Sulle trasformazioni birazionali nello spazio.

(*Di* MARGHERITA BELOCH, *a Roma.*)

PREFAZIONE.

Stabilita la teoria delle trasformazioni birazionali nel piano (CREMONA, CAYLEY, NOETHER, ecc.), incominciarono le ricerche sulla teoria delle trasformazioni birazionali nello spazio, la quale teoria è stata svolta da CAYLEY, NOETHER e principalmente da CREMONA, nelle seguenti opere:

CREMONA, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* (Annali di Mat., ser. II, tom. V).

CAYLEY, *On the rational transformations in space* (Proc. of the London Math. Soc., III, 171).

NOETHER, *Eindeutige Raumtransformationen* (Math. Ann., III).

Inoltre si sono occupati dell'argomento i sigg. LORIA e DE PAOLIS nelle seguenti Memorie:

LORIA, *Nota sulla classificazione delle trasformazioni razionali dello spazio* (Rendic. Istituto Lombardo, 1890).

LORIA, *Le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale del 3.° ordine* (Atti Accad., Torino, 1890).

DE PAOLIS, *Sopra un sistema omaloidico di superficie d'ordine n con un punto* $(n-1)$*-plo* (Giornale di Battaglini, Vol. 13, 1875).

La teoria delle trasformazioni birazionali nello spazio non è ancora stata studiata così perfettamente come quella del piano. Manca un teorema analogo al teorema di NOETHER sulle trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano, il quale afferma che ogni trasformazione birazionale nel piano è il prodotto di un numero finito di trasformazioni quadratiche.

Inoltre i metodi finora conosciuti in generale non possono applicarsi a trasformazioni d'ordine elevato. Essi hanno servito a studiare le trasformazioni individuate da superficie del secondo e terzo ordine e alcuni tipi di trasformazioni d'ordine superiore.

Ora in moltissimi casi si riesce a stabilire dei criteri per decidere la esistenza o non esistenza di certi sistemi omaloidici, ricorrendo a due teoremi, i quali mi sono stati gentilmente indicati dal prof. CASTELNUOVO.

Il primo di questi teoremi si enuncia:

I) Per un sistema omaloidico mancano le superficie aggiunte di tutti gli indici ($h = 1, 2, 3, \ldots$) (ossia le superficie d'ordine $\mu - 4h$ passanti colla molteplicità $i - h$ (o zero) per ogni curva fondamentale *i-pla*, e colla molteplicità $\alpha - 2h$ (o zero) per ogni punto fondamentale *α-plo* del sistema omaloidico dato).

Esaminando allora le successive superficie aggiunte, e esigendo che non esistano, si possono determinare dei limiti per la molteplicità di una curva oppure di un punto fondamentale (*) e si giunge al secondo dei detti teoremi, ossia:

II) Ogni sistema omaloidico, d'ordine $\mu = 4k$, possiede certamente:

a) o una curva fondamentale di molteplicità

$$i \geqq k + 1$$

e di ordine minore od uguale a 15,

b) oppure un punto fondamentale di molteplicità

$$\alpha \geqq 2k + 1.$$

Teoremi analoghi si hanno nei casi $\mu = 4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$.

Procedendo con lo stesso metodo, si possono in molti casi determinare dei limiti per la molteplicità di altre curve e altri punti fondamentali, e precisare così la natura della trasformazione.

Scopo del presente lavoro è appunto quello di stabilire questi limiti e di mostrare come il metodo esposto possa dar luogo a moltissime applicazioni.

Nella prima parte, dopo aver dimostrato la invarianza delle superficie aggiunte in una trasformazione birazionale, dimostro i due teoremi I) e II).

Nella seconda parte considero le trasformazioni del tipo *a*), e in particolare le trasformazioni in cui la curva fondamentale di molteplicità massima sia:

1) una curva piana;

2) una curva situata sopra una quadrica;

(*) Cfr. CASTELNUOVO, *Trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano* (Atti Acc., Torino, 1902).

3) una curva situata sopra una superficie cubica;
e determino dei limiti per le molteplicità di altre curve e di altri punti fondamentali.

La terza parte del mio lavoro è dedicata alle trasformazioni del tipo *b*). Dimostro che:

Una trasformazione birazionale del tipo *b*) o possiede rette fondamentali uscenti dal punto fondamentale F di molteplicità più elevata, o è una trasformazione avente come curva fondamentale di molteplicità massima una curva tracciata sopra un cono di vertice F, in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F, le generatrici.

Considero poi in particolare quelle trasformazioni del tipo *b*), le quali non abbiano curve fondamentali, e dimostro che:

Non esistono trasformazioni birazionali con soli punti fondamentali senza contatti.

Ogni trasformazione birazionale con soli punti fondamentali (e contatti) è una trasformazione monoidale.

Una trasformazione (monoidale) con soli punti fondamentali (e contatti) ha l'ordine $\mu \leq 4$ e dovrà appartenere ad uno dei seguenti tipi (*):

1) Trasformazioni (2, 4) determinate dalle superficie del 2.° ordine, circoscritte ad un tetraedro fisso in un vertice del quale hanno un piano tangente fisso.

2) Trasformazioni (3, 9) determinate dalle superficie del 3.° ordine, aventi in comune un punto doppio e tre punti semplici con un contatto di terzo ordine in uno di questi.

3) Trasformazioni (4, 16) determinate dalle superficie del 4.° ordine aventi in comune un punto triplo e aventi in un punto semplice un contatto del quinto ordine.

Di queste trasformazioni le prime due sono state studiate da Cremona, la terza pare che non sia ancora stata considerata.

Nella quarta parte poi applico i risultati ottenuti allo spezzamento di una trasformazione birazionale in trasformazioni d'ordine inferiore nel caso in cui (nell'ipotesi *a*)) la curva fondamentale di molteplicità massima sia una sestica di genere 3, giungendo al risultato:

Ogni trasformazione birazionale d'ordine μ del tipo *a*), avente come curva

(*) Seguendo una convenzione del Cremona indicherò ora ed in seguito col simbolo $(\mu\ \nu)$ una trasformazione omaloidica d'ordine μ la cui inversa abbia l'ordine ν.

fondamentale di molteplicità massima una sestica di genere 3, è il prodotto di una trasformazione (3, 3) per una trasformazione d'ordine inferiore a μ.

Non posso chiudere questa prefazione senza porgere i più vivi ringraziamenti al prof. CASTELNUOVO, che in tutti i miei studi mi è stato sempre largo di aiuti e preziosi consigli.

PARTE PRIMA

1. Consideriamo in uno spazio S un sistema omaloidico (*) di superficie φ d'ordine μ, ossia un sistema lineare ∞^3

$$\sum \lambda_i \varphi_i = 0$$

e tale che tre superficie generiche del sistema s'incontrino in un sol punto variabile. Indichiamo con $|\varphi|$ questo sistema.

Ogni superficie φ sarà una superficie razionale (superficie rappresentabile punto per punto sopra un piano).

Le superficie φ abbiano in comune le curve fondamentali $f_0 f_1 \dots f_{r-1}$, degli ordini $m_0 m_1 \dots m_{r-1}$ e di molteplicità $i_0 i_1 \dots i_{r-1}$, e i punti fondamentali $F_0 F_1 \dots F_{t-1}$ di molteplicità $\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{t-1}$.

Noi supporremo ora e in seguito che si tratti sempre di *molteplicità ordinarie.*

Il sistema $|\varphi|$ determina una trasformazione birazionale, per cui ad ogni punto $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ dello spazio S corrisponde un punto $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ di un secondo spazio S_1 e viceversa. Questa trasformazione è data dalle formole

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

dove le φ sono funzioni algebriche, razionali, intere, omogenee, del grado μ nelle x, che uguagliate a zero rappresentano quattro superficie linearmente indipendenti del sistema.

(*) CREMONA, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio.* Annali di Mat., ser. II, tom. V, pag. 132.

Viceversa si avrà

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4$$

dove le ψ sono funzioni algebriche, razionali, intere, omogenee, del grado ν nelle y, che uguagliate a zero rappresentano quattro superficie linearmente indipendenti del sistema.

Il sistema $|\psi|$ si dice il *sistema inverso* del sistema dato $|\varphi|$; e il suo ordine ν è espresso dalla formola (*)

$$\nu = \mu^2 - \sum_{h=0}^{h=r-1} i_h^2 m_h .$$

2. Data ora una superficie qualsiasi F d'ordine n, avente delle curve multiple (ordinarie) *i-ple* e dei punti multipli (ordinari) *α-pli*, diremo *superficie aggiunta F' d'ordine $n-4$*, o semplicemente *superficie aggiunta* alla superficie data, ogni superficie d'ordine $n-4$, passante colla molteplicità $i-1$ per ogni curva *i-pla* di F, e colla molteplicità $\alpha-2$ per ogni punto *α-plo* di F.

Se la superficie F fa parte di un sistema lineare $|F|$ di superficie d'ordine n, le superficie aggiunte (d'ordine $n-4$) alle superficie del sistema $|F|$ costituiranno un sistema lineare, il quale si dirà *sistema aggiunto* $|F'|$ al sistema lineare $|F|$.

Analogamente a quel che abbiamo fatto per le superficie aggiunte F' di *indice 1*, possiamo definire le *superficie aggiunte d'indice 2* al sistema $|F|$, ossia le superficie d'ordine $n-8$, aggiunte al sistema $|F'|$, che passeranno $\alpha_0 - 4$ (o zero, se $\alpha \leq 4$) volte per ogni punto *α-plo* di $|F|$, e $i-2$ (o zero, se $i \leq 2$) volte per ogni curva *i-pla* di $|F|$; e così di seguito le *superficie aggiunte d'indice h*, aventi l'ordine $n-4h$, e passanti $\alpha - 2h$ (o zero) volte per ogni punto *α-plo* di $|F|$ e $i-h$ (o zero) volte per ogni curva *i-pla* di $|F|$.

Ricordiamo inoltre che, dato un sistema lineare $|H|\,\infty^3$, per superficie jacobiana di questo sistema si intende il luogo dei punti doppi delle superficie del sistema dotate di punto doppio, superficie definita dall'equazione

$$\frac{\partial(\varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3\, \varphi_4)}{\partial(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)} = 0$$

dove il simbolo del primo membro rappresenta il determinante jacobiano delle funzioni φ. Indicheremo con H_j la superficie jacobiana del sistema $|H|$.

(*) Cremona, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio.* Ann. di Mat., ser. II, tom. V.

Essa ha l'ordine $4n-4$, ed avrà per punto multiplo secondo $4\alpha-2$ ogni punto base *α-plo* del sistema $|H|$, e per curva multipla secondo $4i-1$ ogni curva *i-pla* di $|H|$ (*).

Ciò posto supponiamo dato un sistema lineare $|F|$ d'ordine n, di dimensione $r \geqq 3$. Diremo *sistema lineare completo* $|F_j|$ *jacobiano* del sistema lineare $|F|$ quel sistema lineare completo, che contiene tutte le superficie jacobiane dei sistemi lineari ∞^3 appartenenti ad $|F|$, cioè il sistema delle superficie d'ordine $4n-4$, dotate di un punto di molteplicità $4\alpha-2$ in ogni punto base *α-plo* di $|F|$, e di una curva di molteplicità $4i-1$ in ogni curva base *i-pla* di $|F|$.

