Sur la rectification de quelques courbes.

(*par le D.r J. Booth, F. R. S., London*).

I. *Rectification de la courbe inverse de l'ellipse centrale.*

Ce problème mérite d'être discuté à cause de l'élégance remarquable de sa solution, qui dépend de l'évaluation d'une intégrale elliptique de troisième espèce à paramètre *circulaire.*

On dit que deux courbes sont *inverses* l'une de l'autre lorsque le produit de leurs rayons vecteurs superposés est constant, c'est-à-dire que:

$$Rr = c^2.$$

Soit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

l'équation de l'ellipse, le centre étant au pôle, et soit $Rr = kab$: on aura, pour la courbe inverse, l'équation:

$$k^2(a^2y^2 + b^2x^2) = (x^2 + y^2)^2.$$

On peut simplifier la discussion, sans restreindre la généralité, en prenant $k = 1$. L'équation de la courbe inverse à l'ellipse, le centre étant au pôle, est alors:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = (x^2 + y^2)^2. \tag{1}$$

Si l'on pose:

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi, \tag{2}$$

cette équation devient:

$$a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi = r^2, \tag{3}$$

d'où l'on tire, après quelques réductions simples,

$$\frac{ds^2}{d\varphi^2} = \frac{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}. \tag{4}$$

La substitution:

$$a^2 \tan \phi = b^2 \tan \lambda, \tag{5}$$

change cette formule en la suivante:

$$\frac{ds^2}{d\varphi^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2\lambda + b^2 \sin^2\lambda}, \tag{6}$$

et puisque on en tire aussi:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\lambda}, \text{ de même que } \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\lambda} = \frac{a^4}{a^4\cos^2\lambda + b^4\sin^2\lambda}, \tag{7}$$

substituant et simplifiant on obtient:

$$\frac{ds}{d\lambda} = \frac{a^3 b^3}{(a^4\cos^2\lambda + b^4\sin^2\lambda)\sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda}},$$

ou:

$$\frac{ds}{d\lambda} = \frac{b^3}{a^2}\,\frac{1}{\left[1 - \left(\frac{a^4 - b^4}{a^4}\right)\sin^2\lambda\right]\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)\sin^2\lambda}}. \tag{8}$$

Faisant:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = c^2 \quad \text{et} \quad \frac{a^4 - b^4}{a^4} = m, \tag{9}$$

on a:

$$m = \frac{a^2 + b^2}{a^2}\,c^2, \quad m > c^2,$$

et par suite, intégrant:

$$s = \frac{b^3}{a^2}\int \frac{d\lambda}{[1 - m\sin^2\lambda]\sqrt{1 - c^2\sin^2\lambda}}, \tag{10}$$

intégrale elliptique de troisième espèce à paramètre circulaire, car $m > c^2$.

Imaginons le cylindre droit dont la base est l'ellipse aux demi-axes a et b, et la sphère décrite du centre avec un rayon $= \sqrt{a^2 + b^2}$. Cette sphère coupe le cylindre suivant une ellipse sphérique.

Soient α et β les demi-angles principaux de cette ellypse sphérique, alors:

$$\sin^2\alpha = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad \sin^2\beta = \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \quad \tan^2\alpha = \frac{a^2}{b^2}, \quad \tan^2\beta = \frac{b^2}{a^2}. \tag{11}$$

D'ici on tire:

$$\frac{a^4 - b^4}{a^4} = \frac{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}{\tan^2\alpha}, \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha},$$

et:

$$\frac{b^3}{a^2} = \sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\sin\beta.$$

Effectuant ces substitutions dans l'équation (8) il vient:

$$\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\sin\beta\int\frac{d\lambda}{\left[1-\left(\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{\tan^2\alpha}\right)\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\left(\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\lambda}}. \tag{12}$$

