Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio.

MEMORIA SECONDA (*).

(*del prof.* DELFINO CODAZZI, *a Pavia*).

Divido questa seconda Memoria in due parti, l'una relativa alle coordinate curvilinee dello spazio, e l'altra alle coordinate curvilinee d'una superficie.

PARTE PRIMA.

L'oggetto di questa parte prima è quello di stabilire diverse relazioni lineari tra i coseni degli angoli formati con gli assi delle seguenti dodici rette: le tre normali delle superficie (λ), (μ), (ν); le tre tangenti, le tre normali principali e le tre perpendicolari ai piani dei circoli osculatori delle linee (λ, μ), (μ, ν), (ν, λ).

1.

Siano X_λ, Y_λ, Z_λ i coseni degli angoli che fa con gli assi delle x, delle y, delle z la normale alla superficie (λ) nel punto di coordinate curvilinee μ, ν, cioè nel punto d'incontro delle intersezioni (λ, μ), (ν, λ); e siano X_μ, Y_μ, Z_μ e X_ν, Y_ν, Z_ν le analoghe quantità per le superficie (μ) e (ν). Chiamando I una qualunque delle X, Y, Z e ponendo per brevità

$$f_X+f_Y+f_Z=\Sigma f_I,$$

(*) I numeri adoperati per indicare le formole di questa Memoria seconda sono in continuazione a quelli della Memoria prima (t. 1° di questi *Annali*, p. 310) parte prima.

ove f è funzione qualsivoglia, avremo

$$\left.\begin{array}{lll}\sum I_\lambda i_\mu = 0\,, & \sum I_\lambda i_\nu = 0\,, & \sum I_\lambda^2 = 1\,,\\ \sum I_\mu i_\nu = 0\,, & \sum I_\mu i_\lambda = 0\,, & \sum I_\mu^2 = 1\,,\\ \sum I_\nu i_\lambda = 0\,, & \sum I_\nu i_\mu = 0\,, & \sum I_\nu^2 = 1\,,\end{array}\right\} \tag{23}$$

Ciò posto, cominciamo dall'esprimere I_λ in funzione lineare delle i_λ, i_μ, i_ν; e facciamo a tal fine

$$I_\lambda = a i_\lambda + b i_\mu + c i_\nu, \tag{a}$$

ove a, b, c sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando questa equazione prima per I_λ, poi per i_λ, e prendendo ad ogni volta sul prodotto la somma $\sum$, si trovano, in causa delle (1), (23),

$$a\sum I_\lambda i_\lambda = 1\,, \qquad \sum I_\lambda i_\lambda = a + b\cos\varepsilon_\nu + c\cos\varepsilon_\mu\,;$$

da cui

$$a(a + b\cos\varepsilon_\nu + c\cos\varepsilon_\mu) = 1. \tag{b}$$

Moltiplicando (a) per i_μ, i_ν e prendendo ancora ad ogni volta sul prodotto la somma $\sum$, si trovano

$$a\cos\varepsilon_\nu + b + c\cos\varepsilon_\lambda = 0\,, \qquad a\cos\varepsilon_\mu + b\cos\varepsilon_\lambda + c = 0\,; \tag{c}$$

da cui

$$\left.\begin{array}{l} b = -a\,\dfrac{\cos\varepsilon_\nu - \cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu}{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda} = -a\,\dfrac{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\,,\\ c = -a\,\dfrac{\cos\varepsilon_\mu - \cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda}{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda} = -a\,\dfrac{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\,.\end{array}\right\} \tag{d}$$

Avanti di proseguire, notiamo che le a, b, c, le quali rendono soddisfatte la (b) e le due (c), rendono pure soddisfatta la terza (23). Infatti, quadrando (a) e prendendo sul risultato la somma $\sum$, si ottiene

$$\sum I_\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\varepsilon_\nu + 2bc\cos\varepsilon_\lambda + 2ca\cos\varepsilon_\mu\,,$$

ovvero

$$\sum I_\lambda^2 = a(a + b\cos\varepsilon_\nu + c\cos\varepsilon_\mu) + b(b + a\cos\varepsilon_\nu + c\cos\varepsilon_\lambda) + c(c + b\cos\varepsilon_\lambda + a\cos\varepsilon_\mu),$$

o finalmente

$$\sum I_\lambda^2 = 1.$$

Ora, mediante i valori (d), la (b) moltiplicata per $\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda$ si cambia in

$$a^2\{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda-(\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu)\cos\varepsilon_\nu-(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\cos\varepsilon_\mu\}=\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda,$$

ovvero

$$a^2(1-\cos^2\varepsilon_\lambda-\cos^2\varepsilon_\mu-\cos^2\varepsilon_\nu+2\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)=\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda;$$

da cui, prendendo il radicale col segno positivo,

$$\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}.$$

Abbiamo intanto la prima delle seguenti

$$\sum I_\lambda i_\lambda=\frac{\sqrt{\Delta}}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda},\qquad \Sigma I_\mu i_\mu=\frac{\sqrt{\Delta}}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu},\qquad \sum I_\nu i_\nu=\frac{\sqrt{\Delta}}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu};\tag{24}$$

le altre due si concludono operando sulla prima le due solite permutazioni. In seguito, la (a) mediante la sostituzione dei valori trovati per le funzioni a, b, c somministra la prima delle tre:

$$\left.\begin{aligned}
I_\lambda\sqrt{\Delta}&=i_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda-i_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu-i_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\mu,\\
I_\mu\sqrt{\Delta}&=i_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\mu-i_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\lambda-i_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\eta_\nu,\\
I_\nu\sqrt{\Delta}&=i_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu-i_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\eta_\mu-i_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\lambda;
\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

le quali esprimono ciascuna delle I_λ, I_μ, I_ν in funzione lineare delle i_λ, i_μ, i_ν.

Osserviamo, che moltiplicando la prima di queste equazioni per I_μ e prendendo sul prodotto la somma $\sum$, si trova, in causa delle (23),

$$\sqrt{\Delta}\sum I_\lambda I_\mu=-\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu\sum I_\mu i_\mu;$$

e quindi, in causa della seconda (24), risulterà la prima delle

$$\sum I_\lambda I_\mu=-\cos\eta_\nu,\quad \sum I_\mu I_\nu=-\cos\eta_\lambda,\quad \sum I_\nu I_\lambda=-\cos\eta_\mu,\tag{26}$$

le quali sono evidenti per sè stesse.

2.