Supponiamo ora di avere un sistema lineare $|F|$ di dimensione r qualsiasi anche minore di 3. Ricordando che dati due sistemi lineari $|F|$ e $|K|$, e detti $|F_j|$ e $|K_j|$ i loro sistemi jacobiani e $|(F+K)_j|$ il sistema jacobiano del sistema somma $|F+K|$, si ha la seguente relazione simbolica

$$|(F+K)_j| = |F_j| + 4|K| = |K_j| + 4|F|$$

che si può scrivere

$$|F_j| = |(F+K)_j| - 4|K|.$$

Questa uguaglianza può servire, nel caso in cui il sistema $|F|$ abbia dimensione $r < 3$, a definire il sistema jacobiano di $|F|$. Per costruirlo basterà prendere il sistema ausiliario $|K|$ abbastanza ampio, affinchè il sistema $|F+K|$ abbia dimensione $\geqq 3$.

Questa definizione è indipendente dalla arbitrarietà che comparisce nella scelta del sistema ausiliario $|K|$; poichè se a $|K|$ si sostituisce un altro sistema $|H|$, soddisfacente alle stesse condizioni si ha

$$|(F+H+K)_j| = |(F+H)_j| + 4|K| = |(F+K)_j| + 4|H|$$

da cui

$$|(F+H)_j| - 4|H| = |(F+K)_j| - 4|K|.$$

Risulta dalla definizione data, che il sistema jacobiano $|F_j|$ ha l'ordine $4n-4$, se n è l'ordine di $|F|$, ed è dotato di un punto di molteplicità $4\alpha-2$ in ogni punto base *α-plo* di $|F|$, e di una curva di molteplicità $4i-1$ in ogni curva base *i-pla* di $|F|$.

(*) CREMONA, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio.* Ann. di Mat., ser. II, tom. V, § 6, § 8.

Segue quindi che tra il sistema jacobiano $|F_j|$ e il sistema aggiunto $|F'|$ d'ordine $n-4$, del sistema $|F|$, passa la seguente relazione simbolica (*)

$$|F'| = |F_j - 3F|$$

ossia *il sistema aggiunto* $|F'|$ *al sistema lineare* $|F|$ *non è altro che il sistema residuo* (*supposto esistente*) *di* $|3F|$ *rispetto al sistema jacobiano* $|F_j|$ *del sistema* $|F|$.

L'ordine del sistema $|F_j - 3F|$ è infatti $4n - 4 - 3n = n - 4$, uguale all'ordine di $|F'|$. Esso ha la molteplicità $4\alpha - 2 - 3\alpha = \alpha - 2$ in ogni punto base *α-plo* di $|F|$, e la molteplicità $4i - 1 - 3i = i - 1$ in ogni curva base *i-pla* di $|F|$, precisamente come il sistema $|F'|$.

3. Le considerazioni del paragrafo precedente ci permettono di dimostrare il teorema:

Se una trasformazione birazionale muta un sistema lineare $|F|$ *di un primo spazio* S, *in un sistema lineare* $|F_1|$ *di un secondo spazio* S_1, *le superficie aggiunte* F' *a* $|F|$ (*supposte esistenti*) *si mutano in superficie, le quali aumentate delle superficie fondamentali di* S_1, *che corrispondono a punti o curve di* S, *fondamentali per la trasformazione e non base per* $|F|$, *costituiscono le superficie* F'_1 *aggiunte a* $|F_1|$.

Tenendo presente l'osservazione fatta relativamente ai sistemi di dimensione $r \gtrless 3$ (§ 2) basterà considerare il caso che $|F|$ sia un sistema lineare (completo o no) ∞^3.

Osserviamo intanto che la superficie jacobiana di $|F|$ si trasforma in una superficie, la quale o è la jacobiana di $|F_1|$ o per lo meno ne fa parte, e ciò per la proprietà geometrica che caratterizza la detta jacobiana, di essere il luogo dei punti doppi delle superficie del sistema, dotate di punto doppio.

Ciò posto, sia A un punto fondamentale della trasformazione, a cui corrisponda nel secondo spazio una superficie fondamentale α, e distinguiamo i due casi:

1) A non sia punto base per $|F|$;

2) A sia punto base per $|F|$.

(*) Considerazioni analoghe servono a definire il sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve sopra una superficie. Cfr. ENRIQUES, *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche.* Atti Acc., Torino, Vol. 37.

Nel primo caso la trasformazione muterà la jacobiana del sistema $|F|$ in una parte della jacobiana del sistema $|F_1|$, a cui bisognerà aggiungere la superficie fondamentale α (e le analoghe provenienti dagli altri elementi base).

Infatti nel sistema $|F|$ ∞^3, vi saranno ∞^2 superficie passanti per A, a cui corrisponderanno le superficie del sistema $|F_1|$, spezzantisi nella superficie fondamentale α e in una superficie residua. Ora ad ogni direzione uscente da A corrisponde un punto di α, e alle ∞^1 superficie F tangenti a quella direzione corrispondono ∞^1 superficie che si scindono nella α ed in una F_1 passante per quel determinato punto di α. Quindi ogni punto di α sarà doppio per ∞^1 superficie F_1, ossia sarà un punto della jacobiana $(F_j)_1$ del sistema $|F_1|$. La superficie α si staccherà dunque almeno una volta dalla jacobiana $(F_j)_1$.

Ora, tenendo conto della proprietà dimostrata per le superficie aggiunte:

$$|F'| = |F_j - 3F|$$

si vede che le trasformate delle superficie F', prese insieme con le superficie fondamentali analoghe ad α, costituiscono almeno in parte le superficie F'_1, aggiunte a $|F_1|$.

Se poi A è punto base per $|F|$, le superficie trasformate delle F si comporranno tutte della superficie fondamentale α, contata un certo numero di volte e delle superficie F_1, che corrispondono propriamente alle F (*). Un punto generico della superficie α non è doppio per alcuna delle superficie F_1, e la α non fa parte delle superficie jacobiane del sistema $|F_1|$; e quindi neppure delle superficie aggiunte ad esso.

Sia ora a una curva fondamentale della trasformazione, a cui corrisponda nel secondo spazio una superficie fondamentale $\varkappa$, e distinguiamo come prima i due casi:

1) a non sia curva base per $|F|$;

2) a sia curva base per $|F|$.

Consideriamo il primo caso e sia I un punto qualunque di a; il quale si muterà in una curva i_1 del secondo spazio (**) variabile su $\varkappa$.

Consideriamo le curve d'intersezione s delle superficie del sistema $|F|$ a due a due, a cui corrispondono le intersezioni s_1 analoghe delle superficie corrispondenti.

(*) Noether, *Eindeutige Raumtransformationen*, § 1. Math. Ann., vol. III.

(**) Cremona, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio.* Ann. di Mat., ser. II, tom. V, § 6.

Fra le prime superficie ve ne saranno ∞^2 passanti per I, e quindi vi saranno infinite curve s passanti per I, a cui corrisponderanno quelle curve s_1, le quali si spezzano nella curva i_1 e in una curva residua s'_1. Queste due curve si segano in un punto (punto doppio per la curva s_1 composta) che corrisponde al punto sopra quella curva s, infinitamente vicino ad I.

Il punto d'intersezione di i_1 colla curva residua s'_1, essendo doppio per la s_1 composta, sarà un punto di contatto delle ∞^1 superfice del sistema $|F|$ passanti per s_1, e quindi un punto doppio per una tra quelle superficie, cioè un punto della jacobiana. Al variare della curva s passante per I, il punto doppio della curva corrispondente percorre la curva fissa i_1.

Dunque ogni punto della i_1 è un punto di contatto fra ∞^1 superficie F_1, ossia un punto doppio di una F_1, e da ciò segue che la curva i_1 appartiene alla jacobiana del sistema $|F_1|$, e quindi la superficie α stessa forma parte della jacobiana. Segue poi in virtù della definizione delle superficie aggiunte, che la superficie α forma parte delle superficie F'_1 aggiunte a $|F_1|$.

Nel secondo caso, in cui a sia curva base per $|F|$, le superficie trasformate delle F si comporranno tutte della superficie fondamentale α contata un certo numero di volte e delle superficie F_1, che corrispondono propriamente alle F (*). Un punto generico della superficie α non è doppio per nessuna superficie F_1, e la α non fa parte della superficie jacobiana del sistema $|F_1|$ e quindi neppure delle superficie F'_1 aggiunte ad $|F_1|$.

Il teorema è dunque dimostrato; e ci dice che *l'operazione di aggiunzione* (con cui si passa da un sistema lineare al suo aggiunto) *ha carattere invariante relativo nelle trasformazioni birazionali*, ossia ha carattere invariante a meno di superficie o curve fondamentali per la trasformazione (**).

(*) NOETHER, *Eindeutige Raumtransformationen.* Math. Ann., vol. III.

(**) Una dimostrazione analitica si può fondare sul fatto, che data una superficie

$$F(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$$

di un sistema lineare $|F|\,\infty^3$

$$\sum_{i=1}^{i=4} \lambda_i F_i = 0,$$

dove $F_1\, F_2\, F_3\, F_4$ sono quattro superficie indipendenti del sistema, a cui si applica una trasformazione birazionale

$$x_h = x_h(y_1\, y_2\, y_3\, y_4) \qquad (h = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{1}$$

sussiste la seguente identità

$$\frac{\partial(F_1\, F_2\, F_3\, F_4)}{\partial(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)} = \frac{\partial(F_1\, F_2\, F_3\, F_4)}{\partial(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)} \cdot \frac{\partial(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)}{\partial(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)} \tag{2}$$

dove il simbolo $\frac{\partial(F_1\, F_2\, F_3\, F_4)}{\partial(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)}$ indica il determinante jacobiano delle quattro funzioni F_i.

Dalla interpretazione geometrica della (2), tenuto conto delle (1), risulta il teorema.

4. Supponiamo ora dato in uno spazio S un sistema omaloidico $|\varphi|$, a cui corrisponderà in un secondo spazio S_1 il sistema dei piani. Osservando che per quest'ultimo sistema mancano i sistemi aggiunti di tutti gli indici e ricordando la proprietà invariantiva, ora dimostrata, dei sistemi aggiunti al sistema dato, in una trasformazione birazionale, si giunge al teorema seguente (*):

Per un sistema omaloidico mancano i sistemi aggiunti di tutti gli indici.

Questa è *condizione necessaria* perchè il sistema sia omaloidico.

Considerando ora tutti i successivi sistemi aggiunti d'indice h ($h=1, 2, 3, \ldots$) arriveremo al sistema aggiunto d'ordine più basso $=0, 1, 2, 3$.

Questo sistema non può esistere e vi sarà almeno nel sistema omaloidico:

a) o una curva fondamentale;

b) oppure un punto fondamentale;

che impone troppe condizioni alle superficie dell'ultimo sistema aggiunto.

Ipotesi a). — Supponiamo che vi sia almeno una *curva fondamentale* f di molteplicità i che impone troppe condizioni alle superficie aggiunte d'ordine più basso. Sarà opportuno distinguere i quattro casi $\mu=4k$, $\mu=4k+1$, $\mu=4k+2$, $\mu=4k+3$.

1.° Caso: $\mu=4k$. — Ripetendo l'operazione di aggiunzione $h=k$ volte, arriveremo ad un sistema di superficie aggiunte d'ordine $4k-4h=0$, le quali dovrebbero passare $i-k$ (o zero) volte per ogni curva *i-pla* di $|\varphi|$, e $\alpha-2k$ (o zero) volte per ogni punto *α-plo* di $|\varphi|$. Ora un sistema di superficie d'ordine zero, non soggetto a nessuna condizione, va in questo ordine di questione riguardato come esistente ed avente la dimensione zero. Siccome la curva fondamentale f di molteplicità i impone troppe condizioni alle aggiunte considerate, dovrà essere $i-k>0$

$$i \geqq k+1.$$

2.° Caso: $\mu=4k+1$. — Ripetendo il ragionamento ora fatto si trova, adoperando le superficie aggiunte d'indice $h=k$, d'ordine $4k+1-4h=1$, e ponendo la condizione $i-k>0$, che la curva fondamentale f avrà molteplicità

$$i \geqq k+1.$$

(*) Questo toerema, insieme col teorema del § 6, mi è stato gentilmente indicato dal prof. CASTELNUOVO.

