

Sulle rappresentazioni che conservano le ipersfere.

(Di GUIDO FUBINI, a Torino.)

Siano

$$\sum a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

e

$$\sum b_{ik} dy_i dy_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

gli elementi lineari di due metriche, dove con a_{ik} e b_{ik} indico rispettivamente funzioni delle x , e delle y finite e continue, insieme a tutte quelle loro derivate, che dovremo considerare.

Noi ci chiediamo quando si possa stabilire tra le due geometrie una tale corrispondenza di contatto T (nel senso di S. LIE) che alle ipersfere (*) nella prima geometria corrispondano le ipersfere della seconda.

Applicheremo poi i risultati così ottenuti al caso particolare delle superficie ($n = 2$).

La difficoltà della ricerca consiste in primo luogo in ciò che in generale per le ipersfere non si possono assegnare equazioni differenziali (**). Ciononostante vedremo che con opportuni artifici si riesce a risolvere il problema propostoci, e che la risoluzione è particolarmente semplice e fors'anche interessante.

(*) Si dice *ipersfera* una ipersuperficie, i cui punti hanno una distanza geodetica costante (*raggio* della ipersfera) da un punto fisso (*centro* della ipersfera).

(**) Cfr. la mia Nota: *Sulla teoria delle ipersfere e dei gruppi conformi*, ecc. (Rend. dell'Istituto Lombardo, 1904). L'artificio, che useremo al § 1 è analogo a quello usato in questa Nota. Il § 2 ricorre invece ad artifici e metodi affatto distinti.

§ 1. IL PROBLEMA GENERALE.

Indicheremo una ipersfera nella metrica (1) per mezzo delle coordinate (x_1, x_2, \dots, x_n) del suo centro, e del suo raggio x_{n+1} . In modo analogo indicheremo una ipersfera della metrica (2) per mezzo delle coordinate (y_1, y_2, \dots, y_n) del suo centro, e del suo raggio y_{n+1} . Alla corrispondenza di contatto T corrisponderà per ipotesi una corrispondenza

$$x_\alpha = x_\alpha(y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n+1) \quad (3)$$

tra le ipersfere nelle due geometrie (1) e (2). La nostra questione è evidentemente equivalente a quella di riconoscere quando la corrispondenza (3) tra le ipersfere nelle geometrie (1) e (2) è subordinata a una corrispondenza di contatto tra queste due geometrie. A tal fine è necessario e sufficiente che la corrispondenza (3) porti ipersfere tangenti in ipersfere tangenti. Se noi dunque chiamiamo *fascio* di ipersfere l'insieme delle ∞^1 ipersfere, che sono tangenti in uno stesso punto, dovremo cercare quando la (3) fa corrispondere i *fasci* delle ipersfere nella geometria (1) ai *fasci* di ipersfere nella geometria (2).

Ricercheremo quindi anzitutto le condizioni affinché ∞^1 ipersfere $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ formino un fascio.

Ricordando che ipersfere tangenti in un punto A hanno i centri tra una stessa geodetica uscenti da A , e hanno raggi uguali alla distanza geodetica dal punto A al centro corrispondente, troviamo facilmente che le condizioni cercate sono le:

$$\sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k - dx_{n+1}^2 = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

$$d^2 x_i dx_{n+1} - dx_i d^2 x_{n+1} + \sum_{h,k} \left\{ \begin{matrix} h, k \\ i \end{matrix} \right\} dx_h dx_k dx_{n+1} = 0 \quad (i, h, k = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

quando con $\left\{ \begin{matrix} h, k \\ i \end{matrix} \right\}$ si indichino, al modo usato dal prof. L. BIANCHI nelle sue *Lezioni di Geometria Differenziale*, i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie per l'elemento lineare (1).

Infatti le equazioni (4), (5) dicono che il punto (x_1, x_2, \dots, x_n) descrive una geodetica nello spazio definito da (1), di cui x_{n+1} è l'arco. Ed evidente-

mente il precedente sistema di equazioni è scritto sotto una forma, che è indipendente dalla variabile scelta come indipendente.

Al precedente sistema di equazioni possiamo dare un'altra forma, per noi più opportuna. *Indicheremo con lettere latine gli indici, che possono assumere i valori 1, 2, ..., n, e con lettere greche gli indici, che possono assumere i valori 1, 2, ..., n, n + 1.* Porremo

$$c_{ik} = b_{ik}, \quad c_{i,n+1} = 0, \quad c_{n+1,n+1} = -1 \quad (6)$$

e con

$$\left\{ \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ & \gamma \end{array} \right\}$$

indicheremo i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie relativi alla forma

$$\sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k - dx_{n+1}^2 = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta. \quad (7)$$

Sarà

$$\left\{ \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ & \gamma \end{array} \right\} = 0 \text{ (se anche uno solo degli indici } \alpha, \beta, \gamma \text{ è uguale a } n+1). \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} h & k \\ & i \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} h & k \\ & i \end{array} \right\}. \quad (9)$$

Le (4), (5) si potranno scrivere nella forma

$$\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta = 0 \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} & d^2 x_\alpha dx_\beta + \sum_{\gamma,\delta} \left\{ \begin{array}{cc} \gamma & \delta \\ & \alpha \end{array} \right\} dx_\gamma dx_\delta dx_\beta + \\ & = d^2 x_\beta dx_\alpha + \sum_{\gamma,\delta} \left\{ \begin{array}{cc} \gamma & \delta \\ & \beta \end{array} \right\} dx_\gamma dx_\delta dx_\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Analogamente, posto

$$d_{ik} = b_{ik}, \quad d_{i,n+1} = 0, \quad d_{n+1,n+1} = -1,$$

e indicato con

$$\left\{ \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ & \gamma \end{array} \right\}', \quad \left\{ \begin{array}{cc} i & h \\ & k \end{array} \right\}'$$

i simboli di CHRISTOFFEL per la forma

$$\sum d_{\alpha\beta} dy_\alpha dy_\beta = \sum b_{ik} dy_i dy_k - dy_{n+1}^2 \quad (12)$$

e per la forma (2), si ha

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \ \beta \\ \gamma \end{array} \right\}' = 0 \text{ (se anche uno solo degli indici } \alpha, \beta, \gamma \text{ è uguale a } n+1). \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} i \ h \\ k \end{array} \right\}' = \left\{ \begin{array}{c} i \ h \\ k \end{array} \right\}'. \quad (14)$$

