Sugli spazii a quattro dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti.

(*Di* Guido Fubini, *a Catania.*)

Nella Memoria: *Sugli spazii che ammettono un gruppo continuo di movimenti* (Annali di Matematica, 1902), ho determinato tutti gli spazii a quattro dimensioni che ammettono un gruppo a tre o a quattro parametri; vogliamo ora trovare tutti gli spazii a 4 dimensioni che ammettono un gruppo più ampio. Anzitutto dovremmo determinare quali tra gli S_4 già determinati ammettono il gruppo corrispondente soltanto come sottogruppo del gruppo totale corrispondente di movimenti. La ricerca, affrontata direttamente, presenta tali difficoltà di calcolo, che è assai difficile condurla a buon termine. È più facile, seguendo i metodi svolti dal prof. Bianchi per gli spazii a tre dimensioni con un gruppo di movimenti, studiare soltanto che cosa avviene degli S_4 in discorso per valori generici delle costanti, che compariscono nell'elemento lineare. I calcoli risultano però ancora lunghi, e senza interesse. E si troverebbe che tutti gli S_4 che ammettono un S_4 integrabile, non ammettono mai un gruppo più ampio, eccetto che gli spazii che ammettono il gruppo

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \, (i = 1, \ 2, \ 3, \ 4)$$

che sono euclidei, e gli spazii che ammettono il gruppo generato dalle

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \, (i = 1, \ 2, \ 3), \qquad x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_4}$$

il cui elemento lineare è riducibile alla forma:

$$d s^2 = d x_4^2 + d x_1^2 + d x_2^2 + 2 h_{12} \, d x_1 \, d x_2 + 2 x_4 \, d x_2 \, d x_3 + \\ + 2 (h_{12} x_4 + h_{13}) \, d x_1 \, d x_3 (x_4^2 + h_{33}) \, d x_3^2$$

dove le « h » sono costanti. Indicando con $H = h_{33} - h_{33}\, h_{12}^2 - h_{13}^2$ il discriminante non nullo della forma, si riconosce agevolmente che questi spazii ammettono anche la trasformazione infinitesima:

$$h_{13} x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left[\left(\frac{1 - h_{12}^2}{2} x_4^2 - h_{12}\, h_{13}\, x_4 \right) - \frac{x_3^2}{2} H \right] \frac{\partial}{\partial x_2} -$$
$$- (1 - h_{12}^2)\, x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + H\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} \, .$$

Non ha per noi alcun interesse il riprodurre qui i calcoli che dimostrano non esservi negli altri casi un gruppo più ampio per valori generici delle costanti, tanto più p. es. che lo studio diretto di questa questione per gli S_4 che ammettono un G_4 non integrabile non pare certo semplice. E noi non parleremo qui di questa questione, che è del resto implicitamente risoluta nelle pagine seguenti, dove si trovano tutti i tipi possibili di spazii S_4 che ammettono un gruppo a più di quattro parametri. E nelle ultime pagine del presente lavoro, indicherò sommariamente come il problema in discorso si risolve per gli S_4, che ammettono un G_4 non integrabile, che è il caso più difficile ad essere affrontato direttamente.

L'idea fondamentale che ci guiderà alla ricerca degli spazii a 4 dimensioni con un gruppo a più di quattro parametri è quella di ricercare a priori una proprietà generale di questi gruppi, che noi troveremo senz'altro nelle prime pagine. Dopo questo, la ricerca diventa non troppo complicata; e si hanno calcoli semplici e uniformi, mentre ineseguibili sarebbero stati i calcoli, che ci potevano suggerire i metodi generali o la generalizzazione dei metodi del prof. Bianchi. Ed è senza dubbio soltanto per questa via che si potranno ottenere risultati generali in questo ordine di ricerche: si dovrà cioè prima studiare le proprietà dei gruppi di movimenti, per poi passare allo studio degli spazii che li ammettono.

Suppongo nel lettore la conoscenza della mia Memoria citata, che indicherò con (A) e, per brevità, trascuro dapprima, come ho già fatto nella mia Mem. cit., il caso ben più facile e breve a trattarsi di quegli S_4 che ammettono un G_4 intransitivo, le cui varietà V_3 invarianti sono a curvatura costante, senza ammettere il G_6 intransitivo corrispondente, e senza essere di uno dei tipi che ora determineremo.

§ 1. Noi dimostreremo il teorema seguente:

Se un G_r ($r = 2$, 3, 4, 5, 6, 7, 8) è un gruppo di movimenti di un S_4 esso ammette un sottogruppo a « $r - 1$ » parametri.

(È ben chiaro che è inutile occuparci del caso $r = 9$ e del caso $r = 10$, perchè lo S_4 o non esisterebbe o sarebbe a curvatura costante).

Questo teorema è evidente per $r = 1, 2, 3, 4, 5$ per noti teoremi generali della teoria dei gruppi. Se $r = 6$, il G_r ammette certo qualche G_4 (Lie-Engel, 3° B, pag. 756) e deve certo ammettere anche qualche G_5 perchè se un G_r ha dei sottogruppi G_{r-2}, ma non dei sottogruppi G_{r-1}, è (Lie-Engel, 3° B, 691) $r \geqq 8$ e quindi $r \neq 6$. Se $r = 7$, il G_r ammette certo qualche G_4; se non ammettesse nè sottogruppi G_5, nè sottogruppi G_6 dovrebbe essere (Lie, loc. cit.) $r \geqq 10$ e quindi $r \neq 7$. Se ammettesse dei G_5 ma non dei G_6, allora dovrebbe essere $r \geqq 8$ e quindi $r \neq 7$. Veniamo al caso dei G_8; consideriamo quel sottogruppo G_4 che lascia fisso un punto generico dello S_4. Esso non è certamente un gruppo invariante; perchè dalle trasformazioni di G_8, che sarà certamente transitivo, è portato negli altri G_4 corrispondenti agli altri ∞^4 punti di S_4. Tutti questi G_4 non possono avere alcuna trasformazione infinitesima comune (ossia invariante in G_8) perchè nessuna trasformazione di G_8, oltre l'identità, può lasciar fisso ogni punto di S_4.

Ora (Lie-Engel; Tomo III°, pag. 776 e 682) di G_8 semplici non vi sono altro che i gruppi oloedricamente isomorfi al gruppo proiettivo del piano. Escluso per un momento questo caso, il gruppo G_8 conterrà qualche sottogruppo invariante. Se questo sottogruppo è un G_1, o un G_2, o un G_3 esso insieme a uno dei G_4 precedenti, in cui come si disse non può essere contenuto come sottogruppo genererà un G_5 oppure un G_6 oppure un G_7. Nel primo caso il G_8, contenendo un G_5 dovrà pure (Lie-Engel, T. 3.°, pag. 691) contenere un G_6 o un G_7. Se poi G_8 contiene un G_6, non essendo esso per ipotesi isomorfo al gruppo proiettivo del piano, esso conterrà pure un G_7 (Lie, loc. cit.). Se il sottogruppo invariante fosse un G_4, questo G_4 con una qualsiasi altra trasformazione infinitesima di G_8 genererebbe un G_5. In ogni caso adunque il nostro G_8 conterrebbe un G_5 o un G_6 oppure un G_7 e quindi, per le considerazioni precedenti, conterrebbe un G_7. Basterà adunque far vedere che il nostro G_8 non può essere isomorfo al gruppo proiettivo del piano. Infatti un gruppo G_8 che si possa considerare come gruppo di movimenti di un S_4 ammette dei G_4 che lasciano fisso un punto di S_4. La composizione di un tale G_4 si ha subito, ricordando che per le proprietà caratteristiche dei gruppi di movimenti esso deve essere isomorfo a un sottogruppo di uno spazio S_3 a curvatura costante e che essendo esso intransitivo (*), deve essere isomorfo (Cfr. § 1 della mia Mem. cit.) a un gruppo Γ_4 transitivo di movi-

(*) Perchè, come ho dimostrato, nella mia Memoria, nessun gruppo di movimenti può essere doppiamente transitivo.

menti di un S_3. Confrontando le possibili composizioni dei sottogruppi *reali* G_4 di movimenti di uno spazio ellittico (Lie-Engel, Tomo III°, pag. 203) e le possibili composizioni di un G_4 transitivo di movimenti di un S_3, troviamo che questo G_4 deve avere per gruppo derivato un G_3 non integrabile. Di tali G_4 il gruppo proiettivo del piano contiene soltanto (Lie, B$^{\text{nd}}$ 3$^{\text{tes}}$, pag. 106) il sottogruppo generato dalle

$$x\,p,\ x\,q,\ y\,p,\ y\,q$$

e i sottogruppi equivalenti.

Ma il sottogruppo in discorso è contenuto nel gruppo G_6

$$p,\ q,\ x\,p,\ x\,q,\ y\,p,\ y\,q.$$

Dunque: Se uno dei nostri spazii S_4 ammette un G_8 oloedricamente isomorfo al gruppo proiettivo del piano, esso ammette un gruppo G_4 intransitivo non integrabile, le cui varietà minime invarianti sono perciò delle V_3; e questo G_4 è contenuto in un sottogruppo a 6 parametri di G_8.

Più tardi studieremo quali spazii S_4 ammettono un gruppo G_6 contenente come sottogruppo un G_4 intransitivo non integrabile: e vedremo che nessuno di tali spazii può mai ammettere un G_8. Il teorema resta così completamente dimostrato.

Dunque per la nostra ricerca basterà prima cercare quale degli spazii trovati nella mia Mem. cit. ammettono un G_5 contenente il G_4 corrispondente poi quale di questi ammette un G_6 contenente il G_5 relativo, quale fra questi ultimi ammettono un G_7 contenente il G_6 relativo. Per trovare quali spazii ammettono un G_8 basterà ridurci allo studio degli spazii che ammettono un G_7 e di quelli che ammettono un G_6 contenente come sottogruppo un G_4 intransitivo non integrabile.

§ 2. Cominciamo dunque ora dallo studiare quali dei nostri spazii può ammettere un G_5: noi distingueremo tre casi, che studieremo l'uno dopo l'altro.

A) Il G_5 è integrabile, e non contiene alcun G_4 intransitivo.

B) Il G_5 non è integrabile, e non contiene alcun G_4 intransitivo.

C) Il G_5 contiene come sottogruppo un G_4 intransitivo.

Studiamo il primo caso, osservando che un tale G_5 possiede naturalmente solo dei sottogruppi integrabili.

A) Il gruppo G_5 ha un G_4 come gruppo derivato. (Si ricordi che è chiaramente da trascurarsi il caso, in cui il G_5 avesse tra i suoi sottogruppi un G_4 a trasformazioni permutabili, nel qual caso lo spazio ambiente sarebbe senz'altro euclideo; ed è quindi « a fortiori » inutile occuparci di un G_5 a trasformazioni permutabili.) Sia G_1 il derivato generato dalla X_1; potremo scegliere le trasform. infinit. $(X_1 \dots X_5)$ generatrici di G_5 evidentemente in modo che sia

$$(X_1 X_2) = 0 \ (X_1 X_3) = (X_1 X_4) = 0$$

e poichè $(X_1 X_2 X_3 X_4)$ non può essere a trasformazioni permutabili, una almeno delle $(X_2 X_3)$, $(X_3 X_4)$, $(X_2 X_4)$ non sarà nulla; e potremo porre p. es.:

$$(X_2 X_3) = X_1 .$$

Ponendo $X_4 - p X_2 - q X_3$ al posto di X_4 con p, q costante opportune potremo poi fare:

$$(X_3 X_4) = (X_2 X_4) = 0.$$

Sarà poi, indicando con ε_i delle costanti,

$$(X_1 X_5) = \varepsilon_1 X_1 \quad (X_2 X_5) = \varepsilon_2 X_1 \quad (X_3 X_5) = \varepsilon_3 X_1 \quad (X_4 X_5) = \varepsilon_4 X_1$$

dove ε_1, ε_3, ε_4 non possono essere tutte nulle, perchè altrimenti $(X_1 X_3 X_4 X_5)$ sarebbe un Γ_4 (*); e così pure neppure ε_1, ε_2, ε_4 possono essere tutte nulle.

Se $\varepsilon_1 \neq 0$, togliendo da X_2, X_3, X_4 multipli di X_1 si ottiene $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$.

Se $\varepsilon_4 \neq 0$, $\varepsilon_1 = 0$, togliendo da $X_2 X_3$ multipli di X_4 si ottiene $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 = 0$.

Se $\varepsilon_1 = \varepsilon_4 = 0$, allora $\varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_3 \neq 0$. E togliendo da X un conveniente multiplo di X_3 si ottiene: $\varepsilon_2 = 0$, caso che è, come si vide già, da trascurarsi. Dunque i casi da considerare sono soltanto:

Tutte le $(X_i X_k)$ nulle, eccetto

$$(X_2 X_3) = X_1 \qquad (X_1 X_5) = X_1 \tag{1}$$

oppure tutte le $(X_i X_k)$ nulle, eccetto

$$(X_2 X_3) = X_1 \qquad (X_4 X_5) = X_1 . \tag{2}$$

B) Il G_5 abbia un G_2 come gruppo derivato.

Vediamo se è possibile che tutti quei G_4, sottogruppi di G_5, contenenti il G_2 derivato abbiano soltanto un G_1 come gruppo derivato. Dall'enumerazione di Lie dei possibili G_4 vediamo che tutti questi G_4 sarebbero di uno delle due seguenti composizioni (indicando con X_1, X_2, X_3, X_4 le trasf. infinit. generatrici di G_4):

$$(X_i X_k) = 0 \ (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = X_1 \tag{α}$$

$$(X_i X_k) = 0 \ (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \quad \text{tranne} \quad (X_3 X_4) = X_2 . \tag{β}$$

(*) Con Γ_m indicheremo, d'ora in avanti, un G_m a trasformazioni permutabili.

Trattiamo il sottocaso α). Sia X_5 una quinta trasform. infinit. di G_5. E poniamo

$$(X_i\, X_5) = \sum_{k=1}^{4} \lambda_{ik}\, X_k \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Scriviamo le identità di Lie relative alle λ_{ik}, ricordando che il G_5 deve avere un G_2 per gruppo derivato e che questo G_2 contiene X_1.

Otterremo, sostituendo a X_5 la $X_5 - p\, X, - q\, X_4$ (con p, q costanti opportune) che X_5 o sarà tale che

$$(X_1\, X_5) = \lambda_{14}\, X_4 \qquad (X_i\, X_5) = 0 \qquad (i = 2,\ 3,\ 4) \qquad (\lambda_{14} \neq 0),$$

oppure tale che:

$$(X_1\, X_5) = 0 \qquad (X_i\, X_5) = \lambda_{i2}\, X_2 + \lambda_{i3}\, X_3 \qquad (i = 2,\ 3,\ 4).$$

Nel primo caso anche $(X_1\, X_4\, X_5\, X_2)$ ha un G_2 per gruppo derivato.

Nel secondo caso le $\lambda_{i2}\, X_2 + \lambda_{i3}\, X_3$ non sono tutte nulle, perchè G_5 deve avere un G_2 per gruppo derivato; quelle di esse che non sono nulle rappresentano una stessa trasformazione. Presa questa come trasformazione X_3 (e scambiando eventualmente X_2, X_3) si ottiene facilmente:

$$(X_1\, X_5) = 0 \qquad (X_i\, X_5) = \lambda_{i3}\, X_3 \qquad (i = 2,\ 3,\ 4)$$

dove non tutte le λ_{i3} sono nulle. Se $\lambda_{33} \neq 0$ o $\lambda_{13} \neq 0$, allora $(X_1\, X_3\, X_4\, X_5)$ ha un G_2 per gruppo derivato.

Se $\lambda_{23} \neq 0$, allora $(X_1,\ X_3,\ X_2,\ X_4 + X_5)$ ha un G_2 per gruppo derivato.

Nel caso (β) otteniamo con procedimenti analoghi, che si potrà porre:

$$\begin{aligned}
(X_1\, X_5) &= \lambda_{11}\, X_1 + \lambda_{12}\, X_2 \\
(X_2\, X_5) &= (\lambda_{33} + \lambda_{44})\, X_2 \\
(X_3\, X_5) &= \lambda_{31}\, X_1 + \lambda_{33}\, X_3 + \lambda_{34}\, X_4 \\
(X_4\, X_5) &= \lambda_{41}\, X_1 + \lambda_{43}\, X_3 + \lambda_{44}\, X_4
\end{aligned}$$

quando alla X_5 si sostituisca $X_5 - p\, X_3 - q\, X_4$, con p, q costanti opportune.

Se $(X_1\, X_2)$ è il gruppo derivato, allora $\lambda_{33} = \lambda_{34} = \lambda_{43} = \lambda_{44} = 0$. Se $\lambda_{11} \neq 0$, il gruppo $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 + X_5)$ ha un G_2 per gruppo derivato. Se $\lambda_{11} = 0$, allora o $\lambda_{31} \neq 0$ o $\lambda_{41} \neq 0$. Sia p. es. $\lambda_{31} \neq 0$. Se anche $\lambda_{12} \neq 0$ il gruppo $(X_1\, X_2\, X_3\, X_5)$ ha un G_2 per gruppo derivato. Sia $\lambda_{12} = 0$. Sostituendo alla X_4 la $X_4 - p\, X_3$ (p conveniente costante) avremo $\lambda_{41} = 0$. Moltiplicando X_5 per $\frac{1}{\lambda_{31}}$ si potrà poi fare $\lambda_{31} = 1$. E il gruppo $(X_1\, X_2\, X_3\, X_4\, X_5)$ avrà la composizione:

Tutte le $(X_i\, X_k) = 0$ tranne

$$(X_3\, X_4) = X_2 \qquad (X_3\, X_5) = X_1\,. \tag{3}$$

Se non è $(X_1,\, X_2)$ il gruppo derivato, è certamente $\lambda_{11} = 0$. E se non è già nulla una delle $(X_3\, X_5)$, $(X_4\, X_5)$ potremo sostituendo alla X_3 la $X_3 - p\, X_4$ (p = costante opportuna) fare $(X_3\, X_5) = 0$.

Se $\lambda_{44} = 0$, è certo $\lambda_{43} \neq 0$ e il gruppo $(X_2,\, \lambda_{41} X_1 + \lambda_{43} X_3,\, X_4,\, X_5)$ ha un G_2 per gruppo derivato. Se $\lambda_{44} \neq 0$, allora $(X_2,\, \lambda_{41} X_1 + \lambda_{43} X_3 + \lambda_{44} X_4,\, X_3,\, X_5)$ ha un G_2 per gruppo derivato.

