Intorno ad un teorema di Cauchy.

(*del prof.* A. Genocchi, *a Torino*).

Il chiarissimo prof. Trudi ha impugnato un teorema annunziato da Cauchy nel tom. X dei *Comptes rendus* pag. 181. È vero che l'illustre francese non l'ha accompagnato con una dimostrazione formale, ma i principj da lui esposti nel medesimo volume e nel tom. XVII dei *Mémoires de l'Institut* conducono così facilmente alla dimostrazione, che a buon diritto, mi sembra, egli ha potuto ommetterla; e fu dopo averla trovata ch'io citai quel teorema in una Memoria intorno ai residui quadratici pubblicata dall'Accademia delle scienze del Belgio, e potei distintamente indicarvi i casi ne' quali il segno ambiguo nell'equazione di Cauchy deve ridursi al $+$ e quelli in cui deve ridursi al $-$, ciò derivando come conseguenza immediata dagli accennati principj.

Il fondamento della dimostrazione sta nella determinazione della *somma* o *funzione alternata* Δ formata colle radici primitive dell'equazione $1-x^n=0$ divise in due gruppi. Sia ρ una di tali radici primitive: inteso il simbolo $\left(\frac{m}{n}\right)$ nel senso spiegato da Legendre quando n è un numero primo e m non è divisibile per n, si ponga rispetto ad ogni valore impari di m la definizione $\left(\frac{m}{4}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}$, e l'una o l'altra delle definizioni seguenti:

$$\left(\frac{m}{8}\right)=(-1)^{\frac{(m-1)(m-3)}{8}}, \qquad \left(\frac{m}{8}\right)=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}};$$

poscia supponendo n un numero impari non divisibile per alcun quadrato ovvero un tal numero moltiplicato per 4 o per 8, si determinerà generalmente il valore di $\left(\frac{m}{n}\right)$ se si ammette che sia nullo quando m non è primo ad n, e nel caso contrario, risoluto n ne' suoi fattori primi impari e nel fattore 4 ovvero 8, si applica la relazione $\left(\frac{m}{ab}\right)=\left(\frac{m}{a}\right)\left(\frac{m}{b}\right)$ indicata da Jacobi. Ciò posto, si rappresentino con h quelli fra i numeri inferiori ad n e primi ad n che dànno $\left(\frac{h}{n}\right)=+1$, e con k quelli che dànno $\left(\frac{k}{n}\right)=-1$, e si scriva $\Delta=\Sigma\rho^h-\Sigma\rho^k$; se n è d'una delle forme $4\alpha+1$, $4(4\alpha+3)$, si avrà $\Delta^2=+n$; se n è d'una delle forme $4\alpha+3$, $4(4\alpha+1)$, si avrà $\Delta^2=-n$; se infine n è della forma $8(2\alpha+1)$, si avrà $\Delta^2=n(-1)^r$ quando si suppone $\left(\frac{m}{8}\right)=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$, e $\Delta^2=n(-1)^{r+1}$ quando si supponga $\left(\frac{m}{8}\right)=(-1)^{\frac{(m-1)(m-3)}{8}}$, fatto in entrambi i casi $r=\frac{n-8}{16}$. Queste proposizioni furono dimostrate da Cauchy, e ottenute tali formole, non resta se non seguire il metodo stesso di Gauss per provare l'esistenza di due polinomj interi Y e Z a coefficienti interi (*) che rendono:

$$2\Pi(x-\rho^h)=Y+\Delta Z, \qquad 2\Pi(x-\rho^k)=Y-\Delta Z,$$

e quindi:

$$4\Pi(x-\rho^h)(x-\rho^k)=Y^2-\Delta^2 Z^2,$$

ossia:

$$4X_n=Y^2\mp nZ^2,$$

chiamato X_n il prodotto $\Pi(x-\rho)$ steso a tutti i valori di ρ. Nel secondo membro dovrà prendersi il segno — quando n è d'una delle forme $4\alpha+1$ e $4(4\alpha+3)$, e il segno + quando n è d'una delle forme $4\alpha+3$ e $4(4\alpha+1)$; e potrà prendersi tanto l'uno quanto l'altro segno se n è divisibile per 8.