Or dans les *Philosophical Transactions* pour 1852, *Part* II, p. 319, j'ai montré que l'expression d'un arc de l'ellipse sphérique qui résulte de l'intersection d'un cône aux demi-angles α et β avec une sphère concentrique est donnée par la formule:

$$\sigma = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\sin\beta\int\frac{d\varphi}{\left[1-\left(\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{\tan^2\alpha}\right)\sin^2\phi\right]\sqrt{1-\left(\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\phi}}. \tag{13}$$

Soit e l'excentricité de la base plane du cône, savoir $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$, 2ε l'angle des deux *lignes focales*, et 2η l'angle des deux *axes cycliques*, c'est-à-dire des deux droites normales aux sections circulaires du cône; d'après le même Mémoire on aura:

$$e^2 = \frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{\tan^2\alpha}, \qquad \sin^2\eta = \frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}, \tag{14}$$

et:

$$\tan^2\varepsilon = \frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha},$$

et la précédente expression de l'arc de l'ellipse sphérique deviendra:

$$\sigma = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\sin\beta\int\frac{d\varphi}{[1-e^2\sin^2\varphi]\sqrt{1-\sin^2\eta.\sin^2\varphi}}. \tag{15}$$

Désignant par m et n deux paramètres conjugués, on a:

$$(1-m)(1+n) = 1-c^2, \tag{16}$$

ainsi qu'on peut le voir dans tout ouvrage élémentaire sur les intégrales elliptiques; donc si l'on fait $m=e^2$ et $c^2=\sin^2\eta$, on a $n = \frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha}$ ou:

$$n = \tan^2\varepsilon.$$

Les trois quantités: e excentricité de la base du cône, 2ε angle des lignes focales et 2η angle des lignes cycliques, sont liées par l'équation simple:

$$1-e^2=\cos^2\eta.\cos^2\varepsilon. \tag{17}$$

Le coefficient de l'intégrale (12), c'est-à-dire $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\sin\beta$, est ce qu'on nomme quelquefois le *criterium de circularité*, car:

$$\frac{\tan^2\beta}{\tan^2\alpha}\sin^2\beta=(1-m)\left(1-\frac{c^2}{m}\right);$$

par suite on peut écrire:

$$\sigma=\sqrt{(1-m)\left(1-\frac{c^2}{m}\right)}\int\frac{d\varphi}{[1-m\sin^2\varphi]\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}. \tag{15*}$$

Notre conique sphérique a ses arcs principaux supplémentaires, car puisque $\tan\alpha=\frac{a}{b}$, $\tan\beta=\frac{b}{a}$, on a $\tan\alpha.\tan\beta=1$ d'où $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Elle est égale à sa réciproque tournée d'un angle droit. Les axes focaux de l'une sont les axes cycliques de l'autre: par conséquent la rectification de l'une dépend de la quadrature de l'autre, ainsi qu'on peut le voir dans le Mémoire cité ci-dessus.

II. *De la rectification de la courbe représentée par l'équation:*

$$a^2x^2-b^2y^2=(x^2+y^2)^2 \tag{18}$$

Posant $x=r\sin\phi$, $y=r\cos\phi$, il vient:

$$a^2\sin^2\phi-b^2\cos^2\phi=r^2, \tag{19}$$

d'où:

$$\frac{ds^2}{d\varphi^2}=\frac{a^4\sin^2\varphi+b^4\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi-b^2\cos^2\varphi}. \tag{20}$$

Prenant:

$$a^2\tan^2\phi=b^2\sec^2\lambda, \tag{21}$$

et faisant les substitutions nécessaires, on trouvera:

$$\frac{ds}{d\lambda}=\frac{ab\sqrt{a^2+b^2\cos^2\lambda}}{b^2+a^2\cos^2\lambda}, \tag{22}$$

ou:

$$\frac{ds}{d\lambda}=\frac{ab[a^2+b^2-b^2\sin^2\lambda]}{[a^2+b^2-a^2\sin^2\lambda]\sqrt{a^2+b^2-b^2\sin^2\lambda}}, \tag{23}$$

ou encore:

$$\frac{ds}{d\lambda}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\left[1-\frac{b^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda\right]}{\left[1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda}}, \tag{24}$$

ou enfin:

$$\frac{ds}{d\lambda}=\frac{b^3}{a\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\left[\frac{a^2}{b^2}-1+1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda\right]}{\left[1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda}}. \tag{25}$$