Reciprocamente, esprimiamo ora la i_λ in funzione lineare delle I_λ, I_μ, I_ν. A questo scopo, moltiplichiamo le (25) ordinatamente per tre funzioni a, b, c da determinarsi e sommiamole; disponendo di queste funzioni in modo che riescano soddisfatte le

$$a\cos\eta_\nu-b+c\cos\eta_\lambda=0,\qquad a\cos\eta_\mu+b\cos\eta_\lambda-c=0,\tag{a}$$

troveremo

$$i_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda (a - b\cos\eta_\nu - c\cos\eta_\mu) = \sqrt{\Delta}(aI_\lambda + bI_\mu + cI_\nu). \qquad (b)$$

Ma dalle (a) si deducono

$$b\operatorname{sen}^2\eta_\lambda = a(\cos\eta_\nu + \cos\eta_\lambda\cos\eta_\mu), \qquad c\operatorname{sen}^2\eta_\lambda = a(\cos\eta_\mu + \cos\eta_\nu\cos\eta_\lambda),$$

ovvero

$$b\operatorname{sen}\eta_\lambda = a\operatorname{sen}\eta_\mu\cos\varepsilon_\nu, \qquad c\operatorname{sen}\eta_\lambda = a\operatorname{sen}\eta_\nu\cos\varepsilon_\mu;$$

onde sarà

$$\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda(a - b\cos\eta_\nu - c\cos\eta_\mu) = a(\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - \operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu\cos\eta_\nu - \operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\mu\cos\eta_\mu)$$
$$= \frac{a}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\{1 - \cos^2\varepsilon_\lambda - \cos\varepsilon_\nu(\cos\varepsilon_\nu - \cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu) - \cos\varepsilon_\mu(\cos\varepsilon_\mu - \cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\}$$
$$= \frac{a\Delta}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}.$$

Quindi la (6) si cambierà nella prima delle seguenti

$$\left.\begin{aligned}
i_\lambda \frac{\operatorname{sen}\eta_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\sqrt{\Delta} &= I_\lambda\operatorname{sen}\eta_\lambda + I_\mu\operatorname{sen}\eta_\mu\cos\varepsilon_\nu + I_\nu\operatorname{sen}\eta_\nu\cos\varepsilon_\mu,\\
i_\mu \frac{\operatorname{sen}\eta_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}\sqrt{\Delta} &= I_\mu\operatorname{sen}\eta_\mu + I_\nu\operatorname{sen}\eta_\nu\cos\varepsilon_\lambda + I_\lambda\operatorname{sen}\eta_\lambda\cos\varepsilon_\nu,\\
i_\nu \frac{\operatorname{sen}\eta_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}\sqrt{\Delta} &= I_\nu\operatorname{sen}\eta_\nu + I_\lambda\operatorname{sen}\eta_\lambda\cos\varepsilon_\mu + I_\mu\operatorname{sen}\eta_\mu\cos\varepsilon_\lambda;
\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

le quali esprimono appunto ciascuna delle i_λ, i_μ, i_ν in funzione lineare delle I_λ, I_μ, I_ν.

3.

Si chiamino, per la linea (μ, ν), i'_λ i coseni degli angoli formati con gli assi dalla normale principale; i''_λ i coseni formati dalla perpendicolare al piano del circolo osculatore; l' la derivata, presa rispetto a λ, del complesso degli angoli di contingenza; l'' la derivata del complesso degli angoli di torsione. Si chiamino i'_μ, i''_μ, m', m'' le analoghe quantità per la linea (ν, λ); e i'_ν, i''_ν, n', n'' le analoghe per la (λ, μ). Sussisteranno le note formole

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial i_\lambda}{\partial \lambda}=l' i'_\lambda, \quad \frac{\partial i'_\lambda}{\partial \lambda}=-l' i_\lambda \ -l'' i''_\lambda, \quad \frac{\partial i''_\lambda}{\partial \lambda}=l'' i'_\lambda,\\
&\frac{\partial i_\mu}{\partial \mu}=m' i'_\mu, \quad \frac{\partial i'_\mu}{\partial \mu}=-m' i_\mu - m'' i''_\mu, \quad \frac{\partial i''_\mu}{\partial \mu}=m'' i'_\mu,\\
&\frac{\partial i_\nu}{\partial \nu}=n' i'_\nu, \quad \frac{\partial i'_\nu}{\partial \nu}=-n' i_\nu \ -n'' i''_\nu, \quad \frac{\partial i''_\nu}{\partial \nu}=n'' i'_\nu.
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Si chiamino ordinatamente ω_λ, ω'_λ gli angoli formati dalla normale principale alla linea (μ, ν) con le normali alle superficie (μ), (ν). Si chiamino ω_μ, ω'_μ gli angoli analoghi per la linea (ν, λ) e per le superficie (ν), (λ); ed ω_ν, ω'_ν gli analoghi per la linea (λ, μ) e per le superficie (λ), (μ). Porremo

$$\left.\begin{aligned}
&\sum i'_\lambda I_\mu = \cos\omega_\lambda, \quad \sum i''_\lambda I_\mu = \operatorname{sen}\omega_\lambda, \quad \sum i'_\lambda I_\nu = \cos\omega'_\lambda, \quad \sum i''_\lambda I_\nu = \operatorname{sen}\omega'_\lambda,\\
&\sum i'_\mu I_\nu = \cos\omega_\mu, \quad \sum i''_\mu I_\nu = \operatorname{sen}\omega_\mu, \quad \sum i'_\mu I_\lambda = \cos\omega'_\mu, \quad \sum i''_\mu I_\lambda = \operatorname{sen}\omega'_\mu,\\
&\sum i'_\nu I_\lambda = \cos\omega_\nu, \quad \sum i''_\nu I_\lambda = \operatorname{sen}\omega_\nu, \quad \sum i'_\nu I_\mu = \cos\omega'_\nu, \quad \sum i''_\nu I_\mu = \operatorname{sen}\omega'_\nu.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Ciò premesso, esprimiamo I_λ in funzione lineare dapprima delle i_μ, i'_μ, i''_μ, dipoi delle i_ν, i'_ν, i''_ν; e facciamo a tal fine

$$I_\lambda = a\, i_\mu + b\, i'_\mu + c\, i''_\mu, \quad I_\lambda = \alpha\, i_\nu + \beta\, i'_\nu + \gamma\, i''_\nu,$$

ove $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando la prima di queste equazioni successivamente per i_μ, i'_μ, i''_μ e prendendo ad ogni volta la somma $\sum$ sul prodotto, troveremo, in causa delle (23), (29),

$$a = 0, \quad b = \cos\omega'_\mu, \quad c = \operatorname{sen}\omega'_\mu.$$

Così, moltiplicando la seconda delle stesse equazioni successivamente per i_ν, i'_ν, i''_ν e prendendo ancora ad ogni volta la somma $\sum$ sul prodotto, avremo

$$\alpha = 0, \quad \beta = \cos\omega_\nu, \quad \gamma = \operatorname{sen}\omega_\nu.$$