3.° Caso: $\mu = 4k + 2$. — Analogamente ai casi precedenti si trova, mediante le superficie aggiunte d'indice $h = k$, del secondo ordine, che la curva fondamentale f avrà molteplicità

$$i \geqq k + 1.$$

4.° Caso: $\mu = 4k + 3$. — Adoperando le superficie aggiunte del terzo ordine, si troverà che la curva fondamentale f avrà molteplicità

$$i \geqq k + 1.$$

Ipotesi b). — Supponiamo ora che vi sia almeno un punto fondamentale F, o un gruppo di punti fondamentali F, di molteplicità α, che impone troppe condizioni alle superficie aggiunte d'ordine più basso. Distinguiamo come prima i quattro casi $\mu = 4k$, $\mu = 4k + 1$, $\mu = 4k + 2$, $\mu = 4k + 3$.

1.° Caso: $\mu = 4k$. — Considerando tutti i successivi sistemi aggiunti d'indice k, come nella ipotesi *a*), arriveremo per $h = k$ ad un sistema di superficie aggiunte d'ordine zero, passanti $i - k$, o zero, volte per ogni curva fondamentale *i-pla*, e $\alpha - 2k$, o zero, volte per ogni punto fondamentale *α-plo* di $|\varphi|$. Siccome il punto (o il gruppo di punti) F impone troppe condizioni a queste superficie aggiunte, dovrà essere $\alpha - 2k > 0$

$$\alpha \geqq 2k + 1.$$

2.° Caso: $\mu = 4k + 1$. — Consideriamo le superficie aggiunte d'indice $h = k$, d'ordine $4k + 1 - 4h = 1$, passanti $i - k$, o zero, volte per ogni curva fondamentale *i-pla*, e $\alpha - 2k$, o zero, volte per ogni punto fondamentale *α-plo* di $|\varphi|$. Questi piani non devono esistere, e ciò può succedere o perchè vi sia un punto di molteplicità $\alpha - 2k \geqq 2$, o perchè vi siano almeno quattro punti semplici, non situati in un piano, per cui devono passare. Nel primo caso il sistema $|\varphi|$ avrà un punto di molteplicità

$$\alpha \geqq 2k + 2,$$

nel secondo caso avrà quattro punti almeno, di molteplicità

$$\alpha = 2k + 1.$$

3.° Caso: $\mu = 4k + 2$. — Le ultime superficie aggiunte (d'indice k) dovrebbero essere quadriche, passanti $i - k$, o zero, volte per ogni curva fondamentale *i-pla*, e $\alpha - 2k$, ozero, volte per ogni punto fondamentale *α-plo* delle φ. Affinchè non esistano dovranno passare almeno (siccome siamo nell'ipotesi *b*):

1) o per un punto di molteplicità $\alpha - 2k \geqq 3$,

2) o per punti doppi e semplici in numero conveniente,

3) oppure per punti semplici F in numero conveniente.

Quest'ultimo caso si potrà escludere. Il numero dei punti F dovrebbe infatti essere maggiore od uguale a 10 (le quadriche essendo ∞^9), e allora le superficie primitive avrebbero in comune 10 (o più) punti $(2k+1)$-pli, e non potrebbero esistere, perchè la loro dimensione risulterebbe negativa, come si verifica.

Dunque un sistema omaloidico d'ordine $4k+2$ del tipo *b*) dovrà avere certamente:

1) o un punto di molteplicità

$$\alpha \geqq 2k+3,$$

2) oppure dei punti $(2k+2)$-pli e $(2k+1)$-pli in numero conveniente.

4.° Caso: $\mu = 4k+3$. — Consideriamo le superficie aggiunte d'ordine più basso, che dovrebbero essere del terzo ordine e dovrebbero passare $i-k$, o zero, volte per ogni curva fondamentale *i-pla* e $\alpha - 2k$, o zero, volte per ogni punto fondamentale *α-plo* di $|\varphi|$. Affinchè non esistano dovranno passare almeno (siccome siamo nell'ipotesi *b*):

1) o per un punto di molteplicità $\alpha - 2k \geqq 4$,

2) o per punti tripli, doppi e semplici in numero conveniente,

3) o per punti doppi e semplici in numero conveniente,

4) o per punti semplici F in numero conveniente.

Quest'ultimo caso si può escludere. Il numero dei punti F dovrebbe infatti essere maggiore od uguale a 20 (le superficie cubiche essendo ∞^{19}) e allora il sistema $|\varphi|$ avrebbe 20 (o più) punti $(2k+1)$-pli, e non potrebbe esistere, perchè la sua dimensione sarebbe negativa, come si verifica.

Dunque un sistema omaloidico d'ordine $4k+3$ del tipo *b*) dovrà avere certamente:

1) o un punto di molteplicità $\alpha \geqq 2k+4$,

2) oppure dei punti $(2k+3)$-pli, $(2k+2)$-pli e $(2k+1)$-pli in numero conveniente.

5. Torniamo alla *ipotesi a*), in cui vi sia una curva fondamentale *f*, *i-pla*, che impone troppe condizioni alle superficie aggiunte d'ordine più basso.

Dicendo *m* l'ordine della curva *f*, si può determinare un limite superiore di *m*.

Consideriamo il caso $\mu = 4k$.

Riprendiamo la formola (§ 1) che dà l'ordine ν del sistema inverso. Separando il termine relativo alla curva fondamentale f, si avrà

$$\nu = 16k^2 - i^2 m - \sum_{h=1}^{h=r-1} i_h^2 m_h$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le curve fondamentali rimanenti.

Poichè $\nu > 0$, si avrà certo

$$16k^2 - i^2 m > 0.$$

Ora si ha $i \geqq k+1$ (§ 4); quindi rinforzo la disuguaglianza scrivendo

$$16k^2 - (k+1)^2 m > 0$$

$$m < 16\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 < 16.$$

Lo stesso limite si trova, con ragionamenti analoghi, nei casi rimanenti $\mu = 4k+1,\ 4k+2,\ 4k+3$.

Quindi possiamo dire:

La curva fondamentale di molteplicità massima di un sistema omaloidico del tipo a) ha l'ordine

$$m \leqq 15.$$

6. Riassumendo tutti i risultati precedenti possiamo concludere:

1.° Ogni sistema omaloidico di superficie d' ordine $4k$ possiede certamente:

a) o una curva fondamentale di molteplicità $i \geqq k+1$, la quale ha l'ordine $m \leqq 15$,

b) oppure un punto fondamentale di molteplicità $\alpha \geqq 2k+1$.

2.° Ogni sistema omaloidico di superficie d'ordine $4k+1$ possiede certamente:

a) o una curva fondamentale di molteplicità $i \geqq k+1$, la quale ha l'ordine $m \leqq 15$,

b) oppure un punto fondamentale di molteplicità $\alpha \geqq 2k+2$,

b') oppure quattro punti fondamentali di molteplicità $2k+1$.

3.° Ogni sistema omaloidico di superficie d'ordine $4k+2$ possiede certamente:

a) o una curva fondamentale di molteplicità $i \geqq k+1$, *la quale ha l'ordine* $m \leqq 15$,

b) oppure un punto fondamentale di molteplicità $\alpha \geqq 2k+3$,

b') o dei punti, in numero conveniente, di molteplicità $2k+1$ *e* $2k+2$.

4.° Ogni sistema omaloidico di superficie d'ordine $4k+3$ *possiede certamente:*

a) o una curva fondamentale di molteplicità $i \geqq k+1$, *la quale ha l'ordine* $m \leqq 15$,

b) oppure un punto fondamentale di molteplicità $\alpha \geqq 2k+4$,

b') o dei punti, in numero conveniente, multipli secondo $2k+1$, $2k+2$, e $2k+3$.

PARTE SECONDA

Trasformazioni del tipo *a*).

7. Nell'ipotesi che consideriamo, il sistema omaloidico $|\varphi|$ avrà una curva fondamentale f, di molteplicità tale, da imporre troppe condizioni alle superficie aggiunte d'ordine più basso.

Sia come sempre μ l'ordine del sistema omaloidico, e distinguiamo i casi $\mu = 4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$.

Nel caso $\mu = 4k$ diciamo $i = k + l$ $(l \geqq 1)$ la molteplicità della curva fondamentale f, che ha la molteplicità più elevata.

Supponiamo che la curva f possa ammettere ∞^1 quadrisecanti. Ognuna di queste segherebbe la superficie in $4i = 4(k+l) > 4k$ punti, apparterrebbe cioè alla superficie. Ogni superficie del sistema dovrebbe dunque spezzarsi, ciò che è assurdo.

A risultati analoghi si perviene negli altri casi $\mu = 4k+1$, $4k+2$, $4k+3$. Dunque:

Dato un sistema omaloidico del tipo a), la curva fondamentale di molteplicità massima non può avere ∞^1 quadrisecanti.

Nel caso in cui la curva ammetta un numero finito di quadrisecanti, cerchiamo quale molteplicità x una di esse q avrà per le superficie del sistema.

Consideriamo per questo il numero di punti, in cui q sega la intersezione variabile di due superficie φ; questo numero è dato da (*)

$$s = 2x(4k - x) - 4\left\{2x(k + l) - x^2\right\}.$$

E poichè $s \geqq 0$ si ha

$$2x(4k - x) - 4\left\{2x(k + l) - x^2\right\} \geqq 0$$

$$x \geqq 4l.$$

Dato un sistema omaloidico del tipo a) d'ordine $4k$, ogni quadrisecante (se esiste) alla curva fondamentale f, di molteplicità massima $k+l$, sarà retta fondamentale, multipla secondo

$$x \geqq 4l.$$

Nei casi rimanenti $\mu = 4k+1$, $4k+2$, $4k+3$, si trova con ragionamenti perfettamente analoghi, ponendo sempre $i = k+l$, per la molteplicità x di una quadrisecante (se esiste) alla curva f, $(k+l)$-*pla*, rispettivamente i limiti

$$x \geqq 4l - 1, \quad x \geqq 4l - 2, \quad x \geqq 4l - 3.$$

Riunendo i diversi casi possiamo dire:

Dato un sistema omaloidico del tipo a), d'ordine $4k + r$ $(r = 0, 1, 2, 3)$, *ogni quadrisecante* (*se esiste*) *alla curva fondamentale di molteplicità massima* $i = k + l$, *sarà retta fondamentale, multipla secondo*

$$x \geqq 4l - r \geqq 1.$$

8. Ritornando al primo teorema si deduce che, *se la curva fondamentale f, di molteplicità massima, è piana, essa ha l'ordine* $m \leqq 3$; *se sta sopra una quadrica, essa ha l'ordine* $m \leqq 6$.

(*) Noether, *Curve multiple di superficie algebriche.* Ann. di Matem., ser. II, tom. V.

Se la curva fondamentale f, di molteplicità massima, sta sopra una superficie cubica si può facilmente dimostrare che *deve avere l'ordine* $m \leq 11$.