En faisant:

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}=m, \qquad \frac{b^2}{a^2+b^2}=c^2, \tag{26}$$

la dernière équation devient:

$$\frac{ds}{d\lambda}=\frac{b(a^2-b^2)}{a\sqrt{a^2+b^2}}\,\frac{1}{[1-m\sin^2\lambda]\sqrt{1-c^2\sin^2\lambda}}+\frac{b^3}{a\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-c^2\sin^2\lambda}},$$

ou, intégrant:

$$s=\frac{b}{a}\,\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{d\lambda}{[1-m\sin^2\lambda]\sqrt{1-c^2\sin^2\lambda}}+\frac{b^3}{a\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{d\lambda}{\sqrt{1-c^2\sin^2\lambda}}. \tag{27}$$

Si la courbe est la lemniscate, on a $a=b$, et cette expression devient:

$$s=\frac{a}{\sqrt{2}}\int\frac{d\lambda}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\lambda}}. \tag{28}$$

III. *De la rectification de la courbe d'intersection d'un cylindre hyperbolique avec une sphère concentrique.*

L'axe du cylindre hyperbolique soit dirigé suivant l'axe des y, et soient:

$$\frac{z^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1, \qquad x^2+y^2+z^2=r^2, \tag{29}$$

les équations du cylindre et de la sphère concentrique. Donc:

$$a^2x^2=b^2z^2-a^2b^2, \quad a^2y^2=a^2(b^2+r^2)-(a^2+b^2)z^2. \tag{30}$$

Posant:

$$z^2 = a^2 \cos^2\phi + a^2 \frac{b^2+r^2}{a^2+b^2} \sin^2\phi\,, \tag{31}$$

il vient:

$$x^2 = \frac{b^2(r^2-a^2)}{a^2+b^2} \sin^2\phi\,, \quad y^2 = (r^2-a^2)\cos^2\phi\,, \tag{32}$$

d'où:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx^2}{d\varphi^2} = \frac{b^2(r^2-a^2)}{a^2+b^2}\cos^2\phi\,, \quad \frac{dy^2}{d\varphi^2} = (r^2-a^2)\sin^2\phi \\ &\text{et} \\ &\frac{dz^2}{d\varphi^2} = \frac{a^2(r^2-a^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(a^2+b^2)[(a^2+b^2)\cos^2\varphi+(b^2+r^2)\sin^2\varphi]}\,. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

On en conclut:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\frac{b^2+r^2\sin^2\varphi}{(a^2+b^2)+(r^2-a^2)\sin^2\varphi}}\,. \tag{34}$$

La substitution:

$$\tan^2\phi = \frac{b^2}{b^2+r^2}\tan^2\lambda \tag{35}$$

et l'intégration subséquente donnent:

$$s = \frac{b^2\sqrt{r^2-a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+r^2}}\int \frac{d\lambda}{\left[1-\frac{r^2}{b^2+r^2}\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda}}\,. \tag{36}$$

Maintenant si l'on fait:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{r^2}{b^2+r^2} = \frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{\tan^2\alpha}\,, \\ &\text{et} \\ &\frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}\,, \end{aligned}\right\} \tag{36*}$$

α et β étant les demi-angles de la ligne d'intersection du cylindre hyperbolique avec la sphère, on aura:

$$\frac{s}{r} - \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\sin\beta\int\frac{d\lambda}{\left[1-\left(\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{\tan^2\alpha}\right)\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\left(\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\lambda}}\,, \tag{37}$$

ce qui est l'expression de l'arc de conique sphérique dont 2α et 2β sont les arcs principaux. Voyez les *Phil. Trans.*, même Mémoire, p. 319.