Dunque, tranne che nel caso (3) noi potremo supporre che nel G_5 esista un G_4 con un G_2 per gruppo derivato. Esaminiamo perciò se è possibile che tra i G_4 di G_5 aventi G_2 come gruppo derivato non ve ne sia alcuno con un Γ_3. Perciò ricordiamo che un G_4 con un G_2 come gruppo derivato e senza Γ_3 o ha la composizione

$$(X_1\, X_2) = (X_2\, X_3) = (X_3\, X_4) = (X_4\, X_1) = 0 \quad (X_1\, X_3) = X_1 \quad (X_2\, X_4) = X_2 \tag{α}$$

oppure la:

$$(X_1\, X_2) = (X_1\, X_3) = (X_3\, X_4) = 0 \quad (X_2\, X_3) = (X_1\, X_4) = X_1 \quad (X_2\, X_4) = X_2\,. \tag{β}$$

Le formule di composizione danno nel caso (α), sostituendo alla X_5 la $X_5 - \sum_1^4 p_i\, X_i$ dove le p_i sono convenienti costanti che:

$$(X_i\, X_5) = 0 \qquad (i = 1,\, 2,\, 3,\, 4)$$

e il G_5 contiene il gruppo $(X_1,\, X_2,\, X_3 + X_4,\, X_5)$ che contiene il $\Gamma_3\,(X_2\, X_1,\, X_5)$ ed ha un G_2 per gruppo derivato.

Nel caso (β) si ottiene dalle formule di composizione, sostituendo a X_5 la $X_5 - \sum_1^4 p_i\, X_i$ nel modo solito che si può fare:

$$(X_1\, X_5) = 0 \quad (X_2\, X_5) = \lambda_{22}\, X_2 \quad (X_3\, X_5) = -\lambda_{22}\, X_3 \quad (X_4\, X_5) = 0.$$

Affinchè il gruppo derivato sia $(X_1,\, X_2)$ deve essere $\lambda_{22} = 0$ e allora $(X_1\, X_2\, X_4\, X_5)$ che ha un G_2 per gruppo derivato contiene il $\Gamma_3\,(X_1\, X_2\, X_5)$.

Potremo dunque restringerci al caso che G_5 possegga un G_4, che contiene un Γ_3 e di cui un G_2 è il gruppo derivato.

Di tali G_4 vi sono soltanto i seguenti tipi che esamineremo successivamente:

I. Sia $G_4 = (X_1, X_2, X_3, X_4)$. E siano tutte le $(X_i X_k) = 0$ tranne

$$(X_1 X_4) = X_2, \qquad (X_3 X_4) = X_2.$$

I soliti metodi danno che allora la X_5 si potrà scegliere in modo che

$$(X_i X_5) = 0 \, (i = 1, 2, 4) \qquad (X_3 X_5) = \lambda_{32} X_2.$$

Se $\lambda_{32} = 0$, allora (X_1, X_2, X_3, X_5) è un Γ_4; se $\lambda_{32} \neq 0$, si può, mutando X_5 fare $\lambda_{32} = 1$ e otteniamo così per G_5 la composizione:

Tutte le $(X_i X_k) = 0$ tranne

$$(X_1 X_4) = X_2; \qquad (X_3 X_4) = (X_3 X_5) = X_2. \tag{4}$$

II. G_4 può essere del tipo:

$$(X_i X_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots 4) \quad \text{tranne} \quad (X_2 X_4) = X_2 \quad (X_3 X_4) = X_1.$$

E si trova con le solite considerazioni

$$(X_4 X_5) = \lambda_{41} X_1 + \lambda_{42} X_2; \quad (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1,$$
$$(X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2; \quad (X_1 X_5) = 0.$$

Togliendo da X_5 multipli convenienti di X_2, X_3, X_4 si può fare

$$\lambda_{41} = \lambda_{42} = \lambda_{31} = 0.$$

Se (X_1, X_2, X_3, X_5) non è un Γ_4 è certo $\lambda_{22} \neq 0$. Si può dunque fare $\lambda_{22} = 1$.

E si trova per G_5 la composizione:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_2 X_4) = X_2, \quad (X_3 X_4) = X_1, \quad (X_2 X_5) = X_2. \tag{5}$$

III. Il gruppo G_4 può essere del tipo:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = -X_1, \quad (X_3 X_4) = X_1 - X_3.$$

Togliendo da X_5 multipli di X_1, X_3, X_4 convenienti si ha che si può porre:

$$(X_1 X_5) = 0 \qquad (X_2 X_5) = 0 \qquad (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1 \qquad (X_4 X_5) = 0.$$

Se $(X_1 X_2 X_3 X_5)$ non è un Γ_4, sarà $\lambda_{31} \neq 0$. Si può perciò porre $\lambda_{31} = 1$ e si ha per la composizione di G_5

$$\left.\begin{aligned} (X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = -X_1; \quad (X_3 X_4) = X_1 - X_3, \\ (X_3 X_5) = X_1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

IV. Il G_4 può essere infine della composizione:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = X_1 \qquad (X_3 X_4) = c\, X_3 \qquad (c \neq 0).$$

E troviamo coi soliti procedimenti per il nostro gruppo G_5 nel caso di $c = 1$,

$$\left.\begin{aligned} (X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = X_1, \qquad (X_3 X_4) = X_3, \\ (X_1 X_5) = \lambda_{13} X_3, \qquad (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1 + \lambda_{33} X_3. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Nel caso di $c == 1$

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = X_1, \quad (X_3 X_4) = c\, X_3, \quad (X_3 X_5) = X_3. \tag{8}$$

C) Il gruppo G_5 abbia un G_3 per gruppo derivato.

Nessuno dei G_4 di G_5 contenenti G_3 abbia, se è possibile, questo G_3 per gruppo derivato. E ve ne sia anzi uno il cui gruppo derivato sia un G_2, senza che esso contenga un Γ_3.

Questo G_4 perciò, o avrà la composizione:

$$(X_1 X_2) = (X_1 X_3) = (X_3 X_4) = 0 \qquad (X_2 X_3) = (X_1 X_4) = X_1$$
$$(X_2 X_4) = X_2$$

nel qual caso si può scegliere X_5 in modo che sia:

$$(X_1 X_5) = (X_4 X_5) = 0 \qquad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 \qquad (X_3 X_5) = -\lambda_{22} X_3$$

(dove è certo $\lambda_{22} \neq 0$) cosicchè G_5 contiene il sottogruppo $(X_1 X_2 X_3 X_5)$ con un G_3 per gruppo derivato, oppure detto G_4 ha la composizione:

$$(X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_3 X_4) = (X_4 X_1) = 0$$
$$(X_1 X_3) = X_1 \qquad (X_2 X_4) = X_2$$

che, come si verifica con le sole relazioni tra le costanti di composizione non può essere contenuto in un G_5 il cui gruppo derivato sia un G_3. Esaminiamo dunque il caso in cui questo G_4 contenga un Γ_3. Esso potrà essere di varii tipi, che studieremo successivamente:

I. Sia la composizione di un tale G_4 data da:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = X_1 \qquad (X_3 X_4) = c\, X_3 \qquad (c \neq 0).$$

Se $c \neq 1$, si vede tosto che si può scegliere X_5 in modo che:

$$(X_1 X_5) = 0, \qquad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2, \qquad (X_3 X_5) = \lambda_{33} X_3,$$
$$(X_4 X_5) = \lambda_{42} X_2.$$

Ma se $\lambda_{22} \neq 0$, il nostro G_5 contiene il gruppo $(X_1, X_2, X_3, X_5 + h\, X_4)$ il quale, se h è opportunamente scelta, ha un G_3 per gruppo derivato.
Se invece $\lambda_{22} = 0$, è certo $\lambda_{42} \neq 0$ e si può anzi supporre $\lambda_{42} = 1$.
Otteniamo così un G_5 con la composizione:

$$\left.\begin{array}{l} (X_1\, X_5) = 0, \quad (X_2\, X_5) = 0 \quad (X_3\, X_5) = \lambda_{33}\, X_3 \quad (X_4\, X_5) = X_2 \\ (X_1\, X_4) = X_1, \quad (X_3\, X_4) = c\, X_3, \\ \qquad\qquad (X_2\, X_4) = (X_1\, X_2) = (X_2\, X_3) = (X_3\, X_1) = 0. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Sia invece $c = 1$ Si potrà scegliere X_5 in modo che sia

$$(X_4\, X_5) = \lambda_{42}\, X_2 \quad (X_1\, X_5) = \lambda_{13}\, X_3 \quad (X_2\, X_5) = \lambda_{22}\, X_2$$
$$(X_3\, X_5) = \lambda_{31}\, X_1 + \lambda_{32}\, X_2\,.$$

Se $\lambda_{22} \neq 0$, il sottogruppo $(X_1, X_2, X_3, k\, X_4 + h\, X_5)$ dove k, h sono costanti opportune ha un G_3 per gruppo derivato. Se $\lambda_{22} = 0$, è certo $\lambda_{42} \neq 0$, e si può supporre $\lambda_{42} = 1$ e si ha un G_5 di composizione:

$$\left.\begin{array}{l} (X_i\, X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1\, X_4) = X_1, \quad (X_3\, X_4) = X_3, \quad (X_1\, X_5) = \lambda_{13}\, X_3, \\ \qquad (X_3\, X_5) = \lambda_{31}\, X_1 + \lambda_{33}\, X_3, \quad (X_4\, X_5) = X_2. \end{array}\right\} (10)$$

II. Il G_4 può avere la composizione:

$$(X_i\, X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_2\, X_4) = X_2, \quad (X_3\, X_4) = X_1\,.$$

Le formole di composizione danno subito che si può scegliere X_5 in modo che:

$$(X_1\, X_5) = \lambda_{33}\, X_1 \quad (X_2\, X_5) = 0 \quad (X_3\, X_5) = \lambda_{31}\, X_1 + \lambda_{33}\, X_3 \quad (X_4\, X_5) = \lambda_{43}\, X_3$$

dove una almeno delle λ_{33}, λ_{43} non è nulla. Se $\lambda_{33} \neq 0$, il sottogruppo $(X_1, X_2, X_3, k\, X_5 + h\, X_4)$ dove k, h sono costanti opportune ha un G_3 per gruppo derivato. Si può dunque porre $\lambda_{33} = 0$, col che $\lambda_{43} \neq 0$ ossia, come si può supporre senz'altro, $\lambda_{43} = 1$. Il G_5 avrà la composizione:

$$\left.\begin{array}{l} (X_i\, X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_2\, X_4) = X_2, \quad (X_3\, X_4) = X_1, \\ \qquad (X_3\, X_5) = \lambda_{31}\, X_1\,, \quad (X_4\, X_5) = X_3\,. \end{array}\right\} \quad (11)$$

III. Il G_4 può avere la composizione:

$$(X_i\, X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1\, X_4) = -\, X_1 \quad (X_3\, X_4) = X_1 - X_3\,.$$

E si ottiene col solito metodo che X_5 si può scegliere in guisa che

$$(X_1\, X_5) = 0, \quad (X_2\, X_5) = \lambda_{22}\, X_2, \quad (X_3\, X_5) = \lambda_{31}\, X_1, \quad (X_4\, X_5) = \lambda_{42}\, X_2\,.$$

Come precedentemente, si vede che si può supporre $\lambda_{22}=0$, e quindi $\lambda_{42} \neq 0$, o, come si può senz'altro, $\lambda_{42}=1$.

Otteniamo così un X_5 di composizione:

$$\left.\begin{array}{l}(X_i X_k)=0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4)=-X_1, \quad (X_3 X_4)=X_1-X_3, \\ \qquad (X_3 X_5)=\lambda_{31} X_1, \quad (X_4 X_5)=X_2 .\end{array}\right\} \quad (12)$$

IV. Infine il G_4 può avere la composizione:

$$(X_i X_k)=0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4)=X_2, \quad (X_3 X_4)=X_1 .$$

Si vede al solito che X_5 si può scegliere in guisa che sia:

$$\begin{array}{ll}(X_1 X_5)=(\lambda_{44}+\lambda_{33}) X_1 & (X_2 X_5)=(\lambda_{33}+2 \lambda_{44}) X_2 \\ (X_3 X_5)=\lambda_{32} X_2+\lambda_{33} X_3 & (X_4 X_5)=\lambda_{43} X_3+\lambda_{44} X_4 .\end{array}$$

Affinchè il gruppo derivato sia un G_3 o è $\lambda_{33}=\lambda_{43}=0$, $\lambda_{44} \neq 0$ oppure $\lambda_{44}=0$. Nel primo caso (X_1, X_2, X_4, X_5) ha un gruppo G_3 come gruppo derivato.

Nel secondo si può supporre $\lambda_{33}=0$, perchè altrimenti (X_1, X_2, X_3, X_5) avrebbe un G_3 per gruppo derivato, e quindi $\lambda_{43}=1$. E si ha per G_5 la composizione:

$$\left.\begin{array}{l}(X_i X_k)=0 \quad \text{tranne} \quad (X_3 X_5)=\lambda_{32} X_2, \quad (X_4 X_5)=X_3, \\ \qquad (X_1 X_4)=X_2, \quad (X_3 X_4)=X_1 .\end{array}\right\} \quad (12)^{\text{bis}}$$

Esaminiamo ora se è possibile che tutti i G_4 di G_5 contenenti il G_3 derivato ammettano un G_1 per gruppo derivato. Prendiamo uno di questi G_4. Esamineremo uno dopo l'altro i varii tipi di composizione, che esso può avere:

I. Il G_4 (X_1, X_2, X_3, X_4) abbia la composizione:

$$(X_i X_k)=0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4)=X_1 .$$

Scelto opportunamente X_5 si avrà che:

$$(X_1 X_5)=0 \quad (X_i X_5)=\lambda_{i2} X_2+\lambda_{i3} X_3 \quad (i=2,\ 3,\ 4).$$

Dello $(X_i X_5)(i=2,\ 3,\ 4)$ almeno due non sono nulle, e sono distinte perchè G_5 ha un G_3 per gruppo derivato; se tali sono le $(X_2 X_5)$, $(X_3 X_5)$ allora il G_4 (X_1, X_2, X_3, X_4+X_5) ha proprio un G_3 per gruppo derivato. Se $(X_2 X_5)$ e $(X_3 X_5)$ non sono distinte, allora una di esse non è certo nulla, e (X_1, X_2, X_3, X_4+X_5) ha un G_2 per gruppo derivato.

II. Il gruppo G_4 può avere anche l'altra composizione:

$$(X_i\,X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_3\,X_4) = X_2 .$$

Allora si trova senz'altro che scelto opportunamente X_5, avremo:

$$\begin{aligned}
(X_1\,X_5) &= \lambda_{11}\,X_1 + \lambda_{12}\,X_2 \\
(X_2\,X_5) &= (\lambda_{33} + \lambda_{44})\,X_2 \\
(X_3\,X_5) &= \lambda_{31}\,X_1 + \lambda_{33}\,X_3 + \lambda_{34}\,X_4 \\
(X_4\,X_5) &= \lambda_{41}\,X_1 + \lambda_{43}\,X_3 + \lambda_{44}\,X_4 .
\end{aligned}$$

Se $\lambda_{11} \neq 0$, allora il G_3 derivato di X_5 conterrà X_1, X_2 e

$$\lambda_{33}\,X_3 + \lambda_{34}\,X_4 , \quad \lambda_{43}\,X_3 + \lambda_{44}\,X_4$$

non possono rappresentare trasformazioni distinte. Sostituendo dunque alla X_3, o alla X_4 una loro opportuna combinazione lineare, potremo supporre che una di esse sia nulla; sia p. es. $\lambda_{33} = \lambda_{34} = 0$. Ma allora il gruppo

$$(X_1,\ X_2,\ \lambda_{41}\,X_1 + \lambda_{43}\,X_3 + \lambda_{44}\,X_4,\ X_5)$$

ha un G_3 per gruppo derivato, a meno che $\lambda_{44} = 0$. Se $\lambda_{44} = 0$ il gruppo $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 + X_5)$ contiene il G_3 derivato di G_5 ed ha per gruppo derivato un gruppo G_2.

Sia invece $\lambda_{11} = 0$. Il G_3 derivato di G_5 sarà il gruppo

$$(X_2,\ \lambda_{31}\,X_1 + \lambda_{33}\,X_3 + \lambda_{34}\,X_4,\ \lambda_{41}\,X_1 + \lambda_{43}\,X_3 + \lambda_{44}\,X_4).$$

Mutando la X_3 o la X_4 in modo analogo al precedente, si vede poter supporre che una delle λ_{31}, λ_{41} sia nulla, p. es. che sia $\lambda_{31} = 0$.

Consideriamo il gruppo

$$(X_2,\ \lambda_{33}\,X_3 + \lambda_{34}\,X_4 ,\quad \lambda_{41}\,X_1 + \lambda_{43}\,X_3 + \lambda_{44}\,X_4 ,\quad h_3\,X_3 + h_4\,X_4 + h_5\,X_5)$$

dove h_2, h_4, h_5 sono costanti *generiche.* Il suo gruppo derivato è:

$$(\alpha)\ldots h_5\,(\lambda_{33} + \lambda_{44})\,X_2 \qquad\qquad (\alpha)' = (\lambda_{33}\,\lambda_{44} - \lambda_{34}\,\lambda_{43})\,X_2$$

$$\begin{aligned}
(\beta)\ldots (\lambda_{33}\,h_4 - h_3\,\lambda_{34})\,X_2 + h_5\,\lambda_{33}\,(\lambda_{33}\,X_3 + \lambda_{34}\,X_4) &+ \\
+ h_5\,\lambda_{34}\,(\lambda_{41}\,X_1 + \lambda_{44}\,X_4 + \lambda_{43}\,X_3)&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma)\ldots h_5\,\lambda_{41}\,\lambda_{12}\,X_2 + (h_4\,\lambda_{43} - h_3\,\lambda_{44})\,X_2 + h_5\,\lambda_{43}\,(\lambda_{33}\,X_3 + \lambda_{34}\,X_4) &+ \\
+ h_5\,\lambda_{44}\,(\lambda_{41}\,X_1 + \lambda_{44}\,X_4 + \lambda_{43}\,X_3).&
\end{aligned}$$

Se $\lambda_{33} + \lambda_{44} \neq 0$, questo gruppo per $h_5 \neq 0$ non ha per gruppo derivato un G_1 perchè infatti in tal caso i coefficienti di X_3 e di X_4 in (β) e in (γ)

$h_5(\lambda_{33}^2+\lambda_{34}\lambda_{43})$,

$$h_5(\lambda_{33}\lambda_{34}+\lambda_{34}\lambda_{44}),\quad h_5(\lambda_{43}\lambda_{33}+\lambda_{44}\lambda_{43}),\quad h_5(\lambda_{43}\lambda_{34}+\lambda_{44}^2)$$

non possono essere contemporaneamente nulli senza che sia $\lambda_{34}=\lambda_{43}=0$ e quindi $\lambda_{33}=\lambda_{44}=0$, ciò che è impossibile.