Dunque sussisteranno le due prime tra le seguenti

$$\left.\begin{aligned}
&I_\lambda = i'_\mu \cos\omega'_\mu + i''_\mu \operatorname{sen}\omega'_\mu, \quad I_\lambda = i'_\nu \cos\omega_\nu + i''_\nu \operatorname{sen}\omega_\nu,\\
&I_\mu = i'_\nu \cos\omega'_\nu + i''_\nu \operatorname{sen}\omega'_\nu, \quad I_\mu = i'_\lambda \cos\omega_\lambda + i''_\lambda \operatorname{sen}\omega_\lambda,\\
&I_\nu = i'_\lambda \cos\omega'_\lambda + i''_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\lambda, \quad I_\nu = i'_\mu \cos\omega_\mu + i''_\mu \operatorname{sen}\omega_\mu.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

In seguito, queste equazioni risolute rispetto alle i'_λ, i''_λ, i'_μ, i''_μ, i'_ν, i''_ν dànno

$$\left.\begin{array}{ll} i'_\lambda \operatorname{sen}(\omega'_\lambda-\omega_\lambda)=I_\mu \operatorname{sen}\omega'_\lambda-I_\nu \operatorname{sen}\omega_\lambda, & i''_\lambda \operatorname{sen}(\omega'_\lambda-\omega_\lambda)=-I_\mu\cos\omega'_\lambda+I_\nu\cos\omega_\lambda, \\ i'_\mu \operatorname{sen}(\omega'_\mu-\omega_\mu)=I_\nu \operatorname{sen}\omega'_\mu-I_\lambda \operatorname{sen}\omega_\mu, & i''_\mu \operatorname{sen}(\omega'_\mu-\omega_\mu)=-I_\nu\cos\omega'_\mu+I_\lambda\cos\omega_\mu, \\ i'_\nu \operatorname{sen}(\omega'_\nu-\omega_\nu)=I_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\nu-I_\mu \operatorname{sen}\omega_\nu, & i''_\nu \operatorname{sen}(\omega'_\nu-\omega_\nu)=-I_\lambda\cos\omega'_\nu+I_\mu\cos\omega_\nu. \end{array}\right\} \quad (31)$$

Notiamo a questo punto che, siccome la normale principale della linea (μ, ν) e le normali delle superficie (μ), (ν) si trovano in uno stesso piano, così l'angolo η_λ sarà la somma degli angoli ω_λ, ω'_λ ovvero dell'uno di essi e del supplemento dell'altro. Vediamo come risulti espresso il valore di η_λ in conseguenza de'segni coi quali sono stati presi i coseni rappresentati da'primi membri delle (29). A tal fine, moltiplichiamo membro per membro la quarta (30) per la quinta e facciamo l'operazione $\sum$ sul prodotto; troveremo, in causa della seconda (26),

$$-\cos\eta_\lambda = \cos(\omega'_\lambda - \omega_\lambda),$$

e quindi avremo la prima delle

$$\eta_\lambda = \omega_\lambda + \pi - \omega'_\lambda, \quad \eta_\mu = \omega_\mu + \pi - \omega'_\mu, \quad \eta_\nu = \omega_\nu + \pi - \omega'_\nu. \qquad (32)$$

4.

Passiamo ad esprimere i_λ in funzione lineare dapprima delle i_μ, i'_μ, i''_μ, dipoi delle i_ν, i'_ν, i''_ν.

Poniamo in primo luogo

$$i_\lambda = a i_\mu + b i'_\mu + c i''_\mu,$$

ove a, b, c sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando per i_μ e prendendo sul prodotto la somma $\sum$, abbiamo

$$a = \cos\varepsilon_\nu.$$

Moltiplicando per i'_μ i''_μ e prendendo sui prodotti ad ogni volta la somma $\sum$ otteniamo, in causa delle (31), (24),

$$b = -\frac{\operatorname{sen}\omega_\mu}{\operatorname{sen}\eta_\mu}\sum I_\lambda i_\lambda = -\frac{\operatorname{sen}\omega_\mu}{\operatorname{sen}\eta_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\sqrt{\Delta} = -\operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\omega_\mu,$$

$$c = \frac{\cos\omega_\mu}{\operatorname{sen}\eta_\mu}\sum I_\lambda i_\lambda = \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \cos\omega_\mu.$$

Perciò risulterà la prima delle

$$\left.\begin{aligned}
i_\lambda &= i_\mu \cos\varepsilon_\nu - i'_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\omega_\mu + i''_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \cos\omega_\mu,\\
i_\mu &= i_\nu \cos\varepsilon_\lambda - i'_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega_\nu + i''_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos\omega_\nu,\\
i_\nu &= i_\lambda \cos\varepsilon_\mu - i'_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega_\lambda + i''_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\omega_\lambda.
\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Poniamo in secondo luogo

$$i_\lambda = \alpha\, i_\nu + \beta\, i'_\nu + \gamma\, i''_\nu,$$

ove α, β, γ sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando per i_ν e facendo l'operazione $\sum$, abbiamo

$$\alpha = \cos\varepsilon_\mu.$$

Moltiplicando per i'_ν, i''_ν e facendo ad ogni volta l'operazione $\sum$, troviamo

$$\beta = \frac{\operatorname{sen}\omega'_\nu}{\operatorname{sen}\eta_\nu}\sum I_\lambda i_\lambda = \frac{\operatorname{sen}\omega'_\nu}{\operatorname{sen}\eta_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\sqrt{\Delta} = \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega'_\nu,$$

$$\gamma = -\frac{\cos\omega'_\nu}{\operatorname{sen}\eta_\nu}\sum I_\lambda i_\lambda = -\operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\omega'_\nu.$$

Quindi risulterà la prima delle

$$\left.\begin{aligned}
i_\lambda &= i_\nu \cos\varepsilon_\mu + i'_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega'_\nu - i''_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\omega'_\nu,\\
i_\mu &= i_\lambda \cos\varepsilon_\nu + i'_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\omega'_\lambda - i''_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \cos\omega'_\lambda,\\
i_\nu &= i_\mu \cos\varepsilon_\lambda + i'_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\mu - i''_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos\omega'_\mu.
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

5.

Esprimiamo ora i'_λ in funzione lineare dapprima delle i_μ, i'_μ, i''_μ, dipoi delle i_ν, i'_ν, i''_ν.

