z_μ delle serie (5) per una serie (1) risolvono formalmente il nostro problema, che è quindi ridotto a dimostrare la convergenza assoluta e uniforme, nell'intorno di un punto generico, della serie (5). Siccome per ipotesi G è un gruppo iperfuchsiano misto, esso si può considerare come gruppo di movimenti in uno spazio Σ. Noi indicheremo con O quel punto di Σ, le cui coordinate x sono tutte nulle, e con r la distanza geodetica da O a un punto generico A di Σ. Supporremo che le H_μ abbiano i loro punti singolari non densi nella regione, ove la metrica Σ è reale.

La dimostrazione, che Poincaré dà per la convergenza delle (5) nel caso

---

caso in cui G è un gruppo di traslazioni. Specialmente notevole, perchè intimamente connesso alla teoria delle serie θ, è il seguente caso particolare del nostro problema fondamentale: *Siano date n variabili x e $2n$ sistemi di periodi $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ tali che esistano funzioni uniformi y della x, $2n$ volte periodiche, che ammettano appunto i dati sistemi di periodi, e che non abbiano singolarità essenziali a distanza finita, le quali saranno perciò invarianti per un gruppo G di traslazioni. Sia Γ un gruppo di trasformazioni lineari intere omogenee su m variabili $z_1, z_2, \ldots, z_m$, e isomòrfo a G. Si costruiscano m funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_m$* (**zetaiperellittiche**) *uniformi delle x, le quali, quando le x subiscono una trasformazione di G, subiscono la trasformazione corrispondente di Γ.*

Per $n = 1$ il problema è già stato risoluto (Gfr. Schlesinger, *Handbuch der linearen Differentialgleichungen*, Bd. II, XVII Abschnitt, V Kapitel). La generalizzazione al caso di n qualunque è così facile ed ovvia, che mi pare inutile l'esporla. Si troverebbe ancora che il problema in discorso si riduce a determinare delle funzioni z, le quali, per le trasformazioni di G, o subiscono l'aumento di una costante additiva, o restano moltiplicate per un fattore costante. E, come le y sono esprimibili mediante serie θ, si troverebbe che queste funzioni z si possono esprimere mediante combinazioni lineari di funzioni θ, e di derivate logaritmiche di tali funzioni. A noi basterà ricordare che la risoluzione dell'attuale problema si compie, per mezzo di *trascendenti ben note*, e non porta quindi a nuove classi di funzioni.

dei gruppi fuchsiani (nel caso trattato da POINCARÉ) si generalizza immediatamente alle serie (5) per p abbastanza grande, appena si possa provare che

1.°) Esiste una costante α tale che, se il segmento di geodetica che congiunge A ad O incontra un numero n di campi fondamentali, è

$$n < \alpha r.$$

2.°) L'ipersfera V di centro O e di raggio R (nella nostra metrica) (vale a dire il luogo dei punti, la cui distanza da O è minore o uguale a R) ha un volume minore di $h e^{kR}$, dove h, k sono costanti positive opportune.

3.° Se T è un movimento nella nostra metrica, che porta il punto O nel punto A, e se la distanza geodetica OA è uguale a r, il valore assoluto dello Iacobiano di T in un intorno sufficientemente piccolo di O è minore di $\gamma e^{-\beta r}$, dove γ, β sono costanti positive (che non variano al variare di T).

Notiamo tosto che O si può considerare come un punto generico (perchè ogni punto si può portare in O, mediante un conveniente movimento).

Noi dimostreremo che, *se G è privo di trasformazioni infinitesime* (nel qual caso per i teoremi di (A) possiede certamente un campo fondamentale) *e se il suo poliedro fondamentale C non ha vertici a distanza infinita nella metrica vigente in Σ, allora le condizioni precedenti sono soddisfatte; e resta così dimostrata l'esistenza delle nostre funzioni z.*

Se invece il poliedro fondamentale di G avesse vertici a distanza infinita, le (5) non sarebbero più in generale convergenti. Bisognerebbe ammettere delle condizioni restrittive per Γ, cosicchè non ce ne occuperemo più oltre.

Il teorema precedente comprende come casi estremamente particolari quasi tutti i risultati di POINCARÉ *sulle funzioni zetafuchsiane, i teoremi da me dati in* (B); *e li generalizza ad ampie classi di gruppi G, in cui sono* p. es. *inclusi i gruppi iperfuchsiani di* PICARD, *i gruppi ipermodulari* di HILBERT-BLUMENTHAL, ecc.

La condizione (1) si dimostra facilmente (*). Infatti, poichè un poliedro fondamentale C è tutto a distanza finita in Σ, e poichè in una regione finita (nella metrica Σ) può evidentemente penetrare soltanto un numero finito di poliedri fondamentali (che sono, in detta metrica, tutti congrui tra loro), un

---

(*) Cfr. SCHLESINGER, *Theorie der lin. D.*, B. 2, II Theil, S. 108, 351.

qualsiasi spigolo di C (*) a $2n-2$, o a $2n-3,\ldots$ dimensioni può essere comune soltanto a un numero finito di campi fondamentali. Si possono quindi ripetere quasi parola per parola i ragionamenti, che si fanno per il caso dei gruppi fuchsiani.

Studiamo ora la condizione 2.ª). Poichè G è iperfuchsiano misto, le n variabili x si potranno dividere in più sistemi parziali (§§ 4-5)

$$x_1^{(i)}\ldots x_{n_i-1}^{(i)}\ (i=1,\ 2,\ldots,\ s;\ \sum_i (n_i-1)=n)\ (^{**});$$

la metrica Σ è una metrica mista, il cui elemento lineare è (§§ 3, 4)

$$E=\sum_{i=1}^{s} E_i,\quad \text{dove}\quad E_i=$$

$$=\frac{1}{\left\{\sum_{t=1}^{n_i-1}[x_t^{(i)}x_t^{(i)0}]-1\right\}^2}\cdot\left\|\begin{matrix} x_1^{(i)} & x_2^{(i)}\ldots & x_{n-1}^{(i)} & \sqrt{-1}\\ d\,x_1^{(i)} & d\,x_2^{(i)}\ldots & d\,x_{n-1}^{(i)} & 0\end{matrix}\right\|\cdot$$

$$\cdot\left\|\begin{matrix} d\,x_1^{(i)0}\ldots & d\,x_{n-1}^{(i)0} & 0\\ x_1^{(i)0}\ldots & x_{n-1}^{(i)0} & \sqrt{-1}\end{matrix}\right\|.$$

Il discriminante I di E è dato da:

$$I=\lambda\prod_{i=1}^{s} I_i,\quad \text{dove}\quad I_i=\frac{1}{\left[\sum_{t=1}^{n_i-1} x_t^{(i)}x_t^{(i)}-1\right]^{2r_i}}$$

e λ è un fattore numerico. Il volume della ipersfera V è uguale all'integrale di $\sqrt{I}$ esteso alla nostra ipersfera. Usando le locuzioni del § 4, riconosciamo tosto che l'ipersfera V avrà sugli s spazii parziali Σ_i per proiezioni delle ipersfere V_i, di raggio R nella metrica esistente in Σ_i; ed è facile riconoscere che il volume v di V è minore del prodotto dei volumi v_i delle ipersfere V_i. Il volume di V_i è uguale, a meno di un fattore numerico, all'integrale di $\sqrt{I_i}$, esteso all'ipersfera V_i. Posto $x_t^{(i)}=\xi_t^{(i)}+\sqrt{-1}\,\eta_t^{(i)}$, le ξ, η così definite si possono assumere come coordinate cartesiane ortogonali in uno spazio eu-

(*) Se le variabili x sono in numero di n, Σ è a $2n$ dimensioni: e gli spigoli di C (intersezione di due o più faccie di C) sono a una, o a due,... o a $2n-2$ dimensioni.