I fasci di ipersfere per la metrica (2) saranno definiti dalle:

$$\sum_{\alpha, \beta} d_{\alpha\beta} d y_{\alpha} d y_{\beta} = 0 \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} d^2 y_{\alpha} d y_{\beta} + \sum_{\gamma, \delta} \left\{ \begin{array}{c} \gamma \ \delta \\ \alpha \end{array} \right\}' d y_{\gamma} d y_{\delta} d y_{\beta} = \\ = d^2 y_{\beta} d y_{\alpha} + \sum_{\gamma, \delta} \left\{ \begin{array}{c} \gamma \ \delta \\ \beta \end{array} \right\}' d y_{\gamma} d y_{\delta} d y_{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Il nostro problema è dunque ridotto a quello di riconoscere quando la (3) trasforma il sistema delle (10), (11) nel sistema delle (15), (16).

Notando che in questi due sistemi di equazioni differenziali le (10), (15) sono gli unici sistemi di equazioni ai differenziali totali del primo ordine, riconosciamo anzitutto che in virtù delle (3) dovrà esistere un'identità

$$\sum c_{\alpha\beta} d x_{\alpha} d x_{\beta} = \mu \sum d_{\alpha\beta} d y_{\alpha} d y_{\beta} \quad (17)$$

dove μ è una funzione delle y . Oltre alla (17) dovrà essere soddisfatta la condizione che le (11) diventino un'identità in virtù delle (3), (15), (16), (17). Sostituendo in (11) al posto delle x i loro valori in funzione delle y , dati dalle (3), troviamo che questa ulteriore condizione si può enunciare anche dicendo che le

$$\left. \begin{aligned} \sum \frac{\partial x_{\beta}}{\partial y_{\epsilon}} d y_{\epsilon} \left[\sum_{\epsilon, \eta} \frac{\partial^2 x_{\alpha}}{\partial y_{\epsilon} \partial y_{\eta}} d y_{\epsilon} d y_{\eta} + \sum_{\gamma, \delta} \left\{ \begin{array}{c} \gamma \ \delta \\ \alpha \end{array} \right\}' \sum_{\epsilon} \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial y_{\epsilon}} d y_{\epsilon} \sum_{\eta} \frac{\partial x_{\delta}}{\partial y_{\eta}} d y_{\eta} + \right. \\ \left. + \sum_{\eta} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial y_{\eta}} d^2 y_{\eta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

devono essere simmetriche nei due indici α, β .

Se noi indichiamo con $\left\{ \begin{array}{c} \alpha \ \beta \\ \gamma \end{array} \right\}'_{\mu}$ i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie per la forma, che è al secondo membro della (17), troviamo con un

facile calcolo :

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \mu \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \gamma \end{matrix} \right\}' + \frac{1}{2} \left[e_{\sigma\gamma} \frac{\partial \log \mu}{\partial x_\beta} + e_{\beta\gamma} \frac{\partial \log \mu}{\partial x_\alpha} - d_{\alpha\beta} \mu^{(\gamma)} \right], \quad (19)$$

quando con $e_{\sigma\gamma}$ si indichi l'unità, o lo zero secondo che $\alpha = \gamma$, oppure $\alpha \neq \gamma$, e con $\mu^{(\gamma)}$ si indichino le quantità soddisfacenti alle

$$\sum_{\gamma} d_{\alpha\gamma} \mu^{(\gamma)} = \frac{\partial \log \mu}{\partial y_\alpha}.$$

In virtù dell'identità (11), si possono esprimere (com'è noto dai primi elementi della teoria dell'equivalenza di due forme quadratiche differenziali) le derivate seconde delle x rapporto alle y in funzione delle derivate prime. E precisamente si ha

$$\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y_\varepsilon \partial y_\eta} + \sum_{\gamma, \delta} \left\{ \begin{matrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_\gamma}{\partial y_\varepsilon} \frac{\partial x_\delta}{\partial y_\eta} = \sum_{\nu} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon & \eta \\ \nu & \nu \end{matrix} \right\}' \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\nu}$$

ossia, per le (19) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y_\varepsilon \partial y_\eta} + \sum_{\gamma, \delta} \left\{ \begin{matrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_\gamma}{\partial y_\varepsilon} \frac{\partial x_\delta}{\partial y_\eta} &= \sum_{\nu} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon & \eta \\ \nu & \nu \end{matrix} \right\}' \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\nu} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \log \mu}{\partial y_\eta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\varepsilon} + \frac{\partial \log \mu}{\partial y_\varepsilon} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\eta} - d_{\varepsilon\eta} \sum_{\nu} \mu^{(\nu)} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\nu} \right]. \end{aligned}$$

Moltiplicando questa uguaglianza per $d y_\varepsilon d y_\eta$, e sommando rispetto a ε, η , si trova :

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon, \eta} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y_\varepsilon \partial y_\eta} d y_\varepsilon d y_\eta + \sum_{\gamma, \delta} \left\{ \begin{matrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \alpha \end{matrix} \right\} \sum_{\varepsilon} \frac{\partial x_\gamma}{\partial y_\varepsilon} d y_\varepsilon \sum_{\eta} \frac{\partial x_\delta}{\partial y_\eta} d y_\eta &= \\ &= \sum_{\nu, \varepsilon, \eta} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon & \eta \\ \nu & \nu \end{matrix} \right\}' \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\nu} d y_\varepsilon d y_\eta + \sum_{\varepsilon} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\varepsilon} d y_\varepsilon \sum_{\eta} \frac{\partial \log \mu}{\partial y_\eta} d x_\eta - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon, \eta} d_{\varepsilon\eta} d y_\varepsilon d y_\eta \sum_{\nu} \mu^{(\nu)} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\nu}. \end{aligned}$$