Facciamo in primo luogo

$$i'_\lambda = a i_\mu + b i'_\mu + c i''_\mu,$$

ove a, b, c sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando per i_μ ed operando la somma $\sum$, risulta, in causa delle (31),

$$a = \frac{\operatorname{sen}\omega'_\lambda}{\operatorname{sen}\eta_\lambda}\sum I_\mu i_\mu = \frac{\operatorname{sen}\omega'_\lambda}{\operatorname{sen}\eta_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\mu}\sqrt{\Delta} = \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\omega'_\lambda.$$

Moltiplicando per i_λ e prendendo la somma $\sum$, si trova

$$a\cos\varepsilon_\nu - b\operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\omega_\mu + c\operatorname{sen}\varepsilon_\nu \cos\omega_\mu = 0,$$

ovvero

$$b\operatorname{sen}\omega_\mu - c\cos\omega_\mu = \cos\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\omega'_\lambda.$$

Moltiplicando per I_ν e facendo ancora l'operazione $\sum$, s'ottiene, in causa delle (29)

$$b\cos\omega_\mu + c\operatorname{sen}\omega_\mu = \cos\omega'_\lambda.$$

Seguono

$$b = \cos\omega_\mu \cos\omega'_\lambda + \operatorname{sen}\omega_\mu \operatorname{sen}\omega'_\lambda \cos\varepsilon_\nu,$$

$$c = \operatorname{sen}\omega_\mu \cos\omega'_\lambda - \cos\omega_\mu \operatorname{sen}\omega'_\lambda \cos\varepsilon_\nu.$$

Perciò sussisterà la prima delle

$$\left.\begin{aligned}
i'_\lambda &= i_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\omega'_\lambda + i'_\mu(\cos\omega_\mu \cos\omega'_\lambda + \operatorname{sen}\omega_\mu \operatorname{sen}\omega'_\lambda \cos\varepsilon_\nu) + i''_\mu(\operatorname{sen}\omega_\mu \cos\omega'_\lambda - \cos\omega_\mu \operatorname{sen}\omega'_\lambda \cos\varepsilon_\nu),\\
i'_\mu &= i_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\mu + i'_\nu(\cos\omega_\nu \cos\omega'_\mu + \operatorname{sen}\omega_\nu \operatorname{sen}\omega'_\mu \cos\varepsilon_\lambda) + i''_\nu(\operatorname{sen}\omega_\nu \cos\omega'_\mu - \cos\omega_\nu \operatorname{sen}\omega'_\mu \cos\varepsilon_\lambda),\\
i'_\nu &= i_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega'_\nu + i'_\lambda(\cos\omega_\lambda \cos\omega'_\nu + \operatorname{sen}\omega_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\nu \cos\varepsilon_\mu) + i''_\lambda(\operatorname{sen}\omega_\lambda \cos\omega'_\nu - \cos\omega_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\nu \cos\varepsilon_\mu).
\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Facciamo in secondo luogo

$$i'_\lambda = \alpha i_\nu + \beta i'_\nu + \gamma i''_\nu,$$

ove α, β, γ sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando per i_ν e prendendo la somma $\sum$, si ottiene, in causa delle (31),

$$\alpha = -\frac{\operatorname{sen}\omega_\lambda}{\operatorname{sen}\eta_\lambda} \sum I_\nu i_\nu = -\frac{\operatorname{sen}\omega_\lambda}{\operatorname{sen}\eta_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\nu} \sqrt{\Delta} = -\operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega_\lambda.$$

Moltiplicando per i_λ e facendo l'operazione $\sum$, si trova

$$\alpha\cos\varepsilon_\mu + \beta\operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega'_\nu - \gamma\operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\omega'_\nu = 0,$$

ovvero

$$\beta\operatorname{sen}\omega'_\nu - \gamma\cos\omega'_\nu = \cos\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega_\lambda.$$

Moltiplicando per I_μ e prendendo ancora la somma $\sum$, risulta, in causa delle (29),

$$\beta\cos\omega'_\nu + \gamma\operatorname{sen}\omega'_\nu = \cos\omega_\lambda.$$

Seguono

$$\beta = \cos\omega_\lambda \cos\omega'_\nu + \operatorname{sen}\omega_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\nu \cos\varepsilon_\mu,$$

$$\gamma = \cos\omega_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\nu - \operatorname{sen}\omega_\lambda \cos\omega'_\nu \cos\varepsilon_\mu.$$

Quindi sussisterà la prima delle

$$\left.\begin{aligned} i'_\lambda &= -i_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega_\lambda + i'_\nu(\cos\omega_\lambda\cos\omega'_\nu + \operatorname{sen}\omega_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\nu\cos\varepsilon_\mu) + i''_\nu(\cos\omega_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\nu - \operatorname{sen}\omega_\lambda\cos\omega'_\nu\cos\varepsilon_\mu),\\ i'_\mu &= -i_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\omega_\mu + i'_\lambda(\cos\omega_\mu\cos\omega'_\lambda + \operatorname{sen}\omega_\mu\operatorname{sen}\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu) + i''_\lambda(\cos\omega_\mu\operatorname{sen}\omega'_\lambda - \operatorname{sen}\omega_\mu\cos\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu),\\ i'_\nu &= -i_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega_\nu + i'_\mu(\cos\omega_\nu\cos\omega'_\mu + \operatorname{sen}\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda) + i''_\mu(\cos\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu - \operatorname{sen}\omega_\nu\cos\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda). \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

6.

Finalmente, esprimiamo i''_λ in funzione lineare sì delle i_μ, i'_μ, i''_μ che delle i_ν, i'_ν, i''_ν.

Poniamo in primo luogo

$$i''_\lambda = a i_\mu + b i'_\mu + c i''_\mu,$$

ove a, b, c sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando per i_μ e facendo l'operazione $\sum$, si trova, in causa delle (31),

$$a = -\frac{\cos\omega'_\lambda}{\operatorname{sen}\eta_\lambda}\sum I_\mu i_\mu = -\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\omega'_\lambda.$$

Moltiplicando per i_λ e prendendo la somma $\sum$, risulta

$$a\cos\varepsilon_\nu - b\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\omega_\mu + c\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\omega_\mu = 0,$$

oppure

$$b\operatorname{sen}\omega_\mu - c\cos\omega_\mu = -\cos\varepsilon_\nu\cos\omega'_\lambda.$$

Moltiplicando per I_ν e prendendo la somma $\sum$, s'ottiene, in causa delle (29),

$$b\cos\omega_\mu + c\operatorname{sen}\omega_\mu = \operatorname{sen}\omega'_\lambda.$$

Seguono

$$b = \cos\omega_\mu\operatorname{sen}\omega'_\lambda - \operatorname{sen}\omega_\mu\cos\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu,$$

$$c = \operatorname{sen}\omega_\mu\operatorname{sen}\omega'_\lambda + \cos\omega_\mu\cos\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu.$$