Sia invece $\lambda_{33}+\lambda_{44}=0$. Il gruppo derivato resta allora generato da due trasformazioni infinitesime, che non possono essere identiche per valori generici delle h_i (come subito si verifica) se non nei due casi seguenti:

I. $\quad \lambda_{33}+\lambda_{44}=0 \quad \lambda_{41}=0 \quad \lambda_{33}^2+\lambda_{43}\lambda_{34}=0.$

Nel qual caso $(X_3 X_5)$ e $(X_4 X_5)$ sono identiche, oppure una di esse è nulla; cosicchè il gruppo G_5 non ha un G_3 per gruppo derivato.

II. $\quad \lambda_{33}+\lambda_{44}=0, \quad \lambda_{41}\neq 0, \quad \lambda_{33}^2+\lambda_{34}\lambda_{43}=0, \quad \lambda_{12}=0.$

In questo caso $(X_3 X_5)$ non può essere nullo perchè altrimenti $(X_1 X_2 X_3 X_5)$ sarebbe un Γ_4; e togliendo da X_4 un multiplo conveniente di X_3 si può fare $\lambda_{43}=\lambda_{44}=0$. Si ha allora che $\lambda_{34}\neq 0$, perchè altrimenti G_5 non avrebbe un G_3 per gruppo derivato; e si può senz'altro porre $\lambda_{34}=1$. Si ottiene così per G_5 la composizione:

$$(X_i X_k)=0 \quad \text{tranne} \quad (X_3 X_4)=X_2 \quad (X_3 X_5)=X_4 \quad (X_4 X_5)=X_1. \tag{13}$$

Per studiare dunque quale dei nostri G_5 ammette un G_3 per gruppo derivato, basterà dunque ricercare ancora soltanto quelli, che contengono un G_4, di cui G_3 è il gruppo derivato. Studieremo successivamente i varii tipi di tali G_4; e ne indicheremo al solito con X_1, X_2, X_3, X_4 le trasformaz. infinit., mentre con X_5 indicheremo una quinta opportuna trasform. di G_5 non appartenente a G_4.

I. Sia il G_4 della composizione:

$$\left.\begin{array}{c}(X_2 X_3)=X_1 \quad (X_1 X_4)=2X_1 \quad (X_2 X_4)=X_2 \quad (X_3 X_4)=X_2+X_3 \\ (X_1 X_2)=(X_1 X_3)=0.\end{array}\right\} \tag{14}$$

Si riconosce tosto che si può scegliere X_5 in modo che:

$$(X_1 X_5)=(X_2 X_5)=(X_4 X_5)=0 \qquad (X_3 X_5)=\lambda_{32} X_2. \tag{14$'$}$$

II. Il gruppo G_4 può essere del tipo:

$$\left.\begin{array}{c}(X_2 X_3)=X_1 \quad (X_1 X_4)=c X_1 \quad (X_2 X_4)=X_2 \quad (X_3 X_4)=(c-1)X_3 \\ (X_1 X_2)=(X_1 X_3)=0 \quad (c\neq 1).\end{array}\right\} \tag{15}$$

Se $c \neq 0$, $c \neq 2$ si ha che X_5 si può scegliere in guisa che:

$$(X_1 X_5) = 0 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 \quad (X_3 X_5) = -\lambda_{22} X_3 \quad (X_4 X_5) = 0. \qquad (15)'$$

Se $c = 2$ si può scegliere X_5 in guisa che:

$$\left.\begin{array}{c}(X_1 X_5) = 0 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 + \lambda_{23} X_3 \quad (X_3 X_5) = \lambda_{32} X_2 - \lambda_{22} X_3 \\ (X_4 X_5) = 0 .\end{array}\right\} \qquad (15)''$$

Se $c = 0$ si può scegliere X_5 in guisa che:

$$(X_4 X_5) = \lambda_{41} X_1 \quad (X_1 X_5) = \lambda_{11} X_1 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{11} X_2 \quad (X_3 X_5) = 0. \qquad (15)'''$$

III. Il gruppo G_4 può essere del tipo:

$$\left.\begin{array}{c}(X_1 X_4) = X_1 \quad (X_2 X_4) = a X_2 \quad (X_3 X_4) = c X_3 \\ (X_i X_k) = 0 \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3) \quad (a \neq 0,\ c \neq 0).\end{array}\right\} \qquad (16)$$

Se $a \neq c \neq 1$ si vede tosto che si può scegliere X_5 in guisa che:

$$(X_1 X_5) = 0 = (X_4 X_5); \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 \quad (X_3 X_5) = \lambda_{33} X_3 . \qquad (16)'$$

Se $a = 1$, $c \neq 1$, X_5 si può scegliere in modo che:

$$\left.\begin{array}{c}(X_1 X_5) = \lambda_{12} X_2 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{21} X_1 + \lambda_{22} X_2 \quad (X_3 X_5) = \lambda_{33} X_3 \\ (X_4 X_5) = 0.\end{array}\right\} \qquad (16)''$$

Se $a = c = 1$, X_5 si può scegliere in guisa che:

$$\left.\begin{array}{c}(X_1 X_5) = \lambda_{12} X_2 + \lambda_{13} X_3 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{21} X_1 + \lambda_{22} X_2 + \lambda_{23} X_3 \\ (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1 + \lambda_{32} X_2 + \lambda_{33} X_3 \quad (X_4 X_5) = 0.\end{array}\right\} \qquad (16)'''$$

Il caso di $a = c \neq 1$ si riduce facilmente al caso di $a = 1$, $c \neq 1$, ecc.

IV. Il gruppo G_4 può essere del tipo:

$$\left.\begin{array}{c}(X_i X_k) = 0\ (i,\ k = 1,\ 2,\ 3); \quad (X_1 X_4) = c X_1; \quad (X_2 X_4) = (1 + c) X_2 \\ X_3 = X_1 + c X_3\end{array}\right\} \qquad (17)$$

dove $c \neq 0$, $c \neq -1$. Si può scegliere X_5 in guisa che:

$$(X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1; \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2; \quad (X_4 X_5) = (X_1 X_5) = 0. \qquad (17)'$$

V. Infine il G_4 può essere del tipo:

$$\left.\begin{array}{c}(X_1 X_4) = X_1 \quad (X_2 X_4) = X_2 \quad (X_3 X_4) = X_2 + X_3 \\ (X_i X_k) = 0 \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3).\end{array}\right\} \qquad (18)$$

E si vede coi soliti metodi che X_5 si può scegliere in guisa che

$$\left.\begin{array}{c}(X_1 X_5) = \lambda_{12} X_2 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 \quad (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1 + \lambda_{32} X_2 + \lambda_{22} X_3 \\ (X_4 X_5) = 0.\end{array}\right\} \qquad (18)$$

Studiamo ora quei G_5 integrabili che hanno un $G_4 (X_1, X_2, X_3, X_4)$ come gruppo derivato. Se noi passiamo in rassegna tutti i varii tipi di G_4 e cerchiamo quando essi possono essere sottogruppi di un G_5, che li ammetta come gruppo derivato, vediamo ben tosto, usando delle relazioni che legano le costanti di composizione, che il G_4 deve essere del tipo

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_3 X_4) = X_2 \qquad (19)$$

e che X_5 si può in tal caso scegliere in guisa che:

$$\left.\begin{array}{l}(X_1 X_5) = X_1 + \lambda_{12} X_2 \quad (X_2 X_5) = (\lambda_{33} + \lambda_{44}) X_2 \\ (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1 + \lambda_{33} X_3 + \lambda_{34} X_4 \quad (X_4 X_5) = \lambda_{41} X_1 + \lambda_{43} X_3 + \lambda_{44} X_4\end{array}\right\} \qquad (19')$$

dove (poichè il gruppo derivato di G_5 è proprio un G_4)

$$\begin{vmatrix} \lambda_{33} & \lambda_{34} \\ \lambda_{43} & \lambda_{44} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Così abbiamo compiuto la ricerca delle possibili composizioni dei nostri G_5 del primo tipo; e osserviamo che con gli stessi metodi si possono ottenere tutte le possibili composizioni dei gruppi a cinque o a più parametri. Passeremo ora ai gruppi G_5 non integrabili. Essi, come sappiamo dell'opera di Lie, non possono presentare che i seguenti tre tipi possibili di composizione:

I. $$\left.\begin{array}{c}(X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_1 X_5) = 0 \quad (X_1 X_3) = (X_4 X_2) = X_2 \\ (X_1 X_4) = (X_2 X_5) = X_1 \quad (X_3 X_4) = -2 X_3 \quad (X_3 X_5) = X_4 \\ (X_4 X_5) = -2 X_5 .\end{array}\right\} \qquad (20)$$

II. $$\left.\begin{array}{c}(X_1 X_4) = (X_1 X_5) = (X_2 X_4) = (X_2 X_5) = (X_3 X_4) = (X_3 X_5) = 0 \\ (X_1 X_2) = X_1 ; \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 ; \quad (X_2 X_3) = X_3 ; \quad (X_4 X_5) = X_4 .\end{array}\right\} \qquad (21)$$

III. $$\left.\begin{array}{r}(X_1 X_4) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = (X_4 X_5) = (X_1 X_5) = \\ = (X_2 X_5) = (X_3 X_5) = 0 \\ (X_1 X_2) = X_1 ; \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 ; \quad (X_2 X_3) = X_3 .\end{array}\right\} \qquad (22)$$

Prima di procedere oltre, daremo effettivamente le trasformazioni infinitesime dei gruppi (1), (2),..., (22) trascurando quelli di questi gruppi che o contengono un G_4 intransitivo, o due trasformazioni infinitesime con le stesse traiettorie, e quelli che non possono essere ottenuti con gruppi su quattro variabili. A tal fine prenderemo un G_4 del G_5 da determinare: esso, per ipotesi dovrà essere transitivo. Conoscendone già la composizione, dal § 11 della mia Mem. cit., ne trarremo senz'altro le trasformazioni infinitesime X_1, X_2, X_3, X_4; per determinare poi la quinta trasformazione X_5 di G_5 ci serviremo delle relazioni che per i suoi coefficienti si ottengono esprimendo che le $(X_i X_5)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ hanno i valori trovati. Di più osserveremo che se le X_1, X_2, X_3 generano un G_3 su tre variabili x_1, x_2, x_3 e se si suppone l'elemento lineare di S_4 già ridotto alla forma

$$d s^2 = d x_4^2 + \sum_{i,k}^{1,2,3} a_{ik}\, d x_i\, d x_k ,$$

si avrà, ponendo

$$X_5 = \sum_{i=1}^{4} \eta_i (x_1, x_2, x_3, x_4) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

che $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4} = 0$. Se di più $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ dovrà essere anche

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial x_4} = 0 \; (i = 1, 2, 3)$$

per le formule di Killing.

Faremo il calcolo per il gruppo (1) come esempio, accontentandoci poi di dare il solo risultato per gli altri gruppi.

Scrivendo in esso X_2, X_3, X_4, X_1, X_5 invece di X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 la sua composizione diventa:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_3 X_4) = X_2 \quad (X_2 X_5) = X_2 .$$

Il gruppo X_1, X_2, X_3, X_4 è perciò del tipo V al § 11 e si potrà scrivere (§ 11)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_4 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4} \quad (l_4 = \text{cost.}).$$

Le $(X_1 X_5) = (X_3 X_5) = 0$, $(X_2 X_5) = X_2$ danno

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta_i}{\partial x_3} = 0 \; (\eta_i = 1, 2, 3, 4) \quad \frac{\partial \eta_k}{\partial x_2} = 0 \; (k = 1, 3, 4) \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} = 1$$

cosicchè sarà:

$$X_5 = m_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 + m_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + m_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + m_4 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove m_4 è una costante, ed m_1, m_2, m_3 sono indipendenti da x_1, x_2, x_3. Per l'osservazione precedente anche m_1, m_2, m_3 saranno costanti e si potrà porre:

$$X_5 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + m_4 \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Si verifica senz'altro che $(X_4 X_5) \mathrel{=}\!\!|\!\!= 0$ non è della forma $\sum_{i=1}^{5} \lambda_i X_i$, dove le λ_i sieno costanti e quindi è inutile occuparci di questo primo caso.

Passando ai G_5 di composizione (2) e scrivendo X_2, X_3, X_4, X_1, X_5 rispettivamente al posto di X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 otterremo che si potrà porre:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_4 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4};$$

$$X_5 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{m_4} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

con l_4, m_4 costanti. Anche di questo caso è inutile tener conto perchè la trasformazione $\frac{1}{m_4} X_4 - \frac{1}{l_4} X_5$ insieme a X_1, X_2, X_3 genera un G_4 intransitivo.

Nel caso (3) otteniamo analogamente:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (i = 1,\ 2,\ 3) \quad X_4 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{l_1} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$X_5 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{m_4} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

con l_4, m_4 costanti. Anche questo caso è da trascurare perchè

$$\frac{1}{m_4} X_4 - \frac{1}{l_4} X_5$$

con X_1, X_2, X_3 genera un G_4 intransitivo.

Per la stessa ragione è inutile tener conto del tipo (4) in cui si avrebbe

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (i = 1,\ 2,\ 3); \quad X_4 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4};$$

$$X_5 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{m_4} \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

E analogamente si trova che è inutile tener conto dei tipi (5), (6), (7), (8).

Per il tipo (9) le trasform. infinit. X_1, X_2, X_3, X_4 si possono scrivere, come sappiamo dalla nostra Mem. più volte citata,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_4 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + c\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{l_4}\frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Tenendo conto dei valori di $(X_i X_5)$ $(i = 1, 2, 3)$ si vede che:

$$X_5 = \lambda_{33}\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{m_4}\frac{\partial}{\partial x_4}$$

con m_4 costante. Ma si vede subito che questo caso è da trascurare, perchè $(X_4 X_5)$ è identicamente nullo, cosicchè G_5 non avrebbe più un G_3 per gruppo derivato.

Con procedimento analogo si vede che è inutile tener conto dei tipi (10), (11), (12), (12)$^{\text{bis}}$.

Nel caso (13) il gruppo (X_1, X_2, X_3, X_4) si potrà scrivere:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$X_4 = l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_3 + l_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{l_4}\frac{\partial}{\partial x_4}$$

con l_1, l_2, l_3, l_4 costanti. Posto $X_5 = \sum_{i=1}^{4} \eta_i (x_1, x_2, x_3, x_4) \frac{\partial}{\partial x_i}$ si ha per le formule di composizione:

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta_i}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial \eta_h}{\partial x_3} = l_k \,(k = 1, 3); \quad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = -\frac{1}{l_4}; \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x_3} = x_3 + l_2$$

$$l_3 \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{l_4}\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial x_i} - \eta_3 \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

donde

$$l_3 = 0, \quad \frac{\partial \eta_3}{\partial x_4} = 0, \quad -\frac{1}{l_4}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_4} = 1, \quad \frac{1}{l_4}\frac{\partial \eta_2}{\partial x_4} + \eta_3 = 0.$$

Sarà quindi

$$X_5 = (l_1 x_3 - l_4 x_4)\frac{\partial}{\partial x_1} + m_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \left(- m_3 l_4 x_4 + \frac{x_3^2}{2} + l_2 x_3\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + \\ + \left(-\frac{x_3}{l_4} + m_4\right)\frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove m_3, m_4 sono costanti. Il sottogruppo X_1, X_2, $X_4 - l_3 X_3$, $X_5 - m_3 X_3$ è intransitivo, cosicchè è inutile occuparci di questo caso.

È pure inutile occuparci del tipo (14), (14)'. Basta infatti determinare $X_5 = \Sigma\, \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ tenendo conto dei valori di $(X_1 X_5)$, $(X_2 X_5)$, $(X_3 X_5)$ ricordando che $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4} = 0$ e che se $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ anche $\frac{\partial \eta_k}{\partial x_4} = 0$ $(k = 1, 2, 3)$. Si trova tosto che la $k X_4 + h X_5$ (dove k, h sono opportune costanti) genera con X_1, X_2, X_3 un gruppo intransitivo.

Identico risultato si troverebbe analogamente per i tipi (15) (15'), (15) (15)'', (15) (15)''', (16) (16)', (16) (16)'', (16) (16)''', (17) (17)', (18) (18)'.

Considereremo ora il tipo (19) (19)'. Avremo, indicando (§ 11 della Mem. cit.) al solito con

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3},\ X_4 = l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} +$$

$$+ (x_3 + l_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_1}$$

il sottogruppo $(X_1 X_2 X_3 X_4)$ (*) e con $X_5 = \sum_i \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ la quinta trasformazione di G_5, che si potrà porre, indicando con n_i, ν_i delle costanti:

$$\left.\begin{aligned}
\eta_1 &= x_1 + (\lambda_{31} + l_1 \lambda_{34}) x_3 + n_1 x_4 + \nu_1 \\
\eta_2 &= \lambda_{12} x_1 + (\lambda_{33} + \lambda_{44}) x_2 + \lambda_{34}\left(\frac{1}{2} x_3^2 + l_2 x_3\right) + \\
&\qquad + (l_1 \lambda_{12} + l_2 \lambda_{33} + l_2 \lambda_{44} + l_3 l_2 \lambda_{34} - l_3 l_2 - \nu_3) x_4 + \nu_2 - n_3 \frac{x_4^2}{2} \\
\eta_3 &= (\lambda_{33} + l_3 \lambda_{34}) x_3 + n_3 x_4 + \nu_3 \\
\eta_4 &= - x_3 + n_4
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

Basta per ottenere queste formule ricordare le relazioni che si ottengono esprimendo che $(X_i X_5)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ hanno i valori prefissi.

Passiamo ora al tipo (20); e, per uniformità di notazione, scambiamo X_1, X_2. Otterremo per il gruppo $(X_1 X_2 X_3 X_4)$ la composizione:

$$(X_1 X_2) = (X_1 X_3) = 0,\ (X_2 X_3) = X_1;\ (X_2 X_4) = X_2,$$

$$(X_1 X_4) = - X_1,\ (X_3 X_4) = - 2 X_3\,.$$

(*) Dove le l_i sono costanti.