Supponiamo infatti che $\mu = 4k$ sia l'ordine del sistema omaloidico $|\varphi|$, e diciamo $i = k + l$, $(l \geq 1)$ la molteplicità della curva f per il sistema stesso. Consideriamo l'intersezione variabile di una superficie φ colla superficie cubica, su cui è situata f. L'ordine di questa curva d'intersezione sarà $12k - m(k+l)$, e dovrà essere

$$12k - m(k + l) \geq 0$$

da cui

$$m \leq 11.$$

Lo stesso limite si trova con considerazioni analoghe nei casi rimanenti.

9. *La curva fondamentale f di molteplicità massima sia una curva piana.*

Diciamo m l'ordine e i la molteplicità di f, e sia come sempre μ l'ordine del sistema omaloidico. Allora sarà (§ 8) $m \leq 3$.

Cerchiamo di stabilire dei limiti per le molteplicità di altre curve o di altri punti fondamentali.

Distinguiamo i 4 casi: $\mu = 4k$, $\mu = 4k + 1$, $\mu = 4k + 2$, $\mu = 4k + 3$.

1.° Caso: $\mu = 4k$. — La curva fondamentale piana f d'ordine $m \leq 3$, di molteplicità massima, sia multipla secondo $i = k + l$, $(l \geq 1)$. Siccome deve essere $m(k + l) \leq 4k$, sarà $l \leq \frac{4 - m}{m} k$.

Supponiamo che vi siano dei punti fondamentali F_t di molteplicità α_t, e delle curve fondamentali f_r di molteplicità i_r.

Consideriamo separatamente i 3 casi:

I) $l = 3n$, II) $l = 3n - 1$, III) $l = 3n - 2$ $(n \geq 1)$.

Ipotesi I): $i = k + 3n$, $(k > n \geq 1)$. — Consideriamo le superficie aggiunte Φ d'indice $h = k - n$, d'ordine $4n$, che dovrebbero passare $4n$ volte per la curva f, $\alpha_t - 2(k - n)$, o zero, volte per i punti F_t, e $i_r - (k - n)$, o zero, volte per le curve f_r. Fra queste superficie Φ se ne troverebbe una Φ_1, la quale si spezzerebbe nel piano di f contato $4n$ volte; ricordando però che le superficie aggiunte Φ e quindi la Φ_1 non devono esistere, si vede che vi dovrà essere almeno: o una curva f_r, oppure un punto F_t, per cui siano costrette a passare, ossia le superficie φ avranno almeno una ulteriore curva fondamentale di molteplicità $i_0 \geq k - n + 1$, oppure un punto fondamentale di molteplicità $\alpha \geq 2k - 2n + 1$.

Se un sistema omaloidico d'ordine $4k$ è dotato di una curva piana fondamentale f, $(k+3n)$-pla $(n \geq 1)$, (e quindi d'ordine $m \leq 3$), dovrà avere inoltre almeno:

1) *o una curva fondamentale f_0 di molteplicità*

$$i_0 \geq k-n+1,$$

2) *oppure un punto fondamentale di molteplicità*

$$\alpha \geq 2k-2n+1.$$

L'ipotesi 1), nel caso in cui la curva f, $(k+3n)$-*pla*, sia una cubica, non si potrà presentare. Conducendo infatti per uno dei punti d'incontro della curva f_0 col piano della cubica una retta arbitraria, questa sarebbe comune a tutte le superficie del sistema omaloidico, poichè

$$3(k+3n)+i_0 \geq 4k+8n+1,$$

mentre abbiamo supposto le φ irriducibili.

Osservazioni analoghe valgono in tutti i casi seguenti.

Ipotesi II): $i=k+3n-1$ $(k \geq n \geq 1)$. — Supponiamo che sia $n<k$ e consideriamo le superficie aggiunte d'indice $h=k-n$, che dovrebbero avere l'ordine $4n$ e dovrebbero passare $4n-1$ volte per la curva piana f, $i_r-(k-n)$, o zero, volte per ogni curva i_r-*pla* di $|\varphi|$ e $\alpha_t-2(k-n)$, o zero, volte per ogni punto α_t-*plo* di $|\varphi|$. Considerando fra le dette superficie aggiunte quelle spezzantisi nel piano della curva f contato $4n-1$ volte e in un piano arbitrario, e ricordando che non devono esistere, si giunge alla conclusione:

Se un sistema omaloidico d'ordine $4k$ possiede una curva fondamentale piana multipla secondo $k+3n-1$ $(n \geq 1)$ (e quindi d'ordine $m \leq 3$), dovrà avere inoltre almeno:

1) *o una curva fondamentale di molteplicità*

$$i_0 \geq k-n+1,$$

2) *oppure dei punti fondamentali F, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geq 2k-2n+1.$$

Noi avevamo supposto $n<k$, ma si vede che anche nel caso $n=k$ (in cui la curva f è necessariamente una retta) vale il teorema, giacchè altrimenti le superficie del sistema omaloidico si ridurrebbero ad un piano contato più volte, più un piano variabile.

Ipotesi III): $i = k + 3n - 2$ $(n \geq 1)$. — Si considereranno ancora le superficie aggiunte d'indice $h = k - n$ (supponendo $n < k$), d'ordine $4n$, passanti $4n - 2$ volte per f, $i_r - (k - n)$, o zero, volte per ogni curva f_r multipla secondo i_r per il sistema $|\varphi|$, e $\alpha_t - 2(k - n)$, o zero, volte per ogni punto F_t multiplo secondo α_t per $|\varphi|$. Considerando in particolare, fra queste superficie aggiunte, quelle spezzantisi nel piano della curva f contato $4n - 2$ volte e in una quadrica arbitraria, e osservando che esse non devono esistere, si giungerà alla conclusione:

Se un sistema omaloidico d'ordine $4k$ è dotato di una curva piana di molteplicità $k + 3n - 2$ $(n \geq 1)$ (e quindi d'ordine $m \leq 3$) bisogna che abbia inoltre almeno:

1) *o una curva fondamentale di molteplicità*

$$i_0 \geq k - n + 1,$$

2) *oppure dei punti fondamentali, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geq 2k - 2n + 1.$$

Noi avevamo supposto $n < k$, ma anche nel caso $n = k$, ossia $i = 4k - 2$ (in cui la curva f è necessariamente una retta, oppure se $k = 1$ una conica), vale il teorema, giacchè tra le superficie del sistema omaloidico vi sarebbero di quelle riducentisi a un piano contato più volte, più una quadrica variabile generica, il che è impossibile.

Nei casi rimanenti $\mu = 4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$ si giunge, con metodo perfettamene analogo, ai seguenti risultati:

2.° *Caso*: $\mu = 4k + 1$. — I) *Se un sistema omaloidico d'ordine $4k + 1$ possiede una curva fondamentale piana $(k + 3n)$-pla $(n \geq 1)$ (e quindi d'ordine $m \leq 3$), dovrà avere inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale di molteplicità*

$$i_0 \geq k - n + 1,$$

2) *oppure dei punti fondamentali, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geq 2k - 2n + 1.$$

II) *Se un sistema omaloidico d'ordine $4k + 1$ è dotato di una curva fondamentale piana, di molteplicità $k + 3n - 1$ $(n \geq 1)$, (e quindi d'ordine $m \leq 3$) dovrà avere inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale di molteplicità*

$$i_0 \geqq k - n + 1,$$

2) *oppure dei punti fondamentali, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 2n + 1.$$

III) *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k+1$ *possiede una curva fondamentale piana* $(k+3n-2)$-pla $(n \geqq 1)$ *(e quindi d'ordine* $m \leqq 3$*), bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale di molteplicità*

$$i_0 \geqq k - n + 2,$$

2) *oppure un punto fondamentale di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 2n + 3.$$

3.° Caso: $\mu = 4k+2$. — I) *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k+2$ *è dotato di una curva fondamentale piana* $(k+3n)$*-pla,* $(n \geqq 1)$ *(e quindi d'ordine* $m \leqq 3$*), bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale di molteplicità*

$$i_0 \geqq k - n + 1,$$

2) *oppure dei punti fondamentali, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 2n + 1.$$

II) *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k+2$ *è dotato di una curva fondamentale piana* $(k+3n-1)$-pla, $(n \geqq 1)$ *(e quindi d'ordine* $m \leqq 3$*), dovrà avere inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale di molteplicità*

$$i_0 \geqq k - n + 2$$

2) *oppure un punto fondamentale di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 2n + 3.$$

III) *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k+2$ *possiede una curva fondamentale piana* $(k+3n-2)$-pla, $(n \geqq 1)$ *(e quindi d'ordine* $m \leqq 3$*), dovrà avere inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale multipla secondo*

$$i_0 \geqq k - n + 2,$$

2) *oppure dei punti fondamentali, in numero conveniente, multipli secondo*

$$\alpha \geqq 2k - 2n + 3.$$

4.° Caso: $\mu = 4k + 3$. — I) *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k + 3$ *è dotato di una curva fondamentale piana* $(k + 3n)$*-pla* $(n \geqq 1)$, *(e quindi di ordine* $m \leqq 3$*), bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale di molteplicità*

$$i_0 \geqq k - n + 2,$$

2) *oppure un punto fondamentale di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 2n + 3.$$

II) *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k + 3$ *è dotato di una curva fondamentale piana di molteplicità* $k + 3n - 1$ $(n \geqq 1)$, *(e quindi d'ordine* $m \leqq 3$*), bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale di molteplicità*

$$i_0 \geqq k - n + 2,$$

2) *oppure dei punti fondamentali, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 2n + 3.$$

III) *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k + 3$ *è dotato di una curva fondamentale piana di molteplicità* $k + 3n - 2$ $(n \geqq 1)$, *(e quindi d'ordine* $m \leqq 3$*), bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale multipla secondo*

$$i_0 \geqq k - n + 2,$$

2) *oppure dei punti fondamentali, in numero conveniente, multipli secondo*

$$\alpha \geqq 2k - 2n + 3.$$

10. *La curva fondamentale f di molteplicità massima sia situata sopra una quadrica.*

Diciamo m l'ordine della curva f di molteplicità massima i e sia come sempre μ l'ordine del sistema omaloidico $|\varphi|$. La curva f avrà l'ordine $m \leq 6$ (§ 8).

Cerchiamo di stabilire dei limiti per la molteplicità di altre curve o altri punti fondamentali, esaminando separatamente i diversi casi.

1.° Caso: $\mu = 4k$. — La curva fondamentale f, che ha la molteplicità più elevata $i > k$, sia multipla secondo $i = k + l$, $(1 \leq l \leq k)$.

Consideriamo le superficie aggiunte Φ d'indice $h = k - l$ (supposto $l < k$), d'ordine $4l$, e passanti colla molteplicità $2l$ per f, colla molteplicità $i_r - (k - l)$, o zero, per ogni curva f_r i_r-*pla* di $|\varphi|$, e colla molteplicità $\alpha_t - 2(k - l)$, o zero, per ogni punto α_t-*plo* di $|\varphi|$.

Consideriamo, fra le dette superficie aggiunte, quella Φ_1 che si spezza nella quadrica, su cui è situata f, contata $2l$ volte.

Se fosse, per tutte le curve f_r e per tutti i punti F_t, $i_r - (k - l) \leq 0$ e $\alpha_t - 2(k - l) \leq 0$, questa superficie aggiunta Φ_1 esisterebbe. Siccome però le superficie aggiunte Φ (e quindi la Φ_1) non possono esistere, vuol dire che vi sarà o una curva f_r, o un punto F_t, per cui siano costrette a passare; ossia vi sarà almeno: o una curva f_r per cui si abbia $i_r - (k - l) \geq 1$, oppure un punto F_t per cui sia $\alpha_t - 2(k - l) \geq 1$.