Dunque sussisterà la prima delle

$$\left.\begin{aligned} i''_\lambda &= -i_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\omega'_\lambda + i'_\mu(\cos\omega_\mu\operatorname{sen}\omega'_\lambda - \operatorname{sen}\omega_\mu\cos\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu) + i''_\mu(\operatorname{sen}\omega_\mu\operatorname{sen}\omega'_\lambda + \cos\omega_\mu\cos\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu),\\ i''_\mu &= -i_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega'_\mu + i'_\nu(\cos\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu - \operatorname{sen}\omega_\nu\cos\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda) + i''_\nu(\operatorname{sen}\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu + \cos\omega_\nu\cos\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda),\\ i''_\nu &= -i_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\omega'_\nu + i'_\lambda(\cos\omega_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\nu - \operatorname{sen}\omega_\lambda\cos\omega'_\nu\cos\varepsilon_\mu) + i''_\lambda(\operatorname{sen}\omega_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\nu + \cos\omega_\lambda\cos\omega'_\nu\cos\varepsilon_\mu). \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Facciamo in secondo luogo

$$i''_\lambda = \alpha i_\nu + \beta i'_\nu + \gamma i''_\nu ,$$

ove α, β, γ sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando per i_ν e prendendo la somma $\sum$, risulta

$$\alpha = \frac{\cos\omega_\lambda}{\operatorname{sen}\eta_\lambda} \sum I_\nu i_\nu = \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\omega_\lambda .$$

Moltiplicando per i_λ e facendo l'operazione $\sum$, si trova

$$\alpha \cos\varepsilon_\mu + \beta \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega'_\nu - \gamma \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\omega'_\nu = 0 ,$$

oppure

$$\beta \operatorname{sen}\omega'_\nu - \gamma \cos\omega'_\nu = - \cos\varepsilon_\mu \cos\omega_\lambda .$$

Moltiplicando per I_μ e prendendo la somma $\sum$ si trova

$$\beta \cos\omega'_\nu + \gamma \operatorname{sen}\omega'_\nu = \operatorname{sen}\omega_\lambda .$$

Seguono

$$\beta = \operatorname{sen}\omega_\lambda \cos\omega'_\nu - \cos\omega_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\nu \cos\varepsilon_\mu ,$$
$$\gamma = \operatorname{sen}\omega_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\nu + \cos\omega_\lambda \cos\omega'_\nu \cos\varepsilon_\mu .$$

Quindi sussisterà la prima delle seguenti

$$\left.\begin{aligned}
i''_\lambda &= i_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\omega_\lambda + i'_\nu(\operatorname{sen}\omega_\lambda \cos\omega'_\nu - \cos\omega_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\nu \cos\varepsilon_\mu) + i''_\nu(\operatorname{sen}\omega_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\nu + \cos\omega_\lambda \cos\omega'_\nu \cos\varepsilon_\mu),\\
i''_\mu &= i_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \cos\omega_\mu + i'_\lambda(\operatorname{sen}\omega_\mu \cos\omega'_\lambda - \cos\omega_\mu \operatorname{sen}\omega'_\lambda \cos\varepsilon_\nu) + i''_\lambda(\operatorname{sen}\omega_\mu \operatorname{sen}\omega'_\lambda + \cos\omega_\mu \cos\omega'_\lambda \cos\varepsilon_\nu),\\
i''_\nu &= i_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos\omega_\nu + i'_\mu(\operatorname{sen}\omega_\nu \cos\omega'_\mu - \cos\omega_\nu \operatorname{sen}\omega'_\mu \cos\varepsilon_\lambda) + i''_\mu(\operatorname{sen}\omega_\nu \operatorname{sen}\omega'_\mu + \cos\omega_\nu \cos\omega'_\mu \cos\varepsilon_\lambda).
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Le relazioni lineari (25), (27), (30), (31), (33), (34), (35), (36), (37), (38) sono quelle che si volevano stabilire.

PARTE SECONDA.

In questa seconda parte considero uno solo de' tre sistemi di superficie, e propriamente il sistema (λ); e quindi adopero formole composte di sole quantità relative ad una superficie qualunque di quel sistema. Però ciascuna formola ottenuta potrà essere considerata come rappresentativa di tre diverse, le due ultime delle quali si deducono da quella scritta col mezzo delle due solite permutazioni. Ora, ponendo per brevità

$$m'\cos\omega'_\mu = \alpha_\mu,\quad m'\operatorname{sen}\omega'_\mu = \beta_\mu,\quad m'' - \frac{\partial\omega'_\mu}{\partial_\mu} = \gamma_\mu,$$

$$n'\cos\omega_\nu = a_\nu,\quad n'\operatorname{sen}\omega_\nu = b_\nu,\quad n'' - \frac{\partial\omega_\nu}{\partial_\nu} = c_\nu,$$

mi propongo di stabilire le equazioni che legano tra loro le nove quantità $m, n, \varepsilon_\lambda, \alpha_\mu, \beta_\mu, \gamma_\mu, a_\nu, b_\nu, c_\nu$. Esse equazioni risultano in numero di sei, una delle quali finita, quattro alle derivate parziali del prim'ordine, prese rispetto alle μ, ν, ed una alle derivate parziali del second'ordine. Le stesse, mediante l'eliminazione delle β_μ, b_ν, si riducono facilmente a quattro, una delle quali finita, due alle derivate parziali del prim'ordine ed una alle derivate parziali del second'ordine.

1.

Cominciamo dallo stabilire l'equazione finita e due tra le equazioni alle derivate parziali del prim' ordine.

A tal fine prendiamo la derivata della seconda (33) rispetto a ν e quella della terza (34) rispetto a μ; avuto riguardo alle (28), troveremo

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial i_\mu}{\partial\nu} =\ & i_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(b_\nu - \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\right) + i'_\nu\left(-\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\operatorname{sen}\omega_\nu + n'\cos\varepsilon_\lambda + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega_\nu\right)\\
&+ i''_\nu\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\cos\omega_\nu + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\right),\\
\frac{\partial i_\nu}{\partial\mu} =\ & -i_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(\beta_\mu + \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right) + i'_\mu\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\operatorname{sen}\omega'_\mu + m'\cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega'_\mu\right)\\
&- i''_\mu\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\cos\omega'_\mu + \gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\mu\right).
\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

Ne deduciamo, in causa delle (29), dapprima

$$\begin{aligned}
\Sigma I_\lambda\frac{\partial i_\mu}{\partial\nu} = & \cos\omega_\nu\left(-\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\operatorname{sen}\omega_\nu + n'\cos\varepsilon_\lambda + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega_\nu\right)\\
&+ \operatorname{sen}\omega_\nu\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\cos\omega_\nu + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\right),
\end{aligned}$$

ovvero

$$\sum I_\lambda \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu} = a_\nu \cos\varepsilon_\lambda + c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda; \tag{40}$$

dipoi

$$\sum I_\lambda \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu} = \cos\omega'_\mu \left(\frac{\partial \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \operatorname{sen}\omega'_\mu + m' \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos\omega'_\mu \right)$$
$$- \operatorname{sen}\omega'_\mu \left(\frac{\partial \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \cos\omega'_\mu + \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\mu \right),$$

ovvero

$$\sum I_\lambda \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu} = \alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda. \tag{41}$$

Ora, moltiplicando la seconda (12) per I_λ e prendendo sul prodotto la somma $\sum$, risulta

$$m \sum I_\lambda \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu} = n \sum I_\lambda \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu}.$$