(**) Se il gruppo fosse iperfuchsiano non misto (puro), sarebbe $s=1$.

clideo $S^{(i)}$, immagine di Σ_i; la ipersfera V_i di Σ_i avrà in $S^{(i)}$ per immagine una ipersfera W_i; e, se ρ indica i raggi vettori in $S^{(i)}$, cioè la distanza euclidea da un punto generico di $S^{(i)}$ all'origine O_i, si ha

$$\sqrt{I_i} = \frac{1}{(1-\rho^2)^{n_i}}.$$

Il volume v_i è dato evidentemente, a meno di un fattore numerico, dall'integrale di $\sqrt{I_i}$ esteso a tutta la regione racchiusa da W_i: integrale, che noi indicheremo con

$$\int_{W_i} \sqrt{I_i}\, d\tau_i \quad \text{dove} \quad d\tau_i = d\xi_1^{(i)} \ldots d\xi_{n_i-1}^{(i)}\, d\eta_1^{(i)} \ldots d\eta_{n_i-1}^{(i)}.$$

Per calcolare questo integrale multiplo, useremo in $S^{(i)}$ coordinate polari; e troveremo allora che questo integrale è uguale all'integrale:

$$\int \sqrt{I_i}\, \rho^{2n_i-3}\, d\rho = \int \frac{\rho^{2n_i-3}}{(1-\rho^2)^{n_i}}\, d\rho$$

esteso a un raggio dell'ipersfera W_i, e moltiplicato per l'area di una ipersfera di $S^{(i)}$ di raggio euclideo uguale a 1. Indicando con μ_i un fattore numerico, troviamo dunque

$$v_i = \mu_i \int \frac{\rho^{2n_i-3}}{(1-\rho^2)^{n_i}}\, d\rho < \mu_i \int \frac{\rho^{2n_i-3}}{(1-\rho)^{n_i}}\, d\rho.$$

Ora lo spazio Σ_i è rappresentato in quella regione di $S^{(i)}$, che è interna all'ipersfera di raggio euclideo 1, e di centro O_i; quindi $\rho < 1$, e

$$v_i < \mu_i \int \frac{d\rho}{(1-\rho)^{n_i}} = \frac{\mu_i}{n_i - 1}\left[\frac{1}{(1-r_i)^{n_i-1}} - 1\right]$$

dove con r_i indico il raggio euclideo di W_i. Troviamo ora che relazione passa tra il raggio non euclideo R di V_i e il raggio euclideo r_i di W_i. Evidentemente $R = \int \sqrt{E_i}\, d\rho$, esteso ad un raggio r_i di W_i, p. es. al raggio, definito dalle $\eta_1^{(i)} = x_2^{(i)} = \cdots = x_{n_i-1}^{(i)} = 0$, ossia

$$R = \int_0^{r_i} \frac{d\xi}{1-\xi^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+r_i}{1-r_i}, \quad \text{donde} \quad r_i = \frac{e^R - e^{-R}}{e^R + e^{-R}}.$$

Indicando con ν_i una costante, si trova infine

$$v_i < \frac{\mu_i}{n_i - 1}\left[\frac{1}{2^{n_i-1}}(e^{2R}+1)^{n_i-1} - 1\right] < \nu_i\, e^{2(n_i-1)R}.$$

Perciò v (che è minore del prodotto dei v_i) è minore di

$$h\, e^{kR}$$

se $h = \prod_i \nu_i$, $k = 2\sum_i (n_i - 1) = 2n$. La 2.ª condizione si trova quindi soddisfatta.

Studiamo ora la 3.ª condizione. Lo Iacobiano $\Delta = D D^0$ di una trasformazione, che porta un punto C in un punto B, è uguale nel punto C (cfr. § 2) alla radice quadrata del quoziente $\frac{I(C)}{I(B)}$ dei valori che I ha nei punti C, B. Ora, se C resta in un intorno del punto O, la quantità $I(C)$ resta inferiore a una costante finita μ dipendente soltanto dall'intorno scelto. Quindi

$$\Delta < \mu \sqrt{\frac{1}{I(B)}}\,.$$

Indicando con $B_1 \ldots B_r$ le proiezioni di B sugli spazii parziali S_i, si trova:

$$\Delta < \mu \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \prod_i \frac{1}{\sqrt{I_i(B_i)}}\,.$$

Indichiamo con $\xi_t^{(i)}$, $\eta_t^{(i)}$ le coordinate di B_i in $S^{(i)}$, con r_i la distanza *euclidea* da B_i a O_i, e con δ_i la distanza geodetica corrispondente in Σ_i. Se ε è la massima distanza geodetica di due punti dell'intorno scelto del punto O, ε sarà pure la massima distanza geodetica di due punti dell'intorno trasformato. In particolare la distanza da B_i al punto trasformato di O_i è minore di ε. Se quindi θ_i è la distanza geodetica da O_i al suo punto trasformato, sarà $\delta_i > \theta_i - \varepsilon$. Ora

$$\sqrt{I_i(B_i)} = \frac{1}{\left[-\sum_{t=1}^{n_i-1}\left(\xi_t^{(i)2} + \eta_t^{(i)2}\right) + 1\right]^{n_i}} = \frac{1}{(1 - r_i^2)^{n_i}}\,.$$

Per la relazione trovata sopra tra la distanza euclidea $O_i B_i$ da O_i a un punto B_i di $S^{(i)}$, e la distanza corrispondente in Σ_i, abbiamo:

$$r_i = \frac{e^{\delta_i} - e^{-\delta_i}}{e^{\delta_i} + e^{-\delta_i}}$$

e quindi (indicando con λ_i, L_i costanti numeriche)

$$\frac{1}{\sqrt{I_i(B_i)}} = \lambda_i \left(e^{\delta_i} + e^{-\delta_i}\right)^{-2n_i} < L_i\, e^{-2n_i\delta_i} < L_i\, e^{+2n_i\varepsilon}\, e^{-2n_i\theta_i}.$$

Poichè e^{ε} è una costante finita, dipendente solo dall'intorno scelto, troviamo infine

$$\Delta < \gamma\, e^{-2\sum n_i\theta_i}$$

dove γ è una costante finita, dipendente dall'intorno scelto. Indichiamo ora con r la distanza geodetica nello spazio ambiente Σ dal punto O al suo trasformato, sarà $r = \sum_i \theta_i^2$ e quindi

$$\Sigma \quad \theta_i > r$$

$$\Sigma\, n_i\, \theta_i > \beta\, r$$

dove β è una costante positiva non maggiore di alcuna delle n_i. Si ha quindi infine

$$|D| < \gamma\, e^{-\beta r}.$$

La 3.ª) e ultima condizione si trova quindi anch'essa soddisfatta.