Quindi possiamo dire:

Se un sistema omaloidico d'ordine $4k$ è dotato di una curva fondamentale f, $(k + l)$-pla, $(1 \leq l \leq k - 1)$, situata sopra una quadrica (e quindi d'ordine $m \leq 6$), bisogna che abbia inoltre almeno:

1) *o una curva fondamentale f_0 di molteplicità*

$$i_0 \geq k - l + 1,$$

2) *oppure un punto fondamentale F di molteplicità*

$$\alpha \geq 2k - 2l + 1.$$

Nella ipotesi 1), le rette che si appoggiano in tre punti a f e in un punto, distinto da quelli, a f_0 (se esistono) sono rette fondamentali di molteplicità $\alpha \geq 2l + 1$.

Nella ipotesi 2), ogni corda ad f, passante per F, è retta fondamentale.

Ci resta da considerare il caso $l = k$, $(i = 2k)$; che però si può escludere. Infatti in questa ipotesi ogni superficie del sistema omaloidico $|\varphi|$ è rigata, perchè ogni corda ad f, condotta per un punto di una superficie φ, è retta della superficie. Allora le ∞^2 superficie del sistema omaloidico, che passano per il punto, hanno una retta in comune; ciò che è impossibile.

Nei casi rimanenti: $\mu = 4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$, si giunge con metodo analogo, ai seguenti risultati:

2.° *Caso:* $\mu = 4k + 1$. — *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k + 1$ *possiede una curva fondamentale* f, $(k + l)$*-pla*, $(1 \leqq l \leqq k)$, *situata sopra una quadrica* (*e quindi d'ordine* $m \leqq 6$), *bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale* f_0 *di molteplicità*

$$i_0 \geqq k - l + 1,$$

2) *oppure dei punti fondamentali* F, *in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 2l + 1.$$

Nella ipotesi 1), le rette appoggiantisi in tre punti a f e in un punto a f_0 (se esistono) sono rette fondamentali di molteplicità $x \geqq 2l$.

Il teorema vale anche nell'ipotesi $l = k$, $i = 2k$. Infatti in questa ipotesi la curva f non potrà avere trisecanti, giacchè la superficie, da esse formata, farebbe parte di ogni superficie del sistema omaloidico, ciò che è impossibile. Resta quindi il caso che f sia una cubica o quartica di 1.ª specie; ma allora f sta sopra infinite quadriche, e tra le superficie del sistema omaloidico ve ne sarebbero infinite riducentisi ad una quadrica contata più volte, più un piano variabile, il che è impossibile. Quindi vi saranno altre curve o altri punti fondamentali e il teorema è verificato.

3.° *Caso:* $\mu = 4k + 2$. — *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k + 2$ *è dotato di una curva fondamentale,* $(k + l)$*-pla*, $(1 \leqq l \leqq k)$, *situata sopra una quadrica* (*e quindi d'ordine* $m \leqq 6$), *bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale* f_0 *di molteplicità*

$$i_0 \geqq k - l + 2,$$

2) *oppure un punto fondamentale di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 2l + 3.$$

Nell'ipotesi 1), le rette appoggiantisi in tre punti a f e in un punto a f_0 (se esistono) sono rette fondamentali di molteplicità $x \geqq 2l - 1$. Nell'ipotesi 2), ogni corda ad f passante per F è retta fondamentale.

L'ipotesi $l = k + 1$ $(i = 2k + 1)$ si esclude come nel 1.° caso: $\mu = 4k$.

4.° *Caso:* $\mu = 4k + 3$. — *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k + 3$ *è dotato di una curva fondamentale,* $(k + l)$*-pla*, $(1 \leqq l \leqq k + 1)$, *situata sopra una quadrica* (*e quindi d'ordine* $m \leqq 6$), *bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale di molteplicità*

$$i_0 \geqq k - l + 2,$$

2) *oppure dei punti fondamentali, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 2l + 3.$$

Nell'ipotesi 1), le rette appoggiantisi in tre punti a f e in un punto a f_0 (se esistono) sono rette fondamentali di molteplicità $x \geqq 2l - 2$.

Il teorema vale anche nell'ipotesi $l = k + 1$ per la ragione data nel caso $\mu = 4k + 1$.

11. *La curva fondamentale f di molteplicità massima sia situata sopra una superficie cubica.*

Sia m ($\leqq 11$, § 8) l'ordine della curva fondamentale f di molteplicità massima i; e sia come sempre μ l'ordine del sistema omaloidico $|\varphi|$. Distinguiamo i quattro casi $\mu = 4k$, $4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$.

1.° Caso: $\mu = 4k$. — La curva fondamentale f, di molteplicità massima $i > k$, sia multipla secondo

$$i = k + l \quad \left(1 \leqq l \leqq \frac{k}{3}\right).$$

Supponiamo $l < \frac{k}{3}$ e consideriamo le superficie aggiunte Φ d'indice $h = k - 3l$, e quindi d'ordine $12l$, passanti $4l$ volte per f, e passanti inoltre, per ogni curva f_r i_r*-pla* per $|\varphi|$, $i_r - (k - 3l)$ o zero volte, e per ogni punto F_t α_t*-plo* per $|\varphi|$, $\alpha_t - 2(k - 3l)$, o zero, volte.

Consideriamo fra le dette superficie aggiunte Φ, quella Φ_1 spezzantesi nella superficie cubica, su cui è situata f, contata $4l$ volte. Se tutte le curve f_r e tutti i punti F_t fossero tali, che $i_r - (k - 3l) \leqq 0$ e $\alpha_t - 2(k - 3l) \leqq 0$ questa superficie Φ_1 esisterebbe.

Siccome però le superficie aggiunte Φ (e quindi la Φ_1) non possono esistere, vuol dire che vi sarà o una curva f_r, o un punto F_t, per cui siano costrette a passare, ossia si avrà rispettivamente

$$i_r - (k - 3l) \geqq 1 \qquad \alpha_t - 2(k - 3l) \geqq 1$$

e possiamo concludere:

Se un sistema omaloidico d'ordine $4k$ è dotato di una curva fondamentale $(k + l)$-pla $\left(1 \leqq l \leqq \frac{k}{3}\right)$, situata sopra una superficie cubica (e quindi d'ordine ($m \leqq 11$)), bisogna che abbia inoltre almeno:

1) *o una curva fondamentale* f_0 *di molteplicità*

$$i_0 \geqq k - 3l + 1,$$

2) *oppure un punto fondamentale F di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 6l + 1.$$

Nell'ipotesi 1), le rette appoggiantisi in tre punti a f e in un punto a f_0 (se esistono) saranno rette fondamentali.

Noi avevamo supposto $l < \frac{k}{3}$, ma anche per $l = \frac{k}{3}$, $\left(i = \frac{4k}{3}\right)$, vale il teorema. Infatti, se la curva f sta sopra infinite superficie cubiche, tra le superficie del sistema omaloidico (se non vi fossero altri punti o altre curve fondamentali) ve ne sarebbero infinite, riducentisi ad una superficie cubica contata più volte, il che è impossibile. Quindi si dovrà verificare una delle ipotesi 1) o 2). Se invece la curva f sta sopra una sola superficie cubica, si vede facilmente, mediante la rappresentazione piana della superficie, che dovrà avere delle quadrisecanti. Ognuna di queste sarà retta fondamentale per il sistema omaloidico $\left(\text{poichè } 4 \cdot \frac{4k}{3} > 4k\right)$ e si presenta l'ipotesi 1). Quindi il teorema è verificato anche per $l = \frac{k}{3}$

Con ragionamenti perfettamente analoghi si giunge ai seguenti risultati:

2.° Caso: $\mu = 4k + 1$. — *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k + 1$ *è dotato di una curva fondamentale f di molteplicità* $k + l$ $\left(1 \leqq l \leqq \frac{k+1}{3}\right)$, *situata sopra una superficie cubica (e quindi d' ordine* $m \leqq 11$), *bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale* f_0 *multipla secondo*

$$i_0 \geqq k - 3l + 2,$$

2) *oppure un punto fondamentale F multiplo secondo*

$$\alpha \geqq 2k - 6l + 3.$$

Nell'ipotesi 1), le rette appoggiantisi in tre punti a f e in un punto a f_0 (se esistono) sono rette fondamentali.

3.° Caso: $\mu = 4k + 2$. — *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k + 2$ *possiede una curva fondamentale f* $(k + l)$*-pla* $\left(1 \leqq l \leqq \frac{k+2}{3}\right)$, *situata sopra una superficie cubica (e quindi d'ordine* $m \leqq 11$), *dovrà avere inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale f_0 multipla secondo*

$$i_0 \geqq k - 3l + 3,$$

2) *oppure un punto fondamentale F multiplo secondo*

$$\alpha \geqq 2k - 6l + 5.$$

Nella ipotesi 1), le rette appoggiantisi in tre punti a f e in un punto a f_0 (se esistono) sono rette fondamentali.

4.° Caso: $\mu = 4k + 3$. — *Se un sistema omaloidico d'ordine $4k+3$ è dotato di una curva fondamentale f multipla secondo $k+l$ $\left(1 \leqq l \leqq \frac{k+3}{3}\right)$, situata sopra una superficie cubica (e quindi d'ordine $m \leqq 11$), bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale f_0 di molteplicità*

$$i_0 \geqq k - 3l + 4,$$

2) *oppure un punto fondamentale F di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 6l + 7.$$

Nella ipotesi 1), le rette che si appoggiano in tre punti a f e in un punto a f_0 (se esistono) saranno rette fondamentali.

PARTE TERZA

Trasformazioni del tipo *b*).

12. Ricordiamo che nell'ipotesi che si considera, il sistema omaloidico $|\varphi|$ avrà un punto fondamentale F_0, o un gruppo di punti, di molteplicità tale da imporre troppe condizioni alle superficie aggiunte d'ordine più basso.

Indichiamo come sempre con μ l'ordine del sistema $|\varphi|$ e distinguiamo i 4 casi: $\mu = 4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$.

1.° Caso: $\mu = 4k$. — Il punto fondamentale F_0 di molteplicità massima $\alpha_0 > 2k$ sia multiplo secondo

$$\alpha_0 = 2k + l \qquad (1 \leqq l \leqq 2k - 1).$$

Siano f_r delle linee fondamentali di molteplicità i_r, e F_t dei punti fondamentali di molteplicità α_t.

Se per una curva f_r è $i_r > k - \frac{l}{2}$, ogni corda di f_r (supposta esistente) passante per F_0 appartiene ad ogni superficie φ, è cioè retta fondamentale.

Se supponiamo che vi siano dei punti fondamentali F_t di molteplicità $\alpha_t > 2k - l$, ogni retta r congiungente uno di questi punti col punto F_0, è retta fondamentale, perchè $2k + l + \alpha_t > 4k$, ossia ogni retta congiungente il punto F_0 $(2k + l)$*-plo* con un punto F_t sarà retta fondamentale.

Torniamo ora al caso generale, in cui non si faccia ipotesi intorno alle molteplicità delle curve f_r e dei punti F_t.

Consideriamo la molteplicità $\alpha_0 = 2k + l$ del punto fondamentale F_0, e distinguiamo i due casi seguenti:

$$\text{I)} \quad l = 2n, \qquad \text{II)} \quad l = 2n - 1 \qquad (n \geqq 1).$$

Ipotesi I): $\alpha_0 = 2k + 2n$. — Consideriamo le superficie aggiunte d'indice $h = k - n$, d'ordinė $4n$, passanti $4n$ volte per il punto F_0, $i_r - (k - n)$, o zero, volte per le curve f_r e $\alpha_t - 2(k - n)$, o zero, volte per i punti F_t. Siccome queste superficie aggiunte non devono esistere, dovranno essere costrette a passare almeno: o per un numero conveniente di punti F_t, o per una delle curve f_r; nel primo caso si avrà, per un numero conveniente di punti F_t, $\alpha_t \geqq 2k - 2n + 1$, nel secondo si avrà, per una almeno delle curve f_r, $i_r \geqq k - n + 1$.