In virtù di questa uguaglianza la (18) diventa :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\varepsilon} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\varepsilon} d y_\varepsilon \sum_{\varepsilon} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\varepsilon} d y_\varepsilon \sum_{\varepsilon} \frac{\partial \log \mu}{\partial y_\varepsilon} d y_\varepsilon - \\ - \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon, \eta} d_{\varepsilon\eta} d y_\varepsilon d y_\eta \sum_{\nu} \mu^{(\nu)} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\nu} \sum_{\varepsilon} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_\varepsilon} d y_\varepsilon + \\ + \sum_{\nu} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\nu} \left[d^2 y_\nu + \sum_{\varepsilon, \eta} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon & \eta \\ \nu & \nu \end{matrix} \right\}' d y_\varepsilon d y_\eta \right] \sum_{\gamma} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_\gamma} d y_\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Il primo termine di (20) è evidentemente simmetrico nelle α, β .

Il secondo è nullo in virtù di (15). Il terzo si può per (16) scrivere nel seguente modo

$$\sum_{\eta, \gamma} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\nu} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_\gamma} d y_\nu \left[d^2 y_\gamma + \sum_{\varepsilon, \eta} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon & \eta \\ & \gamma \end{matrix} \right\}' d y_\varepsilon d y_\eta \right]$$

che chiaramente si può scrivere anche sotto la forma

$$\sum_\nu \frac{\partial x_\beta}{\partial y_\nu} \left[d^2 y_\nu + \sum_{\varepsilon, \eta} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon & \eta \\ & \nu \end{matrix} \right\}' d y_\varepsilon d y_\eta \right] \sum_\gamma \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\gamma} d y_\gamma.$$

Le due forme, sotto cui abbiamo scritto l'ultimo termine di (20), dimostrano che esso è simmetrico negli indici α, β .

Riassumendo ne deduciamo che l'espressione (20), e quindi anche la (18) è in virtù delle (15), (16) simmetrica in α, β .

Quindi in conclusione l'unica condizione a cui deve soddisfare la (3) è quella che sussista un'identità del tipo (17).

Il nostro risultato si può enunciare dicendo:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché la corrispondenza (3) tra le ipersfere nelle geometrie (1), (2) sia individuata da una corrispondenza di contatto tra le due geometrie è che in virtù della (3) sussista un'identità (17) (dove μ è una funzione delle y), ossia in altre parole che la (3) sia una corrispondenza conforme tra le due geometrie (**non reali**), definite assumendo ad elemento lineare rispettivamente le forme*

$$\sum_{i,k} a_{ik} d x_i d x_k - d x_{n+1}^2$$

$$\sum_{i,k} b_{ik} d y_i d y_k - d y_{n+1}^2.$$

Se poi per $x_{n+1} = 0$ si ha $y_{n+1} = 0$, ossia se alle ipersfere di raggio nullo corrispondono ipersfere di raggio nullo, allora la (3) è subordinata a una vera trasformazione di punti tra le geometrie (1), (2).

Ne possiamo trarre una conseguenza.

Se alle ipersfere di uno stesso raggio α per la geometria (1) corrispondono ipersfere di uno stesso raggio β per la geometria (2), la corrispondenza che passa tra i loro centri è una corrispondenza conforme tra le metriche (1), (2).

E in particolare:

Una trasformazione biunivoca tra i punti delle geometrie (1), (2), che porti ipersfere in ipersfere è una corrispondenza conforme.

Ne deduciamo ancora:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione T sulle x_α corrisponda a una trasformazione di contatto nello spazio, ove le x_1, x_2, \dots, x_n sono variabili coordinate, è che la T sia una trasformazione conforme per la metrica (**non reale**) definita, assumendo (4) come elemento lineare.*

§ 2. APPLICAZIONI AL CASO DELLE SUPERFICIE ($n = 2$).
TRASFORMAZIONE DEL PROBLEMA.

Noi vogliamo ricercare le coppie di superficie, tali che tra di esse esista una corrispondenza di contatto che porti i cerchi in cerchi (quando si intenda con cerchio il luogo dei punti che hanno una distanza geodetica costante da un punto fisso). Un tale studio, per i risultati del § 1, equivale a quello di ricercare le coppie di forme differenziali quadratiche

$$a_{11}(x_1, x_2) dx_1^2 + 2a_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + a_{22}(x_1, x_2) dx_2^2 \quad (21)$$

$$b_{11}(y_1, y_2) dy_1^2 + 2b_{12}(y_1, y_2) dy_1 dy_2 + b_{22}(y_1, y_2) dy_2^2 \quad (22)$$

tali che esista una trasformazione

$$x_\alpha = x_\alpha(y_1, y_2, y_3) \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (23)$$

la quale porti la forma

$$F = \sum_{i,k}^{1,2} a_{ik} dx_i dx_k - dx_3^2 \quad (24)$$

in una forma proporzionale alla:

$$F' = \sum_{i,k}^{1,2} b_{ik} dy_i dy_k - dy_3^2. \quad (25)$$

Lo studio diretto di questo problema porta a calcoli, che si vanno rapidamente complicando. Noi ricorremo quindi a metodi indiretti.