Avremo quindi, mediante la sostituzione de' valori trovati per le $\sum I_\lambda \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu}$, $\sum I_\lambda \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu}$, la seguente equazione finita

$$m(a_\nu \cos\varepsilon_\lambda + c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) = n(\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda). \tag{42}$$

Deduciamo altresì dalle (39) le due

$$\sum i_\nu \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu} = \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \left(b_\nu - \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} \right), \qquad \sum i_\mu \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu} = - \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \left(\beta_\mu + \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \right). \tag{43}$$

Eguagliando questi valori delle $\sum i_\nu \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu}$, $\sum i_\mu \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu}$ a quelli somministrati dalle due prime (14), si concludono le due seguenti equazioni alle derivate parziali del prim' ordine

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial . m \cos\varepsilon_\lambda}{\partial \nu} + m b_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda &= \frac{\partial n}{\partial \mu}, \\ \frac{\partial . n \cos\varepsilon_\lambda}{\partial \mu} - n \beta_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda &= \frac{\partial m}{\partial \nu}, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

2.

Passiamo ora a stabilire le due altre equazioni alle derivate parziali del primo ordine.

A tal fine, formeremo dapprima i valori delle $\frac{\partial I_\lambda}{\partial \mu}$, $\frac{\partial I_\lambda}{\partial \nu}$. La prima (30) somministra, avuto riguardo alle (28),

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial \mu} = -(i'_\mu \operatorname{sen}\omega'_\mu - i''_\mu \cos\omega'_\mu)\frac{\partial \omega'_\mu}{\partial \mu} - (m' i_\mu + m'' i''_\mu)\cos\omega'_\mu + m'' i'_\mu \operatorname{sen}\omega'_\mu,$$

ovvero, in causa della terza (34),

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial \mu} = \gamma_\mu \frac{i_\nu - i_\mu \cos\varepsilon_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - i_\mu \alpha_\mu,$$

la quale può scriversi

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial \mu} = -i_\mu(\alpha_\mu + \gamma_\mu \cot\varepsilon_\lambda) + i_\nu \frac{\gamma_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}. \tag{45}$$

La seconda (30) alla sua volta somministra

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial \nu} = -(i'_\nu \operatorname{sen}\omega_\nu - i''_\nu \cos\omega_\nu)\frac{\partial \omega_\nu}{\partial \nu} - (n' i_\nu + n'' i''_\nu)\cos\omega_\nu + n'' i'_\nu \operatorname{sen}\omega_\nu,$$

ovvero, in causa della seconda (33),

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial \nu} = c_\nu \frac{i_\nu \cos\varepsilon_\lambda - i_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - i_\nu a_\nu,$$

la quale può scriversi

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial \nu} = -i_\nu(a_\nu - c_\nu \cot\varepsilon_\lambda) - i_\mu \frac{c_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}. \tag{46}$$

Prendiamo ora la derivata della (45) rispetto a ν e quella della (46) rispetto a μ, ed eguagliamo i due valori di $\frac{\partial^2 I_\lambda}{\partial \mu \partial \nu}$; risulterà

$$\left.\begin{aligned} &-i_\mu \frac{\partial}{\partial \nu}(\alpha_\mu + \gamma_\mu \cot\varepsilon_\lambda) + i_\nu \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{\gamma_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - (\alpha_\mu + \gamma_\mu \cot\varepsilon_\lambda)\frac{\partial i_\mu}{\partial \nu} + n' i'_\nu \frac{\gamma_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} = \\ &-i_\nu \frac{\partial}{\partial \mu}(a_\nu - c_\nu \cot\varepsilon_\lambda) - i_\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\frac{c_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - (a_\nu - c_\nu \cot\varepsilon_\lambda)\frac{\partial i_\nu}{\partial \mu} - m' i'_\mu \frac{c_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Moltiplichiamo questa equazione dapprima per i_μ, dipoi per i_ν, e facciamo ad ogni volta l'operazione $\sum$ sul prodotto. Osservando che sono, in causa della seconda (33) e della terza (34),

$$\sum i_\mu i'_\nu = -\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega_\nu, \quad \sum i_\nu i'_\mu = \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\mu,$$

e rammentando le (43), si troveranno le due

$$-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(a_\mu + \gamma_\mu \cot\varepsilon_\lambda\right) + \cos\varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{\gamma_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - \gamma_\mu b_\nu =$$

$$-\cos\varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial\mu}(a_\nu - c_\nu \cot\varepsilon_\lambda) - \frac{\partial}{\partial\mu}\frac{c_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} + (a_\nu - c_\nu\cot\varepsilon_\lambda)\left(\beta_\mu + \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda,$$

$$-\cos\varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial\nu}(a_\mu + \gamma_\mu \cot\varepsilon_\lambda) + \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{\gamma_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - (a_\mu + \gamma_\mu\cot\varepsilon_\lambda)\left(b_\nu - \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\right)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda =$$

$$-\frac{\partial}{\partial\mu}(a_\nu - c_\nu\cot\varepsilon_\lambda) - \cos\varepsilon_\lambda\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{c_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - c_\nu\beta_\mu;$$

le quali equazioni si riducono alle due seguenti

$$\gamma_\mu\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - b_\nu\right) - \frac{\partial a_\mu}{\partial\nu} = -\frac{\partial c_\nu}{\partial\mu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - \frac{\partial a_\nu}{\partial\mu}\cos\varepsilon_\lambda + (a_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - c_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\left(\beta_\mu + \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right),$$

$$\frac{\partial\gamma_\mu}{\partial\nu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - \frac{\partial a_\mu}{\partial\nu}\cos\varepsilon_\lambda + (a_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda + \gamma_\mu\cos\varepsilon_\lambda)\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - b_\nu\right) = -c_\nu\left(\beta_\mu + \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right) - \frac{\partial a_\nu}{\partial\mu}.$$

Sottraendo dalla seconda di queste equazioni la prima moltiplicata per $\cos\varepsilon_\lambda$, s'ottiene

$$a_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - b_\nu\right) + \frac{\partial\gamma_\mu}{\partial\nu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda =$$

$$-(a_\nu\cos\varepsilon_\lambda + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu} + \beta_\mu\right) - \frac{\partial a_\nu}{\partial\mu}\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda + \frac{\partial c_\nu}{\partial\mu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\lambda,$$

ovvero

$$\frac{\partial(a_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - c_\nu\cos\varepsilon_\lambda)}{\partial\mu} + \beta_\mu(a_\nu\cos\varepsilon_\lambda + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) + a_\mu\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - b_\nu\right) + \frac{\partial\gamma_\mu}{\partial\nu} = 0. \quad (47)$$

Così, sottraendo dalla prima delle stesse equazioni la seconda moltiplicata per $\cos\varepsilon_\lambda$, si trova

$$-(\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - b_\nu\right) - \frac{\partial\alpha_\mu}{\partial\nu}\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda - \frac{\partial\gamma_\mu}{\partial\nu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\lambda =$$
$$a_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu} + \beta_\mu\right) - \frac{\partial c_\nu}{\partial\mu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda,$$

ovvero

$$\frac{\partial(\alpha_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda + \gamma_\mu \cos\varepsilon_\lambda)}{\partial\nu} - b_\nu(\alpha_\mu\cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) + a_\nu\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu} + \beta_\mu\right) - \frac{\partial c_\nu}{\partial\mu} = 0. \quad (48)$$

Le (47), (48) sono le due altre equazioni alle derivate parziali del primo ordine che si volevano costituire.

