# Sui prodotti infiniti.

(*di* Ulisse Dini, *a Pisa*).

I prodotti di un numero infinito di fattori sono stati studiati da vari distinti Geometri, e su essi si sono trovati varii teoremi per poter giudicare della loro convergenza o divergenza. Però tutti questi teoremi generali sono relativi alla convergenza semplice dei prodotti infiniti, e, che io sappia, fin ora non è stata data una condizione necessaria e sufficiente affinchè un prodotto infinito abbia sempre uno stesso valore finito e determinato indipendentemente dall'ordine dei suoi fattori. In mancanza di una tale condizione, io mi sono posto alla ricerca di essa, e ora vengo ad esporre i risultati di questa ricerca, premettendo prima alcuni teoremi sulle serie.

## § 1.

Sia:

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

una serie reale, i cui termini sono in parte positivi e in parte negativi, e tendono a zero col crescere indefinitamente di $n$; vediamo che cosa accadrà quando in essa si cangia l'ordine dei termini in tutti i modi possibili.

Indichiamo perciò con $S_n$ la somma dei primi $n$ termini della serie (1), e supponiamo che:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m+\cdots \tag{2}$$

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m+\cdots \tag{3}$$

sieno le due serie dei termini positivi e dei valori assoluti dei termini negativi che compongono la serie (1). In $S_n$ entrerà un certo numero $m$ dei primi termini della serie (2), e un certo numero $m'$ dei primi termini della serie (3); quindi se si indicano con $\sigma_m$, $\sigma'_{m'}$ le somme rispettive di queste $m$ e $m'$ primi termini delle serie (2) e (3), si avrà:

$$S_n = \sigma_m - \sigma'_{m'}, \quad \text{e} \quad \lim S_n = (\sigma_m - \sigma'_{m'}).$$

Di qui si vede subito che quando le serie (2) e (3) siano entrambe convergenti la serie (1) sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini (Teor. di Dirichlet), e quando una sola delle serie (2) e (3) sia divergente, la serie (1) sarà divergente in qualunque ordine si prendano i suoi termini; quindi resta a considerarsi solo il caso in cui le serie (2) e (3) siano entrambe divergenti.

In questo caso ci proponiamo di mostrare che si potrà cangiare l'ordine dei termini nella serie (1) in modo che essa venga ad avere per somma una quantità qualunque data finita o infinita, o anche divenga indeterminata.

Indichiamo perciò con $h$ una quantità finita e positiva qualunque, e mostriamo subito come possano ordinarsi i termini della serie (1) in modo da ottenere, che la sua somma venga ad essere precisamente $h$. Per questo supponiamo che i termini della serie (2) a partire dal primo siano tutti minori di $h$; se questo non fosse, potremmo aggruppare con una legge qualunque un certo numero dei primi termini delle serie (2) e (3) sino a trovare che i termini seguenti della (2) soddisfacessero a questa condizione e che la somma algebrica dei termini così aggruppati, prendendo quelli della (2) col segno $+$ e quelli della (3) col segno $-$, fosse una quantità negativa $-k$; allora si considererebbero le serie (2) e (3) a partire da questi termini, e si cercherebbe di formare con queste due serie un' altra serie in cui le $\alpha_s$ fossero prese col segno $+$ e le $\beta_s$ col segno $-$, e la cui somma fosse $h+k$.

Ciò posto, osserviamo che, siccome le serie (2) e (3) sono divergenti, potremo prendere un numero finito $p_1$ di termini $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{p_1}$ della (1) tali che la loro somma differisca da $h+\beta_1$ di meno del termine seguente $\alpha_{p_1+1}$; poi si potranno prendere altri $p_2$ termini $\alpha_{p_1+1}, \alpha_{p_1+2}, \ldots \alpha_{p_1+p_2}$ tali che la somma $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{p_1}+\alpha_{p_1+1}+\cdots+\alpha_{p_1+p_2}$ differisca da $h+\beta_1+\beta_2$ a meno del termine seguente $\alpha_{p_1+p_2+1}$; ... in generale poi dopo il termine $\alpha_{p_1+p_2+\cdots p_{n-1}}$ si potranno prendere altri $p_n$ termini $\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1}$, $\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+2}, \ldots \alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+p_n}$ tali che la somma $\alpha_1+\alpha_2+ +\cdots+\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ non differisca da $h+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$ che a meno del termine seguente $\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n+1}$. Di questi numeri $p_1, p_2, \ldots p_n \ldots$ alcuni potranno essere anche zero perchè può essere, per esempio, che $\beta_s$ sia tanto piccolo che la somma $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{s-1}}$, che differisce da $h+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{s-1}$ a meno del termine $\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{s-1}+1}$, differisca anche da $h+\beta_1+\cdots+\beta_{s-1}+\beta_s$ a meno dello stesso termine; però la somma $p_1+p_2+\cdots+p_n$ dovrà crescere indefinitamente con $n$, poichè la quantità $h+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$ cresce pure indefinitamente con $n$.