§ 8. La precedente dimostrazione continua a valere, anche se il campo fondamentale di G ha vertici a distanza (non euclidea) infinita, in alcuni casi: p. es. nel caso che il gruppo Γ sia un gruppo ridotto alla sola trasformazione identica. Otteniamo così *una nuova dimostrazione dell'esistenza di funzioni invarianti per un gruppo iperfuchsiano misto;* dalla quale, ripetendo considerazioni ben note dovute a Poincaré, si potrebbe dedurre che *tali funzioni variano con continuità al variare continuo del gruppo,* ecc.

§ 9. Le funzioni testè determinate soddisfano a interessanti sistemi di equazioni differenziali. Io me ne occuperò qui soltanto in un caso particolare, specialmente notevole: che sia cioè $r = 1$, ossia che G sia un gruppo iperfuchsiano non misto. Supporrò per semplicità che sia $n = n_1 - 1 = 2$, ossia che G sia un gruppo iperfuchsiano in due variabili x, y; e riporterò quasi letteralmente ciò che dissi già nella mia Nota (B) citata.

Come dimostrò Picard in un caso particolare (Mem. cit.), tra le funzioni invarianti per G si possono scegliere in infiniti modi due funzioni u, v, tali che ogni altra funzione iperfuchsiana, invariante per G, è funzione algebrica di u, v. Siano $z_1 \ldots z_p$ p funzioni uniformi delle x, y, le quali subiscono le trasformazioni di un certo gruppo lineare Γ, quando le x, y subiscono le trasformazioni di G: noi le sappiamo costruire p. es. nel caso che G non abbia vertici a distanza infinita. Supponiamo

$$p = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

dove k è un intero positivo. Consideriamo le z come funzioni di u, v. È ben chiaro che noi potremo determinare delle funzioni a_{rstd} delle x, y, tali che sia:

$$\frac{\partial^k z_i}{\partial u^r \partial v^s} = \sum_{t,d} a_{rstd} \frac{\partial^{t+d} z_i}{\partial u^t \partial v^d} \qquad (0 \leq t + d < k)$$

dove r, s sono due interi positivi o nullli qualunque, la cui somma è k, e t, d sono due interi positivi o nulli, la cui somma è minore di k.

Infatti, per ogni coppia di valori r, s, otteniamo, ponendo per i successivamente i suoi valori $i = 1, 2, \ldots, p$, tante equazioni nelle $a_{rs,dt}$, quante sono le incognite $a_{rs,td}$ stesse. Risolvendo queste equazioni rispetto alle a, otteniamo le a date sotto forma di quoziente di due determinanti.

Ognuno di questi determinanti è formato di p righe: la i^{esima} delle quali contiene termini, che sono o la z_i o le sue derivate.

Se noi facciamo sulle x, y una trasformazione di G, le u, v non mutano, le z_i subiscono una trasformazione lineare. I precedenti determinanti restano moltiplicati per uno stesso fattore; e quindi le a restano inalterate. Le a, considerate come funzioni delle u, v, sono dunque funzioni algebriche delle u, v.

Il precedente sistema di equazioni lineari, è dunque *un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, a coefficienti algebrici, il cui integrale generale dipende da un numero finito di costanti arbitrarie, e che noi possiamo dire di sapere completamente integrare* (nel senso moderno di tale parola). *Noi sappiamo infatti esprimere tanto le variabili u, v, quanto le funzioni incognite z mediante funzioni analitiche uniformi iperfuchsiane e zetaiperfuchsiane di due variabili indipendenti ausiliarie x, y.*

Resta posta la questione se ogni sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti algebrici, il cui integrale generale dipende da un numero finito di costanti arbitrarii si possa integrare in tal modo: questione analoga alla questione tanto studiata dell'integrazione delle equazioni lineari alle derivate ordinarie mediante funzioni fuchsiane e zetafuchsiane.

Le funzioni Cremoniane.

§ 10. Le funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_m$ di n variabili x, che si ottengono risolvendo (se possibile) il problema fondamentale, quando G e Γ sono gruppi di trasformazioni birazionali, si diranno funzioni *cremoniane.* Le serie (1) del § 2 e (se Γ è composto di operazioni distributive) le serie (5) del § 7 conservano le loro proprietà formali. Ardua impresa è però lo studiarne la convergenza.

Noi ci occuperemo, con altri metodi, del solo caso che G e Γ siano gruppi ciclici, siano cioè generati dalle potenze di una trasformazione birazionale rispettivamente nelle x o nelle z. Poincaré (nella Mem. citata con (P_0) al § 1) ha studiato due casi particolari di questo problema:

1.°) $n = 1$: G è il gruppo ciclico generato dalla trasformazione $x' = p\,x$. Il gruppo Γ è generato da una trasformazione τ, definita dalle

$$z'_i = R_i(z_1, z_2, \ldots, z_m),$$

dove le R sono funzioni razionali. Poincaré ha cominciato anzi dal caso che la τ sia soltanto una trasformazione razionale e non birazionale, determinando così delle funzioni z_i, che soddisfano alle $z_i(p\,x) = R_i[z_1(x), z_2(x), \ldots, z_m(x)]$. Egli suppose $R_i = 0$ per $z_1 = \cdots = z_m = 0$, e prefisse che le z_i si annullassero per $x = 0$. Trovò (col metodo delle funzioni maggioranti) che il problema era risolubile, se

α) $|p| > 1$.

β) Posto $\left(\frac{\partial R_i}{\partial z_k}\right)_{z_1=z_2=\cdots=z_m=0} = b_{ik}$, $\varepsilon_{ii} = 1$, $\varepsilon_{ik} = 0$ per $i \neq k$, $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$ il determinante $D(\rho) = |\, b_{ik} - \varepsilon_{ik}\,\rho \,|$ è nullo per $\rho = p$, e differente da zero per $\rho = p^k$, se k è un qualsiasi intero maggiore di 1.

2.ª) Il secondo tipo di funzioni cremoniane determinato da Poincaré si deduce dal precedente: noi ne parleremo più avanti, dimostrando che i risultati di Poincaré valgono anche in casi più vasti da quelli da lui trattati.

Il Picard ha pure (col metodo delle approssimazioni successive) risoluto il primo dei due problemi precedenti, senza imporre alle funzioni cercate di annullarsi per $x=0$; egli così potè far a meno d'imporre alle R_i le condizioni restrittive imposte da Poincaré. Le funzioni ottenute da Picard esistono ancora (se Γ è una trasformazione birazionale) in tutto il piano della variabile complessa x; ma hanno per $x=0$ una singolarità essenziale.

Le funzioni di Poincaré e di Picard *non esauriscono* (*) *però il campo delle funzioni soddisfacenti alle* $z'_i = R_i\, z_i(p\,x) = R_i(z_1, \ldots, z_m)$. La determinazione di *tutte* queste funzioni è un problema non ancora risoluto.