Osserviamo che su ogni superficie (come su ogni varietà) esiste un gruppo continuo specialmente notevole che porta le ipersfere in ipersfere: il gruppo cioè delle trasformazioni *per superficie parallele*, ossia delle trasformazioni che aumentano di una stessa costante il raggio di ogni ipersfera senza mu-

tarne il centro. Al gruppo di tali trasformazioni per la superficie (22), gruppo che è evidentemente generato dalla trasformazione infinitesima

$$\frac{\partial}{\partial y_3} \quad (26)$$

dovrà nella nostra ipotesi corrispondere un gruppo continuo a un parametro, generato da una trasformazione

$$X = \sum_i \xi_i(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (27)$$

che trasforma ogni cerchio della superficie (21) in un altro cerchio per la superficie (21).

Può la (27) essere sulla superficie (21) essere ancora una trasformazione per superficie parallele? In tal caso il 2.^o membro di (27) dovrebbe differire da $\frac{\partial}{\partial x_3}$ soltanto per un fattore costante; e, poichè (26), (27) devono essere identiche in virtù delle (3), la trasformazione (3) dovrà essere evidentemente del tipo:

$$x_1 = x_1(y_1, y_2); \quad x_2 = x_2(y_1, y_2); \quad x_3 = h y_3 + \varphi(y_1, y_2) \quad (23)^{\text{bis}}$$

($h = \text{cost.}$; φ funzione delle y_1, y_2).

Esprimendo che le forme (24), (25) sono proporzionali in virtù delle (23), si trova anzitutto che:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}, \quad \text{ossia} \quad \varphi = k \quad (k = \text{cost.}).$$

Mutando poi le variabili coordinate sulla superficie (22), assumendo come nuove variabili le

$$r_1 = x_1(y_1, y_2) \quad r_2 = x_2(y_1, y_2)$$

si trova che *le superficie (21), (22) sono tra di loro simili. È ben chiaro viceversa che tra due superficie simili le ipersfere si corrispondono.*

Prescindendo da questo caso banale, noi dovremo anzitutto ricercare tutte le superficie (21), per cui esiste una trasformazione (27), distinta dalla $\frac{\partial}{\partial x_3}$, che possa essere definita da una trasformazione di contatto. A questa ricerca è dedicato il seguente paragrafo.

§ 3. RISOLUZIONE DEL PROBLEMA POSTO AL § 2.

Per l'ultimo teorema del § 1, la ricerca delle trasformazioni (27) del § 2 sui cerchi della superficie (21), che sono individuate da una qualche trasformazione di contatto, equivale alla ricerca delle trasformazioni (27), che sono conformi per la metrica *non reale*, definita assumendo (24) come elemento lineare, ossia che trasformano (24) in una forma proporzionale. Affinchè questo avvenga, la forma

$$\sum a_{ik} (x_1 + \varepsilon \xi_1, x_2 + \varepsilon \xi_2) d(x_i + \varepsilon \xi_i) d(x_k + \varepsilon \xi_k) - [d(x_3 + \varepsilon \xi_3)]^2,$$

dove ε si consideri come un parametro infinitesimo di cui sono trascurabili le seconde potenze, deve (a meno di infinitesimi del secondo ordine) essere proporzionale a F . E, poichè nelle nostre ipotesi $a_{ik}(x_1 + \varepsilon \xi_1, x_2 + \varepsilon \xi_2) = a_{ik}(x_1, x_2) + \varepsilon \sum_r \xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}$, si verifica facilmente che la nostra condizione equivale alle equazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} + 2 a_{11} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + 2 a_{12} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} &= 2 a_{11} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \\ \xi_1 \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} + 2 a_{21} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + 2 a_{22} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} &= 2 a_{22} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{aligned} \right\} \quad (28)_1$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + a_{12} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} &= \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \\ a_{21} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + a_{22} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} &= \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \end{aligned} \right\} \quad (28)_2$$

$$\xi_1 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} + a_{11} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + a_{12} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + a_{21} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = 2 a_{12} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}. \quad (28)_3$$

Il sistema delle (28)₁, (28)₂, (28)₃ si dirà anche il *sistema delle equazioni di KILLING generalizzate*.

Se $\xi_1 = \xi_2 = 0$, allora le (28) danno $\xi_3 = \text{cost.}$ E la (27) si riduce alla *trasformazione infinitesima per superficie parallele*.

Se

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} = 0,$$

allora le (28)₂ dimostrano che ξ_3 è funzione della sola x_3 . E poichè α_{11} , α_{22} , ξ_1 , ξ_2 non dipendono (nella attuale ipotesi) dalla x_3 , le (28)₁ dicono che $\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = \text{cost.}$ Si potrà dunque porre

$$\xi_3 = h x_3 + k \quad (h, k = \text{cost.}).$$

Possiamo poi mutare le variabili x_1 , x_2 , in guisa che la trasformazione $\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ si riduca alla $\frac{\partial}{\partial x_1}$. E le (28) si riducono alle:

$$\frac{1}{2\alpha_{11}} \frac{\partial \alpha_{11}}{\partial x_1} = \frac{1}{2\alpha_{22}} \frac{\partial \alpha_{22}}{\partial x_1} = \frac{1}{2\alpha_{12}} \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial x_1} = h,$$

ossia

$$\alpha_{ik} = e^{2hx_1} b_{ik} [b_{ik} = b_{ik}(x_2), \text{ indipendente da } x_1].$$

E l'elemento lineare (21) diventa:

$$e^{2hx_1} [b_{11} dx_1^2 + 2b_{12} dx_1 dx_2 + b_{22} dx_2^2].$$

Scrivendo x_1 al posto di $2hx_1$, si trova potersi supporre $2h = 1$; posto poi

$$dz_1 = dx_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}} dx_2; \quad dz_2 = \frac{\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}}{b_{11}} dx_2$$

l'elemento lineare diventa

$$\frac{b_{11} e^{z_1}}{e^{\int \frac{b_{12}}{b_{11}} dx_2}} [dz_1^2 + dz_2^2].$$

Ora $a = \frac{b_{11}}{e^{\int \frac{b_{12}}{b_{11}} dx_2}}$ è funzione della sola x_2 , e quindi anche della sola z_2 ;

ponendo, per non complicare le notazioni, $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, l'elemento lineare si può scrivere:

$$e^{z_1} a (dx_1^2 + dx_2^2), \quad (\text{I})$$

dove a è funzione della sola x_2 .