Il gruppo $(X_1 X_2 X_3 X_4)$, che naturalmente supponiamo transitivo, sarà dunque definito dalle:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$X_4 = (-2x_1 + l_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (-x_1 l_3 - x_2 + l_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (x_3 + l_3)\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove le l_i sono costanti. Avremo poi:

$$(X_1 X_5) = X_2 \quad (X_2 X_5) = 0 \quad (X_3 X_5) = X_4 \quad (X_4 X_5) = -2 X_5 .$$

Posto $X_5 = \Sigma \, \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ed esprimendo che queste eguaglianze sono soddisfatte, otterremo ricordando che $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4} = 0$ e indicando con n_1, n_2, n_3, n_4 delle costanti:

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1 = \left(x_1 - \frac{l_1}{2}\right)^2 + n_1 e^{4x_4}; \quad \eta_2 = l_3 x_1^2 - l_1 l_3 x_1 - n_3 x_1 e^{x_4} + \\ \qquad\qquad + n_2 e^{3x_4} + l_3 n_1 e^{4x_4} + \frac{l_1}{2} n_3 e^{x_4}; \\ \eta_3 = x_2 - l_3 x_1 + n_3 e^{x_4}; \quad \eta_4 = x_1 - \frac{l_1}{2} . \end{array}\right\} \quad \text{(II)}$$

Andiamo ora al tipo (21). Scrivendo X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 rispettivamente per le $X_3, X_4, -X_2, X_5, X_1$ otterremo:

$$(X_1 X_3) = X_1 \quad (X_2 X_4) = X_2$$

$$(X_2 X_3) = (X_1 X_2) = (X_3 X_4) = (X_1 X_4) = 0.$$

Il G_4 generato da queste trasformazioni infinitesime, che naturalmente supponiamo transitivo, sarà dunque definito (§ 11) dalle:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$X_4 = l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + l_2 e^{-x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_3 + l_3)\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove l_1, l_2, l_3 sono costanti. Ricordiamo che possiamo supporre, posto al solito $X_5 = \Sigma \, \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, che $\eta_4 \neq 0$ perchè altrimenti il gruppo X_1, X_2, X_3, X_5 sarebbe un G_4 intransitivo. E avremo che (indicando con n_1, n_2, n_3, n_4 delle costanti):

$$\left.\begin{aligned} & l_1 = 0 \\ & X_5 = [-2\,x_2 + e^{\,x_1}(n_1 - 2\,l_2 x_4)]\frac{\partial}{\partial x_1} + \\ & + [x_2^2 + e^{-2x_1}(-l_2^2 x_4^2 + n_1 l_2 x_4 + n_2)]\frac{\partial}{\partial x_2} + \\ & + n_3\, e^{\,(x_1 + x_4)}\frac{\partial}{\partial x_3} + n_4\, e^{-x_1}\frac{\partial}{\partial x_4}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

Per ottenere queste formule basta ricordare che

$$(X_1 X_5) = 2\,X_3 \quad (X_2 X_5) = 0 \quad (X_3 X_5) = X_5 \quad (X_4 X_5) = 0.$$

Occupiamoci ora del tipo (22). Scrivendo X_1, X_4, X_3, X_2, X_5 al posto delle $(X_1 X_2 X_4 X_5 X_3)$ otteniamo intanto:

$$(X_1 X_2) = (X_1 X_3) = (X_2 X_3) = 0 \quad (X_1 X_4) = X_1 \quad (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0$$

cosicchè si potrà scrivere (§ 11 della mia Mem. cit.)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_4 = (x_1 + l_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + l_2\frac{\partial}{\partial x_2} + l_3\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Poniamo al solito $X_5 = \Sigma\, \eta_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ Esprimendo che

$$(X_2 X_5) = (X_3 X_5) = 0\,, \quad (X_1 X_5) = 2\,X_4\,, \quad (X_4 X_5) = X_5$$

troveremo che si potrà porre, indicando con n_i delle costanti

$$\left.\begin{aligned} X_5 = & (x_1^2 + 2\,x_1 l_1 + n_1 e^{-2x_4})\frac{\partial}{\partial x_1} + (2\,l_2 x_1 + n_2 e^{-x_4})\frac{\partial}{\partial x_2} + \\ & + (2\,l_3 x_1 + n_3 e^{\,x_4})\frac{\partial}{\partial x_3} - 2\,(l_1 + x_1)\frac{\partial}{\partial x_4}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

Per le prime due classi da esaminare ci siamo ricondotti ai soli tipi (I), (II), (III), (IV).

Studiamo ora quei G_5 che contengono per sottogruppo uno di quei G_4 intransitivi che si possono considerare come gruppi di movimenti. E studieremo anzitutto le loro possibili composizioni. E perciò osserviamo che un G_4 intransitivo, che si possa considerare come gruppo di movimenti ha una delle composizioni seguenti: (Per il valore effettivo v. § 11 A.)

$$(X_1 X_2) = (X_1 X_3) = (X_1 X_4) = 0 \quad (X_2 X_3) = X_1$$
$$(X_2 X_4) = - X_3 \quad (X_3 X_4) = X_2$$

oppure:

$$(X_2 X_1) = (X_2 X_3) = (X_2 X_4) = 0 \quad (X_1 X_3) = - X_1$$
$$(X_1 X_4) = X_3 \quad (X_3 X_4) = - X_4$$

oppure:

$$(X_1 X_2) = X_3 \quad (X_2 X_3) = X_1 \quad (X_3 X_1) = X_2$$
$$(X_1 X_4) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0.$$

Cerchiamo di trovare le possibili composizioni di un G_5 che possegga per sottogruppo uno di questi G_4. Porremo

$$(X_i X_5) = \sum_{k=1}^{5} \lambda_{ik} X_k \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

e scriveremo le relazioni tra le costanti di composizione, cercando poi di semplificare i risultati, sostituendo alla X_5 una trasformazione $X_5 - \sum_{i=1}^{4} p_i X_i$ dove le p_i sono opportune costanti. Troveremo così nel primo caso:

$$\left.\begin{array}{c} (X_1 X_5) = 2 \lambda_{22} X_1 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 \quad (X_3 X_5) = \lambda_{22} X_3 \\ (X_4 X_5) = \lambda_{41} X_1 \end{array}\right\} \qquad \text{(V)}$$

oppure

$$\left.\begin{array}{c} (X_1 X_5) = 0 \quad (X_2 X_5) = - \lambda_{33} X_2 + \lambda_{45} \lambda_{33} X_2 \quad (X_3 X_5) = \lambda_{33} X_3 \\ (X_4 X_5) = - 2 \lambda_{33} X_4 + \lambda_{45} X_5 + \lambda_{41} X_1; \quad (4 \lambda_{33} + \lambda_{45}^2 \lambda_{33} = 0). \end{array}\right\} \quad \text{(VI)}$$

Nel secondo caso troveremo:

$$(X_1 X_5) = (X_3 X_5) = (X_4 X_5) = 0 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 + \lambda_{25} X_5 . \qquad \text{(VII)}$$

Nel terzo caso infine avremo:

$$(X_1 X_5) = (X_2 X_5) = (X_3 X_5) = 0 ; \quad (X_4 X_5) = \lambda_{44} X_4 + \lambda_{45} X_5 . \qquad \text{(VIII)}$$

Troviamo ora effettivamente la X_5 in questi casi, servendoci dei valori delle $(X_i X_5)$ testè dati. Porremo $X_5 = \sum_{i=1}^{4} \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, supponendo $\eta_4 \neq 0$, perchè altrimenti lo spazio ammetterebbe un G_5 intransitivo e quindi anche un G_6 intransitivo, caso che esamineremo a parte.

Le (V), (VI) ... daranno successivamente delle equazioni per le η_i, che integreremo.

Otterremo così nel caso V, ricordando che $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4} = 0$ e che se

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

anche $\frac{\partial \eta_i}{\partial x_4} = 0$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ che:

$$X_5 = \lambda_{22}\, x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2\, \lambda_{22}\, x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda_{22}\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}\,. \tag{V$'$}$$

Nel caso VI si trova tosto che deve essere $\lambda_{45} = 0$ e quindi anche $\lambda_{33} = 0$; cosicchè questo caso rientra nel precedente, dove si faccia $\lambda_{22} = 0$.

Nel caso VII si trova:

per $n = 0$, $\lambda_{25} \neq 0$

$$X_5 = e^{\lambda_{25} x_3} \left[\nu_3 (x_4) \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right] \tag{VII$'$}$$

dove ν_3 è funzione di x_4,

per $n = 0 = \lambda_{25}$

$$X_5 = \lambda_{22}\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \tag{VII$''$}$$

per $n \neq 0$,

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial x_4}\,, \qquad \lambda_{25} = \lambda_{22} = 0. \tag{VII$'''$}$$

Nel caso VIII si trova:

per $n \neq 0$

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial x_4}\,, \qquad \lambda_{45} = \lambda_{44} = 0 \tag{VIII$'$}$$

per $n = 0$, $\lambda_{45} = 0$

$$X_5 = \lambda_{44}\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \tag{VIII$''$}$$

per $n = 0$, $\lambda_{45} \neq 0$

$$X_5 = e^{\lambda_{45} x_3} \left[\nu_3 (x_4) \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right]$$

dove ν_3 è funzione di x_4.

La ricerca perciò degli spazii G_4 che ammettono un G_5 è ridotta perciò a quella degli spazii che ammettono uno dei G_5 trovati (I), (II), (III), (IV), (V)', (VII)', (VII)'', (VII)''', (VIII)', (VIII)'', (VIII)'''.

Nel caso (I) abbiamo trovato, posto

$$X_5 = \Sigma \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e indicando con n_1, ν_1, n_2, ν_2, n_3, ν_3, n_4 delle costanti dipendenti dalle λ_{41}, λ_{43}, λ_{44}

$$\eta_1 = x_1 + (\lambda_{31} + l_1 \lambda_{34}) x_3 + n_1 x_4 + \nu_1$$

$$\eta_2 = \lambda_{12} x_1 + (\lambda_{33} + \lambda_{44}) x_2 + \lambda_{34} \left(\frac{x_3^2}{2} + l_2 x_3 \right) +$$
$$+ (l_1 \lambda_{12} + l_3 \lambda_{33} + l_2 \lambda_{44} + l_3 l_2 \lambda_{34} - l_3 l_2 - \nu_3) x_4 + \nu_2 - n_3 \frac{x_4^2}{2}$$

$$\eta_3 = (\lambda_{33} + l_3 \lambda_{34}) x_3 + n_3 x_4 + \nu_3$$

$$\eta_4 = - x_3 + n_4 .$$

Mutando le notazioni e trascurando in η_1, η_2, η_3 le costanti additive otteniamo:

$$\eta_1 = x_1 + (\lambda_{31} + l_1 \lambda_{34}) x_3 + n_1 x_4 ;$$

$$\eta_2 = \lambda_{12} x_1 + (\lambda_{33} + \lambda_{44}) x_2 + \lambda_{34} \left(\frac{x_3^2}{2} + l_2 x_3 \right) - n_3 \frac{x_4^2}{2} + \nu_3 x_4 ;$$

$$\eta_3 = (\lambda_{33} + l_3 \lambda_{34}) x_3 + n_3 x_4 ;$$

$$\eta_4 = n_4 - x_3 .$$

Il gruppo (X_1, X_2, X_3, X_4) è del tipo citato nella prima pagina del presente lavoro; ma, come abbiamo ivi detto, ogni spazio che ammette un G_4 di questo tipo ammette un G_5, contenente G_4, e la cui quinta trasformazione infinitesima non è del tipo precedente; cosicchè questi spazii sono inclusi senz'altro tra gli spazii dei tipi seguenti; ed è di essi inutile occuparci.

Passiamo al tipo II. Posto $X_5 = \Sigma \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, abbiamo trovato, indicando con n_i delle costanti e trascurando nelle η_2, η_3 le costanti additive eventuali che

$$\eta_1 = \left(x_1^2 - l_1 x_1 + n_1 e^{4x_1} + \frac{l_1^2}{2}\right);$$

$$\eta_2 = l_3 x_1^2 - x_1 l_1 l_3 - n_3 x_1 e^{x_1} + n_2 e^{3x_1} + l_3 n_1 e^{4x_1} + \frac{l_1}{2} n_3 e^{x_1};$$

$$\eta_3 = x_2 - l_3 x_1 + n_3 e^{x_1};$$

$$\eta_4 = x_1 - \frac{l_1}{2}.$$

Il gruppo (X_1, X_2, X_3, X_4) è del tipo I (*) (perchè ammette un G_3 come gruppo derivato) dove si ponga $c = -1$; quindi l'elemento lineare è del tipo già trovato a pag. 78 della mia Mem. cit. Scriviamo le equazioni di Killing relative ad X_5 e ai varii coefficienti dell'elemento lineare. Scrivendo l'equazione per a_{22} troviamo $p_{23} = 0$. Scrivendo l'equazione relativa ad a_{31} abbiamo:

$$\left(x_1^2 - l_1 x_1 + n_1 e^{4x_1} + \frac{l_1^2}{4}\right)(p_{12} e^{3x_1} - l_3 p_{22} e^{2x_1}) +$$

$$+ \left(x_1 - \frac{l_1}{2}\right)(x_1 \psi' + \vartheta') + (2 x_1 - l_1)(x_1 \psi + \vartheta) + 2 l_3 x_1 (x_1 \chi + \lambda) -$$

$$- l_3 (x_1^2 \chi + 2 x_1 \lambda + \mu) = 0.$$

Annullando i coefficienti di x_1^2, x_1, x_1^0 otteniamo:

$$p_{13} e^{x_1} + l_1 l_3 p_{22} e^{2x_1} = 0$$

$$n_1 p_{12} e^{x_1} - (n_1 l_3 p_{22} + l_3 p_{33}) e^{2x_1} + \frac{l_1}{2} p_{13} e^{-x_1} = 0$$

ossia

$$p_{13} = l_1 l_3 p_{22} = n_1 p_{12} = n_1 l_3 p_{22} + l_3 p_{33} = 0.$$

Scrivendo l'equazione di Killing relativa ad a_{33} si ha:

$$\left(x_1^2 - l_1 x_1 + n_1 e^{4x_1} + \frac{l_1^2}{4}\right)(2 x_1 \chi + 2 \lambda) +$$

$$+ \left(x_4 - \frac{l_1}{2}\right)(x_1^2 \chi' + 2 x_1 \lambda' + \mu') = 0$$

donde

$$l_1 p_{22} = l_1 p_{33} = p_{33} + n_1 p_{22} = 0.$$

(*) Cfr. pag. 77 della mia Mem. cit.

E poichè è $p_{13} = p_{23} = 0$, sarà $p_{33} \neq 0$ perchè altrimenti la forma sarebbe a discriminante nullo; quindi $l_1 = 0$. Essendo $p_{33} \neq 0$ si avrà per la

$$p_{33} + n_1 p_{22} = 0$$

che

$$n_1 p_{22} \neq 0$$

e quindi

$$n_1 \neq 0 \qquad p_{22} \neq 0$$

e per la

$$n_1 p_{12} = 0$$

si otterrà

$$p_{12} = 0.$$

Scrivendo l'equazione di Killing relativa ad a_{11} otteniamo:

$$2 n_3 p_{12} e^{-2x_1} - 2 l_3 p_{13} e^{-x_1} = 0$$

che è, per le precedenti, senz'altro soddisfatta.

Scrivendo l'equazione di Killing relativa ad a_{12} troviamo

$$\left(x_1 - \frac{l_1}{2}\right)\psi' + (x_1 \psi + \vartheta) - l_3 (x_1 \chi + \lambda) + \psi (2 x_1 - l_1) +$$
$$+ \chi (2 l_3 x_1 - l_1 l_3 - n_3 e^{x_1}) = 0$$

ossia:

$$n_3 p_{22} = 0$$

ossia, poichè $p_{22} \neq 0$,

$$n_3 = 0.$$

L'equazione di Killing relativa ad a_{23} si trova senz'altro, per le equazioni precedenti, soddisfatta.

L'equazione di Killing per a_{41} si riduce alla $\dfrac{\partial \tau_4}{\partial x_4} = 0$.

L'equazione di Killing per a_{14} diventa:

$$1 = 4 p_{11} n_1 - 3 l_3 n_2 p_{22} e^{x_4}$$

ossia

$$p_{11} = \frac{1}{4 n_1}; \qquad l_3 n_2 = 0.$$

L'equazione di Killing per a_{24} diventa:

$$n_2 p_{22} e^{x_4} = 0$$

ossia, poichè $p_{22} \neq 0$, $n_2 = 0$.

L'equazione di KILLING per a_{34} si trova perciò soddisfatta.

Troviamo così che

$$d s^2 = d x_4^2 + \frac{1}{4 n_1} e^{-4x_4} d x_1^2 +$$
$$+ p_{22} e^{-2x_4} d x_2^2 - 2 l_3 p_{22} e^{-2x_4} d x_1 d x_2 - 2 l_3 p_{22} x_1 e^{-2x_4} d x_1 d x_3 +$$
$$+ 2 x_1 p_{22} e^{-2x_4} d x_2 d x_3 + (x_1^2 p_{22} e^{-2x_4} - n_1 p_{22} e^{2x_4}) d x_3^2$$

che ammette il gruppo generato dalle:

$$\left.\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ &X_4 = -2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (-l_3 x_1 - x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \\ &X_5 = (x_1^2 + n_1 e^{4x_4}) \frac{\partial}{\partial x_1} + (l_3 x_1^2 + l_3 n_1 e^{4x_4}) \frac{\partial}{\partial x_2} + \\ &\qquad\qquad + (x_2 - l_3 x_1) \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Studiamo ora il tipo III. Un gruppo di tal tipo contiene come sottogruppo il gruppo generato dalle X_1, X_2, X_3, X_4 cosicchè potremo porre (cfr. pag. 79 della mia Mem. cit.):

$$d s^2 = d x_4^2 + \varphi d x_1^2 + 2 \psi e^{x_1} d x_1 d x_2 + \vartheta e^{2x_1} d x_2^2 +$$
$$+ \mu d x_3^2 + 2 \chi d x_1 d x_3 + 2 \lambda e^{x_1} d x_2 d x_3$$

dove

$$\lambda = p_{23} e^{x_4}, \qquad \mu = p_{33} e^{2x_4} \qquad \vartheta = p_{22} \qquad \chi = e^{x_4}(-l_2 p_{23} x_4 + p_{13})$$
$$\psi = (-l_2 p_{22} x_4 + p_{12}) \qquad \varphi = -2 l_2 \left(p_{12} x_4 - \frac{l_2}{2} p_{22} x_4^2 + p_{11}\right).$$

Scriviamo le equazioni di KILLING relative alla X_5, ricordando che per ipotesi $n_4 \neq 0$. Scrivendo l'equazione per a_{33} troviamo

$$p_{33} = 0. \tag{α}$$

Scrivendo l'equazione per a_{23} troviamo

$$p_{13} = p_{23} \frac{n_1 + n_4}{2} \tag{β}$$

e quindi $p_{23} \neq 0$, perchè altrimenti essendo $p_{13} = p_{23} = p_{33} = 0$, il nostro elemento lineare sarebbe degenere.