§ 11. I metodi e i risultati di Poincaré si estendono con la massima facilità al caso di n qualunque, quando G è un gruppo ciclico di trasformazioni lineari. Se p. es. G è generato dalla: $x'_i = p_i\, x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, l'esistenza delle funzioni z si dimostra nel caso che $|p_i| > 1$, che

$$D(p_1) = D(p_2) = \cdots = D(p_n) = 0,$$

mentre $D(p_1^{h_1} p_2^{h_2} \ldots p_n^{h_n}) \neq 0$, quando $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sono interi qualsiasi nulli o positivi, soddisfacenti alla $h_1 + h_2 + \cdots + h_n > 1$. Se $n = m$, e lo Iacobiano $\dfrac{d(z_1 \ldots z_n)}{d(x_1 \ldots x_n)}$ non è identicamente nullo, potremo esprimere le x in funzione delle z. Con le stesse considerazioni svolte nella seconda parte della citata Memoria di Poincaré si dimostra che le x sono funzioni uniformi delle z, le quali esistono in una regione Λ dello spazio, in cui le z sono variabili coordinate. Questa regione Λ è il luogo dei punti A tali che l'aggregato di punti,

(*) Supponiamo infatti soltanto che l'equazione $D(\varrho) = 0$ abbia una radice h tale che $|h| > 1$ e che $D(h^k) \neq 0$, se k è un qualsiasi intero maggiore di 1. Noi potremo costruire col metodo di Poincaré delle funzioni uniformi z di una variabile X soddisfacente alle $z_i(h\,X) = R_i[z_1(X), \ldots, z_m(X)]$. Se l'equazione $D(\varrho) = 0$ non soddisfa alle precedenti condizioni, dovremo usare del metodo di Picard. Costruiamo ora una funzione uniforme X della variabile x tale che $X(p\,x) = h\,X(x)$. Potremo p. es. assumere come funzione X una funzione doppiamente periodica di $\log x$, coi periodi $2\pi i$, $\log p$, e coi moltiplicatori 1, h. Le z, considerate come funzioni della x, sono funzioni uniformi soddisfacenti alle

$$z_i(p\,x) = R_i(z_1(x), \ldots, z_m(x)),$$

le quali sono distinte dalle funzioni, soddisfacenti a queste condizioni, che si possono ottenere col metodo di Poincaré o con quello di Picard.

formato dal punto A, e dai punti trasformati di A mediante le τ^{-1}, τ^{-2}, τ^{-3},... ha il punto $z_1 = 0$, $z_2 = 0, \ldots, z_n = 0$ come unico punto limite. E le funzioni x così determinate delle variabili z soddisfano alle

$$x_i\left[R_1(z_1 \ldots z_n),\ R_2(z_1 \ldots z_n), \ldots, R_n(z_1, \ldots, z_n)\right] = p_i\, x_i(z_1, \ldots, z_n).$$

La loro esistenza è dimostrata, appena le p_i soddisfino alle condizioni sopra esposte.

Sia ora T un'altra trasformazione birazionale su m variabili Z_1, $Z_2, \ldots,$ Z_m, definita da equazioni

$$Z'_i = \rho_i(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m).$$

Poniamo $\left(\dfrac{\partial \rho_i}{\partial Z_k}\right)_{Z_1 = \ldots = Z_m = 0} = c_{ik}$, $\Delta(\rho) = |\, c_{ik} - \varepsilon_{ik}\, \rho\,|$. Siano π_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ delle costanti soddisfacenti alle $|\pi_i| > 1$, $\Delta(\pi_i) = 0$, $\Delta(\pi_1^{h_1} \pi_2^{h_2} \ldots \pi_n^{h_n}) \neq 0$, se $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sono interi qualsiasi, positivi o nulli, la cui somma è maggiore di 1. Esistono allora, come dicemmo, delle funzioni Z uniformi di n variabili $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ soddisfacenti alle:

$$Z_i(\pi_1 \xi_1, \pi_2 \xi_2, \ldots, \pi_n \xi_n) = \rho_i\left[Z_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, Z_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\right].$$

Consideriamo ora delle funzioni $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ doppiamente periodiche di seconda categoria delle variabili $\log x_1, \ldots, \log x_n$ coi periodi $2\pi i$, $\log p_i$, e i moltiplicatori 1, h_i. Le ξ saranno funzioni uniformi delle x. D'altra parte le Z e le x sono funzioni uniformi rispettivamente delle ξ e delle z.

Le $Z_1 \ldots Z_m$, considerate come funzioni delle $z_1, \ldots, z_m$, sono dunque funzioni uniformi delle z, le quali (quando le z subiscono una trasformazione del gruppo ciclico generato da τ) subiscono la trasformazione corrispondente del gruppo ciclico generato da T.

Esse risolvono quindi, nelle nostre ipotesi, il problema fondamentale, quando G e Γ sono gruppi ciclici di trasformazioni birazionali.

PARTE SECONDA

Sulla teoria delle trasformazioni delle funzioni automorfe di una e due variabili indipendenti.

§ 1. Se noi abbiamo una funzione ellittica z di una variabile x, allora tra $z(x)$ e $z(x')$, dove

$$x' = x + a \qquad (a = \text{costante qualunque}) \tag{1}$$

passa una relazione algebrica. *Le* (1), notiamolo, *generano un gruppo di* Lie. Sia data una funzione fuchsiana o Kleiniana $z(x)$, invariante per un gruppo G propriamente discontinuo di trasformazioni lineari sulla variabile x. Per generalizzare la proprietà precedente delle funzioni ellittiche ci si può proporre con Poincaré (*Journ. de Mathématiques*, 1887) di trovare tutte le trasformazioni T definite da un'equazione:

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ costanti}) \tag{2}$$

tali che $z(x)$ e $z(x')$ sieno legati da una relazione algebrica. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè questa proprietà sia goduta da una trasformazione T, è che i gruppi simili G, $T^{-1}\,G\,T$ abbiano un sottogruppo comune di indice finito* (Cfr. Poincaré, loc. cit.).

Come è ben noto, a ogni gruppo Γ di trasformazioni proiettive non infinitesime, che trasformano in sè stesse una forma F quadrica ternaria non degenere, e indefinita, corrisponde un gruppo fuchsiano G propriamente discontinuo su una variabile x. Poincaré ha dimostrato, che se F è a coefficienti intieri, e Γ ne è il gruppo aritmetico riproduttore, allora G è sottogruppo di un gruppo G' di trasformazioni lineari, che contiene trasformazioni infinitesime (e che è perciò chiamato da Poincaré gruppo continuo: noi non adotteremo questa denominazione, per non fare confusione coi gruppi di Lie). Ogni trasformazione T di G' gode, rispetto al gruppo G, della proprietà sopra citata.

Le funzioni fuchsiane corrispondenti al gruppo G godono di infiniti teoremi di trasformazione: ogni trasformazione del gruppo G' (*il quale contiene trasformazioni infinitesime*), individua uno di questi teoremi.

§ 2. Ora la prima domanda, che si presenta in questo ordine di studii, è la seguente:

Esistono delle funzioni fuchsiane z, tali che esista un gruppo G' continuo di Lie *di trasformazioni* (2), *tale che, se T è una trasformazione di G' esiste una relazione algebrica tra $z(x)$ e $z(Tx)$?*

(Con Tx indico al solito la quantità trasformata di x mediante la T).

Ogni trasformazione T di G' dovrebbe in tal caso trasformare G in un altro gruppo G'', che con G ha comune un sottogruppo $G^{(1)}$ di indice finito K. Il numero K è un intero positivo; e, mentre T varia con continuità tra le trasformazioni di G', il numero K dovrebbe variare con continuità: e, poichè ciò non è possibile, K resterà costante, almeno fino a che T non diventa uguale a qualche trasformazione singolare del gruppo G.

Osserviamo ora che un campo fondamentale di un gruppo $G^{(1)}$, che sia contenuto in G come sottogruppo di indice finito K, si può ottenere, unendo in modo conveniente un campo fondamentale P del gruppo G con altri $K-1$ campi fondamentali dello stesso gruppo, in guisa che questi K campi formino insieme una regione connessa. Da ciò si deduce che l'insieme dei *sottogruppi di indice finito K di un gruppo G propriamente discontinuo è un insieme discontinuo.* (Anzi questi sottogruppi sono certamente in numero finito, se P ha un numero finito di lati.)