Per studiare ora il caso generale, osserviamo che se la (27) soddisfa alle (28), allora vi soddisfa anche la

$$\frac{\partial^i \xi_1}{\partial x_3^i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial^i \xi_2}{\partial x_3^i} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial^i \xi_3}{\partial x_3^i} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (27)'$$

per un qualsiasi valore di i , e quindi anche vi soddisfa ogni combinazione lineare a coefficienti costanti delle (27), (27)'. Poichè d'altra parte la più generale trasformazione, che soddisfa alle (28), può contenere al massimo un numero finito di costanti arbitrarie, esisteranno un intero m , e delle costanti $c_m, c_{m-1}, \dots, c_1, c_0$ ($c_m \neq 0$), tali che sia

$$c_m \frac{\partial^m \xi}{\partial x_3^m} + c_{m-1} \frac{\partial^{m-1} \xi}{\partial x_3^{m-1}} + \dots + c_1 \frac{\partial \xi}{\partial x_3} + c_0 \xi = 0 \quad (29)$$

per $\xi = \xi_i$ ($i = 1, 2, 3$). Sia m il più piccolo intero, che gode di tale proprietà. Distinguiamo due casi:

1.º) Le radici dell'equazione *caratteristica*

$$c_m t^m + c_{m-1} t^{m-1} + \dots + c_1 t + c_0 = 0$$

non sono tutte nulle. Esisterà allora un integrale $x_3^q e^{kx}$ ($q =$ intero) della (29), dove k è una costante *reale o complessa e non nulla*, tale che l'integrale generale di (29) è una combinazione lineare (a coefficienti funzioni delle sole x_1, x_2) dell'integrale citato, e dell'integrale generale di una equazione di ordine $m - 1$

$$\left. \begin{aligned} G(\eta) = p_{m-1} \frac{\partial^{m-1} \eta}{\partial x_3^{m-1}} + p_{m-2} \frac{\partial^{m-2} \eta}{\partial x_3^{m-2}} + \dots + p_0 \eta = 0 \\ (p_i = \text{cost.}; p_{m-1} \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Sarà evidentemente

$$G(x_3^q e^{kx}) \neq \text{cost.} \quad (31)$$

Infatti il primo membro di (31) è un'espressione del tipo $e^{kx} P(x_3)$ (dove P è un polinomio nella x_3), che può essere costante, soltanto se $P = 0$. In tal caso ogni integrale della (29) soddisferebbe alla (30): ciò che è assurdo.

Ora evidentemente, per quanto abbiamo osservato, la

$$Y = G(\xi_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + G(\xi_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + G(\xi_3) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

soddisfa ancora alle (28). E, poichè le $G(\xi_i)$ ($i = 1, 2, 3$) non possono, per quanto abbiamo osservato, essere tutte e tre costanti, ma sono tutte e tre prodotti di una funzione η_i delle x_1, x_2 per la

$$\psi(x_3) = G(x_3^q e^{kx}) \neq \text{cost.},$$

la Y sarà del tipo

$$Y = \psi(x_3) \left[\eta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \eta_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \quad \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_3} = 0; i = 1, 2, 3 \right).$$

Ora, se $\eta_1 = \eta_2 = 0$, il coefficiente $\eta_3 \psi(x_3)$ di $\frac{\partial}{\partial x_3}$ dovrebbe, (per quanto osservammo al principio del paragrafo) essere uguale a una costante; e, poichè $\psi(x_3) \neq \text{cost.}$, dovrebbe essere anche $\eta_3 = 0$: ciò che è assurdo. Noi potremo dunque mutare le variabili coordinate in guisa che la $\eta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ assuma la forma $\frac{\partial}{\partial x_1}$, ossia che $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$.

E avremo quindi

$$Y = \psi(x_3) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + \eta_3(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_3} \right].$$

Esprimendo che questa trasformazione soddisfa alle (28)₂, troviamo:

$$\frac{1}{a_{11}} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} = \frac{\psi'_3}{\psi_3}, \quad \frac{\psi'_3}{\psi_3} = \frac{1}{a_{21}} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2}.$$

Queste equazioni (di cui il primo membro non dipende dalle x_3 , il secondo dipende solo dalle x_1, x_2) dimostra che $\frac{\psi'_3}{\psi_3} = \text{cost.}$ Sarà dunque $\psi_3 = h e^{kx_3}$ ($k, h = \text{cost.}$) ($k \neq 0$).

(Si noti che non può essere $a_{11} = a_{12} = 0$, perchè ci riferiamo a superficie non degeneri). E le (28) diventano così:

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} = k a_{11}; \quad \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} = k a_{12}; \quad \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} = 2k \eta_3 a_{ik}. \quad (32)$$

Siccome abbiamo fatto uso di trasformazioni immaginarie, non possiamo escludere *a priori* che $a_{11} = 0$. Ma, se $a_{11} = 0$, le precedenti equazioni danno successivamente (poichè $k \neq 0$) $\eta_3 = \eta_3(x_2)$; $a_{12} = a_{12}(x_2)$; $2k a_{12} \eta_3 = 0$ e quindi $a_{12} \eta_3 = 0$. Ma $a_{12} \neq 0$, perchè per ipotesi $a_{11} = 0$, e l'elemento lineare non è degenero.

Quindi $\eta_3 = 0$, e dalle precedenti equazioni si deduce $a_{11} = a_{12} = 0$, ciò che, come dicemmo, è assurdo.