Il prof. Trudi avendo trovato nel caso di n pari formole diverse dalla pre-

---

(*) Il prof. Trudi, nel dire che Dirichlet ha *ridotto a formole* la costruzione dei coefficienti di Y et Z, aggiunge che tal cosa era riputata impossibile da Gauss. Osservo che le formole a cui egli allude contengono i simboli $\left(\frac{2}{n}\right)$, $\left(\frac{3}{n}\right)$, $\left(\frac{5}{n}\right)$, ecc., ai quali si possono applicare le parole di Gauss: «variant pro diversa indole numeri n, nec formulæ analyticæ generali subiici possunt». Le regole date da Legendre negli art. 511, 512 della sua *Théorie des nombres* furono da lui stesso dichiarate inesatte nel tomo XI *Mémoires de l'Institut* (1832) pag. 81, dove altre ne sostituì. Noterò ancora che la formola del Trudi $Z(x)=(-x)^{m+1}Z\left(\frac{1}{x}\right)$ per $n\equiv 3$ (mod. 4) non è più esatta di quella del Dedekind ch'esso ha voluto correggere, e che si deve porre $-(-x)^m$ in luogo di $(-x)^{m+1}$

cedente e avendo corroborato le sue deduzioni con esempi numerici, ha conchiuso che per n pari l'esposto teorema di Cauchy non è vero, mentre con questo non è inconciliabile il suo teorema, potendo lo stesso polinomio $4X_n$ ricevere due o più forme quadratiche distinte. E lo mostrano senz'altro gli esempi che soggiungo dando ad n i valori 12, 20, 24, 28, 56, dei quali gli ultimi due sono appunto stati scelti dal sig. Trudi per provare la falsità del teorema di Cauchy:

$$4X_{12}=(2x^2+2)^2-12x^2,$$
$$4X_{20}=(2x^4-6x^2+2)^2+20\,(x^3-x)^2,$$
$$4X_{24}=(2x^4-6x^2+2)^2+24\,(x^3-x)^2,$$
$$4X_{24}=(2x^4+6x^2+2)^2-24\,(x^3+x)^2,$$
$$4X_{28}=(2x^6+6x^4+6x^2+2)^2-28\,(x^5+x^3+x)^2,$$
$$4Y_{56}=(2x^{12}+14x^{10}+6x^8-14x^6+6x^4+14x^2+2)^2$$
$$-56(x^{11}+2x^9-x^7-x^5+2x^3+x)^2,$$
$$4X_{56}=(2x^{12}-14x^{10}+6x^8+14x^6+6x^4-14x^2+2)^2$$
$$+56(x^{11}-2x^9-x^7+x^5+2x^3-x)^2.$$

Pel caso di n impari, il prof. Trudi ammette il teorema, ma lo attribuisce a Dirichlet, che lo avrebbe sommariamente esposto nella Memoria *Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies*. Confesso che in questa (G. Crelle, t. XVII, pag. 57) non ho trovato una parola che si riferisca al menzionato teorema: bensì nello stesso volume fu pubblicata un'altra Memoria di Dirichlet *Sur la manière de résoudre l'équation* $t^2-pu^2=1$ *au moyen des fonctions circulaires*, nel chiuder la quale l'illustre autore afferma che il teorema di Gauss si può ampliare e indica il risultato nel solo caso in cui n è il prodotto di due numeri primi disuguali, aggiungendo l'esempio di $n=33$. E Cauchy non ha ommesso di menzionare queste proposizioni del Dirichlet. Nè relativamente a tal quistione giova allegare le *Lezioni* postume di Dirichlet che sono una compilazione dell'egregio prof. Dedekind, uscita nel 1863, con aggiunte proprie del compilatore.

13 novembre 1868.