Notiamo che se si moltiplicasse (a) per I_λ e si prendesse sul prodotto la somma $\sum$, si giungerebbe dopo le riduzioni ad una identità. Siccome ciascuno de' quattro coseni rimanenti i'_μ, i''_μ, i'_ν, i''_ν può venire espresso in funzione lineare delle i_μ, i_ν, I_λ mediante le due prime (30), la seconda (33) e la terza (34), così se si moltiplicasse (a) per uno qualunque tra essi e si prendesse la somma $\sum$ sul prodotto, non si troverebbe alcun' altra equazione diversa dalle due (47), (48).

3.

Finalmente veniamo a stabilire l' equazione alle derivate parziali del second' ordine.

Perciò, prendiamo la derivata della prima (39) rispetto a μ, la derivata della quarta (28) rispetto a ν, ed eguagliamo i due valori di $\frac{\partial^2 i_\mu}{\partial\mu\,\partial\nu}$; risulterà

$$\left.\begin{aligned} & i_\nu\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(b_\nu - \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\right)\right\} + i'_\nu\frac{\partial}{\partial\mu}\left(-\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\operatorname{sen}\omega_\nu + n'\cos\varepsilon_\lambda + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega_\nu\right) \\ & \quad + i''_\nu\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\cos\omega_\nu + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\right) + \frac{\partial i_\nu}{\partial\mu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(b_\nu - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\nu}\right) \\ & \frac{\partial i'_\nu}{\partial\mu}\left(-\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\operatorname{sen}\omega_\nu + n'\cos\varepsilon_\lambda + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega_\nu\right) + \frac{\partial i''_\nu}{\partial\mu}\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\cos\omega_\nu + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\right) = \\ & \qquad i'_\mu\frac{\partial m'}{\partial\nu} + m'\frac{\partial i'_\mu}{\partial\nu}. \end{aligned}\right\} (a)$$

Moltiplichiamo questa equazione per i_ν e facciamo sul prodotto l'operazione $\sum$; avremo, avuto riguardo alla terza (34),

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(b_\nu-\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\right)\right\}+\left(-\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\operatorname{sen}\omega_\nu+n'\cos\varepsilon_\lambda+c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega_\nu\right)\sum i_\nu\frac{\partial i'_\nu}{\partial\mu}\\&+\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\cos\omega_\nu+c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\right)\sum i_\nu\frac{\partial i''_\nu}{\partial\mu}=\frac{\partial m'}{\partial\nu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\mu+m'\sum i_\nu\frac{\partial i'_\mu}{\partial\nu}\,.\end{aligned}\right\}\quad(b)$$

Ma si trova, in causa della seconda (39) e della terza (36),

$$\sum i_\nu\frac{\partial i'_\nu}{\partial\mu}=-\sum i'_\nu\frac{\partial i_\nu}{\partial\mu}=-\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\left(\beta_\mu+\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right)$$

$$-(\cos\omega_\nu\cos\omega'_\mu+\operatorname{sen}\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda)\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\operatorname{sen}\omega'_\mu+m'\cos\varepsilon_\lambda-\gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega'_\mu\right)$$

$$+(\cos\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu-\operatorname{sen}\omega_\nu\cos\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda)\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\cos\omega'_\mu+\gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\mu\right);$$

ovvero

$$\sum i_\nu\frac{\partial i'_\nu}{\partial\mu}=-\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\left(\beta_\mu+\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right)-(\cos\omega_\nu\cos\omega'_\mu+\operatorname{sen}\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda)m'\cos\varepsilon_\lambda$$

$$+\gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega_\nu-\cos^2\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\ ;$$

o anche

$$\sum i_\nu\frac{\partial i'_\nu}{\partial\mu}=-\operatorname{sen}\omega_\nu\left(\beta_\mu+\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right)-\cos\omega_\nu(\alpha_\mu\cos\varepsilon_\lambda-\gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda).\qquad(c)$$

Si trova pure, in causa della medesima seconda (39) e della terza (38),

$$\sum i_\nu\frac{\partial i''_\nu}{\partial\mu}=-\sum i''_\nu\frac{\partial i_\nu}{\partial\mu}=\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\cos\omega_\nu\left(\beta_\mu+\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right)$$

$$-(\operatorname{sen}\omega_\nu\cos\omega'_\mu-\cos\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda)\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\operatorname{sen}\omega'_\mu+m'\cos\varepsilon_\lambda-\gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega'_\mu\right)$$

$$+(\operatorname{sen}\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu+\cos\omega_\nu\cos\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda)\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\cos\omega'_\mu+\gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\mu\right);$$

o anche

$$\sum i_\nu \frac{\partial i''_\nu}{\partial\mu} = \mathrm{sen}^2\varepsilon_\lambda \cos\omega_\nu\left(\beta_\mu + \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right) - (\mathrm{sen}\omega_\nu \cos\omega'_\mu - \cos\omega_\nu \mathrm{sen}\omega'_\mu \cos\varepsilon_\lambda)\, m' \cos\varepsilon_\lambda$$
$$+ \gamma_\mu \mathrm{sen}\varepsilon_\lambda \mathrm{sen}\omega_\nu + \cos^2\varepsilon_\lambda \cos\omega_\nu \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu};$$

ovvero

$$\sum i_\nu \frac{\partial i''_\nu}{\partial\mu} = \cos\omega_\nu\left(\beta_\mu + \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right) - \mathrm{sen}\omega_\nu(\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \mathrm{sen}\varepsilon_\lambda). \qquad (d)$$

Da ultimo si trova, in causa della terza (34) e dalla settima (28),

$$\sum i_\nu \frac{\partial i'_\mu}{\partial\nu} = \sum \frac{\partial . i_\nu i'_\mu}{\partial\nu} - \sum i'_\mu \frac{\partial i_\nu}{\partial\nu} = \frac{\partial . \mathrm{sen}\varepsilon_\lambda \mathrm{sen}\omega'_\mu}{\partial\nu} - n' \sum i'_\mu i'_\nu;$$

oppure in causa della terza (36),

$$\sum i_\nu \frac{\partial i'_\mu}{\partial\nu} = \frac{\partial . \mathrm{sen}\varepsilon_\lambda \mathrm{sen}\omega'_\mu}{\partial\nu} - (a_\nu \cos\omega'_\mu + b_\nu \mathrm{sen}\omega'_\mu \cos\varepsilon_\lambda). \qquad (e)$$