Scrivendo l'equazione relativa ad a_{22}, troviamo

$$p_{12} = \frac{1}{2} n_1 p_{22}. \tag{γ}$$

Scrivendo l'equazione relativa ad a_{12} e annullandovi il termine indipendente da x_4 troviamo

$$4 l_2 p_{11} - n_4 l_2 p_{22} - 2 n_2 p_{22} - n_3 p_{23} = 0. \tag{δ}$$

Operando analogamente per a_{11} troviamo:

$$4 l_2 p_{11} n_1 - 2 l_2 p_{12} n_4 - 4 p_{12} n_2 - 2 n_3 p_{13} = 0 \tag{ε}$$

ossia, per le (β), (γ):

$$4 l_2 p_{11} n_1 - p_{22} n_4 l_2 n_1 - 2 p_{22} n_1 n_4 - n_3 n_1 p_{23} - n_4 n_3 p_{23} = 0. \tag{ζ}$$

Sottraendo dalla (ζ) la (δ) moltiplicata per n_1 troviamo

$$n_4 n_3 p_{23} = 0$$

e, poichè

$$n_4 \neq 0, \quad p_{23} \neq 0 \quad \text{sarà} \quad n_3 = 0. \tag{ζ'}$$

Scrivendo l'equazione per a_{34}, avremo:

$$- 2 e^{x_1} (- l_2 p_{23} x_4 + p_{13}) l_2 e^{-x_1} +$$

$$+ p_{23} e^{x_1 + x_4} [e^{-2x_1} (- 2 l_2^2 x_4 + n_1 l_2)] + p_{23} e^{2x_4} (- n_3 e^{-x_1 - x_4}) = 0$$

donde si ricava:

$$- 2 l_2 p_{13} + n_1 l_2 p_{23} - n_3 p_{33} = 0$$

ossia per le (β), (ζ')

$$p_{23} l_2 n_4 = 0$$

e poichè $p_{23} \neq 0$, $n_4 \neq 0$

$$l_2 = 0. \tag{η}$$

Scriviamo ora l'equazione di Killing relativa ad a_{14}. Avremo:

$$- 2 l_2 \left(p_{12} x_4 - \frac{l_2}{2} p_{22} x_4^2 + p_{11}\right) (- 2 l_2 e^{-x_1}) +$$

$$+ e^{x_1} (- l_2 p_{22} x_4 + p_{12}) e^{-2x_1} (- 2 l_2^2 x_4 + n_1 l_2) +$$

$$+ e^{x_1} (- n_3 e^{-x_1 - x_4}) (- l_2 p_{23} x_4 + p_{13}) = n_1 e^{-x_1}$$

donde per le (ζ'), (η) si trae

$$n_4 = 0$$

uguaglianza contraria all'ipotesi. Del caso III è perciò inutile occuparci.

Tratteremo ora del IV caso. L'elemento lineare da cercarsi sarà del tipo (§ 13 della mia Mem. cit.).

$$d s^2 = d x_4^2 + p_{11} e^{2x_4} d x_1^2 + p_{22} d x_2^2 + p_{33} d x_3^2 + 2 p_{12} e^{x_4} d x_1 d x_2 + \\ + 2 p_{13} e^{x_4} d x_1 d x_3 + 2 p_{23} d x_2 d x_3$$

dove le p_{ik} sono costanti, il cui determinante P non è nullo.

Scrivendo le equazioni di Killing per le a_{ik} relative alla X_5 troviamo:

$$l_2 p_{i2} + l_3 p_{i3} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{α}$$

$$\left.\begin{aligned} & 2 p_{11} n_1 + p_{12} n_2 + p_{13} n_3 = -2 \\ & 2 p_{i1} n_1 + p_{i2} n_2 + p_{i3} n_3 = 0 \qquad (i = 2,\ 3). \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

Affinchè P sia diverso da zero, sarà per le (α)

$$l_2 = l_3 = 0.$$

Dalle (β) abbiamo poi indicando con π_{ik} il complemento algebrico di p_{ik} in P diviso per P che:

$$n_1 = -\pi_{11} \qquad n_2 = -2\pi_{12} \qquad n_3 = -2\pi_{13}.$$

Otteniamo così, aggiungendo alla X_5 una conveniente combinazione lineare delle X_1, X_2, X_3, X_4:

$$\left.\begin{aligned} & d s^2 = d x_4^2 + p_{11} e^{2x_4} d x_1^2 + 2 p_{12} e^{x_4} d x_1 d x_2 + 2 p_{13} e^{x_4} d x_1 d x_3 + \\ & \qquad\qquad + p_{22} d x_2^2 + p_{33} d x_3^2 + 2 p_{23} d x_2 d x_3 \\ & X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\ (i = 1,\ 2,\ 3); \quad X_4 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4}; \\ & \qquad X_5 = (x_1^2 - \pi_{11} e^{-2x_4}) \frac{\partial}{\partial x_1} - 2\pi_{12} e^{-x_4} \frac{\partial}{\partial x_2} - \\ & \qquad\qquad - 2\pi_{13} e^{-x_4} \frac{\partial}{\partial x_3} - 2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}. \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

Nel caso (V)′ si ha (§ 13 della mia Mem. cit.) che si può scrivere:

$$d s^2 = d x_4^2 + \varphi\, d x_1^2 + \psi\, d x_2^2 + 2 x_1 \psi\, d x_2 d x_3 + (x_1^2 \psi + \varphi)\, d x_3^2 \tag{C}$$

dove φ, ψ sono funzioni di x_4. Scrivendo le equazioni di KILLING si trova

$$-\varphi' + 2\varphi\lambda_{22} = 0$$
$$-\psi' + 4\psi\lambda_{22} = 0$$

ossia

$$\varphi = l_1 e^{2\lambda_{22}x_4}$$
$$\psi = l_2 e^{4\lambda_{22}x_4},$$

dove l_1, l_2 sono costanti.

Nel caso (VII) si ha (osservando il sottogruppo X_1, X_2, X_3, X_4 (§ 13 della Mem. cit.)) che si può porre, indicando con φ, ψ delle funzioni di x_4,

$$\left.\begin{aligned} d s^2 = d x_4^2 + \varphi\, d x_1^2 + \psi\, d x_3^2 + e^{2x_1}\left[(1-n^2)\varphi + n^2\psi\right] d x_2^2 + \\ + 2 n \psi e^{x_1} d x_2\, d x_3 \end{aligned}\right\} \tag{D}$$

dove φ, ψ sono funzioni di x_4.

Nel caso (VII)‴ avremo senz'altro che φ, ψ sono costanti effettive. (D‴)

Nel caso (VII)″ abbiamo, usando delle equazioni di KILLING,

$$n = \varphi' = -\psi' + 2\lambda_{22}\psi = 0$$

ossia

$$n = 0, \quad \varphi = l_1, \quad \psi = l_3 e^{2\lambda_{22}x_4} \tag{D″}$$

con l_1, l_3 costanti.

Nel caso (VII)′ troviamo, scrivendo le equazioni di KILLING,

$$n = \varphi' = 0 \qquad \psi\nu'_3 = \lambda'_{25} \qquad -\psi' + 2\lambda_{25}\nu_3\psi = 0.$$

Portando nella terza di queste il valore di λ_{25} dato dalla seconda, abbiamo poichè $\psi \neq 0$ (altrimenti la D sarebbe una forma degenere)

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\psi}\right)}{\partial x_4} + \frac{\partial(\nu_3^2)}{\partial x_4} = 0$$

donde, integrando,

$$\frac{1}{\psi} = l_3^2 - \nu_3^2 \quad \text{e quindi} \quad \nu'_3 = \lambda_{25} l_3^2 - \lambda_{25}\nu_3^2$$

dove l_3 è una costante. Integrando di nuovo si ottiene

$$\nu_3 = l_3 \operatorname{tang} h\,(l_3\lambda_{25}x_4 + \text{cost.})$$

e quindi

$$l_3^2 - \nu_3^2 = l_3^2 \frac{1}{\cos h^2 (l_3 \lambda_{25} x_4 + \text{cost.})}$$

$$\varphi' = n = 0 ; \qquad \psi = \frac{\cos h^2 (l_3 \lambda_{25} x_4 + \text{cost.})}{l_3^2} . \qquad \text{(D)}'$$

Se $l_3 = 0$ si ha

$$\left(\frac{1}{\nu_3}\right)' = \lambda_{25} , \quad \nu_3 = \frac{1}{\lambda_{25} x_4 + n_3} \quad \psi = -\left(\frac{1}{\lambda_{25} x_4 + n_3}\right)^2 . \qquad \text{(D)}'^{\text{bis}}$$

Nel caso VIII avremo che si potrà porre, indicando con φ e ψ delle funzioni di x_4,

$$\left. \begin{aligned} d s^2 = d x_4^2 + \varphi\, d x_1^2 + \psi\, d x_3^2 + 2 n \psi \cos x_1\, d x_2\, d x_3 + \\ + (n^2 \psi \cos^2 x_1 + \varphi \operatorname{sen}^2 x_1)\, d x_2^2 . \end{aligned} \right\} \qquad \text{(E)}$$

Nel caso (VIII)$'$ avremo senz'altro, indicando con l_1, l_3 delle costanti,

$$\varphi = l_1 = \text{cost.} ; \qquad \psi = l_2 = \text{cost.} \qquad \text{(E}')$$

Nel caso (VIII)$''$ abbiamo, usando delle formule di Killing,

$$n = \varphi' = 0 ; \qquad -\psi' + 2 \psi \lambda_{44} = 0$$

ossia

$$n = 0 ; \qquad \varphi = l_1 ; \qquad \psi = l_3 e^{2\lambda_{44} x_4} \qquad \text{(E}'')$$

dove l_1, l_3 sono costanti.

Nel caso (VIII)$'''$ avremo analogamente:

$$n = \varphi' = 0 ; \qquad -\psi' + 2 \psi n_3 \lambda_{45} = 0 ; \qquad \psi \nu'_3 = \lambda_{45}$$

donde si ricava come nel caso (VII)$'''$

$$n = 0 ; \quad \varphi = l_1 ; \quad \psi = \frac{1}{l_3^2 - \nu_3^2} ; \quad \nu_3 = l_3 \operatorname{tangh} (l_3 \lambda_{45} x_4 + \text{cost.}) \qquad \text{(E}''')$$

dove l_1, l_3 sono costanti.

Del resto dal nostro punto generale di vista i casi (VII) ed (VIII) sono identici: da ciò si spiega l'analogia di risultati per essi ottenuti. In fondo dunque di spazii a quattro dimensioni che ammettono un G_5 abbiamo i soli sei tipi A, B, C, (D, D$'$), (D, D$''$), (D, D$'''$).

Noi procederemo ora alla ricerca degli spazii S_4 che ammettono un G_6 e distingueremo i due casi che questo G_6 sia intransitivo o transitivo.

Il primo caso si suddistinge in due altri:

I. Il gruppo G_6, che per i nostri teoremi generali si può immaginare già ridotto a un gruppo su tre variabili sole X_1, X_2, X_3, è in tale forma un gruppo di movimenti di un S_3 euclideo. Se le $x_4 =$ cost. sono le V_3 invarianti, sarà

$$d s^2 = d x_4^2 + \sum_{i,k} a_{ik}\, d x_i\, d x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Il gruppo G_6 si può immaginare generato dalle:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_4 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1};$$

$$X_5 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_6 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Scrivendo le equazioni di Killing troviamo:

$$d s^2 = d x_4^2 + \varphi\, (d x_1^2 + d x_2^2 + d x_3^2) \tag{L}$$

dove φ è soltanto funzione di x_4.

II. Il gruppo G_6 può essere simile a un gruppo di uno spazio a curvatura costante. E se le $x_4 =$ cost. sono le varietà minime invarianti si avrà:

$$d s^2 = d x_4^2 + \sum_{i,k} a_{ik}\, d x_i\, d x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Il gruppo G_6 si può immaginare generato da sei trasformazioni sulle tre lettere x_1, x_2, x_3, che si possono scrivere sotto la forma seguente:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$X_4 = - \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$X_5 = - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{x_2^2 - x_3^2}{2} - \frac{e^{-2x_1}}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$X_6 = - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{x_3^2 - x_2^2}{2} - \frac{e^{-2x_1}}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Scrivendo le formule di Killing troviamo senz'altro

$$a_{22} = a_{33} = \varphi\, e^{2x_1}; \quad a_{11} = \varphi; \quad a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0$$

dove φ è funzione di x_4, cosicchè si avrà:

$$d s^2 = d x_4^2 + \varphi\, (d x_1^2 + e^{2x_1} d x_2^2 + e^{2x_1} d x_3^2). \tag{M}$$

Sia invece il G_6 transitivo: esso ammetterà come sottogruppo un G_5 transitivo, cosicchè l'elemento lineare dovrà essere di uno dei tipi A, B, C, (D, D'), (D, D''), (D, D'''). Quando dunque uno spazio dotato di uno di questi elementi lineari può ammettere un G_6? Possiamo per questa ricerca procedere in due modi: o studiare, secondo il metodo del prof. BIANCHI, i casi particolari di questi tipi oppure, seguendo la via da noi tracciata, cercare di prefissar prima la forma di una sesta trasformazione infinitesima, che con le precedenti formi un G_6. E si possono anche contemperare insieme i due metodi. Noi useremo l'uno e l'altro di questi procedimenti. Studiamo anzitutto il tipo (A): Sia X_6 una sesta trasformazione infinitesima generatrice di un G_6 che contenga il G_5 corrispondente come sottogruppo. Potremo scrivere:

$$(X_i\, X_6) = \sum_{k=1}^{6} \lambda_{ik}\, X_k \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5). \tag{1}$$

Scriviamo le identità di IACOBI relative alle terne X_i, X_k, X_6 (i, $k = 1$, 2, 3, 4, 5) annullando in ciascuna di esse il coefficiente di X_6. Otterremo:

$$\lambda_{16} = \lambda_{26} = \lambda_{36} = \lambda_{46} = \lambda_{56} = 0.$$

E se è

$$X_6 = \sum_{i=1}^{4} \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

troviamo, ricordando le (1) per $i = 1$, 2, 3 che

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = -\lambda_{14} + \lambda_{15}\, x_1$$

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = -\lambda_{24} + \lambda_{25}\, x_1$$

$$-\frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = -\lambda_{34} + \lambda_{35}\, x_1$$

l'ultima delle quali si scrive:

$$-\frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} = -\lambda_{34} + \lambda_{35}\, x_1 - x_3(-\lambda_{14} + \lambda_{15}\, x_1)$$

Poniamo nella (1) $i = 4$ e paragoniamo i coefficienti di $\dfrac{\partial}{\partial x_4}$ nei due membri. Otterremo:

$$-2\, x_1 \frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} + (l_3\, x_1 - x_2) \frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} + (x_3 + l_3) \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = -\lambda_{44} + \lambda_{45}\, x_1 .$$

Sostituiamo in questa equazione alle

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3}$$

i loro valori già trovati. Otteniamo:

$$\begin{gathered} + 2 x_1 [- \lambda_{34} + \lambda_{35} x_1 + \lambda_{14} x_3 - \lambda_{15} x_1 x_3] \\ - (l_3 x_1 + x_2)(- \lambda_{14} + \lambda_{15} x_1) \\ + (l_3 + x_3)(- \lambda_{24} + \lambda_{25} x_1) = - \lambda_{44} + \lambda_{45} x_1 . \end{gathered}$$

Da questa equazione si deduce, tra l'altro,

$$\lambda_{14} = \lambda_{15} = \lambda_{24} = \lambda_{25} = \lambda_{35} = 0.$$

Quindi sarà:

$$\eta_4 = \lambda_{34} x_1 + \text{cost.}$$

Sottraendo perciò dalla X_6 multipli convenienti delle X_4, X_5 si può dunque fare che $\eta_4 = 0$. Le equazioni precedenti danno allora che sarà $\lambda_{i4} = \lambda_{i5} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ e quindi (X_1, X_2, X_3, X_6) sarebbe un gruppo evidentemente intransitivo. Di questo caso è perciò inutile occuparci, perchè il suo studio rientra in uno dei casi seguenti.

Studieremo ora il caso (B). Sia X_6 una trasformazione infinitesima che col G_5 corrispondente generi un gruppo G_6.

E poniamo

$$(X_i X_6) = \sum_{k=1}^{6} \lambda_{ik} X_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{2}$$

Togliendo da X_6 multipli convenienti di X_1, X_4, X_5 si può fare

$$\lambda_{14} = \lambda_{11} = \lambda_{41} = 0.$$

E ciò, perchè scrivendo le identità di Iacobi relative alle terne (X_1, X_4, X_6), $X_1, X_5, X_6)$, (X_4, X_5, X_6) e annullandovi il coefficiente di X_6 si ottiene

$$\lambda_{16} = \lambda_{46} = \lambda_{56} = 0.$$

Si ottiene dalle (2), analogamente a quanto sopra,

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} = - \lambda_{14} - 2 \lambda_{15} x_1$$

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = - \lambda_{24} - 2 \lambda_{25} x_1 + \lambda_{26} \eta_4$$

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = - \lambda_{34} - 2 \lambda_{35} x_1 + \lambda_{36} \eta_4$$

$$x_1 \frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} = - \lambda_{44} - 2 \lambda_{45} x_1 .$$

Confrontando la prima e l'ultima di queste equazioni e scrivendo le condizioni di integrabilità si ottiene, poichè $\lambda_{14} = 0$,

$$\lambda_{45} = \lambda_{15} = \lambda_{44} = \lambda_{25} = \lambda_{35} = 0.$$

Scrivendo le identità di IACOBI per le varie terne (X_i, X_k, X_6) $(i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$ otteniamo

$$\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{14} = \lambda_{21} = \lambda_{24} = \lambda_{31} = \lambda_{34} = \lambda_{42} = \lambda_{43} = \lambda_{45} = \lambda_{51} =$$
$$= \lambda_{52} = \lambda_{53} = \lambda_{54} = \lambda_{55} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{33}\lambda_{21} - \lambda_{26}\lambda_{31} &= 0 \\ \lambda_{36}\lambda_{22} - \lambda_{26}\lambda_{32} &= 0 \\ \lambda_{36}\lambda_{23} - \lambda_{26}\lambda_{33} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

cosicchè sarà

$$(X_i X_6) = 0 \qquad (i = 1, 4, 5)$$
$$(X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 + \lambda_{23} X_3 + \lambda_{26} X_6$$
$$(X_3 X_6) = \lambda_{32} X_2 + \lambda_{33} X_3 + \lambda_{36} X_3.$$

Se $\lambda_{26} = \lambda_{36} = 0$, sarà

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = 0$$

e poichè è pure

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4} = 0$$

sarà

$$\eta_4 = \text{cost.}$$

Ed esisterà allora una combinazione lineare delle X_4, X_6 che con X_1, X_2, X_3 genera un G_4 intransitivo; lo studio di questo caso è inutile, perchè rientra nei casi seguenti. Sia dunque p. es.

$$\lambda_{26} \neq 0.$$

Prendendo $\lambda_{22} X_2 + \lambda_{23} X_3 + \lambda_{26} X_6$ come sesta trasformazione infinitesima del gruppo avremo per le (3) che sarà

$$(X_1 X_6) = 0\,; \qquad (X_2 X_6) = k\, X_6\,;$$
$$(X_3 X_6) = h\, X_6\,; \qquad (X_4 X_6) = (X_5 X_6) = 0$$

dove k, h sono costanti, e k è differente da zero.