È dunque $a_{11} \neq 0$. L'ultima delle tre equazioni precedenti dà per $i, k = 1, 2$

$$a_{ik} = M b_{ik}$$

dove M dipende dalle x_1, x_2 e le b_{ik} dipendono dalla sola x_2 . Poichè è $a_{11} \neq 0$,

sarà $b_{11} \neq 0$; e si potrà porre:

$$dz_1 = dx_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}} dx_2$$

$$dz_2 = \frac{\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}}{b_{11}} dx_2.$$

Sarà

$$\sum a_{ik} dx_i dx_k = M b_{11} (dz_1^2 + dz_2^2) = a_{11} (dz_1^2 + dz_2^2)$$

$$Y = \psi(x_3) \left[\frac{\partial}{\partial z_1} + \eta_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right].$$

Scrivendo di nuovo x_1, x_2 al posto delle z_1, z_2 , troviamo che, pur senza mutare la forma della Y , si può supporre $b_{12} = 0$; $b_{11} = b_{22} = 1$.

Le equazioni (32) dimostrano che sarà:

$$\eta_3 = \eta_3(x_1); \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} = 2k \eta_3 a_{11}; \quad a_{11} = \frac{1}{k} \eta_3',$$

donde

$$\frac{\partial^2 \log a_{11}}{\partial x_1^2} = 2k^2 a_{11}; \quad \frac{\partial \log a_{11}}{\partial x_2} = 0.$$

Donde risulta che le nostre superficie sono

II). *Superficie a curvatura costante.*

2.º) Ci rimane da studiare il caso che le radici dell'equazione caratteristica siano tutte nulle, ossia che le ξ_i sieno polinomi in x_3 , uno almeno dei quali è di grado m , mentre gli altri due sono di grado non superiore a m .

La trasformazione

$$Y = \sum_{\alpha} \frac{\partial^{m-1} \xi_{\alpha}}{\partial x_3^{m-1}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$$

sarà del tipo

$$Y = x_3 \left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \eta_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \left(z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right),$$

dove le η, z sono funzioni delle x_1, x_2 , e una almeno delle η è differente da zero. Se $\eta_1 = \eta_2 = 0$, noi ritorniamo alle superficie (I) già considerate; almeno una delle η_1, η_2 è differente quindi da zero; e, mutando le variabili coordinate, potremo supporre che $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$.

La trasformazione

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^m \xi_{\alpha}}{\partial x_3^m} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \eta_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

soddisferà ancora alle (28). Le (28)₂ dimostrano che $\eta_3 = \text{cost.}$

Le (28)₁ e (28)₃ ci dicono che le α_{ik} sono indipendenti dalla x_1 . Cambiando variabili coordinate potremo dunque ridurre l'elemento lineare delle nostre superficie al tipo

III) $\alpha (dx_1^2 + dx_2^2)$, dove α è funzione della sola x_2 . In conclusione le uniche superficie, che ammettono una trasformazione infinitesima di contatto, che muti ipersfere in ipersfere sono le superficie (I), (II), (III).

Queste superficie si possono caratterizzare dicendo che esse ammettono almeno una similitudine infinitesima in sè stesse (che per la superficie I e III è la $\frac{\partial}{\partial x_1}$; anzi questa è un puro movimento per le superficie III).

§ 4. RICERCA DEL GRUPPO COMPLETO CORRISPONDENTE ALLE SUPERFICIE I, II, III.

Ci proponiamo in questo paragrafo di trovare la più generale trasformazione infinitesima, che soddisfi alle (28) per ognuna delle superficie (I), (II), (III). Ci possiamo risparmiare lo studio delle superficie (II) (a curvatura costante). Esse sono tutte, com'è ben noto, rappresentabili sul piano con conservazione dei loro cerchi; e il più ampio gruppo di trasformazioni di contatto, che conservino i cerchi del piano, è un gruppo ben conosciuto.

Cominceremo il nostro studio dal tipo (III). La curvatura di una tale superficie è (posto $X_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}$) uguale a

$$X_2^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{X_2'}{X_2} \right) = X_2 X_2'' - X_2'^2.$$

Poichè escludiamo le superficie (II), potremo supporre che

$$X_2 X_2'' - X_2'^2 = \text{cost.} \quad (33)$$

e quindi anche che

$$\frac{X_2''}{X_2} = \text{cost.} \quad (34)$$

Converremo di dire che una funzione φ è armonica se $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0$, e che due funzioni φ, ψ sono armoniche coniugate se $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$. (Si noti che φ, ψ possono essere anche funzioni di x_3). Per le (28)₂ è

$$a \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}; \quad a \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(a \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \right)$$

ossia, poichè in virtù delle (28)₁ e della (28)₃ le ξ_1, ξ_2 sono armoniche coniugate, e poichè a non dipende dalla x_1 :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\sqrt{a} \xi_1) = 0$$

cosicchè si potrà porre

$$\xi_1 = \psi(x_1, x_2) + X_2 \varphi(x_1, x_3)$$

dove le ψ, φ sono funzioni indipendenti l'una dalla x_3 , l'altra dalla x_2 .

Poichè ξ_1 è armonico, altrettanto avviene di $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}$. Quindi

$$X_2'' \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + X_2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_3} = 0.$$

La φ è indipendente da x_2 ; la X_2 dipende dalla sola x_2 .