De (36) on tire:

$$\cos^2\alpha = \frac{a^2}{r^2}, \qquad \cos^2\beta = \frac{a^2(b^2+r^2)}{r^2(a^2+b^2)}. \tag{38}$$

Or dans le même Mémoire, pp. 316, 317, j'ai démontré que si 2ε est l'angle des lignes *focales* du cône, 2η l'angle des sections *circulaires,* et e l'excentricité de la section plane normale à l'axe du cône, on a:

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}, \quad \cos\eta = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad \text{et} \quad e^2 = \frac{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}{\tan^2\alpha}. \tag{39}$$

Faisant ces substitutions dans (37) on obtient ce résultat:

$$\frac{s}{r} = \sigma = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\sin\beta \int \frac{d\lambda}{[1-e^2\sin^2\lambda]\sqrt{1-\sin^2\eta\cdot\sin^2\lambda}}, \tag{40}$$

dont la forme est la plus simple à laquelle l'intégrale elliptique de troisième espèce à paramètre circulaire puisse être ramenée: σ est l'arc de la courbe semblable au rayon 1.

Comme on a:

$$\sin^2\eta = \frac{a^2}{a^2+b^2},$$

valeur indépendante de r, nous pouvons dire que si des sphères concentriques en nombre quelconque coupent un même cylindre hyperbolique, les cônes qui passent par les différentes courbes d'intersection ont toutes leurs sections circulaires parallèles entr'elles.

Soit ν l'angle que les plans asymptotiques du cylindre hyperbolique font avec le plan des xy. On aura:

$$\tan\nu = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \sin^2\nu = \frac{a^2}{a^2+b^2},$$

d'où $\nu = \eta$ C'est-à-dire que: les sections circulaires du cône sont parallèles aux plans asymptotiques du cylindre hyperbolique.

IV. Au lieu de regarder le rayon de la sphère (29) comme une quantité arbitraire, prenons:

$$r^2 = a^2 + a\sqrt{a^2+b^2}, \quad \text{et} \quad j = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{\sqrt{a^2+b^2}+a}. \tag{41}$$

Effectuant les réductions et les substitutions nécessaires dans (36), on obtient:

$$\frac{s}{r} = \sigma = \frac{2j}{1+j}\int\frac{d\lambda}{\left[1-\left(\frac{1-j}{1+j}\right)\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^2\sin^2\lambda}}. \tag{42}$$

Or comme dans ce cas particulier le paramètre est égal à la racine carrée du module, savoir $m = c$, on sait que l'intégrale elliptique peut être ramenée à celle de la première espèce, et la courbe rentre dans cette espèce particulière de coniques sphériques que j'ai nommée *parabole sphérique*, dans le Mémoire cité plusieurs fois. À la page 332 j'ai montré que:

$$\sigma = \frac{2j}{i+j}\int\frac{d\lambda}{\left[1-\left(\frac{1-j}{1+j}\right)\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^2\sin^2\lambda}}. \tag{43}$$

et:

$$\sigma = j\int\frac{d\mu}{\sqrt{1-i^2\sin^2\mu}} + \tan^{-1}\left[\frac{j\tan\mu}{\sqrt{1-i^2\sin^2\mu}}\right], \tag{44}$$

étant:

$$i^2+j^2=1, \quad \text{et} \quad \tan(\lambda-\mu)=j\tan\mu. \tag{45}$$

Egalant les valeurs de σ on trouve:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2j}{1+j}\int\frac{d\lambda}{\left[1-\left(\frac{1-j}{1j}\right)\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^2\sin^2\lambda}},\\ &= j\int\frac{d\mu}{\sqrt{1-i^2\sin^2\mu}} + \tan^{-1}\left[\frac{j\tan\mu}{\sqrt{1-i^2\sin^2\mu}}\right].\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Cette rélation a déjà été établie par Lagrange à l'aide de considérations d'une nature purement analytique.