Ricordando i valori delle $(X_i X_6)$ per $i = 1, 2, 3, 4$ troveremo delle equazioni differenziali per i coefficienti della X_6; e ne otterremo, integrando,

$$\eta_1 = k_1 \, e^{-x_4 + hx_2 + hx_3}$$

$$\eta_2 = k_2 \, e^{kx_2 + hx_3}$$

$$\eta_3 = k_3 \, e^{kx_2 + hx_3}$$

$$\eta_4 = k_4 \, e^{kx_2 + xh_3}$$

dove k_1, k_2, k_3, k_4 sono costanti.

Esprimiamo ora che $(X_5 X_6) = 0$.

Ne trarremo:

$$k \, n_2 \, e^{-x_4} X_6 + h \, n_3 \, e^{-x_4} X_6 +$$

$$+ 2 \eta_1 \frac{\partial}{\partial x_4} + \eta_4 \left(2 n_1 e^{-2x_4} \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 e^{-x_4} \frac{\partial}{\partial x_2} + n_3 e^{-x_4} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = 0$$

donde

$$\left.\begin{array}{ll} (k \, n_2 + h \, n_3) \, k_1 + 2 \, n_1 \, k_4 = 0 & (k \, n_2 + h \, n_3) \, k_2 + n_2 \, k_4 = 0 \\ (k \, n_2 + h \, n_3) \, k_3 + n_3 \, k_4 = 0 & (k \, n_2 + h \, n_3) \, k_4 + 2 \, k_1 = 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Affinchè X_1, X_2, X_3, X_6 sia transitivo (caso a cui possiamo limitarci) dovrà essere $k_4 \neq 0$, e noi potremo fare senz'altro $k_4 = 1$.

Scrivendo le equazioni di Killing relative ad a_{14}, a_{24}, a_{34} troviamo

$$p_{11} \, k_1 = 0$$

$$p_{21} \, k_1 = k$$

$$p_{31} \, k_1 = h .$$

Poichè $k \neq 0$, sarà $k_1 \neq 0$ e quindi

$$p_{11} = 0$$

Ricordiamo ora che

$$n_1 = - \pi_{11} ; \qquad n_2 = - 2 \, \pi_{12} ; \qquad n_3 = - 2 \, \pi_{13}$$

e che, come si vede eliminando k_4 tra la prima e l'ultima delle (4)

$$(k \, n_2 + h \, n_3)^2 = 4 \, n_1 .$$

Portando in questa i valori trovati di k, h si ottiene:

$$4 \, k_1 \, (p_{12} \, \pi_{12} + p_{13} \, \pi_{13})^2 = 4 \, n_1 = - 4 \, \pi_{11} .$$

E poichè $p_{11} = 0$, sarà

$$p_{12} \, \pi_{12} + p_{13} \, \pi_{13} = 1$$

e quindi

$$k_1 = \sqrt{-\pi_{11}} = \frac{-\pi_{11}}{\sqrt{-\pi_{11}}}.$$

Si ha quindi, ricordando le (4),

$$k_2 = -\frac{\pi_{12}}{\sqrt{-\pi_{11}}} \qquad k_3 = -\pi_{13}\frac{1}{\sqrt{-\pi_{11}}}.$$

Si osservi che $\pi_{11} \neq 0$, perchè altrimenti sarebbe $k_1 = 0$ e quindi anche $k = 0$.

Le equazioni di Killing risultano senz'altro verificate, qualunque determinazione si dia a $\sqrt{-\pi_{11}}$; quindi un tale elemento lineare ammette per lo meno un G_7, perchè insieme alla X_6 ammette quella trasformazione infinitesima, che si deduce mutando il segno della $\sqrt{-\pi_{11}}$. Di questo caso però è inutile tener conto, perchè rientra in uno dei casi seguenti, possedendo questo G_7 come sottogruppo il $G_6 \equiv (X_1,\ \pi_{12} X_2 + \pi_{13} X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_7)$ intransitivo.

Studiamo ora il caso (C). Vediamo se esso può ammettere un gruppo G_6. Scriveremo, per evitare equivoci, μ al posto di λ_{22}; cosicchè la composizione del G_5 corrispondente sarà:

$$(X_1\, X_5) = 2\,\mu\, X_1\,; \quad (X_2\, X_5) = \mu\, X_2\,; \quad (X_3\, X_5) = \mu\, X_3\,; \quad (X_4\, X_5) = 0$$
$$(X_1\, X_2) = (X_1\, X_3) = (X_1\, X_4) = 0\,; \quad (X_2\, X_3) = X_1\,;$$
$$(X_2\, X_4) = -X_3\,; \quad (X_3\, X_4) = X_2\,.$$

Sia $X_6 = \Sigma\, \eta_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ una trasformazione infinitesima che col precedente G_5 generi un G_6. E poniamo al solito

$$(X_i\, X_6) = \sum_{k=1}^{6} \lambda_{ik}\, X_k \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5). \tag{α}$$

Scrivendo le identità di Iacobi si ha:

$$\lambda_{16} = \lambda_{26} = \lambda_{36} = 0. \tag{1}$$

E sottraendo da X_6 convenienti multipli di X_2, X_3, X_4 si può fare:

$$\lambda_{21} = \lambda_{31} = \lambda_{23} = 0. \tag{2}$$

Se $\mu \neq 0$ sottraendo da X_6 un multiplo di X_5 si può fare $\lambda_{11} = 0$. Quindi potremo anche porre

$$\mu\, \lambda_{11} = 0. \tag{3}$$

Ora se η_4 fosse costante, una combinazione lineare di X_5, X_6 darebbe una trasformazione infinitesima Y, in cui il coefficiente di x_4 sarebbe nullo. La Y con le X_1, X_2, X_3, X_4 genererebbe un gruppo intransitivo. Il nostro spazio ammetterebbe perciò un G_5 e quindi anche un G_6 intransitivo: caso che per ora escludiamo. Le identità di Iacobi dànno anche

$$\lambda_{15} = (\lambda_{56} - \mu)\lambda_{25} = (\lambda_{56} - \mu)\lambda_{35} = \lambda_{46}\lambda_{25} + \lambda_{35} = \lambda_{46}\lambda_{35} - \lambda_{25} = 0.$$

Per l'osservazione precedente una delle λ_{25}, λ_{35} non sarà nulla e quindi

$$\lambda_{56} = \mu\,; \qquad \lambda_{46} \neq 0.$$

Sia ora $\lambda_{56} = \mu = 0$. Dalle identità di Jacobi si trae

$$(X_5 X_6) = 0.$$

E poichè in questo caso $X_5 = -\frac{\partial}{\partial x_4}$, dovranno le η_i essere indipendenti da x_4. Ora è chiaramente:

$$\eta_4 = -\lambda_{25}x_3 + \lambda_{35}x_1 + \text{cost.}$$

Scriviamo le equazioni di Killing relative ad a_{14} e a_{34}.

Ne dedurremo, poichè $\frac{\partial \eta_i}{\partial x_4} = 0$ che

$$\lambda_{25} = \lambda_{35} = 0$$

e quindi, contrariamente all'ipotesi, $\eta_4 = \text{cost.}$

Supponiamo dunque $\lambda_{56} = \mu \neq 0$.

Le identità di Iacobi dànno per le (1), (2), (3)

$$\lambda_{11} = \lambda_{14} = \lambda_{15} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = \lambda_{45} = \lambda_{55} = \lambda_{32} = \lambda_{44} = \lambda_{53} =$$
$$= \lambda_{52} = \lambda_{21} = \lambda_{31} = \lambda_{23} = 0$$
$$\lambda_{46}\lambda_{34} - \lambda_{24} = \lambda_{46}\lambda_{24} + \lambda_{34} = 0.$$

Le (α) daranno per le η_i delle equazioni, che, per mezzo delle uguaglianze precedenti divengono

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} = -\lambda_{13}\,; \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} = \lambda_{13}x_3\,; \quad \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} = \lambda_{12}\,; \quad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} = \lambda_{24}x_3 + \mu\lambda_{25}x_1\,; \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x_3} = \lambda_{24}\frac{x_1^2 - x_3^2}{2} + 2\mu\lambda_{25}x_2\,;$$

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} = -\lambda_{24}x_1 + \lambda_{25}\mu x_3\,; \quad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = -\lambda_{25}$$

$$\Sigma\left(-\frac{\partial \eta_i}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial \eta_i}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}-\eta_3\frac{\partial}{\partial x_2}=\lambda_{34}X_4+\lambda_{35}X_5$$

ossia

$$-\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}-x_3\lambda_{13}=\lambda_{34}x_3+\mu\lambda_{35}x_1$$

$$-\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1}+\lambda_{13}x_3^2-\eta_3=\lambda_{34}\frac{x_1^2-x_3^2}{2}+2\mu_1\lambda_{35}x_2$$

$$-\frac{\partial \eta_3}{\partial x_1}+x_3\lambda_{12}=-\lambda_{34}x_1+\lambda_{35}\mu x_3.$$

Scrivendo le condizioni di integralità otterremo:

$$\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x_1\,\partial x_3}=\mu\lambda_{25}=-\lambda_{13}-\lambda_{34}\qquad\frac{\partial^2\eta_2}{\partial x_2\,\partial x_3}=\lambda_{13}=2\mu\lambda_{25}$$

$$\frac{\partial^2\eta_2}{\partial x_1\,\partial x_3}=\lambda_{24}x_1=\lambda_{13}x_3+\lambda_{24}x_1-\mu\lambda_{25}x_3+\lambda_{34}x_3.$$

La prima e l'ultima di queste equazioni dànno

$$\lambda_{13}+\lambda_{34}=\lambda_{25}=0.$$

Essendo $\lambda_{25}=0$ è per la $\lambda_{46}\lambda_{25}+\lambda_{35}=0$ anche

$$\lambda_{35}=0$$

contro il supposto.

Studiamo ora il caso di un gruppo G_5 del tipo $(\mathrm{VII})'''$ e i corrispondenti spazii $(D)'''$. Per vedere quando un tale spazio ammette un G_6 useremo le notazioni usuali, e vedremo che aggiungendo a X_6 una conveniente trasformazione infinitesima del gruppo G_5 si può fare:

$$\lambda_{11}=\lambda_{31}=\lambda_{13}=0$$

Scrivendo al solito le identità di Iacobi si ha:

$$\lambda_{16}=\lambda_{36}=\lambda_{46}=\lambda_{23}=\lambda_{24}=\lambda_{51}=\lambda_{53}=\lambda_{54}=0$$

$$\lambda_{26}\lambda_{12}=\lambda_{26}\lambda_{14}=\lambda_{26}\lambda_{15}=\lambda_{26}\lambda_{32}=\lambda_{26}\lambda_{33}=\lambda_{26}\lambda_{34}=\lambda_{26}\lambda_{35}=0.$$

Sarà quindi, poichè

$$X_5=\frac{\partial}{\partial x_4},\qquad\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4}=\lambda_{55}+\lambda_{56}\eta_4;$$

poichè $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4}\neq 0$ e η_4 si può supporre non costante, come si vede ripetendo un ragionamento testè usato, avremo che:

$$\lambda_{55} = \lambda_{16} = 0.$$

Sia ora anche $\lambda_{26} = 0$. In tal caso si ha poi, ricordando i valori delle $(X_1\, X_6)$, $(X_2\, X_6)$, $(X_3\, X_6)$ che:

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = \lambda_{15} \qquad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = \lambda_{25} \qquad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} = \lambda_{15}\, x_2 + \lambda_{35}\,.$$

Le condizioni di integrabilità dànno:

$$\lambda_{15} = 0.$$

E quindi:

$$\eta_4 = \lambda_{25}\, x_3 + \lambda_{35}\, x_1 + \text{cost.}$$

Dal valore della $(X_5\, X_6)$ si trae quindi

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x_4} = \lambda_{52}\,.$$

Analogamente si ha:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x_4} = \frac{\partial \eta_2}{\partial x_4} = 0.$$

Le equazioni di KILLING per a_{41}, a_{42}, a_{43} dànno:

$$a_{31}\, \lambda_{52} = \lambda_{35}$$

$$a_{32}\, \lambda_{52} = 0$$

$$a_{33}\, \lambda_{52} = \lambda_{25}\,.$$

Poichè $a_{31} = 0$, sarà anche $\lambda_{35} = 0$.

Di più $a_{32} = n\,\psi\, e^{x_1}$ non è nullo, perchè $n \neq 0$ e perchè se $\psi = 0$, allora

$$a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{34} = 0$$

e l'elemento lineare sarebbe degenere. È perciò $\lambda_{52} = 0$ e quind'anche $\lambda_{25} = 0$.

Sarebbe dunque, contro il supposto, $\eta_4 = \text{cost.}$

Sia invece $\lambda_{26} \neq 0$.

Avremo:

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = 0\,; \quad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = \lambda_{25} + \lambda_{26}\, \eta_4\,; \quad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} = 0.$$

E se ne trae scrivendo l'equazione di KILLING per a_{34} che:

$$a_{33}\, \lambda_{52} = \lambda_{25} + \lambda_{26}\, \eta_4$$

donde si dedurrebbe che η_4 è, contro il supposto costante.

Studiamo ora il caso (VII)$''$ o D'' dove al posto di λ_{22} si scriva μ. E cominciamo dal caso che μ sia nullo. Questo caso si distingue dal precedente, perchè $n = 0$ e quindi

$$d s^2 = d x_4^2 + \varphi \, d x_1^2 + \psi \, d x_3^2 + \varphi \, e^{2 x_1} d x_2^2$$

dove φ e ψ sono costanti non nulle (perchè lo spazio non è degenere). Moltiplicando la X_4 per una conveniente costante e passando a uno spazio simile si può fare $\varphi = 1$. Moltiplicando poi la X_3 per una costante conveniente si può anche fare $\psi = 1$. Questo elemento lineare ammette infatti sempre un G_6; e coi soliti metodi si trova che:

$$X_6 = x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Sia ora $\mu \neq 0$, cosicchè

$$(X_2 \, X_5) = \mu \, X_2.$$

Sia X_6 una sesta trasformazione infinitesima che con le X_1, X_2, X_3, $X_4 \, X_5$, generi un G_6. E sia $(X_i \, X_6) = \sum_{k=1}^{k=6} \lambda_{ik} X_k$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Dalle identità di Iacobi si ha: $\lambda_{16} = \lambda_{36} = \lambda_{46} = 0$. Mutando convenientemente X_6 si può fare $\lambda_{11} = \lambda_{31} = \lambda_{13} = 0$ e le identità di Iacobi dànno allora:

$$(X_1 \, X_6) = (X_3 \, X_6) = 0;$$

$$\lambda_{42} = \lambda_{43} = \lambda_{44} = \lambda_{45} = \lambda_{46} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = \lambda_{24} = \lambda_{51} = \lambda_{53} = \lambda_{54} = 0$$

$$\mu \, \lambda_{55} - \lambda_{26} \lambda_{52} = (\lambda_{56} - \mu) \lambda_{25} - \lambda_{26} \lambda_{55} = \lambda_{26} \lambda_{41} = \lambda_{56} \lambda_{41} = 0.$$

Poniamo $X_6 = \Sigma \, \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ed esprimiamo che le $(X_i \, X_6)$ (per $i = 1, 3, 4$) hanno dei valori soddisfacenti alle precedenti equazioni.

Troveremo $\lambda_{41} = 0$ e quindi

$$\eta_1 = \eta_2 = 0; \quad \eta_3 = \eta_3 (x_3, x_4); \quad \eta_4 = \eta_4 (x_3).$$

Esprimendo che $(X_2 \, X_6)$ ha il valore che risulta dalle precedenti uguaglianze si trae:

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} = \mu \, \lambda_{25} \, x_3 + \lambda_{26} \, \eta_3 \tag{β}$$

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = - \lambda_{25} + \lambda_{26} \, \eta_4 . \tag{γ}$$

Calcolando $(X_5 X_6)$ e sostituendovi per $\frac{\partial \eta_3}{\partial x_3}$, $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3}$ i valori qui trovati, si ha ricordando che $\lambda_{51} = \lambda_{53} = \lambda_{54} = 0$

$$\eta_4 = \frac{\mu \lambda_{25} x_3 - \lambda_{55}}{\mu \lambda_{26} x_3 - \lambda_{56}} . \tag{∂}$$

Donde, per la γ, si trae:

$$(-\lambda_{25} \lambda_{56} + \lambda_{26} \lambda_{55}) (\mu + \mu x_3 \lambda_{26} - \lambda_{56}) = 0. \tag{ε}$$

Per maggior chiarezza osservo che il denominatore di (∂) non può essere nullo; chè, se $\lambda_{26} = \lambda_{56} = 0$, si avrebbe pure $\lambda_{25} = \lambda_{55} = 0$; quindi $(X_2 X_6) = 0$ ed η_4 sarebbe costante, mentre noi supponiamo, come è lecito per un'osservazione precedente, che η_4 non sia costante. Ricordando la (ε) e le relazioni tra le λ_{ik} dedotte dalle identità di Iacobi avremo che dovrà essere o

$$\lambda_{26} = \lambda_{56} - \mu = \lambda_{55} = 0$$

oppure

$$\lambda_{25} = \lambda_{55} = \lambda_{26} = 0$$

oppure

$$\lambda_{25} = \lambda_{55} = \lambda_{52} = 0.$$

Ma non può essere $\lambda_{25} = \lambda_{26} = 0$ perchè altrimenti, contrariamente all'ipotesi precedente, sarebbe $(X_2 X_6) = 0$. Nè può essere $\lambda_{25} = \lambda_{55} = 0$, perchè sarebbe $\eta_4 = 0$. Quindi dovrà essere

$$\lambda_{26} = \lambda_{56} - \mu = \lambda_{55} = 0.$$

Sarà per (∂)

$$\eta_4 = -\lambda_{25} x_3 .$$

Calcolando il valore di $(X_5 X_6)$ e usando delle precedenti identità si ottiene in fine:

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x_4} = \mu^2 \lambda_{25} x_3^2 - 2 \mu \eta_3 - \lambda_{52} .$$

Da questa e dalla (β) si trae (indicando con n_3 una costante)

$$\eta_3 = e^{-2\mu x_4} \left[\frac{\mu^2 \lambda_{25} x_3^2 - \lambda_{52}}{2\mu} e^{2\mu x_4} + n_3 \right] = \lambda_{25} \mu \frac{x_3^2}{2} + n_3 e^{-2\mu x_4} - \frac{\lambda_{52}}{2\mu} .$$

In η_3 lasciando la costante additiva, otteniamo in fine,

$$X_6 = \left(\lambda_{25} \mu \frac{x_3^2}{2} + n_3 e^{-2\mu x_4} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} - \lambda_{25} x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} .$$

Si può naturalmente ammettere che $\lambda_{25} \neq 0$. Dividendo per λ_{25} otteniamo, mutando le notazioni,

$$X_6 = \left(\mu \frac{x_3^2}{2} + n_3 e^{-2\mu x_4}\right) \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} \cdot$$

Il nostro spazio ammette questo gruppo se

$$l_3 = -\frac{1}{2\mu n_3},$$

ossia se

$$\psi = -\frac{1}{2\mu n_3} e^{2\mu x_4},$$

perchè in tal caso le equazioni di Killing sono senz'altro verificate.