Conseguentemente con questi gruppi successivi si potrà formare la serie:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1+\alpha_1+\cdots+\alpha_{p_1}-\beta_1+\alpha_{p_1+1}+\cdots+\alpha_{p_1+2}-\beta_2+\cdots\\ -\beta_{n-1}+\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1}+\cdots+\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n}-\beta_n+\cdots\end{array}\right\}\quad(3)$$

che non sarà che la (1) scritta in un ordine particolare, e in questa serie (siccome alcune delle $p$ possono essere nulle) anche i termini negativi potranno trovarvisi successivamente a gruppi. Però sì i gruppi dei termini positivi che quelli dei termini negativi tenderanno a zero col crescere indefinitamente di $n$, poichè l'aggiunta di un gruppo positivo, per esempio l'$n^0$, fa sì che la somma si aumenti soltanto di $\beta_n$ a meno del primo termine positivo seguente $\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n+1}$; e l'aggiunta del seguente gruppo negativo fa sì che la somma ottenuta si diminuisca della quantità di cui si era precedentemente aumentata a meno dello stesso primo termine positivo seguente.

Ciò posto se facciamo:

$$S'_n=\alpha_1+\cdots+\alpha_{p_1}-\beta_1+\cdots+\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n}-\beta_n,$$

si avrà:

$$h-\varepsilon<S'_n<h+\varepsilon,$$

essendo $\varepsilon$ una quantità che tende a zero; e quindi sarà:

$$\lim S'_n=h;$$

e di qui si concluderà che la serie (3) è convergente e ha per somma $h$, giacchè se arrestandoci a un gruppo di termini negativi si è avuto per limite della somma $h$, altrettanto accade arrestandosi a qualunque altro punto sì in un gruppo positivo che in un gruppo negativo, perchè, per quanto si è visto, questi gruppi e quindi anche le loro parti tendono a zero.

Così si vede intanto che i termini della serie (1) si possono ordinare in modo che la somma di essa si riduca alla quantità data $h$; ed anche si capisce che ciò potrà farsi in infiniti altri modi seguendo altre leggi per formare i successivi gruppi di termini delle serie (2) e (3), come, per esempio, seguendo ancora il motodo precedente, e prendendo invece di $h$ una funzione positiva e crescente di $n$, che col crescere di $n$ si avvicini indefinitamente alla quantità data $h$. In un modo analogo si proverebbe che si possono dare ai termini della serie (1) tali ordinamenti, che la sua somma divenga una quantità negativa data. Inoltre, prendendo per $h$ una funzione positiva o negativa di $n$ che cresca indefinitamente con $n$ in valore assoluto, o che non abbia un limite determinato, con ragionamenti analoghi si vedrebbe che la serie (1) si può ridurre ad infinite altre serie che siano divergenti o indeterminate. Quindi riassumendo si può ora enunciare il seguente teorema:

Essendo data la serie reale:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{4}$$

i cui termini sono in parte positivi e in parte negativi e tendono a zero col crescere indefinitamente di $n$, ed essendo:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots \\ \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n + \cdots \end{array}\right\} \tag{5}$$

le serie dei termini positivi e dei valori assoluti dei termini negativi:

1.° Se queste due serie (5) sono ambedue convergenti, la serie data (4) è convergente in qualunque ordine si prendano i suoi termini.

2.° Se una sola delle serie (5) è divergente, la serie (4) è divergente in qualunque ordine si prendano i suoi termini.

3.° Se le serie (5) sono ambedue divergenti, cangiando l'ordine dei termini nella (1) in tutti i modi possibili, questa serie verrà a prendere tutti i valori da $+\infty$ a $-\infty$, e ciascuno un numero infinito di volte; e per dati cangiamenti dello stesso ordine diverrà anche indeterminata.