In virtù di (34) se ne deduce che $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0$, ossia che ξ_1 è funzione delle sole x_1, x_2 . Potremo quindi scrivere più semplicemente

$$\xi_1 = \psi(x_1, x_2).$$

Se $\rho(x_1, x_2)$ è una funzione delle x_1, x_2 , armonica coniugata di ψ , sarà

$$\xi_2 = \rho(x_1, x_2) + X_3(x_3)$$

dove X_3 è indipendente dalle x_1, x_2 . Le (28) danno:

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = \frac{X_3'}{X_2^2}; \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = -X_3 \frac{X_2'}{X_2} + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} - \rho \frac{X_2'}{X_2}. \quad (35)$$

La prima e la terza di queste equazioni dimostrano che

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_2} - \rho \frac{X'_2}{X_2} = X_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\rho}{X_2} \right)$$

è funzione della sola x_2 , cosicchè si potrà porre

$$\rho = Y_2 + X_2 Y_1,$$

essendo Y_1, Y_2 funzioni rispettivamente della y_1 , e della y_2 . E, poichè ρ è armonica, sarà

$$Y''_2 + X''_2 Y_1 + X_2 Y''_1 = 0.$$

Questa equazione, scritta per due valori particolari ma generici della x_2 , dà un sistema di due equazioni, che per la (34) è risolubile rispetto alle Y_1, Y''_1 , e che, risolto, ci dà Y_1, Y''_1 espressi in funzione della sola x_2 . Quindi Y_1 è costante, ρ dipende dalla sola x_2 , e, poichè è armonico, è una funzione lineare di x_2 . Sarà quindi

$$\rho = \alpha x_2 + \beta; \quad \xi_2 = \alpha x_2 + \beta + X_3 \quad (\alpha, \beta = \text{cost.}).$$

E la condizione di integrabilità della (35) diventa

$$X''_3 + \alpha X_2 X'_2 + (X''_2 X_2 - X'^2_2) [\alpha x_2 + \beta + X_3] = 0. \quad (36)$$

Con un ragionamento analogo a quello applicato alla Y_1 , ne traggiamo, in virtù della (33), che $X_3 = \text{cost.}$; cosicchè, mutando β in $\beta + \text{cost.}$, si può supporre $X_3 = 0$. La (36) diventa così:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[(\alpha x_2 + \beta) \frac{X'_2}{X_2} \right] = 0$$

cosicchè, o è

$$\alpha = \beta = 0,$$

oppure è:

$$\frac{X'_2}{X_2} = \frac{h}{\alpha x_2 + \beta} \quad (h = \text{cost.}). \quad (37)$$

Se dunque α è funzione generica di x_2 , è $\xi_2 = 0$, e quindi per le (35) $\xi_3 = \text{cost.}$ Poichè ξ_1 è indipendente da x_3 , ed è armonico coniugato di ξ_3 , è pure $\xi_1 = \text{cost.}$ Troviamo quindi le seguenti superficie

$$a (d x_1^2 + d x_2^2) \quad (\text{III})_1$$

(a funzione generica di x_2).

Il gruppo corrispondente è generato dalle

$$\frac{\partial}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Se invece vale la (37), non può essere $\alpha = 0$ in virtù di (33).
Quindi la (37) si può scrivere

$$\log X_2 = \frac{h}{\alpha} \log (\alpha x_2 + \beta) + \log K \quad (K = \text{cost.})$$

$$X_2 = K (\alpha x_2 + \beta)^{\frac{h}{\alpha}} = K \alpha^{\frac{h}{\alpha}} \left(x_2 + \frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{h}{\alpha}}.$$

Posto $n = \frac{h}{\alpha}$, e scritto x_2 al posto di $x_2 + \frac{\beta}{\alpha}$ l'elemento lineare delle nostre superficie diventa

$$\lambda x_2^{-2n} (d x_1^2 + d x_2^2) \quad (n = \text{cost.}, \lambda = \text{cost.}). \quad (\text{III})_2$$

Il gruppo corrispondente è quello generato dalle

$$\frac{\partial}{\partial x_3}; \quad \frac{\partial}{\partial x_1}; \quad x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (1 - n) x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Esaurito così lo studio del tipo III, passiamo al tipo (I).

Il gruppo più generale da noi cercato contiene il sottogruppo a due parametri generato dalle:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_2 = 2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$(X_1 X_2) = X_1.$$

Per un noto teorema di S. LIE, se esso ha più di due parametri, esiste in esso una trasformazione

$$X_3 = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

che con le X_1, X_2 genera un gruppo G_3 a tre parametri.

Indicando con c_{ik} delle costanti sarà

$$\left. \begin{aligned} (X_1 X_3) &= c_{11} X_1 + c_{12} X_2 + c_{13} X_3 \\ (X_2 X_3) &= c_{21} X_1 + c_{22} X_2 + c_{23} X_3. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Sostituendo alle X_3 una conveniente combinazione lineare delle X_1, X_2, X_3 , potremo ottenere che $c_{11} = c_{21} = 0$: senza che con ciò venga alterato G_3 . Per le note identità tra le costanti di composizione di un gruppo sarà

$$c_{11} = c_{21} = c_{13} = c_{22} = 0; \quad (c_{23} - 1) c_{12} = 0. \quad (39)$$

E quindi sarà per le (38)

$$\xi_1 = 2 c_{12} x_3 + \eta_1; \quad \xi_2 = \eta_2; \quad \xi_3 = \frac{1}{2} c_{12} x_3^2 + \eta_3 \quad (40)$$

dove le η sono funzioni delle sole x_1, x_2 soddisfacenti alle:

$$2 \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} = (c_{23} + 1) \eta_3; \quad 2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} = c_{23} \eta_2; \quad 2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = c_{23} \eta_1. \quad (41)$$

Se fosse $c_{12} = 0$, le ξ_1, ξ_2 sarebbero per le (40) indipendenti da x_3 ; e quindi per le (28)₂ e per l'ultima delle (40) la η_3 sarebbe costante. Dunque la X_3 sarebbe del tipo

$$X_3 = \eta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \eta_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\eta_3 = \text{cost.}; \quad \eta_1, \eta_2 \text{ indipendenti da } x_3).$$

Mutando le variabili coordinate x_1, x_2 , potremmo ottenere che $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$; e quindi, per quanto abbiamo detto alla fine del § 3, le nostre superficie apparterebbero al tipo III, che noi abbiamo già discusso.