Al variare continuo di T in G', il sottogruppo $G^{(1)}$ comune a G ed a G'' non potrà dunque variare con continuità; e quindi sarà sempre uno stesso sottogruppo $G^{(1)}$ di G, almeno fino a che T non coincida con qualche trasformazione singolare di G. Dunque, almeno entro certi limiti, le trasformazioni di G dovranno trasformare $G^{(1)}$ in sè stesso. Si potrebbe, è vero, supporre che le trasformazioni T di G' trasformassero un altro sottogruppo $G^{(2)}$ (di indice finito K) del gruppo G nel sottogruppo $G^{(1)}$. Ma, al solito, noi riconosceremmo che $G^{(2)}$ non può variare con continuità: e quindi $G^{(2)}$ è sempre uno stesso sottogruppo di G, indipendente dalla trasformazione considerata T di G'. E, poichè quando $T=1$, $G^{(2)}$ coincide evidentemente con $G^{(1)}$, la nostra supposizione è dimostrata assurda: vale a dire è dimostrato che $G^{(2)}$ e $G^{(1)}$ coincidono, ossia che le trasformazioni T di G' trasformano proprio $G^{(1)}$ in sè stesso.

Una trasformazione T di G' porterà ogni trasformazione τ di $G^{(1)}$ in un'altra trasformazione di $G^{(1)}$; ma $G^{(1)}$ è un gruppo discontinuo; quindi τ' non può variare con continuità, e resta perciò invariata al variare continuo di T. Con ragionamenti analoghi ai precedenti, se ne deduce che ogni trasformazione T di G' trasforma in sè stessa ogni trasformazione τ di $G^{(1)}$. Ossia:

Ogni trasformazione T del gruppo continuo G' è permutabile con ogni trasformazione τ del gruppo discontinuo $G^{(1)}$.

In particolare un punto lasciato fisso da una trasformazione τ di $G^{(1)}$ è portato da ogni trasformazione T di G' in un altro punto lasciato fisso da τ. Quindi: *Il sistema Σ, formato dai punti che sono lasciati fissi da una qualche trasformazione di $G^{(1)}$, è un sistema di punti invariante per G'.* Poichè il gruppo $G^{(1)}$ è discontinuo propriamente, le trasformazioni di $G^{(1)}$ e quindi anche i punti di Σ formano un'infinità numerabile. Se A è un punto di Σ, io dico che tutte le trasformazioni di G lasciano fisso il punto A. Infatti, se ciò non fosse, dal punto A uscirebbe almeno una traiettoria di un gruppo a un parametro, coincidente con G', o contenuto in G' come sottogruppo. I punti di questa traiettoria sono punti, trasformati di un punto di Σ mediante una trasformazione di G'; e, siccome Σ è invariante per G', ogni punto di questa traiettoria dovrebbe appartenere a Σ: ciò, che è assurdo, perchè i punti di questa traiettoria formano un insieme, che ha la potenza del continuo, e che quindi non può essere contenuto in un insieme numerabile Σ.

Dunque: *Ogni punto del sistema Σ deve essere lasciato fisso da ogni trasformazione di G'.* Ma, poichè una trasformazione (2), che lasci fissi tre punti distinti, non può essere che l'identità, e poichè è naturalmente escluso che G' si riduca alla sola trasformazione identica, il sistema Σ di punti sarà formato o di un punto solo A, o di due soli punti distinti A, B. Con una trasformazione lineare sulle x, possiamo supporre nel primo caso che il punto A sia il punto $x = \infty$, e nel secondo che i punti A, B siano rispettivamente i punti $x = \infty$, e $x = 0$.

Studiamo dapprima il secondo caso. Il gruppo $G^{(1)}$ lascia fissi ognuno dei punti A, B, oppure contiene un sottogruppo $G_1^{(1)}$ di indice 2, che lascia fissi ognuno dei punti A, B. Una trasformazione di $G^{(1)}$, che non appartenesse a $G_1^{(1)}$, permuterebbe i punti $x = 0$, $x = \infty$ e quindi i punti lasciati fissi da essa sarebbero distinti dai punti $x = 0$, $x = \infty$. Ciò che è assurdo, perchè un punto lasciato fisso da una trasformazione di $G^{(1)}$ non può essere distinto dai punti A, B. Dunque $G^{(1)}$ coincide con $G_1^{(1)}$, ossia le trasformazioni di $G^{(1)}$ lasciano fissi ciascuno dei punti A, B, ossia sono del tipo $x' = hx$.

Le funzioni z automorfe invarianti per G, sono anche invarianti per $G^{(1)}$, e di più, essendo per definizione funzioni uniformi della x, sono anche funzioni uniformi di $y = \log x$, invarianti per le trasformazioni $y' = y + \log h$, indotte da $G^{(1)}$ sulla y. Di più evidentemente le z, considerate come funzioni di y, sono anche invarianti per le trasformazioni $y' = y + 2\pi i$ (m = numero intero), a cui sulla x corrisponde la trasformazione identica.

Consideriamo ora il primo caso, in cui il sistema Σ si riduce al solo punto $x = \infty$. In tal caso tutte le trasformazioni di $G^{(1)}$ sono trasformazioni paraboliche, lasciànti fisso il punto $x = \infty$, ossia sono trasformazioni del tipo

$$x' = x + a \qquad (a = \text{costante}).$$

In ambedue i casi dunque le funzioni z considerate come funzioni di x, o di $\log x$, sono funzioni periodiche, che quindi ammettono o un periodo, o al più due periodi distinti.

Nel caso che Σ contenga il solo punto $x = \infty$, le trasformazioni di G', dovendo essere permutabili con quelle di $G^{(1)}$, dovranno essere pure del tipo

$$x' = x + \alpha \qquad (\alpha = \text{cost.}).$$

Nel caso che Σ contenga i due punti $x = 0$, $x = \infty$, le trasformazioni di G', dovendo lasciare fissi ciascuno di questi due punti, saranno del tipo

$$x' = k\,x \; (k = \text{cost.}) \quad \text{ossia} \quad y' = y + \beta \; (\beta = \text{cost.}).$$

Ed è ben evidente in ambedue i casi che il gruppo G' trasforma $G^{(1)}$ in sè stesso.

Dunque:

Se una funzione automorfa z di una variabile x è tale che per ogni trasformazione T di un gruppo continuo lineare esista una relazione algebrica tra $z(x)$ e $z(Tx)$, allora la z, considerata come funzione di x, o di $y = \log x$, è una funzione una o due volte periodica: tutte queste funzioni z si riducono quindi in sostanza alle funzioni esponenziali e alle funzioni ellittiche.

Escluse le funzioni esponenziali ed ellittiche, le trasformazioni T in discorso possono *al massimo* formare un gruppo contenente trasformazioni infinitesime: ciò che avviene appunto per le funzioni automorfe, citate più sopra, definite dai gruppi corrispondenti ai gruppi aritmetici riproduttori delle forme aritmetiche ternarie indefinite.