Possiamo dunque dire:

Se un sistema omaloidico d'ordine $4k$ possiede un punto fondamentale $(2k + 2n)$-plo $(n \geqq 1)$, bisogna che abbia inoltre almeno:

1) *o una curva fondamentale f di molteplicità*

$$i \geqq k - n + 1,$$

2) *oppure dei punti fondamentali F, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 2n + 1.$$

Applicando i risultati trovati poco fa, si vede che vi saranno delle rette fondamentali, uscenti dal punto fondamentale di molteplicità massima, eccettuato il caso in cui, nella ipotesi 1), la curva f sia una curva tracciata sopra un cono di vertice F_0, in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici.

Ipotesi II): $\alpha_0 = 2k + 2n - 1$. — Consideriamo le superficie aggiunte d'indice $h = k - n$, le quali dovrebbero avere l'ordine $4n$, e dovrebbero passare $4n - 1$ volte per il punto F_0, $i_r - (k - n)$, o zero, volte per ogni curva f_r, e $\alpha_t - 2(k - n)$, o zero, volte per ogni punto F_t. Ricordando che esse non devono esistere, si vede che vi dovrà essere almeno: o una curva f_r, oppure dei punti F_t, in numero conveniente, per cui siano costrette a passare, e potremo concludere:

Se un sistema omaloidico d'ordine $4k$ ha un punto F_0 di molteplicità $\alpha_0 = 2k + 2n - 1$ ($n \geqq 1$), dovrà avere inoltre almeno:

1) *o una curva fondamentale f di molteplicità*

$$i \geqq k - n + 1,$$

2) *oppure dei punti fondamentali F, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 2n + 1.$$

Si riconosce, applicando l'osservazione di pag. 52, che vi saranno delle rette fondamentali uscenti dal punto F_0, eccettuato il caso, in cui nell'ipotesi 1), la curva f sia una curva tracciata sopra un cono di vertice F_0, in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici, e il caso in cui nell'ipotesi 2) i punti F abbiano tutti la molteplicità $\alpha = 2k - 2n + 1$.

In questo secondo caso, in cui cioè oltre il punto F_0 vi sono dei punti $(2k - 2n + 1)$-*pli* e tutti gli altri punti e le altre curve fondamentali non impongono condizioni alle superficie aggiunte d'indice $h = k - n$, si può dimostrare che la trasformazione deve essere monoidale.

Diciamo T il numero dei punti F, $(2k - 2n + 1)$-*pli*.

Avremo dunque un sistema omaloidico d'ordine $4k$ avente un punto $(2k + 2n - 1)$-*plo*, e T punti $(2k - 2n + 1)$-*pli*, e eventualmente delle curve di molteplicità $i_r \leqq k - n$, e dei punti di molteplicità $\alpha_t \leqq 2k - 2n$, e vogliamo dimostrare che deve essere monoidale.

Poichè $l \leqq 2k - 1$, ossia $2n - 1 \leqq 2k - 1$, sarà $n \leqq k$. Esaminiamo separatamente i due casi $n < k$ e $n = k$.

Sia $n < k$. Cerchiamo allora di determinare un limite inferiore per il numero T, considerando di nuovo il sistema delle superficie aggiunte Φ di indice $h = k - n$, d'ordine $4n$, passanti $4n - 1$ volte per il punto F_0 e semplicemente per i punti F. Esse non devono esistere e per questo è necessario che la dimensione del loro sistema sia negativa, ossia (*)

$$\frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}{6} - 1 - \frac{(4n-1)(4n)(4n+1)}{6} - T < 0.$$

Fatti i calcoli si trova $T > (4n+1)^2 - 1$ ossia

$$T \geq (4n+1)^2.$$

Se noi sostituiamo questo valore nella dimensione del sistema primitivo delle superficie φ, d'ordine $4k$, si trova (**)

$$\begin{gathered}\frac{1}{6}(4k+1)(4k+2)(4k+3) - 1 - \\ -\frac{1}{6}(2k+2n-1)(2k+2n)(2k+2n+1) - \\ -\frac{1}{6}T(2k-2n+1)(2k-2n+2)(2k-2n+3) - \cdots \leq \\ \leq \frac{1}{6}(4k+1)(4k+2)(4k+3) - 1 - \\ -\frac{1}{6}(2k+2n-1)(2k+2n)(2k+2n+1) - \\ -\frac{1}{6}(4n+1)^2(2k-2n+1)(2k-2n+2)(2k-2n+3).\end{gathered}$$

Eseguendo i calcoli e ricordando che $n < k$, si vede che il secondo membro risulta negativo per qualunque valore di k.

Quindi le superficie φ non esistono e non si ha trasformazione.

Consideriamo ora il caso $n = k$. Allora sarà $\alpha_0 = 4k - 1$, e le superficie φ avranno un punto F_0 $(4k-1)$-plo; la trasformazione sarà cioè una *trasformazione monoidale*.

Nel caso $\mu = 4k$, riunendo i diversi risultati, possiamo dunque concludere:

(*) NOETHER, *Curve multiple di superficie algebriche*. Ann. di Mat., ser. II, tom. V.

(**) NOETHER, *Curve multiple*, ecc.

Una trasformazione birazionale d'ordine $4k$ con un punto fondamentale F_0 di molteplicità $2k+l$, maggiore di $2k$ e minore di $4k-1$, possiede rette fondamentali uscenti dal punto F_0 di molteplicità più elevata, eccettuato il caso in cui vi sia una curva fondamentale di molteplicità massima $i > k - \frac{l}{2}$, tracciata sopra un cono di vertice F_0 in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici.

Ogni trasformazione birazionale d'ordine $4k$ del tipo b), priva di rette fondamentali, è una trasformazione monoidale, eccettuate le trasformazioni in cui vi sia una curva fondamentale di molteplicità massima $i > k - \frac{l}{2}$, tracciata sopra un cono di vertice F_0 in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici.

2.° Caso: $\mu = 4k+1$. — Vi sarà (§ 4):

α) un punto fondamentale multiplo secondo

$$\alpha_0 = 2k+l+1 \qquad (1 \leq l \leq 2k-1),$$

β) oppure quattro punti almeno, di molteplicità

$$2k+1.$$

In questo secondo caso le rette, congiungenti questi punti a due a due, sono rette fondamentali per le superficie φ.

Nel caso α), in cui cioè si ha un punto di molteplicità $\alpha_0 = 2k+l+1$ $(1 \leq l \leq 2k-1)$, separando le due ipotesi

$$\text{I)}\quad l = 2n \qquad \text{II)}\quad l = 2n-1 \qquad (n \geq 1)$$

e ragionando come sopra, si arriva ai risultati:

Ipotesi I). — *Se un sistema omaloidico d'ordine $4k+1$ è dotato di un punto fondamentale F_0 di molteplicità $2k+2n+1$ $(n \geq 1)$, bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale f di molteplicità*

$$i \geq k-n+1,$$

2) *oppure dei punti fondamentali F, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geq 2k-2n+1.$$

Vi saranno delle rette fondamentali uscenti dal punto F_0, eccettuato il caso in cui, (nell'ipotesi 1)), la curva fondamentale f sia una curva tracciata sopra un cono di vertice F_0, in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici.

Ipotesi II). — *Se un sistema omaloidico d'ordine $4k+1$ è dotato di un punto fondamentale F_0 di molteplicità $\alpha_0 = 2k+2n$ $(n \geq 1)$, bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale f di molteplicità*

$$i \geq k - n + 1,$$

2) *oppure dei punti fondamentali F, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geq 2k - 2n + 1.$$

Vi saranno delle rette fondamentali uscenti dal punto fondamentale F_0, eccettuato il caso in cui, nell'ipotesi 1), la curva f sia una curva tracciata sopra un cono di vertice F_0, in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici, e il caso in cui, nell'ipotesi 2), tutti i punti F abbiano la molteplicità $\alpha = 2k - 2n + 1$, caso in cui si dimostra come sopra che la trasformazione deve essere monoidale.

Riunendo i diversi risultati, potremo dire:

Una trasformazione birazionale d'ordine $4k+1$ con un punto fondamentale di molteplicità $2k+l+1$, maggiore di $2k+1$ e minore di $4k$, possiede rette fondamentali uscenti dal punto fondamentale di molteplicità più elevata, salvo il caso in cui vi sia una curva fondamentale di molteplicità massima $i > k - \frac{l}{2}$, tracciata sopra un cono di vertice F_0 in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici.

Nel caso in cui vi siano quattro punti $(2k+1)$-pli, le rette congiungenti questi quattro punti a due a due sono rette fondamentali.

Ogni trasformazione del tipo b) d'ordine $4k+1$, priva di rette fondamentali, è una trasformazione monoidale, eccettuate le trasformazioni in cui vi sia una curva fondamentale di molteplicità massima $i > k - \frac{l}{2}$, tracciata sopra un cono di vertice F_0 in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici.

3.° Caso: $\mu = 4k+2$. — Vi sarà (§ 4)

α) o un punto F_0 multiplo secondo

$$\alpha_0 = 2k + l + 2 \qquad (1 \leq l \leq 2k - 1),$$

β) oppure dei punti $(2k+2)$-pli e $(2k+1)$-pli in numero conveniente.

Consideriamo dapprima l'ipotesi β). In questa ipotesi vi dovrà essere un certo numero di punti $(2k+2)$-pli. Prendiamo infatti le superficie aggiunte Φ d'indice k alle superficie φ, che dovrebbero essere del secondo ordine, e dovrebbero passare doppiamente per ogni punto $(2k+2)$-plo, e semplicemente per ogni punto $(2k+1)$-plo delle superficie φ. Supponiamo che le φ non abbiano alcun punto $(2k+2)$-plo. Allora, affinchè le aggiunte Φ non esistano, dovranno essere costrette a passare almeno per 10 punti semplici, ossia le φ avranno 10 punti $(2k+1)$-pli. Ma allora la dimensione del sistema omaloidico $|\varphi|$ risulta negativa, come si verifica, e il sistema $|\varphi|$ non esiste. Quindi vi dovranno essere dei punti $(2k+2)$-pli in numero conveniente. Le rette congiungenti i punti $(2k+2)$-pli fra loro e coi punti $(2k+1)$-pli saranno rette fondamentali.

Nell'ipotesi α), in cui cioè vi è un punto F_0, $(2k+l+2)$-plo $(1 \leq l \leq 2k-1)$, staccando le due ipotesi

$$\text{I)}\quad l=2n \qquad \text{II)}\quad l=2n-1 \qquad (n \geq 1)$$

con ragionamento analogo a quello dei casi precedenti, si trovano i seguenti risultati:

Ipotesi I). — *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k+2$ *possiede un punto fondamentale* F_0 *di molteplicità* $\alpha_0 = 2k+2n+2$ $(n \geq 1)$, *dovrà avere inoltre almeno :*

1) *o una curva fondamentale f di molteplicità*

$$i \geq k-n+1,$$

2) *oppure dei punti fondamentali F, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geq 2k-2n+1.$$

Vi saranno delle rette fondamentali uscenti dal punto F_0, eccettuato il caso in cui, nell'ipotesi 1), la curva f sia una curva tracciata sopra un cono di vertice F_0, in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici.