Si può quindi supporre

$$c_{12} \neq 0, \quad \text{e quindi per (39)} \quad c_{23} = 1.$$

La seconda delle (28)₂ ci dice che η_3 dipende solo dalla x_1 ; e in virtù della prima delle equazioni (41), la prima delle (28)₂ dimostra che

$$\eta_3 = 2 c_{12} a e^{x_1}.$$

Essendo $c_{12} \neq 0$, anche a dovrà essere indipendente da x_2 , e quindi costante. Le nostre superficie sarebbero quindi a curvatura nulla, e rientrerebbero nel tipo (II). Troviamo quindi in conclusione:

Eccezione fatta per la superficie a curvatura costante, il gruppo più ampio di trasformazione di contatto che conserva il sistema dei cerchi di una superficie F è il prodotto del gruppo a un parametro delle trasformazioni per curve parallele, e del gruppo (che è al massimo a due parametri) delle eventuali similitudini o movimenti della superficie F in sè stessa; e quindi cerchi concentrici sono portati in cerchi concentrici.

Le superficie a curvatura costante si possono invece, dal nostro punto di vista, considerare come identiche al piano. Il gruppo più ampio di trasformazioni di contatto, che conserva il sistema dei cerchi del piano $dx_1^2 + dx_2^2$, si deduce dal gruppo di trasformazioni conformi per lo spazio $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, mutando x_3 in $i x_3$, ed è quindi a 10 parametri.

§ 5. LE SUPERFICIE CHE SI CORRISPONDONO CON CONSERVAZIONE DEI CERCHI.

Applicheremo i risultati dei §§ 3-4 alla ricerca delle coppie di superficie, tra gli elementi delle quali si può stabilire una corrispondenza, che a un cerchio fa corrispondere un cerchio. Noi dimostreremo che (almeno se ci si limita a superficie reali) in tal caso o le due superficie sono tra loro simili, o sono entrambe a curvatura costante. Se infatti F, F' sono due superficie non simili (una almeno delle quali è a curvatura non costante) tra cui esista una tale corrispondenza, allora almeno una di esse, per es. la F , per l'osservazione finale del § 2, e per i risultati dei §§ 3-4 dovrà avere l'elemento lineare di uno dei tipi seguenti:

- α) $a(dx_1^2 + dx_2^2)$ ($a =$ funzione di x_2)
- β) $a e^{x_1}(dx_1^2 + dx_2^2)$ ($a =$ funzione di x_2)
- γ) $x_2^{-2n}(dx_1^2 + dx_2^2)$.

Detto $a_{11} dy_1^2 + 2 a_{12} dy_1 dy_2 + a_{22} dy_2^2$ l'elemento lineare di F' , dovrà esistere una trasformazione delle y_1, y_2, y_3 alle x_1, x_2, x_3 tale che abbia luogo un'identità del tipo:

- α') $\sum_{i,k} a_{ik} dy_i dy_k - dy_3^2 = \mu [a(dx_1^2 + dx_2^2) - dx_3^2]$
- β') $\sum_{i,k} a_{ik} dy_i dy_k - dy_3^2 = \mu [a e^{x_1}(dx_1^2 + dx_2^2) - dx_3^2]$
- γ') $\sum_{i,k} a_{ik} dy_i dy_k - dy_3^2 = \mu [x_2^{-2n}(dx_1^2 + dx_2^2) - dx_3^2]$

e che sia

- α'') $\frac{\partial}{\partial y_3} = \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial}{\partial x_3}$ ($\alpha \neq 0$; $\alpha, \beta = \text{cost.}$)
- β'') $\frac{\partial}{\partial y_3} = \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial}{\partial x_3}$ ($\alpha \neq 0$; $\alpha, \beta = \text{cost.}$)

$$\begin{aligned} \gamma'' \frac{\partial}{\partial y_3} &= \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta \left[x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (1-n) x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right] + \\ &+ \gamma \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\alpha, \beta \text{ non contemporaneamente nulle; } \alpha, \beta, \gamma = \text{cost.}). \end{aligned}$$

Le traiettorie della trasformazione infinitesima (α'') , (β'') , (γ'') devono essere normali al sistema delle ∞^1 superficie $y_3 = \text{cost.}$ nella metrica (non reale) definita assumendo come elemento lineare il secondo membro di (α') , (β') , (γ') . Quindi il trinomio

$$\begin{aligned} (\alpha''') & \alpha \alpha dx_1 - \beta dx_3 \\ (\beta''') & \alpha e^{x_1} \alpha dx_1 - \beta dx_3 \\ (\gamma''') & x_2^{-2n} [(\alpha + \beta x_1) dx_1 + \beta x_2 dx_2] - [\gamma + \beta(1-n)x_3] dx_3 \end{aligned}$$

deve essere proporzionale a dy_3 .

Nel primo e nel secondo caso si trova come condizione per l'illimitata integrabilità del trinomio in discorso che α sia indipendente da x_2 (caso da trascurarsi, perchè le superficie corrispondenti sarebbero a curvatura nulla), oppure che $\beta = 0$. (Non può essere, come già osservammo, $\alpha = 0$). Ma in tal caso si riconosce facilmente che $\sum_{i,k} a_{ik} dy_i dy_k$ non potrebbe essere una forma definita, cosicchè le nostre superficie non sarebbero reali.

Nel terzo caso si trova come condizione che

$$[\gamma + \beta(1-n)x_3] (-2n)(\alpha + \beta x_1) = 0.$$

Ma non può essere, come abbiamo osservato, $\alpha = \beta = 0$. Nè può essere $n = 0$, perchè altrimenti la nostra superficie sarebbe a curvatura costante. E per la stessa ragione non può essere $n = 1$. È quindi $\gamma = \beta = 0$; e l'elemento lineare $\sum a_{ik} dy_i dy_k$ non potrebbe essere l'elemento lineare di una superficie reale. c. d. d.