§ 3. Passiamo ora alle funzioni automorfe z di due variabili x, y. E limitiamoci al caso più noto che il gruppo riproduttore della z sia un gruppo iperfuchsiano. Noi ci chiediamo: *Quando esisterà un gruppo continuo G' di trasformazioni proiettive T tali che per ogni trasformazione T di G', le $z(x, y)$ e $z(Tx, Ty)$ sieno legate da una relazione algebrica?*

Per chiarezza ricorderò che si chiamano gruppi iperfuchsiani (Cfr. § 5, parte I) i gruppi che si ottengono nel modo seguente.

Al solito indicheremo con A^0 o con A_0 la quantità immaginaria coniugata di una qualsiasi quantità A. E consideriamo la forma Hermitiana $F = x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 - x_3 x_3^0$ di tre variabili x_1, x_2, x_3. Sia Γ un gruppo di trasformazioni lineari intere sulle x_i, che trasforma F in sè stessa. Esso induce sui rapporti $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ un gruppo G. A tali gruppi G si dà il nome di gruppi iperfuchsiani.

Per risolvere la nostra questione, osserverò anzitutto che, come nel § 2, essa si può ridurre alla seguente:

Trovare i gruppi iperfuchsiani G, privi di trasformazioni infinitesime, le cui trasformazioni τ sono permutabili con ogni trasformazione T di un gruppo proiettivo continuo G'.

In uno spazio euclideo rappresentativo, in cui siano coordinate cartesiane ortogonali le $x' = \frac{x + x_0}{2}$, $x'' = \frac{x - x^0}{2i}$, $y' = \frac{y + y_0}{2}$, $y'' = \frac{y - y_0}{2i}$, il gruppo G trasforma in sè stessa la regione R interna all'ipersfera $(x')^2 + (x'')^2 + (y')^2 + (y'')^2 = 1$, la quale è in generale il campo di esistenza della funzione $z(x, y)$. Ogni trasformazione T di G' dovrà quindi trasformare R in sè stessa; e quindi esisterà un gruppo Γ' di trasformazioni lineari intere omogenee sulle x_i, che trasforma F in sè stessa, e che induce sulle $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ le trasformazioni di G'.

Consideriamo una qualsiasi trasformazione τ di G; potrà darsi, o che esistano tre punti isolati A, A', A'' (distinti o no) lasciati fissi da τ, oppure che la τ sia una omologia con un certo asse α, e con un certo centro A. Consideriamo il luogo Σ dei punti A, che o sono centri di un omologia contenuta in G, oppure sono lasciati fissi da una trasformazione di G, che non è una omologia.

Come nel § 2, si dimostra che ogni punto di Σ è lasciato fisso da tutte le trasformazioni di G'. Poichè G' è un gruppo proiettivo, non ridotto alla sola trasformazione identica, si possono avere soltanto i seguenti tre casi:

1.°) Σ contiene un numero finito k di punti distinti.

2.°) Σ contiene infiniti punti posti su una stessa retta r.

3.°) Σ contiene infiniti punti, posti su una stessa retta r, ed un punto B non posto sulla retta r.

Nel primo caso G' trasforma in sè stesso ognuno dei k punti di Σ; le trasformazioni di G possono al più permutare tra loro questi punti. Ed esisterà quindi G un sottogruppo di indice finito, che indicheremo ancora con G, che lascia fisso ognuno dei k punti di Σ.

Nel secondo caso tanto G, che G' trasformano in sè stessa la retta r.

Nel terzo caso tanto G, che G' trasformano in sè stessi il punto B e la retta r.

§ 4. Cominciamo dunque a trovare i gruppi Γ che trasformano in sè stesso un punto ($x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3$). Diremo *movimenti* quelle trasformazioni lineari intere omogenee sulle x_i, che trasformano F in sè stessa. I gruppi Γ sono gruppi di movimenti. Con un movimento M il punto (α_1, α_2, α_3) si può portare nell'uno o nell'altro dei tre punti (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1) secondo che $\alpha_1 \alpha_1^0 + \alpha_2 \alpha_2^0 - \alpha_3 \alpha_3^0$ è minore, maggiore, o uguale a zero. In quest'ultimo caso si dirà che il punto (α_1, α_2, α_3) giace sull'iperconica $x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 - x_3 x_3^0 = 0$. Il gruppo Γ sarà da M trasformato in un altro gruppo simile, che trasforma ancora in sè stessa la F, e le cui operazioni sono rispettivamente del tipo:

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x'_2 = \gamma x_1 + \delta x_2 \\ x'_3 = \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3, \end{cases} \quad \text{oppure del tipo:} \quad \begin{cases} x'_1 = \nu x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 \\ x'_2 = \alpha x_2 + \beta x_3 \\ x'_3 = \gamma x_2 + \delta x_3, \end{cases}$$

oppure del tipo:

$$\begin{cases} x'_1 = \nu x_1 + \beta (x_2 - x_3) \\ x'_2 - x'_3 = \mu x_1 + (\delta - \lambda)(x_2 - x_3) \\ x'_3 = \gamma x_1 + \lambda (x_2 - x_3) + \varepsilon x_3 . \end{cases}$$

Ricordando che la F deve essere trasformata in sè stessa, troviamo delle relazioni tra i coefficienti di queste trasformazioni, che permettono di dare alle precedenti formole il seguente più semplice aspetto:

$$\mathrm{I)}\left\{\begin{array}{l} x'_1 = \alpha\, x_1 + \beta\, x_2 \\ x'_2 = \gamma\, x_1 + \delta\, x_2 \\ x'_3 = \qquad\quad x_3 \end{array}\right. \quad \text{dove} \quad \alpha\,\alpha^0 + \gamma\,\gamma^0 = \beta\,\beta^0 + \delta\,\delta^0 = 1\,;\ \alpha\,\beta_0 + \gamma\,\delta_0 = 0$$

$$\mathrm{II)}\left\{\begin{array}{l} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = \alpha\, x_2 + \beta\, x_3 \\ x'_3 = \gamma\, x_2 + \delta\, x_3 \end{array}\right. \quad \text{dove} \quad \alpha\alpha^0 - \gamma\gamma^0 = -(\beta\beta^0 - \gamma\gamma^0) = 1;\ \alpha\beta^0 - \gamma\delta^0 = 0$$

$$\mathrm{III)}\left\{\begin{array}{r} x'_1 = x_1 + \beta\,(x_2 - x_3) \\ x'_2 - x'_3 = (\delta - \lambda)\,(x_2 - x_3) \\ x'_3 = \gamma\, x_1 + \lambda\,(x_2 - x_3) + \varepsilon\, x_3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} \text{dove} \\ \varepsilon\,(\delta_0 - \lambda_0) = \beta\,\beta^0 + \delta\,\delta_0 - \lambda\,\lambda_0 = 1\,; \\ \beta = \gamma_0\,(\lambda - \delta). \end{array}$$

Quindi: *I gruppi* Γ *che trasformano un punto* (α_i) *in sè stesso, sono simili a un gruppo di trasformazioni, le quali appartengono tutte a uno stesso dei tre tipi precedenti.*

E precisamente si ha proprio il I, o il II tipo, se il punto (α_i) non giace sull'iperconica $F = 0$.

Si osservi ora che i gruppi Γ del primo, secondo o terzo tipo trasformano rispettivamente in sè stessa la retta $x_3 = 0$ (che ha nessun punto comune con l'iperconica $F = 0$) o la retta $x_1 = 0$ (che ha ∞^1 punti con detta iperconica) o la retta $x_2 - x_3 = 0$ (che ha il solo punto (0, 1, 1) comune con l'iperconica, e che perciò si chiamerà la *retta tangente* all'iperconica in detto punto).