## § 2.

1.° Osservando che questo stesso teorema ci mostra, che una serie (4) non può essere semplicemente convergente o indeterminata, che nell'ultimo caso, se ne concluderà in particolare che: Data una serie semplicemente convergente o indeterminata i cui termini tendono a zero, se si cangia in essa l'ordine dei termini in tutti i modi possibili, la sua somma verrà a prendere tutti i valori da $+\infty$ a $-\infty$, e per dati ordinamenti degli stessi termini sarà indeterminata.

2.° Osserviamo ancora che se si indicano con $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n \ldots$ delle quantità positive che non tendono nè a zero nè all'infinito, la serie dei termini positivi e quella dei valori assoluti dei termini negativi della serie:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n + \cdots$$

sono convergenti e divergenti insieme alle serie corrispondenti cui dà luogo la serie (4); e quindi si può dire che: se le quantità $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n \ldots$ sono positive e non tendono nè a zero nè all'infinito, per la serie:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n + \cdots$$

avverrà precisamente quel che avviene per la serie:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

3.° È pure da notarsi che dalla dimostrazione del teorema generale precedente, risulta anche che: se sono date due serie di quantità positive:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$$
$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \ldots$$

che tendono a zero col crescere indefinitamente di $n$, e sono tali che le serie formate con esse siano divergenti; se si prendono le $\alpha$ col segno $+$ e le $\beta$ col segno $-$, con queste quantità si potranno sempre formare infinite serie semplicemente convergenti che abbiano per somma una quantità qualunque data. Osserviamo inoltre, che da ciò che precede si vede anche come questo possa farsi; e osserviamo pure che le due serie di quantità $\alpha$ e $\beta$ possono anche ridursi a una sola serie di quantità, quando sia in generale $\alpha_r = \beta_r$.

Lo studio delle serie complesse si fa dipendere da quello di due serie reali; quindi applicando a queste ultime i teoremi precedenti si troverebbero quelli corrispondenti per le serie complesse.

## § 3.

Questi teoremi ci conducono subito a risolvere la questione che ci siamo proposti in principio.

Sia infatti:

$$P = (1 + u_1)(1 + u_2) \cdots (1 + u_n) \cdots$$

un prodotto infinito reale o complesso, e cerchiamo dapprima la condizione necessaria e sufficiente affinchè esso abbia un valore finito e determinato e differente da zero indipendentemente dall'ordine dei suoi fattori.

Poniamo perciò:

$$1 + u_n = e^{l(1+u_n)} = e^{\alpha_n + \beta_n i},$$

indicando con $l$ la caratteristica dei logaritmi Neperiani, e supponendo che, fra gli infiniti logaritmi di $1 + u_n$, $l(1 + u_n)$ o $\alpha_n + \beta_n i$ sia quello in cui il coefficiente di $i$ ha il più piccolo valore assoluto.

Si avrà:

$$P = e^{\Sigma l(i+u_n)} = e^{\Sigma(\alpha_n + \beta_n i)}, \tag{6}$$

e ogni cangiamento dell'ordine dei fattori in $P$ porterà un corrispondente cangiamento nell'ordine dei termini della serie $\Sigma l(1 + u_n) = \Sigma(\alpha_n + \beta_n i)$.

Ciò posto, supponiamo dapprima che $P$ abbia un valore finito, determinato e differente da zero indipendentemente dall'ordine dei fattori. Per questa condizione la serie $\Sigma(\alpha_n + \beta_n i)$ dovrà essere tale che l'esponenziale $e^{\Sigma(\alpha_n + \beta_n i)}$ abbia sempre uno stesso valore finito e determinato e differente da zero, e quindi la serie $\Sigma(\alpha_n + \beta_n i)$ o dovrà essere convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, o dovrà esser tale che per qualunque cangiamento dello stesso ordine la sua somma non possa variare che di multipli del periodo dell'esponenziale, vale a dire di $2k\pi i$.