Ora l'equazione (b), mediante la sostituzione de' valori somministrati dalle (c), (d), (e), diventa

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\mathrm{sen}\varepsilon_\lambda\left(b_\nu - \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\right)\right\}$$
$$+\left(\frac{\partial \mathrm{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\mathrm{sen}\omega_\nu - n'\cos\varepsilon_\lambda - c_\nu \mathrm{sen}\varepsilon_\lambda \cos\omega_\nu\right)\left\{\mathrm{sen}\omega_\nu\left(\beta_\mu + \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right) + \cos\omega_\nu(\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \mathrm{sen}\varepsilon_\lambda)\right\}$$
$$+\left(\frac{\partial \mathrm{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\cos\omega_\nu + c_\nu \mathrm{sen}\varepsilon_\lambda \mathrm{sen}\omega_\nu\right)\left\{\cos\omega_\nu\left(\beta_\mu + \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right) - \mathrm{sen}\omega_\nu(\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \mathrm{sen}\varepsilon_\lambda)\right\} =$$
$$\frac{\partial . \beta_\mu \mathrm{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - \alpha_\mu a_\nu - \beta_\mu b_\nu \cos\varepsilon_\lambda;$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\mathrm{sen}\varepsilon_\lambda\left(b_\nu - \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\right)\right\} + \left(\beta_\mu + \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right)\cos\varepsilon_\lambda \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - b_\nu \cos\varepsilon_\lambda\left(\beta_\mu + \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right)$$
$$-(\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \mathrm{sen}\varepsilon_\lambda)(a_\nu \cos\varepsilon_\lambda + c_\nu \mathrm{sen}\varepsilon_\lambda) = \frac{\partial . \beta_\mu \mathrm{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - \alpha_\mu a_\nu - \beta_\mu b_\nu \cos\varepsilon_\lambda;$$

o anche

$$\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(b_\nu - \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - (\alpha_\mu\cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda)(a_\nu\cos\varepsilon_\lambda + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda)\right\} =$$

$$\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \frac{\partial\beta_\mu}{\partial\nu} - \alpha_\mu a_\nu ;$$

o finalmente

$$\frac{\partial b_\nu}{\partial\mu} - \frac{\partial\beta_\mu}{\partial\nu} - \frac{\partial^2\varepsilon_\lambda}{\partial\mu\partial\nu} + (\alpha_\mu a_\nu + \gamma_\mu c_\nu)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - (\alpha_\mu c_\nu - a_\nu\gamma_\mu)\cos\varepsilon_\lambda = 0, \qquad (49)$$

la quale è l'equazione alle derivate parziali del second' ordine che si trattava di costituire.

Notiamo che se si moltiplicasse (a) per i'_ν o per i''_ν, e si prendesse sul prodotto la somma $\sum$, si troverebbe in ambi i casi una combinazione delle (47), (48), (49). Perciò, se si moltiplicasse (a) per uno qualunque de' quattro coseni rimanenti i_μ, i'_μ, i''_μ, I_λ, i quali mediante le formole della parte prima possono esprimersi in funzioni lineari delle i_ν, i'_ν, i''_ν, e si prendesse la somma $\sum$ sul prodotto, non si giungerebbe a verun' altra equazione diversa da quelle già ottenute. Notiamo altresì che, se invece di eguagliare i due valori di $\frac{\partial^2 i_\mu}{\partial\mu\partial\nu}$, si fossero eguagliati i due valori di $\frac{\partial^2 i_\nu}{\partial\mu\partial\nu}$ formati col prendere la derivata della seconda (39) rispetto a ν e la derivata della settima (28) rispetto a μ, si sarebbe costituita un'equazione analoga alla (a), la quale moltiplicata per uno qualunque de' sette coseni i_μ, i'_μ, i''_μ, i_ν, i'_ν, i''_ν, I_λ e sottoposta all'operazione $\sum$ non avrebbe condotto a verun'altra equazione novella.

4.

Abbiamo dunque, tra le nove quantità m, n, ε_λ, α_μ, β_μ, γ_μ, a_ν, b_ν, c_ν, sei equazioni, cioè la (42), le due (44) e le (47), (48), (49). È chiaro poi che se mediante le due (44) si eliminassero le β_μ, b_ν, queste sei equazioni si ridurrebbero facilmente a sole quattro, una delle quali finita, due alle derivate parziali del prim'ordine ed una alle derivate parziali del second'ordine.

Nel caso in cui le (λ, μ), (ν, λ) costituiscono due sistemi di linee ortogonali, la (42) e le due (44) diventano

$$mc_\nu + n\gamma_\mu = 0, \quad mb_\nu = \frac{\partial n}{\partial \mu}, \quad n\beta_\mu = -\frac{\partial m}{\partial \nu}, \tag{50}$$

le quali sono equazioni conosciute. In seguito, le (47), (48), (49) si riducono alle seguenti

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \gamma_\mu}{\partial \nu} + \frac{\partial a_\nu}{\partial \mu} + \beta_\mu c_\nu - \alpha_\mu b_\nu = 0, \\ &\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial \nu} - \frac{\partial c_\nu}{\partial \mu} + \beta_\mu a_\nu + \gamma_\mu b_\nu = 0, \\ &\frac{\partial \beta_\mu}{\partial \nu} - \frac{\partial b_\nu}{\partial \mu} - \alpha_\mu a_\nu - \gamma_\mu c_\nu = 0; \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

le quali sono le equazioni di cui ho fatto uso per trattare la questione sulle superficie applicabili posta al concorso dall'Accademia delle scienze di Parigi nel 1860. Si vedano, pel lato storico della questione, i *Comptes rendus de l'Académie des sciences* del primo semestre 1861; oppure il *Rapport sur les progrès les plus récents de l'analyse mathématique en France,* compilato dal sig. Bertrand e stampato a Parigi nel 1867, sotto gli auspicii del ministero dell'istruzione pubblica. Tornando alle (51), il signor Ossian Bonnet ebbe la cortesia di pubblicarle, dandone in pari tempo una dimostrazione geometrica molto semplice, al principio della sua *Note sur la théorie de la déformation des surfaces gauches*, inserita nei *Comptes rendus* del 16 novembre 1863. Una dimostrazione analitica diretta e piuttosto breve delle medesime equazioni s'ottiene seguendo la stessa via percorsa affine di stabilire le equazioni del caso generale, col riguardo solo di porre in ogni formola $\varepsilon_\lambda = \frac{1}{2}\pi$.

Pavia, 4 maggio 1868.