E viceversa si può dimostrare che *un gruppo* Γ *che trasformi in sè stessa una retta* r *è simile a un gruppo* Γ *di trasformazioni del tipo* I) *o del tipo* II), *se* r *non è tangente nell'iperconica. Se poi un gruppo* Γ *trasforma in sè stessa una retta* r *tangente nell'iperconica, esso è simile a un gruppo* Γ *di trasformazioni* III).

Si vede anche facilmente che *un gruppo* Γ *che trasformi in sè stessi due punti* A, B (*due tangenti* α, β) *dell'iperconica è simile a un gruppo* Γ *di trasformazioni* I), II). Infatti Γ dovrà trasformare in sè stessa la retta AB (il punto $\alpha\,\beta$), che non è una tangente (un punto dell'iperconica), perchè una tangente all'iperconica contiene un solo punto dell'iperconica stessa (perchè per un punto dell'iperconica passa una sola tangente all'iperconica).

§ 5. Ritornando al nostro problema, abbiamo dunque, per i risultati del § 3, che possono avvenire soltanto due casi.

α) I gruppi G, G' sono gruppi di movimenti del tipo I) o del tipo II). (Indico senz'altro con G e G' anche i gruppi Γ e Γ').

β) I gruppi G, G' non rientrano nel caso precedente, e sono quindi gruppi di movimenti del tipo III). Questo caso si suddistingue alla sua volta in altri due.

β_1) Σ contiene un solo punto A dell'iperconica, che possiamo supporre essere il punto (0, 1, 1). Le omologie di G hanno questo punto per centro; le proiettività di G, che non sono omologie, trasformano in sè stesso il solo punto (0, 1, 1). [Se Σ contenesse due punti dell'iperconica, G e G' trasformerebbero in sè stessa la retta AB. Le loro trasformazioni sarebbero del tipo (I) o (II)].

β_2) Σ contiene infiniti punti di una retta r tangente all'iperconica, che possiamo supporre essere la retta $x_2 - x_3 = 0$. Le trasformazioni di G, o lasciano fissi soltanto punti di r, o sono omologie col centro sulla retta r.

Facendo le considerazioni duali, si indichi con σ il sistema delle rette, che o sono assi di una omologia di G, o sono lasciate fisse da qualche trasformazione di G, che non è un'omologia. Troveremo che il caso β) si potrebbe distinguere anche nei seguenti due sottocasi:

β') σ contiene una sola retta r tangente all'iperconica, che possiamo supporre essere la retta $x_2 - x_3 = 0$. Le omologie di G hanno questa retta per asse; le proiettività di G che non sono omologie, lasciano fissa la sola retta r.

β'') σ contiene infinite rette passanti per un punto A dell'iperconica, che possiamo supporre essere il punto (0, 1, 1). Le trasformazioni di G, o lasciano fisse rette uscenti da A, o sono omologie, il cui asse passa per A.

Noi studieremo dapprima il caso β). Se Σ (σ) contiene un numero infinito di punti (rette) posti su r (passanti per A), il gruppo G', che deve trasformare in sè stessi questi punti (queste rette), dà origine alla proiettività identica sulla punteggiata r, (sul fascio di rette di centro A).

Ma le trasformazioni di G' sono del tipo III); e se i punti della retta r (le rette uscenti da A) sono lasciate fisse dalle trasformazioni di G', allora i coefficienti di queste trasformazioni sono legati anche dalle $\varepsilon = 1$, $\gamma = 0 \left(\frac{1}{\delta - \lambda} = 1\,;\; \beta = 0\right)$. Per le relazioni, che legano γ, β, λ, δ, ε si vede che in tutti e due questi casi, le trasformazioni di G' sono del tipo

$$\text{IV)} \qquad x'_1 = x_1 ; \quad x'_2 - x'_3 = x_2 - x_3 ; \quad x'_3 = i\, L\, (x_2 - x_3) + x_3$$

$$(L = \text{quantità reale}).$$

Se dunque siamo nel caso β'' o nel caso β_2, le trasformazioni di G' sono del tipo IV.

Ma se noi siamo nel caso β, e non avviene nè il caso β', nè il caso β_2, il gruppo G deve godere contemporaneamente delle proprietà considerate per i casi β_1, β'. Vale a dire: *Le trasformazioni di G, o sono omologie, che hanno per centro il punto* (0, 1, 1) *e per asse la retta* $x_2 - x_3 = 0$, *oppure sono proiettività che lasciano fisso il solo punto* (0, 1, 1) *e la sola retta* $x_2 - x_3 = 0$. I coefficienti delle trasformazioni III) di G soddisfano dunque alle:

$$\varepsilon = \delta - \lambda = 1 ; \quad \beta + \gamma_0 = \gamma\, \gamma_0 + \lambda + \lambda_0 = 0.$$

Ossia le trasformazioni G sono del tipo:

$$\text{V)} \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_1 - \overline{\gamma}_0\, (x_2 - x_3) \\ x'_2 - x'_3 = x_2 - x_3 \\ \qquad x'_3 = \overline{\gamma}\, x_1 + \overline{\lambda}\, (x_2 - x_3) + x_3 \end{array} \right. \qquad \text{dove} \quad \overline{\gamma}\, \overline{\gamma}_0 + \overline{\lambda} + \overline{\lambda}_0 = 0.$$

Concludiamo infine che unici casi possibili sono i seguenti:

A) Le trasformazioni dei gruppi G e G' sono del tipo I).

B) Le trasformazioni dei gruppi G e G' sono del tipo II).

C) Le trasformazioni del gruppo G' sono del tipo IV; quelle di G sono del tipo III; su r esistono infiniti punti di Σ, oppure per A passano infinite rette di σ.

D) Le trasformazioni di G sono del tipo V); le trasformazioni di G' sono del tipo III).

Studiamo successivamente i quattro casi *A*, *B*, *C*, *D*. Nel caso *B* posto $x = \frac{x_2}{x_1}$, $y = \frac{x_3}{x_1}$, le trasformazioni dei gruppi G e G' diventano del tipo

$$\text{VI)} \quad x' = \alpha\, x + \beta\, y ; \quad y' = \gamma\, x + \delta\, y.$$

I gruppi G, G' diventano gruppi di trasformazioni lineari su una variabile $\frac{x}{y}$, scritti sotto forma omogenea. Questo caso rientra quindi sostanzialmente nello studio fatto al § 2.

Nel caso A si possono ripetere le considerazioni precedenti; ma anzi si ottiene un risultato più semplice. Posto $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, i gruppi G, G' diventano gruppi di trasformazioni del tipo VI, che trasformano in sè stessa la forma definita positiva $x x_0 + y y_0$. Quindi il gruppo G è *un gruppo discontinuo finito*, il quale, per i risultati del § 2, non può essere che un gruppo ciclico.