Passiamo al caso (VII)', $(D)'$ e, cangiando le notazioni, poniamo:

$$(X_2 X_5) = \mu X_5 \qquad (\mu \neq 0).$$

Le equazioni dedotte dalle identità di Iacobi danno, usando delle solite notazioni,

$$\lambda_{16} = \lambda_{36} = \lambda_{46} = \lambda_{56} = 0.$$

Mutando convenientemente X_6 si vede che si può fare:

$$\lambda_{11} = \lambda_{31} = \lambda_{13} = \lambda_{55} = 0.$$

Le identità di Iacobi dànno allora che sarà:

$$(X_i X_6) = 0 \ (i = 1,\ 3,\ 4)\,; \quad (X_2 X_6) = \lambda_{25} X_5 + \lambda_{26} X_6\,; \quad (X_5 X_6) = \lambda_{52} X_2$$
$$(\lambda_{26} - \mu) \lambda_{52} = 0.$$

Posto

$$X_6 = \Sigma \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

otteniamo, scrivendo che $(X_i X_4) = 0$ $(i = 1,\ 3,\ 4)$, $\dfrac{\partial \eta_4}{\partial x_4} = 0$

$$\eta_1 = \eta_2 = 0\,; \quad \eta_3 = \eta_3(x_3\,,\ x_4)\,; \quad \eta_4 = \eta_4(x_3).$$

Ricordando i valori di $(X_2 X_6)$, $(X_5 X_6)$ si ottiene:

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} = \lambda_{25} \nu_3 e^{\mu x_3} + \lambda_{26} \eta_3 \tag{α}$$

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = -\lambda_{25} e^{\mu x_3} + \lambda_{26} \eta_4 \tag{β}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{\mu x_3}\nu_3\left(\dfrac{\partial\eta_3}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\eta_4}{\partial x_3}\dfrac{\partial}{\partial x_4}\right)-e^{\mu x_3}\dfrac{\partial\eta_3}{\partial x_4}\dfrac{\partial}{\partial x_4}-\eta_3\mu\, e^{\mu x_3}\left(\nu_3\dfrac{\partial}{\partial x_3}-\dfrac{\partial}{\partial x_4}\right)- \\ \qquad\qquad -\eta_4\, e^{\mu x_3}\nu'\dfrac{\partial}{\partial x_3}=\lambda_{25}\dfrac{\partial}{\partial x_3}\,. \end{array}\right\} \qquad (\gamma)$$

Osservando il coefficiente di $\dfrac{\partial}{\partial x_4}$ in quest'ultima formula, otteniamo:

$$\eta_3=-\frac{\nu_3}{\mu}\frac{\partial\eta_4}{\partial x_3}\,.$$

E la (α) diventa perciò

$$\frac{\partial^2\eta_4}{\partial x_3^2}-\lambda_{26}\frac{\partial\eta_4}{\partial x_3}+\lambda_{25}\,\mu\, e^{\mu x_3}=0. \qquad (\partial)$$

Sia ora $\lambda_{26}=\mu$.
Ne dedurremo, indicando con n_4, m_4 delle costanti

$$\frac{\partial\eta_4}{\partial x_3}=e^{\mu x_3}(-\lambda_{25}\,\mu\, x_3+n_4)$$

$$\eta_4=\frac{n_4}{\mu}e^{\mu x_3}-\lambda_{25}\,x_3\,e^{\mu x_3}+\lambda_{25}\frac{e^{\mu x_3}}{\mu}+m_4\,.$$

La (β) diventa:

$$m_4=0.$$

Annullando il coefficiente di $\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ nella (γ) otteniamo

$$\lambda_{25}\left(\nu_3^2-\frac{\nu'_3}{\mu}\right)=0=\lambda_{52}\,.$$

E quindi

$$\lambda_{25}=\lambda_{52}=0$$

donde

$$X_6=\frac{n_4\,e^{\mu x_3}}{\mu}\left\{-\nu_3\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_4}\right\}.$$

Ossia, poichè X_6 non può esser nulla,

$$X_6=e^{\mu x_3}\left(\nu_3\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_4}\right)$$

che coincide con la X_5.

Sia ora invece $\lambda_{26} \neq \mu$. Avremo indicando con n_4, m_4 delle costanti,

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = e^{\lambda_{26} x_3} \left(\frac{\lambda_{25}\, \mu\, e^{(\mu - \lambda_{26}) x_3}}{\lambda_{26} - \mu} + n_4 \right)$$

$$\eta_4 = n_4 \int e^{\lambda_{26} x_3}\, d\, x_3 + \frac{\lambda_{25}}{\lambda_{26} - \mu}\, e^{\mu x_3} + m_4$$

$$\eta_3 = -\frac{\nu_3}{\mu} \left\{ n_4\, e^{\lambda_{26} x_3} + \frac{\mu\, \lambda_{25}}{\lambda_{26} - \mu}\, e^{\mu x_3} \right\}.$$

Sia $\lambda_{26} = 0$. La (β) e la (γ) danno $n_4 = 0$; $\lambda_{52} = -m_4\, \nu'_3$; ma, poichè, com'è ben chiaro, la derivata di ν_3 non può essere una costante, sarà anche $m_4 = \lambda_{52} = 0$.

Se invece $\lambda_{26} \neq 0$, le (β) e (γ) dànno:

$$m_4 = 0$$

$$\nu_3^2 \left\{ e^{\mu x_3} \frac{\lambda_{25}\, \lambda_{26}}{\lambda_{26} - \mu} + n_4\, e^{\lambda_{26} x_3} \right\} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + \nu'_3\, n_4\, e^{\lambda_{26} x_3} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda_{26}}\right) = \lambda_{52}.$$

Donde, poichè $\lambda \neq \mu \neq 0$, si ottiene, ordinando secondo le potenze di e^{x_3} e ricordando il valore di ν_3 che

$$\lambda_{52} = n_4 = 0.$$

In ambi i casi la X_6 si riduce a meno di un fattore costante alla X_5 stessa: di questo caso è perciò inutile occuparci.

Così pure, dal nostro punto di vista, è inutile occuparci dei casi (E) che sono identici (a meno di una trasformazione immaginaria) coi casi (D).

Abbiamo così determinati tutti i possibili elementi lineari che ammettono un G_6. I nostri procedimenti ci dimostrano che per trovare tutti quegli elementi lineari che ammettono un G_7 o un G_8 basterà vedere quali tra questi ultimi ammettono oltre al G_6 corrispondente un gruppo più ampio.

E cominceremo dapprima studiando quegli elementi lineari che ammettono un G_6 transitivo, senza ammettere un G_6 intransitivo, riservandoci a più tardi questa ultima ricerca.

Di cosiffatti elementi lineari esistono i soli due:

$$d\, s^2 = d\, x_4^2 + d\, x_1^2 + d\, x^2 + e^{2 x_1}\, d\, x_2^2 \qquad \text{(A)}$$

$$d\, s^2 = d\, x_4^2 + l_1\, d\, x_1 + l_2\, e^{2 x_1}\, d\, x_2^2 + l_3\, e^{2 \mu x_1}\, d\, x_3^2. \qquad \text{(B)}$$

dove l_1, l_2, l_3, μ sono costanti non nulle. Il tipo (B) include (per $\mu = 0$) il tipo A. Se $\mu \neq 0$, moltiplicando x_3, x_4 per costanti opportune e passando a uno spazio simile, potremo scrivere:

$$d\,s^2 = d\,x_4^2 + l_1\,d\,x_1^2 + e^{2x_1}\,d\,x_3^2 + l_2\,e^{2x_1}\,d\,x_2^2\,. \tag{C}$$

Lo studio di questi elementi lineari si compie senz'altro facilmente col metodo del prof. Bianchi. Cominciamo dall'elemento (A)

$$d\,s^2 = d\,x_4^2 + d\,x_1^2 + d\,x_3^2 + e^{2x_1}\,d\,x_2^2\,.$$

Se

$$X = \sum_{i=1}^{4} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

è la più generale trasformazione infinitesima che esso ammette, le formole di Killing dànno:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial \xi_4}{\partial x_1}\,; \quad e^{2x_1}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_4} = -\frac{\partial \xi_4}{\partial x_2}\,; \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_4} = -\frac{\partial \xi_4}{\partial x_3} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial x_4} = 0 \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = 0 \quad \xi_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + e^{2x_1}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = 0 \quad e^{2x_1}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = 0. \tag{3}$$

Poichè per le (2) $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 0$, l'ultima delle (2) e la prima delle (3) dànno:

$$\xi_2 = \frac{e^{-2x_1}}{2}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \eta_2(x_2,\ x_3,\ x_4) \tag{4}$$

$$\xi_3 = -\,x_1\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + \eta_3(x_2,\ x_3,\ x_4). \tag{5}$$

La (2) e le (3) dànno quindi

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_3^2} = \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} = \xi_1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} = 0\,; \qquad \frac{\partial \eta_2}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2\,\partial x_3} = \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} = 0. \tag{6}$$

Per ottenere queste formole basta sostituire le (4) e (5) nelle (2) e (3) e ricordare che ξ_1, η_2, η_3 non contengono x_1. D'altra parte dalle (1) si ottiene, ricordando che ξ_4 non può contenere x_4,

$$\xi_1 = -\,x_4\frac{\partial \xi_4}{\partial x_1} + Z_1(x_2,\,x_3)\,; \quad \frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x_1^2} = 0 \tag{7}$$

$$\xi_2 = -\,x_4\,e^{-2x_1}\frac{\partial \xi_4}{\partial x_2} + Z_2(x_1,\ x_2,\ x_3) \tag{8}$$

$$\xi_3 = -x_4 \frac{\partial \xi_4}{\partial x_3} + Z_3(x_1, x_2, x_3). \tag{9}$$

La prima delle (2) e le (6) dicono, ricordando che per la (7) ξ_1 è funzione lineare di x_4, che

$$\xi_1 = a x_2 + b x_3 + x_4(d x_2 + e x_3 + f) + g = -\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2}$$

dove a, b, c, d, e, f, g sono costanti.

Poichè per la (8) ξ_2 è lineare in x_4 e indipendente da x_3 ne trarremo:

$$b = e = 0$$

$$\eta_2 = -(a + d x_4)\frac{x_2^2}{2} - (f x_4 + g) x_2 + m x_4 + n$$

dove m, n sono nuove costanti.

Poichè per le (6) ξ_3 non contiene nè x_2, x_3 e per la (9) è lineare in x_4, avremo:

$$\xi_3 = -k x_4 + l$$

dove k, l sono costanti.

Le (1) dànno allora:

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial x_1} = -(d x_2 + f)$$

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial x_3} = k$$

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial x_2} = -\frac{d}{2} + d\frac{x_2^2}{2} e^{2x_1} + f \xi_2 e^{2x_1} - m e^{2x_1}$$

eguagliando i valori di $\frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x_1 \partial x_2}$ che si deducono dalla prima e dalla terza di queste formole, si ottiene:

$$m = d = f = 0.$$

Si ha dunque

$$\xi_1 = a x_2 + g$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} a e^{-2x_1} - a\frac{x_2^2}{2} - g x_2 + n$$

$$\xi_3 = -k x_4 + l$$

$$\xi_4 = k x_3 + t$$

dove t è una nuova costante. Questo elemento lineare ammette dunque proprio un G_6.

Studiamo il tipo (C)

$$d s^2 = d x_4^2 + l_1 d x_1^2 + e^{2x_4} d x_3^2 + e^{2x_1} l_1 d x_2^2$$

dove l_1 è una costante non nulla. Le equazioni di KILLING per a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{14}, a_{24}, a_{34} dànno:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 0; \quad \xi_4 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = 0; \quad l_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_4} = - \frac{\partial \xi_4}{\partial x_1}; \quad e^{2x_4} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_4} = - \frac{\partial \xi_4}{\partial x_3};$$

$$\xi_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0; \quad l_1 e^{2x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_4} = - \frac{\partial \xi_4}{\partial x_2}.$$

Le condizioni di integrabilità dànno:

$$\frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x_3^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2 \partial x_4} = - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{l_1} \frac{\partial \xi_4}{\partial x_1} = - \frac{1}{l_1} e^{-2x_1} \frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x_2^2}$$

ossia

$$\frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x_2^2} + e^{2x_1} \frac{\partial \xi_4}{\partial x_1} = 0.$$

Queste equazioni per ξ_4 ci dicono che sarà

$$\xi_4 = (a x_3 + b) x_3 + c x_2 + d,$$

dove a, b, c, d sono costanti. E quindi si dedurrà dalle equazioni precedenti:

$$\xi_1 = \eta_1 (x_2, x_3) = - \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2}$$

$$\xi_2 = - \frac{1}{l_1} e^{-2x_1} (a x_3 + c) x_4 + \eta_2 (x_1 x_2 x_3)$$

$$\xi_3 = \frac{e^{-2x_4}}{2} (a x_2 + b) + \eta_3 (x_1 x_2 x_3).$$

Poichè $\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} + \xi_4 = 0$, avremo:

$$(a x_2 + b) x_3 + c x_2 + d + \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} = 0$$

donde

$$\eta_3 = - \frac{a x_1 + b}{2} x_3^2 - (c x_2 + d) x_3 + Z_3 (x_1, x_2).$$

Le equazioni di KILLING per a_{12}, a_{23}, a_{31} dànno:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + e^{2x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = 0$$

$$l_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + e^{3x_1} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = 0$$

$$l_1 e^{2x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} + e^{2x_4} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = 0.$$

Sostituendo per le ξ_1, ξ_2, ξ_3 i valori precedenti, troviamo, ricordando che $\eta_1(x_2 x_3) = -\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2}$ e che quindi si può scrivere

$$\eta_2(x_1 x_2 x_3) = Z_2(x_1, x_3) + \lambda_2(x_2, x_3)$$

$$\eta_1 = -\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2}$$

le relazioni seguenti: (α), (β), (γ)

$$\left.\begin{aligned} & l_1 e^{2x_1}\left[-\frac{1}{l_1} a\, e^{-x_1} x_4 + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_3}\right] + \\ & + e^{2x_4}\left[\frac{a}{2} e^{-2x_4} - \frac{a}{2} x_3^2 - c\, x_3 + \frac{\partial Z_3(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

donde

$$\frac{\partial Z_3}{\partial x_2} = 0; \quad a = c = 0; \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x_3} = 0$$

ossia $\eta_2 = Z_2(x_1) + \lambda_2(x_2)$

$$l_1 \frac{\partial \eta_1(x_2, x_3)}{\partial x_3} + e^{2x_1} \frac{\partial Z_3}{\partial x_1} = 0 \qquad (\beta)$$

donde deduciamo:

$$\frac{\partial Z_3}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} = 0$$

$$-l_1 \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x_2^2} + l_1 e^{2x_1} \frac{\partial Z_2}{\partial x_1} = 0 \qquad (\gamma)$$

donde, indicando con k una costante,

$$\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x_2^2} = k \quad \frac{\partial Z_2}{\partial x_1} = -k\, e^{-2x_1}.$$

Ricordando queste relazioni, indicando con h, l, m, n nuove costanti avremo infine:

$$\xi_1 = -(k x_2 + l)$$

$$\xi_2 = \frac{k}{2}(x_2^2 - e^{-2x_1}) + l x_2 + (h + m)$$

$$\xi_3 = \frac{b}{2} e^{-2x_4} - \frac{b}{2} x_3^2 - d x_3 + n$$

$$\xi_4 = b x_3 + d.$$

Le costanti h, m compaiono solo nella loro combinazione « $h + m$ ». Il gruppo ammesso dal nostro spazio è perciò proprio soltanto un G_6.

Basterà ora lo studio di quegli S_4 che ammettono un G_6 intransitivo; questo studio si compie senz'altro, seguendo quasi parola per parola, lo studio che il prof. Bianchi fa degli S_3 che ammettono un G_3 intransitivo.

Cominciamo dal tipo (L) che scriveremo, mutando un po' le notazioni:

$$d s^2 = d x_1^2 + \varphi^2 (d x_2^2 + d x_3^2 + d x_4^2)$$

dove φ è una funzione non nulla di x_1.

Sia

$$X = \sum_{i=1}^{4} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

una trasformazione infinitesima ammessa da questo spazio. Avremo per le equazioni di Killing

$$\varphi^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} \xi_1 + \frac{\partial \xi_4}{\partial x_4} = 0$$

$$\varphi^2 \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\varphi^2 \frac{\partial \xi_4}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_4} + \frac{\partial \xi_4}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} \xi_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial \xi_4}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} \xi_1 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 0.$$

Lo stesso procedimento seguito dal prof. Bianchi al § 7 della sua Memoria dimostra che lo spazio ammetterà nn gruppo più ampio soltanto se

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \text{cost}$$

ossia se lo spazio è a curvatura costante.