Ipotesi II). — *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k+2$ *possiede un punto fondamentale* F_0 *multiplo secondo* $\alpha_0 = 2k+2n+1$ $(n \geq 1)$, *dovrà avere inoltre almeno :*

1) *o una curva fondamentale f di molteplicità*

$$i \geqq k - n + 1,$$

2) *oppure dei punti fondamentali F, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 2n + 1.$$

Vi saranno delle rette fondamentali uscenti da F_0, eccettuato il caso in cui, nell'ipotesi 1), la curva f sia una curva tracciata sopra un cono di vertice F_0, in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici, e il caso in cui, nell'ipotesi 2), i punti F abbiano tutti la molteplicità $2k - 2n + 1$, nel qual caso si dimostra che la trasformazione deve essere monoidale.

Riunendo i diversi risultati potremo dire:

Una trasformazione birazionale, d'ordine $4k + 2$, con un punto fondamentale F_0 di molteplicità $(2k + l + 2)$, maggiore di $2k + 2$ e minore di $4k + 1$, possiede rette fondamentali uscenti dal punto F_0 di molteplicità massima, eccettuato il caso, in cui vi sia una curva fondamentale di molteplicità massima $i > k - \frac{l}{2}$ tracciata sopra un cono di vertice F_0, in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici.

Nel caso in cui vi siano dei punti $(2k + 2)$-pli e $(2k + 1)$-pli, le rette k congiungenti i punti $(2k + 2)$-pli fra loro e coi punti $(2k + 1)$-pli saranno rette fondamentali.

Ogni trasformazione del tipo b), d'ordine $4k + 2$, priva di rette fondamentali, è una trasformazione monoidale, eccettuate le trasformazioni in cui vi sia una curva fondamentale di molteplicità massima $i > k - \frac{l}{2}$ tracciata sopra un cono di vertice F_0, in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici.

4.° Caso: $\mu = 4k + 3$. — Vi sarà (§ 4)

α) o un punto F_0 multiplo secondo

$$\alpha_0 = 2k + l + 3 \qquad (1 \leqq l \leqq 2k - 1),$$

β) oppure dei punti $(2k + 1)$-pli, $(2k + 2)$-pli e $(2k + 3)$-pli in numero conveniente.

Nell'ipotesi β), se vi fossero dei soli punti $(2k + 1)$-pli, considerando le superficie aggiunte d'indice k, del 3.° ordine, passanti semplicemente per quei punti, ed esigendo che non esistano, si vede che il numero di quei punti dovrebbe superare 19. Ma allora non esiste il sistema omaloidico $|\varphi|$, perchè la sua dimensione risulta negativa. Se vi fosse un sol punto $(2k+2)$-plo, i punti $(2k+1)$-pli dovrebbero essere almeno in numero di 15. Ma allora la dimensione del sistema $|\varphi|$ sarebbe negativa, e il sistema $|\varphi|$ non esisterebbe. Dunque vi saranno più punti $(2k+2)$-pli. Le congiungenti i punti $(2k+3)$-pli (se esistono) e $(2k+2)$-pli fra loro e i punti $(2k+3)$-pli (se esistono) coi punti $(2k+1)$-pli saranno rette fondamentali.

Nell'ipotesi α), in cui cioè si ha un punto fondamentale di molteplicità $2k+l+3$ $(1 \leq l \leq 2k-1)$, staccando le due ipotesi

$$\text{I)}\quad l = 2n \qquad \text{II)}\quad l = 2n-1 \qquad (n \geq 1)$$

e ragionando come nei casi precedenti, si arriva ai seguenti risultati:

Ipotesi I). — *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k+3$ *è dotato di un punto fondamentale* F_0 *di molteplicità* $\alpha_0 = 2k+2n+3$ $(n \geq 1)$, *bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale f di molteplicità*

$$i \geq k-n+1,$$

2) *oppure dei punti fondamentali F, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geq 2k-2n+1.$$

Vi saranno delle rette fondamentali uscenti dal punto F_0, eccettuato il caso, in cui (nell'ipotesi 1)), la curva f sia una curva tracciata sopra un cono di vertice F_0, in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici.

Ipotesi II). — *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k+3$ *è dotato di un punto fondamentale* F_0 *di molteplicità* $\alpha_0 = 2k+2n+2$, *bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale f di molteplicità*

$$i \geq k-n+1,$$

2) *oppure dei punti fondamentali F, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geq 2k-2n+1.$$

Vi saranno delle rette fondamentali uscenti dal punto F_0, $(2k+2n+2)$-plo, eccettuato il caso in cui, nell'ipotesi 1), la curva f sia una curva tracciata sopra un cono di vertice F_0 in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici, e nell'ipotesi 2), i punti F abbiano tutti la molteplicità $2k-2n+1$, caso in cui si dimostra che la trasformazione deve essere monoidale.

Potremo quindi concludere:

Una trasformazione birazionale d'ordine $4k+3$ con un punto fondamentale di molteplicità $2k+l+3$, maggiore di $2k+3$ e minore di $4k+2$, possiede rette fondamentali uscenti dal punto di molteplicità più elevata, eccettuato il caso in cui vi sia una curva fondamentale di molteplicità massima $i > k - \frac{l}{2}$, tracciata sopra un cono di vertice F_0 in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici.

Nel caso poi in cui vi siano dei punti fondamentali $(2k+3)$-pli, $(2k+2)$-pli e *$(2k+1)$-pli,* le rette congiungenti i punti $(2k+3)$-pli e $(2k+2)$-pli fra loro e i punti $(2k+3)$-pli coi punti $(2k+1)$-pli, saranno rette fondamentali.

Ogni trasformazione birazionale del tipo b), d'ordine $4k+3$, priva di rette fondamentali, è una trasformazione monoidale, eccettuate le trasformazioni, in cui vi sia una curva fondamentale di molteplicità massima $i > k - \frac{l}{2}$, tracciata sopra un cono di vertice F_0 in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici.

Riassumendo i diversi risultati possiamo intanto dire:

Una trasformazione birazionale, d'ordine μ, del tipo b) (la quale è cioè dotata di un punto fondamentale F, α-plo, che impone troppe condizioni alle ultime superficie aggiunte), *o possiede rette fondamentali uscenti dal punto fondamentale F di molteplicità più elevata, o è una trasformazione monoidale, o è una trasformazione, avente come curva fondamentale di molteplicità massima $i > \frac{\mu-\alpha}{2}$ una curva tracciata sopra un cono di vertice F in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F, le generatrici.* (In quest'ultima ipotesi ogni altro punto fondamentale ha molteplicità $\leq \mu - \alpha$, e ogni altra curva fondamentale ha molteplicità $\leq \frac{\mu-\alpha}{2}$.)

Vediamo ora quali siano le *trasformazioni monoidali prive di rette fondamentali.*

Sia μ l'ordine della trasformazione e F_0 il punto fondamentale multiplo secondo $\mu - 1$.

Supponiamo che vi siano delle curve fondamentali f (necessariamente semplici), e dei punti fondamentali F, i quali, se vogliamo che la trasformazione sia priva di rette fondamentali, saranno pure semplici.

Consideriamo il cono che proietta dal pnnto F_0 una curva f. Se una generatrice del cono segasse f in più di un punto, avrebbe con una superficie φ più di μ punti in comune, sarebbe cioè retta fondamentale uscente da F_0. Dunque se esigiamo che la trasformazione sia priva di rette fondamentali, la curva f dovrà essere segata in un sol punto dalle generatrici del cono.

Inoltre, se consideriamo due curve f, e i coni proiettanti da F_0 queste curve, i coni proiettanti non potranno avere generatrici comuni.

Considerando l'insieme delle curve f come una sola curva, anche spezzata, potremo dire:

Le trasformazioni monoidali d'ordine μ, prive di rette fondamentali, sono trasformazioni d'ordine μ, aventi un punto fondamentale F_0 ($\mu - 1$)-plo *e una sola curva fondamentale, semplice* (*anche spezzata*), *tracciata sopra un cono di vertice F_0, in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici; e aventi inoltre punti fondamentali semplici.*

Il risultato di pag. 60 si potrà quindi enunciare così:

Una trasformazione birazionale d'ordine μ del tipo b) (avente cioè un punto fondamentale F α-plo, che impone troppe condizioni alle ultime superficie aggiunte), *o possiede rette fondamentali, uscenti dal punto fondamentale F di molteplicità più elevata, oppure è una trasformazione, avente come curva fondamentale di molteplicità massima $i > \frac{\mu - \alpha}{2}$ una curva tracciata sopra un cono di vertice F, in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F, le generatrici.*

(In quest'ultima ipotesi ogni altro punto fondamentale ha molteplicità $\leq \mu - \alpha$, e ogni altra curva fondamentale ha molteplicità $\leq \frac{\mu - \alpha}{2}$.)

13. Supponiamo ora che non vi siano curve fondamentali, consideriamo cioè le *trasformazioni birazionali d'ordine μ con soli punti fondamentali.*

Secondo quel che abbiamo visto (§ 12), la trasformazione (se esiste) sarà monoidale, e sarà una di quelle trasformazioni monoidali, la cui inversa ha l'ordine più alto possibile (*).

Avremo dunque un punto F_0 $(\mu - 1)$-plo e dei punti F_t semplici.

Affinchè la trasformazione sia possibile, il genere della totale intersezione delle superficie φ del nostro sistema omaloidico a due a due, dovrà essere zero, ossia supponendo che le φ abbiano dei contatti d'ordine $\sigma - 1$ (**):

$$\mu^2(\mu - 2) + 1 - (\mu - 1)^2(\mu - 2) - \sum \frac{1}{2}\sigma(\sigma - 1) = 0$$

ossia

$$(\mu - 2)(2\mu - 1) + 1 - \sum \frac{1}{2}\sigma(\sigma - 1) = 0.$$

La prima parte è certo positiva, quindi affinchè tutta l'espressione sia zero dovrà essere:

$$\sum \frac{1}{2}\sigma(\sigma - 1) > 0$$

ossia vi dovranno essere dei contatti, e possiamo concludere:

Non esistono trasformazioni birazionali con soli punti fondamentali multipli, senza contatti.

Tutte le trasformazioni birazionali con soli punti fondamentali (e contatti) sono trasformazioni monoidali.

Dicendo S il numero dei punti fondamentali semplici, le equazioni di postulazione e d'equivalenza (***) danno

$$\left.\begin{aligned} \sum \frac{1}{2}\sigma(\sigma + 1) &= (\mu + 1)^2 - 4 - S \\ \sum \sigma^2 &= 3\mu(\mu - 1) - S. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Moltiplicando la prima per 2 e sottraendo da essa la seconda, si trova

$$\sum \sigma + S = -\mu^2 + 7\mu - 6.$$

(*) Le trasformazioni monoidali finora studiate sono quelle per le quali l'ordine della trasformazione inversa è il minimo possibile. De Paolis, *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie d'ordine n con un punto* $(n - 1)$-plo. Giornale di Battaglini, vol. 13.

(**) Guccia, *Sui sistemi lineari di superf. algebriche, dotati di singolarità base qualunque.* Rend. Circ. Mat. di Palermo, 1887, Vol. 1.

(***) Noether, *Curve multiple di superf. algebriche.* Ann. di Mat., Ser. II, Tom. V.

Il primo membro è positivo, quindi lo sarà anche il secondo, ossia

$$-\mu^2 + 7\mu - 6 > 0 \qquad \mu < 6.$$

Segue che *una trasformazione* (monoidale) *con soli punti fondamentali* (e contatti) *ha l'ordine* $\mu \leq 5$.