Studiamo ora il caso C). Noi sappiamo che tutte le trasformazioni di G sono permutabili con ogni trasformazione di G'. Le trasformazioni di G' sono del tipo IV. Affinchè una trasformazione τ di G, che è certamente del tipo III, sia permutabile con quelle di G', è necessario (come si riconosce con un facile calcolo) che i coefficienti di τ soddisfino alla $\delta - \lambda = \varepsilon$. Quindi, poichè $\varepsilon(\delta_0 - \lambda_0) = 1$, sarà $\varepsilon \varepsilon_0 = 1$, ossia $\varepsilon = e^{i\theta}$, dove θ è un angolo reale. Le trasformazioni di G sono dunque del tipo

$$(\mathrm{IV})^{\mathrm{bis}} \left\{ \begin{aligned} x'_1 &= x_1 - \rho\, e^{i(\theta-\alpha)} (x_2 - x_3) \\ x'_2 - x'_3 &= e^{i\theta} (x_2 - x_3) \\ x'_3 &= \rho\, e^{i\alpha} x_1 + e^{i\theta} \left(-\frac{\rho^2}{2} + i\, l \right) (x_2 - x_3) + e^{i\theta} x_3 \end{aligned} \right.$$

dove θ, α, ρ, l sono quantità reali.

Dunque nel caso C le trasformazioni del gruppo G sono del tipo $(\mathrm{IV})^{\mathrm{bis}}$; *quelle di G' sono del tipo* IV.

Si trova facilmente che i coefficienti delle trasformazioni (III) permutabili con una trasformazione V) soddisfano alle:

$$\bar{\gamma}_0 (\delta - \lambda - 1) = 0 \quad \bar{\gamma}_0 (\varepsilon_0 - 1) = 0 \quad \bar{\gamma} \beta + \bar{\lambda} (\delta - \lambda - \varepsilon) + \gamma \bar{\gamma}_0 = 0$$

oltre alle: $\varepsilon(\delta_0 - \lambda_0) = \beta \beta_0 + \delta \delta_0 - \lambda \lambda_0 = 1$; $\beta = \gamma_0 (\lambda - \delta)$.

Se dunque noi siamo nel caso D, potremo distinguere due casi:

D') Per una almeno delle trasformazioni di G è $\bar{\gamma} \neq 0$; allora per tutte le trasformazioni di G' si ha: $\delta - \lambda = \varepsilon = 1$; $\gamma \bar{\gamma}_0 = + \bar{\gamma} \gamma_0$. Se è dunque $\bar{\gamma} = \sigma e^{i\alpha}$ (σ, α reali), si avrà $\gamma = \rho e^{i\alpha}$ (ρ, α reali), e α non muta (*) al variare

(*) Infatti l'anomalia del coefficiente γ di una qualunque trasformazione di G' deve essere uguale all'anomalia del coefficiente $\bar{\gamma}$ di una trasformazione qualunque di G: donde segue l'affermazione del testo. Unico caso eccezionale sarebbe quello che per tutte le trasformazioni di G' fosse $\rho = 0$; in tal caso tutte queste trasformazioni sarebbero del tipo IV. Si ritornerebbe così al caso (C).

della trasformazione considerata in G e G'. Si ha poi $\beta = -\gamma_0 = -\rho\, e^{-i\alpha}$; $\rho^2 + \delta + \lambda_0 = 1$, ossia $\lambda = -\frac{\rho^2}{2} + i\, l$, dove l è una costante reale. *Le trasformazioni di G sono del tipo* V, *dove* $\bar{\gamma} = \sigma\, e^{i\alpha}$ ($\alpha =$ cost.) *mentre le trasformazioni di G' sono del tipo*

$$(\mathrm{V})^{\mathrm{bis}} \begin{cases} x'_1 = x_1 - \rho\, e^{-i\alpha}(x_2 - x_3) \\ x'_2 - x'_3 = x_2 - x_3 \\ x'_3 = \rho\, e^{i\alpha} x_1 + \left(-\frac{\rho^2}{2} + i\, l\right)(x_2 - x_3) + x_3 \end{cases}$$

che si deduce dal tipo $\mathrm{II}^{\mathrm{bis}}$, *ponendovi* $\theta = 0$.

D'') Per tutte le trasformazioni di G è $\bar{\gamma} = 0$. Allora *le trasformazioni di G sono del tipo* IV, *e quindi quelle di G' sono del tipo* $\mathrm{IV}^{\mathrm{bis}}$. Quest'ultimo caso è da trascurarsi. Infatti, posto $x = \frac{x_1}{x_2 - x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_2 - x_3}$, il gruppo G si trasforma nel gruppo

$$x' = x \qquad y' = y + i\, L$$

che è un gruppo di trasformazioni lineari sulla *sola* variabile y.

Gli unici casi non banali, sono dunque i seguenti due:

C) Le trasformazioni di G sono del tipo $\mathrm{IV}^{\mathrm{bis}}$). Sulla retta $x_2 - x_3 = 0$ esistono infiniti punti di Σ, o nel fascio di rette di centro (0, 1, 1) esistono infinite rette di σ; ossia, al variare della trasformazione considerata di G, *la quantità* $\rho \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\theta} - 1}$ *assume infiniti valori distinti.* Le trasformazioni di G' sono poi del tipo IV (*).

D') Le trasformazioni di G sono del tipo V, dove $\bar{\gamma} = \sigma\, e^{i\alpha}$, essendo σ e α quantità reali; *la costante α conserva uno stesso valore per tutte le trasformazioni di G.* Le trasformazioni di G sono dunque del tipo:

$$(\mathrm{IV})^{\mathrm{ter}} \begin{cases} x'_1 = x_1 - \sigma\, e^{-i\alpha}(x_2 - x_3); \quad x'_2 - x'_3 = x_2 - x_3; \\ x'_3 = \sigma\, e^{i\alpha} x_1 + \left(-\frac{\sigma^2}{2} + i\, l\right)(x_2 - x_3) + x_3 \end{cases}$$

dove α è una costante reale invariabile, σ è una quantità reale non sempre nulla, ed l è pure una costante reale.

(*) Cfr. anche la nota a piè della pag. precedente.

Posto $x = \dfrac{x_1}{x_2 - x_3}$, $y = \dfrac{x_3}{x_2 - x_3}$ le trasformazioni di G diventano rispettivamente del tipo:

$$(C)\left\{\begin{array}{l} x' = e^{-i\theta}\, x - \rho\, e^{-i\alpha} \qquad y' = y + \rho\, e^{i(\alpha-\theta)}\, x + \\ +\left(-\dfrac{\rho^2}{2} + i\, l\right) \left[\rho \dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\theta} - 1} \text{ assume infiniti valori distinti}\right] \text{(*)} \end{array}\right.$$

$$(D')\left\{\begin{array}{l} x' = x - \sigma\, e^{-i\alpha} \qquad y' = y + \sigma\, e^{i\alpha}\, x + \\ +\left(-\dfrac{\sigma^2}{2} + i\, l\right) \left(\begin{array}{l}\alpha \text{ è una costante di } G \\ \sigma \text{ non è sempre nullo}\end{array}\right) \end{array}\right.$$

dove le ρ, σ, α, θ, l sono quantità reali.

Le funzioni invarianti per un gruppo di trasformazioni del tipo C o del tipo D' costituiscono, dal nostro punto di vista, la più semplice generalizzazione delle funzioni ellittiche.

Osservazione. Con metodi affatto simili si può risolvere il problema generale di trovare i varii tipi di gruppi discontinui di trasformazioni lineari su due variabili x, y, le quali sono tutte permutabili con ogni trasformazione di un gruppo lineare contiuuo.

(*) In questo caso si può considerare incluso quello ricordato nell'ultima osservazione a piè di pagina, per il quale però non si può asserire che $\rho \dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\theta} - 1}$ assuma infiniti valori distinti.