Veniamo ora al tipo (M) in cui

$$d\,s^2 = d\,x_1^2 + \varphi^2(x_1)\,\{d\,x_2^2 + e^{2x_2}\,d\,x_3^2 + e^{2x_2}\,d\,x_4^2\}.$$

Le equazioni di Killing dànno, indicando con

$$\Sigma\,\eta_i\,\frac{\partial}{\partial\,x_i}$$

la più generale trasformazione infinitesima ammessa dallo spazio,

$$\frac{\partial\,\eta_2}{\partial\,x_1} = -\frac{1}{\varphi^2}\,\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,x_2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\,\eta_2}{\partial\,x_2} = -\frac{\varphi'}{\varphi}\,\eta_1 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\,\eta_3}{\partial\,x_1} = -\frac{e^{-2x_2}}{\varphi^2}\,\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,x_3} \tag{3}$$

$$\frac{\partial\,\eta_3}{\partial\,x_3} = -\frac{\varphi'}{\varphi}\,\eta_1 - \eta_2 \tag{4}$$

$$\frac{\partial\,\eta_4}{\partial\,x_4} = -\frac{\varphi'}{\varphi}\,\eta_1 - \eta_2 \tag{5}$$

$$\frac{\partial\,\eta_4}{\partial\,x_1} = -\frac{e^{-2x_2}}{\varphi^2}\,\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,x_4} \tag{6}$$

$$\frac{\partial\,\eta_2}{\partial\,x_3} + e^{2x_2}\,\frac{\partial\,\eta_3}{\partial\,x_2} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial\,\eta_3}{\partial\,x_4} + e^{2x_2}\,\frac{\partial\,\eta_4}{\partial\,x_2} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial\,\eta_3}{\partial\,x_4} + \frac{\partial\,\eta_4}{\partial\,x_3} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,x_1} = 0. \tag{10}$$

Lo studio di questo sistema di equazione è analogo a quello che il prof. Bianchi fa nel § 10 della Memoria citata. Noi lo ripeteremo sommariamente. Eliminando η_2 dalle (1) e (2), η_3 dalle (3) e (4), η_4 dalle (5) e (6) troviamo:

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_2^2} = (\varphi'' \varphi - \varphi'^2)\,\eta_1$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_3^2} = e^{2x_2}(\varphi'' \varphi - \varphi'^2)\,\eta_1 - e^{2x_2}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_4^2} = e^{2x_2}(\varphi'' \varphi - \varphi'^2)\,\eta_1 - e^{2x_2}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}.$$

Osservando che per $\eta_1 = 0$ troviamo soltanto il G_6 iniziale, potremo supporre $\eta_1 \neq 0$ e quindi

$$\varphi'' \varphi - \varphi'^2 = c \text{ (costante)}$$

indi

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_2^2} = c\,\eta_1 \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_3^2} = e^{2x_2}\left(c\,\eta_1 - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}\right) \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_4^2} = e^{2x_2}\left(c\,\eta_1 - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_4}\right). \tag{13}$$

Le (1), (3), (6) integrate rispetto a x_1 dànno:

$$\eta_2 = -\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}\int \frac{d\,x_1}{\varphi_2(x_1)} + \psi_2(x_2,\ x_3,\ x_4) \tag{14}$$

$$\eta_3 = -\,e^{-2x_2}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_3}\int \frac{d\,x_1}{\varphi^2(x_1)} + \psi_3(x_2,\ x_3,\ x_4) \tag{15}$$

$$\eta_4 = -\,e^{-2x_2}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_4}\int \frac{d\,x_1}{\varphi^2(x_1)} + \psi_4(x_2,\ x_3,\ x_4). \tag{16}$$

Sostituendo nelle (7), (8) troviamo:

$$2\left(\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3}\right)\int \frac{d\,x_1}{\varphi^2(x_1)} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + e^{2x_2}\frac{\partial \psi_3}{\partial x_2}$$

e l'equazione che se ne deduce mutando x_3, ψ_3 in x_4, ψ_4.

Da cui si trova (cfr. loc. cit)

$$(c-1)\frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} = (c-1)\frac{\partial \eta_1}{\partial x_4} = 0.$$

Per $c = 1$ si ha, indicando con R una costante

$$\varphi(x_1) = R\cosh\left(\frac{x_1}{R}\right)$$

col che si ritorna agli spazii a curvatura costante.

Se $c \neq 1$, allora η_1 può essere funzione soltanto di x_2.
Le (11), (12), (13) diventano

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_2^2} = c\,\eta_1 \qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} = c\,\eta_1$$

e quindi, poichè $c \neq 1$,

$$c = 0 \qquad \eta_1 = \text{cost.}$$

Potremo senz'altro supporre che $\eta_1 = 1$; di più, poichè

$$\varphi\,\varphi'' - \varphi'^2 = c = 0$$

avremo

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = k \text{ (costante)}.$$

Le (14), (15, (16) dànno:

$$\eta_i = \psi_i(x_2,\ x_3,\ x_4) \qquad (i = 2,\ 3,\ 4)$$

col che le formule di Killing diventano:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + k = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} + k + \psi_2 = \frac{\partial \psi_4}{\partial x_4} + k + \psi_2 = 0$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + e^{2x_2} \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} + e^{2x_2} \frac{\partial \psi_4}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial x_4} + \frac{\partial \psi_4}{\partial x_3} = 0.$$

Donde

$$\psi_2 = -\,k\,x_2 + \theta\,(x_3,\ x_4)$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} = e^{-2x_2} \frac{\partial \theta}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} = -\,k + k\,x_2 - \theta\,(x_3,\ x_4).$$

La condizione di integrabilità di queste ultime due dà:

$$e^{-2x_2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} + k = 0$$

donde

$$k = 0.$$

Si può quindi supporre $\varphi = 1$.

Il resto della discussione si può senz'altro omettere; infatti in tal caso il nostro spazio, avendo i coefficienti dell'elemento lineare indipendenti da x_1 ammette la trasform. infinitesima $X_7 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ e quindi ammette un G_7.

Nè può ammettere un gruppo più ampio perchè se

$$X_8 = \Sigma \, \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

fosse un'ottava trasform. infinitesima non appartenente a G_7 ammessa dal nostro spazio si potrebbe, per quanto si vide supporre $\eta_1 = 1$; e allora $X_8 - X_7$ insieme alle trasformazioni infinitesime di G_6 farebbe parte di un gruppo a 7 o più parametri intransitivo. Ciò che è impossibile.

§ 16. Finita così la rassegna degli S_4, che ammettono un gruppo di movimenti, riprenderemo, con le nnove cognizioni e i nuovi metodi appresi, a studiare la questione se un S_4 che ammetta un G_4 intransitivo non integrabile ammette, o no, un gruppo più ampio di movimenti per valori generici delle costanti di integrazione.

I due tipi di G_4 cosiffatti che noi abbiamo trattato a parte, sono del resto dal nostro generale punto di vista da considerarsi come identici.

Noi potremo perciò senz'altro trattare il caso che le trasformaz. infinitesime X_1, X_2, X_3, X_4 generatrici di G_4 siano tali che

$$(X_1 X_2) = X_1 \qquad (X_1 X_3) = 2\, X_2 \qquad (X_2 X_3) = X_3$$
$$(X_1 X_4) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0.$$

Poichè, come risulta dalla Memoria del prof. Bianchi, un S_3 che ammetta un G_3 non integrabile non ammette in generale anche un G_4, è ben certo che un S_4 che ammette il nostro G_4 non ammetterà nel caso generale una trasformazione infinitesima che con X_1, X_2, X_3 generi un gruppo intransitivo. Di più osserviamo che se un tale S_4 ammette un gruppo più ampio del G_4 stesso ammetterà un G_5, o un G_6, o un G_7, o un G_{10}.

Se esso ammette un G_5 questo G_5 contenendo G_4 non sarà integrabile e avrà una delle composizioni (21) e (22) del § 15. Anzi poichè una quinta trasformazione infinitesima di G_5 indipendente da X_1, X_2, X_3, X_4 non può avere nullo di coefficiente di $\frac{\partial}{\partial x_4}$, in causa dell'osservazione precedente, il gruppo dovrà proprio avere la composizione (22). Avremmo cioè:

$$(X_i X_5) = (X_i X_4) = (X_4 X_5) = 0 \quad (i = 1,\, 2,\, 3) \quad (X_1 X_2) = X_1;$$
$$(X_1 X_3) = 2\, X_2; \quad (X_2 X_3) = X_3.$$

Essendo $(X_i X_5) = 0$ ed $(X_1 X_2 X_3 X_5)$ essendo per l'osservazione precedente certo transitivo la X_5 dovrebbe essere della stessa forma di X_4, che noi abbiamo determinato al § 11 della Mem. cit. però con valori differenti per le α, β, γ. Ed è ora ben chiaro che il sistema di equazioni per le a^2, b, c, d, e, f del § 13 della mia Mem. cit. non può restare equivalente a sè stesso, quando vi si mutino i valori delle α, β, γ: ciò che sarebbe necessario affinchè, restando generici i valori delle costanti a^2, b, c, d, e, f, α, β, γ il nostro spazio ammettesse un G_5 della composizione su riferita.

Ammetta ora un tale S_4 ún G_6 (certamente transitivo) oppure un G_7.

Ammetta p. es. uno dei G_6 transitivi del § 15. Se il G_6 è del tipo (A) esso ha per composizione:

$$\begin{gathered}0 = (X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_2 X_4) = (X_2 X_5) = (X_1 X_5) = \\ = (X_3 X_5) = (X_4 X_5) = (X_1 X_6) = (X_3 X_6) = (X_4 X_6), \\ (X_1 X_4) = X_3 ; \quad (X_2 X_6) = -X_5 ; \quad (X_5 X_6) = X_2 ; \\ (X_1 X_3) = X_1 ; \quad (X_3 X_4) = -X_4 .\end{gathered}$$

Il nostro G_4 contiene un G_3 non integrabile, che (come il G_4 stesso) deve essere un sottogruppo del G_6 precedente. Tutti i successivi gruppi derivati di G_6 devono contenere il G_3 stesso. E poichè derivando due volte il G_6 otteniamo il gruppo (X_1, X_3, X_4), questo sarà proprio il G_3 in discorso. La quarta trasformazione di G_4 dovendo essere permutabile con X_1, X_3, X_4 sarà del tipo $\lambda X_2 + \mu X_5 + \nu X_6$. Ma ciò non è possibile perchè allora G_4 non sarebbe transitivo, essendo X_1, X_3, X_4 trasformazioni infinitesime dipendenti.

Considerazioni analoghe valgono per il caso (C).

Vediamo infine il caso che ogni tale S_4 ammetta un G_7, contenente per sottogruppo un G_6 intransitivo. Questo G_7 avrà la composizione

$$\begin{gathered}(X_1 X_2) = X_1 \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 \quad (X_2 X_3) = X_3 \\ (X_i X_7) = 0 \quad i = (1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ (X_4 X_5) = X_4 \quad (X_4 X_6) = 2 X_5 \quad (X_5 X_6) = X_6 \\ (X_1 X_4) = (X_1 X_5) = (X_1 X_6) = (X_2 X_4) = (X_2 X_5) = (X_2 X_6) = \\ = (X_3 X_4) = (X_3 X_5) = (X_3 X_6) = 0.\end{gathered}$$

Come sopra si vede che il gruppo G_3 semplice contenuto in X_4 dev'essere un sottogruppo di X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6. Ora i gruppi semplici di questo G_6 sono equivalenti (Lie, 3[tes] B., pag. 203) a uno dei gruppi

$$(X_1, X_2, X_3); \quad (X_4, X_5, X_6); \quad (X_1 + X_4, X_2 + X_5, X_3 + X_6).$$

Ma questi tre gruppi hanno tutti delle V_3 invarianti, che dovrebbero coincidere con le varietà $x_4 =$ cost. del § 12, che appunto si definivano come le varietà a tre dimensioni lasciate fisse dal gruppo G_3 semplice contenuto in G_4; quindi queste varietà dovrebbero ammettere tutto il G_6 in discorso per valori qualsiasi delle costanti di integrazione: ciò che noi sappiamo escluso « *a priori* ».

Osservazione. Si dovrebbero ancora (cfr. pag. 34) studiare quegli G_4 che, senza ammettere un G_6 intransitivo, ammettono un G_4, le cui varietà invarianti sono a curvatura costante. Studiamo uno dopo l'altro i varii tipi di G_4 sottogruppi del gruppo totale di movimenti di una superficie a curvatura costante (*).

I. caso. Sia il G_4 generato dalla $(X_1\, X_2\, X_3\, X_4)$ legate da $(X_1\, X_2) = X_3$; $(X_2\, X_3) = X_1$; $(X_3\, X_1) = X_2$; $(X_i\, X_4) = 0\ (i = 1,\ 2,\ 3)$. Allora (Bianchi loc. cit. pag. 70-72) posto $d\,s^2 = d\,x_4^2 + \sum_1^3 a_{ik}\, d\,x_i\, d\,x_k$ avremo:

$$\left.\begin{aligned} d\,s^2 = d\,x_4^2 + \varphi\, d\,x_1^2 + [\varphi \operatorname{sen}^2 x_1 + n^2 \psi \cos^2 x_1]\, d\,x_2^2 + \\ + 2\,n\,\psi \cos x_1\, d\,x_2\, d\,x_3 + \psi\, d\,x_3^2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

dove φ, ψ sono funzioni di x_4; le $x_4 =$ cost. sono a curvatura costante soltanto se $\varphi = n^2 \psi$; ma in questo caso lo spazio (1) ammette proprio un G_6 intransitivo.

II. caso, il G_4 generato dalle $(X_1\, X_2\, X_3\, X_4)$ ha la composizione

$$\left.\begin{aligned} (X_1\, X_2) = 0 \quad (X_1\, X_3) = X_1 \quad (X_2\, X_3) = X_2; \quad (X_1\, X_4) = X_2; \\ (X_2\, X_4) = -X_1; \quad (X_3\, X_4) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Siano le $x_4 =$ cost. le varietà invarianti e sia $d\,s^2 = \sum_1^3 a_{ik}\, d\,x_i\, d\,x_k + d\,x_4^2$.

Dalla composizione del sottogruppo $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ che si può immaginare transitivo nelle varietà x_4 si trae (Bianchi, loc. cit., pag. 49) che una delle $x_4 =$ cost. si potrà supporre abbia l'elemento lineare

$$d\,s^2 = d\,x_1^2 + e^{-2x_1}(d\,x_2^2 + d\,x_3^2).$$

La X_4 deve essere un movimento per questa e deve soddisfare alle (2).

(*) Cfr. Lie, Bd. III[tes].

Potremo dunque supporre:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\,; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}\,; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\,;$$
$$X_4 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

e l'elemento lineare cercato sarà

$$d\,s^2 = d\,x_4^2 + \varphi\, d\,x_1^2 + \psi\, e^{-2x_1}(d\,x_2^2 + d\,x_3^2) \tag{3}$$

dove φ, ψ sono funzioni di x_4. Se esiste un gruppo G_5 contenente detto G_4 che possa essere un movimento per lo spazio (3) si riconosce coi soliti metodi che la sua quinta trasformazione X_5 (che per ipotesi non può lasciar fisse le $x_4 = \text{cost.}$) si può immaginare del tipo $X_5 = a \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_4}$ ($a = \text{cost.}$) oppure del tipo $X_5 = e^{x_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_4} + \lambda_1(x_4)\frac{\partial}{\partial x_1}\right]$. Nel primo caso è $\varphi = \text{cost.}$; $\psi = e^{2 a x_4}$; e mutando i parametri x_1, x_4 in loro combinazioni lineari si trova il tipo già noto $d\,s^2 = d\,x_4^2 + k\, d\,x_1^2 + e^{-2x_1}(d\,x_2^2 + d\,x_3^2)$ ($k = \text{cost.}$). Nell'ultimo caso si ha dalle formule di Killing $\psi' - 2\lambda_1\psi = \varphi' + 2\lambda_1\varphi = 0$.

Il gruppo G_4 generato da X_1, X_2, X_3, X_5 ha per varietà minime invarianti le varietà $\int \lambda_1\, d\,x_4 - x_1 = \text{cost.}$ che chiaramente per la $\psi' - 2\lambda_1\psi = 0$ sono euclidee; rientriamo così nell'ultimo caso che ora tratteremo che il nostro spazio ammetta un G_4, le cui varietà minime invarianti sono euclidee.

III caso. Sia G_4 generato dalle X_1, X_2, X_3, X_4 e ammetta delle varietà euclidee $x_4 = \text{cost.}$ come varietà invarianti; potremo porre:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\,; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}\,; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1}\,; \quad X_4 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\,.$$

Le formule di Killing ci dànno:

$$d\,s^2 = d\,x_4^2 + \varphi\, d\,x_1^2 + \psi\,(d\,x_2^2 + d\,x_3^2) \tag{4}$$

dove φ, ψ sono funzioni di x_4. Una trasformazione X_5 che non lasci fisse le $x_4 = \text{cost.}$, e che con le precedenti generi un gruppo che si possa considerare gruppo di movimenti per uno spazio (4) è, come tosto si vede di uno dei due tipi:

$$X_5 \quad \frac{\partial}{\partial x_4} + \beta\, x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \quad (\beta = \text{cost.}; \quad \gamma = \text{cost.})$$
$$X_5 = e^{x_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_4} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right] \qquad \lambda_1 = \lambda_1(x_4)$$

a meno di una combinazione lineare delle X_1, X_2, X_3, X_4.

Nel secondo caso è per le formule di Killing $\psi = \text{cost.}$; di più le varietà $x_2 = \text{cost.}$; $x_3 = \text{cost.}$ ammettono pure la X_5 e sono perciò a curvatura costante. Mutando i parametri x_1, x_4 si ha quindi:

$$d\,s^2 = d\,x_3^2 + d\,x_2^2 + d\,x_4^2 + e^{-2x_4}\,d\,x_1^2$$

oppure

$$d\,s^2 = d\,x_3^2 + d\,x_2^2 + d\,x_4^2 + \cos^2 x_4\,d\,x_1^2$$

oppure

$$d\,s^2 = d\,x_3^2 + d\,x_2^2 + d\,x_4^2 + d\,x_1^2$$

casi che tutti rientrano in tipi già noti. Nel primo caso si trova dalle formule di Killing $\varphi = c_{11}\,e^{-2\beta x_4}$, $\psi = c_{22}\,e^{-2\gamma x_4}$ ($c_{11} = \text{cost.}$; $c_{22} = \text{cost.}$). Se $\beta = \gamma = 0$ lo spazio è euclideo, se $\beta = 0$ oppure se $\gamma = 0$, abbiamo ancora tipi già studiati; potremo dunque supporre $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Sia, se possibile, $X_6 = \Sigma\,\xi_i \dfrac{\partial}{\partial\,x_i}$ una trasformazione che con le precedenti generi un gruppo di movimenti per (4); per le formule di Killing sarà $\dfrac{\partial\,\xi_4}{\partial\,x_1} = 0$; di più $\xi_4 \neq \text{cost.}$ perchè altrimenti $X_6 - \xi_4\,X_5$ lascerebbe fisse le $x_4 = \text{cost.}$; caso che per noi è escluso, perchè altrimenti l'elemento (4) ammetterebbe tutto un G_6 intransitivo. Posto

$$(X_i\,X_6) = \sum_k \lambda_{ik}\,X_k$$

si ha dalle formule di composizione e dalle $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ che $\lambda_{16} = \lambda_{26} = \lambda_{36} = 0$; e quindi $\xi_4 = \lambda_{35}\,x_1 + \lambda_{15}\,x_2 + \lambda_{25}\,x_3 + d$, dove d è una costante che, scrivendo X_6 al posto di $X_6 - d\,X_5$, si può supporre nulla. Dalle

$$(X_i\,X_6) = \sum_k \lambda_{ik}\,X_k \quad (i = 1,\ 2,\ 4)$$

si trae tosto che ξ_2, ξ_3 sono soltanto funzioni di x_2, x_3 e quindi per le formule di Killing relative ad a_{24}, a_{34} che ξ_4 non dipende da x_2, x_3 ossia che $\lambda_{15} = \lambda_{25} = 0$. Scrivendo la $(X_3\,X_6) = \sum\limits_k \lambda_{3k}\,X_k$ si trova tosto che $\lambda_{35}\,\gamma = 0$ e poichè $\gamma \neq 0$ se ne trae $\lambda_{35} = 0$; sarebbe quindi $\xi_4 = 0$, ciò, che come abbiamo già osservato, è contrario alla nostra ipotesi.

È così esaurita completamente la nostra discussione.