Un esempio di questo tipo di trasformazioni è dato dalle superficie del secondo ordine circoscritte ad un tetraedro fisso, in un vertice del quale hanno un piano tangente fisso (*).

Un altro esempio è dato dalle superficie del terzo ordine, aventi in comune un punto doppio e 3 punti semplici, con un contatto di terzo ordine in uno di questi (**).

Per l'ordine $\mu = 4$, le equazioni (1) di postulazione e d'equivalenza danno

$$S + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 + 21x_6 = 21$$
$$S + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 = 36$$

dove S è il numero dei punti semplici, x_2 è il numero dei contatti del primo ordine, x_3 è il numero dei contatti del secondo ordine, ecc.

Facendo i calcoli, si trova che la sola soluzione in numeri interi e positivi delle due equazioni scritte è

$$x_6 = 1 \qquad S = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

Dunque:

Esiste una sola trasformazione birazionale del quarto ordine con soli punti fondamentali, ed è la trasformazione (4, 16) *determinata dalle superficie del quarto ordine, passanti per un punto triplo e aventi in un punto semplice un contatto del quinto ordine.* Pare che questa trasformazione non sia ancora stata considerata.

Se consideriamo le superficie dell'ordine $\mu = 5$, per esse le formole (1) danno

$$S + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 + 21x_6 + 28x_7 = 32$$
$$S + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 60$$

le quali non hanno alcuna soluzione in numeri interi e positivi; quindi:

Non esistono trasformazioni birazionali del quinto ordine con soli punti fondamentali (e contatti).

(*) Cremona, *Sulle trasf. raz. nello spazio.* Ann. di Mat., Ser. II, Tom. V.

(**) Cremona, *Sulle trasf. raz. nello spazio.* Nota 1.ª Rend. Istituto Lombardo, 4 maggio 1871, § 3 g).

Una trasformazione (monoidale) con soli punti fondamentali (e contatti) ha l'ordine $\mu \leq 4$ e dovrà appartenere ad uno dei seguenti tipi:

I) Trasformazione (2, 4) determinata dalle superficie del secondo ordine circoscritte ad un tetraedro fisso, in un vertice del quale hanno un piano tangente fisso.

II) Trasformazione (3, 9) determinata dalle superficie del terzo ordine, aventi in comune un punto doppio e 3 punti semplici, con un contatto di terzo ordine in uno di questi.

III) Trasformazione (4, 16) determinata dalle superficie del quarto ordine, aventi in comune un punto triplo e aventi in un punto semplice un contatto del quinto ordine.

PARTE QUARTA

Applicazione allo spezzamento di una trasformazione cremoniana in trasformazioni d'ordine inferiore.

14. *Trasformazioni birazionali del tipo a aventi come curva fondamentale di molteplicità massima (che impone cioè troppe condizioni alle ultime superficie aggiunte) una sestica di genere 3.*

Sia μ l'ordine del sistema omaloidico $|\varphi|$, avente una curva fondamentale f, *i-pla*, del 6.° ordine e genere 3, come curva di molteplicità massima.

Supponiamo che vi siano delle altre curve fondamentali f_r, multiple secondo i_r, e dei punti fondamentali F_t, multipli secondo α_t. Distinguiamo i quattro casi: $\mu = 4k$, $\mu = 4k + 1$, $\mu = 4k + 2$, $\mu = 4k + 3$.

1.° Caso: $\mu = 4k$. — Diciamo

$$i = k + l, \left(1 \leq l \leq \frac{k}{3}\right)$$

la molteplicità della sestica fondamentale f.

Siccome la sestica è situata sopra una superficie cubica (anzi su infinite), vi sarà, secondo quel che abbiamo visto (§ 11), o un punto fondamentale almeno, di molteplicità $\alpha \geqq 2k - 6l + 1$, oppure una curva fondamentale di molteplicità $i_0 \geqq k - 3l + 1$. Ma nel caso che consideriamo, si può dire ancora di più, applicando al sistema $|\varphi|$ la trasformazione birazionale del 3.° ordine, che ha la sestica f come curva fondamentale.

Mediante questa trasformazione il nostro sistema si trasformerà (*) in un sistema $|\varphi'|$ d'ordine

$$\mu' = 12k - 8(k + l) = 4k - 8l = 4k'$$

dove si è posto

$$k' = k - 2l.$$

Le superficie φ' avranno una curva fondamentale del 6.° ordine e genere 3, multipla secondo

$$i' = 4k - 3(k + l) = k - 3l = k' - l$$

e avranno delle curve fondamentali f'_r di molteplicità i_r, e dei punti fondamentali F'_t di molteplicità α_t, corrispondenti alle curve f_r e i punti F_t.

Affinchè il sistema sia omaloidico, poichè $i' < k' + 1$, si dovrà presentare uno dei seguenti casi (§ 4):

1) o vi sarà una curva fondamentale f'_0 multipla secondo

$$i_0 \geqq k' + 1 = k - 2l + 1,$$

2) oppure vi sarà un punto fondamentale almeno, F_0, di molteplicità

$$\alpha_0 \geqq 2k' + 1 = 2k - 4l + 1.$$

Tornando al sistema primitivo $|\varphi|$, nell'ipotesi 1), la curva f'_0, fondamentale per il sistema $|\varphi'|$ (supposto che non sia una trisecante della sestica f') si trasformerà in virtù della (3, 3) in una curva fondamentale del sistema $|\varphi|$, avente la stessa molteplicità, e nell'ipotesi 2) il punto F'_0, fondamentale per il sistema $|\varphi'|$ (supposto che non sia situato sulla sestica f') si trasformerà in un punto fondamentale F_0 del sistema $|\varphi|$, avente la stessa molteplicità.

Supponiamo ora che nell'ipotesi 1) la curva f'_0 fondamentale per $|\varphi'|$ sia una trisecante della sestica fondamentale f' del secondo spazio; e indichiamo con $i_0 = k' + q_0 = k - 2l + q_0$ $(q_0 \geqq 1)$ la sua molteplicità.

(*) NOETHER, *Eindeutige Raumtransformationen.* Math. Ann., Vol. III.

Ad f'_0 corrisponderà allora, per la (3, 3), un punto F_0 situato sulla sestica fondamentale f del primo spazio. Si tratta di calcolare la molteplicità α_0 di F_0 per il sistema $|\varphi|$. Questa molteplicità si otterrà calcolando il numero di intersezioni (fuori di F_0) di una retta arbitraria r condotta per F_0 con una superficie φ. Ora questo numero dovrà essere uguale al numero di intersezioni (fuori della trisecante f'_0) della cubica corrispondente alla retta r (spezzantesi nella trisecante f'_0 più una conica, secante f'_0 in un punto e la sestica f' in cinque punti) con una superficie φ'. Si dovrà quindi avere

$$4k - \alpha_0 = 2(4k - 8l) - (k - 2l + q_0) - 5(k - 3l)$$

da cui

$$\alpha_0 = 2k - l + q_0 \qquad (q_0 \geqq 1).$$

Resta a trattare il caso, in cui nell'ipotesi 2), il punto F'_0 sia situato sulla sestica f'. Diciamo $\alpha_0 = 2k - 4l + p_0$ $(p_0 \geqq 1)$ la sua molteplicità. Ad F'_0 corrisponderà per la (3, 3) una trisecante f_0 della sestica fondamentale f del primo spazio. Dicendo i_0 la sua molteplicità, si troverà, ragionando come sopra

$$i_0 = k - l + p_0 \qquad (p_0 \geqq 1).$$

Riassumendo potremo dire:

Se un sistema omaloidico d'ordine $4k$ *è dotato di una curva fondamentale* f, *$(k+l)$-pla* $\left(1 \leqq l \leqq \frac{k}{3}\right)$, *del 6.° ordine e genere 3, bisogna che abbia inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale* f_0 *di molteplicità*

$$i_0 \geqq k - 2l + 1,$$

$(i_0 \geqq k - l + 1$ se f_0 è una trisecante di $f)$,

2) *oppure un punto fondamentale* F *di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 4l + 1,$$

$(\alpha \geqq 2k - l + 1$ se il punto è situato sopra la sestica $f)$.

Una trasformazione birazionale d'ordine $4k$ *che abbia una curva fondamentale* $(k+l)$*-pla* $\left(1 \leqq l \leqq \frac{k}{3}\right)$ *del 6.° ordine e genere 3, è il prodotto di una trasformazione* (3, 3) *per una trasformazione d'ordine* $4k - l$.

Nei casi rimanenti $\mu = 4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ si giunge, con metodo analogo, ai seguenti risultati:

2.° *Caso:* $\mu = 4k + 1$. — *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k + 1$ *è dotato di una curva fondamentale* f, $(k + l)$*-pla* $\left(1 \leq l \leq \frac{k+1}{3}\right)$, *del 6.° ordine e genere 3, dovrà avere inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale* f_0 *multipla secondo*

$$i_0 \geq k - 2l + 1,$$

($i_0 \geq k - l$ se f_0 è una trisecante della sestica f),

2) *oppure dei punti fondamentali, in numero conveniente, multipli secondo*

$$\alpha \geq 2k - 4l + 1,$$

($\alpha \geq 2k - l + 1$ se il punto è situato sulla sestica).

Una trasformazione birazionale d'ordine $4k + 1$, *che abbia una curva fondamentale* $(k + l)$*-pla* $\left(1 \leq l \leq \frac{k+1}{3}\right)$ *del 6.° ordine e genere 3, è il prodotto di una trasformazione* (3, 3) *per una trasformazione d'ordine* $4k - 8l + 3$.

3.° *Caso:* $\mu = 4k + 2$. — *Se un sistema omaloidico d'ordine* $4k + 2$ *ha una sestica di genere* 3 *fondamentale* $(k + l)$*-pla* $\left(1 \leq l \leq \frac{k+2}{3}\right)$, *dovrà avere inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale* f_0 *multipla secondo*

$$i_0 \geq k - 2l + 2$$

($i_0 \geq k - l + 1$ se f_0 è una trisecante della sestica f),

2) *oppure dei punti fondamentali, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geq 2k - 4l + 3$$

($\alpha \geq 2k - l + 2$ se il punto è situato sulla sestica).

Una trasformazione birazionale d'ordine $4k + 2$, *che abbia una sestica di genere 3, fondamentale* $(k + l)$*-pla* $\left(1 \leq l \leq \frac{k+2}{3}\right)$, *è il prodotto di una trasformazione* (3, 3) *per una trasformazione d'ordine* $4k - 8l + 6$.

4.° *Caso:* $\mu = 4k + 3$. — *Se un sistema omaloidico* $|\varphi|$ *d'ordine* $4k + 3$ $(k > 0)$ *ha una curva del 6.° ordine e genere 3 fondamentale* $(k + l)$*-pla* $\left(1 \leq l \leq \frac{k+3}{3}\right)$, *dovrà avere inoltre almeno:*

1) *o una curva fondamentale* f_0 *di molteplicità*

$$i_0 \geqq k - 2l + 3$$

($i_0 \geqq k - l + 2$ se f_0 è una trisecante della sestica f),

2) *oppure dei punti fondamentali, in numero conveniente, di molteplicità*

$$\alpha \geqq 2k - 4l + 5$$

($\alpha \geqq 2k - l + 3$ se il punto è situato sulla sestica f).

Una trasformazione birazionale d'ordine $4k + 3$, *che abbia una sestica di genere 3 fondamentale* $(k + l)$*-pla* $\left(1 \leqq l \leqq \frac{k+3}{3}\right)$, *è il prodotto di una trasformazione* (3, 3) *per una trasformazione d'ordine* $4k - 8l + 9$.