Di qui segue subito che la serie $\Sigma\alpha_n$ dovrà essere convergente indipendentemente dall'ordine dei termini. In quanto poi alla serie $\Sigma\beta_n$, osserviamo prima di tutto che dalla ipotesi fatta che $P$ abbia un valore finito e determinato, e che le $\beta_n$ non tendano verso multipli di $2\pi$, ne viene che queste quantità devono tendere verso zero, poichè altrimenti la serie $\Sigma\beta_n$ o sarebbe divergente e la sua somma evidentemente non tenderebbe all'infinito aumentando successivamente di multipli di $2\pi$, o sarebbe indeterminata e la indeterminazione non porterebbe su multipli di $2\pi$; e quindi in ambedue i casi l'argomento di $P$ sarebbe indeterminato (*). Ora se le $\beta_n$ tendono verso zero, la serie $\Sigma\beta_n$ non potrà essere divergente in qualunque ordine si prendano i suoi termini poichè altrimenti l'argomento di $P$ sarebbe sempre indeterminato; e non potrà neppure essere semplicemente convergente o indeterminata poichè altrimenti (§2. 1.°) cangiando l'ordine dei termini in tutti i modi possibili la sua somma prenderebbe tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$ e quindi le variazioni non sarebbero soltanto di multipli di $2\pi$. Dunque se il prodotto infinito $P$ ha un valore finito e determinato e differente da zero indipendentemente dall'ordine dei fattori, tanto la serie $\Sigma\alpha_n$ che la serie $\Sigma\beta_n$ saranno convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini, e quindi tale sarà pure la serie $\Sigma l(1+u_n)$.

Di qui risulta che la serie:

$$\Sigma \operatorname{mod} l(1+u_n) = \Sigma \operatorname{mod} u_n \operatorname{mod}\left[\frac{l(1+u_n)}{u_n}\right],$$

è convergente; e quindi, poichè si ha:

$$\lim \frac{l(1+u_n)}{u_n} = 1,$$

anche la serie $\Sigma \operatorname{mod} u_n$ sarà convergente, e si può perciò concludere che, se il prodotto infinito $P$ ha un valore finito e determinato e differente da zero indipendentemente dall'ordine dei fattori, la serie $\Sigma u_n$ è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini.

Questa condizione poi è anche sufficiente, giacchè se essa è soddisfatta, la serie $\Sigma \operatorname{mod} u_n$ è convergente, e quindi tale è pure l'altra:

$$\Sigma \operatorname{mod} u_n \operatorname{mod}\left[\frac{l(1+u_n)}{u_n}\right] = \Sigma \operatorname{mod} l(1+u_n).$$

(*) Ciò del resto risulta subito anche dall'osservare che evidentemente si deve avere $\lim u_n = 0$.

Conseguentemente la serie $\Sigma\, l(1+u_n)$ è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, e quindi, per la formola (6), il prodotto $P$ ha un valore finito determinato e differente da zero indipendentemente dall'ordine dei fattori (*).

Dietro ciò si può dunque enunciare il teorema che: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè un prodotto infinito reale o complesso:*

$$(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots$$

*abbia un valore finito e determinato e differente da zero indipendentemente dall'ordine dei fattori, è che la serie:*

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

*sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini.*

## § 4.

Passiamo ora a considerare il caso in cui il nostro prodotto infinito:

$$P=(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots$$

non ha un valore finito e determinato e differente da zero indipendentemente dall'ordine dei fattori. In questo caso, se:

$$u_n=a_n+b_n i,$$

pel teorema precedente, una almeno delle due serie $\Sigma a_n$, $\Sigma b_n$ non sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini; e quì si presentano perciò più casi da considerare.

Per considerare questi casi, osserviamo prima che si ha:

$$l(1+u_n)=\tfrac{1}{2}\, l\,[(1+a_n)^2+b_n^2]+\operatorname{arc\,tg}\frac{b_n}{1+a_n};$$

(*) Il Sig. Weierstrass, nel vol. 51 del giornale di *Crelle,* aveva soltanto dimostrato che se la serie $\Sigma u_n$ è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, il prodotto infinito reale o complesso

$$(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots$$

ha un valore finito, determinato e differente da zero.

e quindi, supponendo che le $a_n$ e $b_n$ tendano a zero, col crescere indefinitamente di $n$, e indicando con $\lambda_n$ e $\mu_n$ due quantità positive, che non tendono nè a zero nè all'infinito, almeno a partire da un certo punto, si avrà:

$$l(1+u_n)=\lambda_n(a_n^2+2a_n+b_n^2)+\mu_n b_n;$$

e per questa sarà:

$$P=e^{\Sigma\lambda_n(a_n^2+2a_n+b_n^2)+i\Sigma\mu_n b_n}=e^{\Sigma(\nu_n a_n+\lambda_n b_n^2)+i\Sigma\mu_n b_n}, \tag{7}$$

essendo $\nu_n$ la quantità $\lambda_n(a_n+2)$ la quale almeno a partire da un certo punto è positiva e non tende nè a zero nè all'infinito.

Con questa formola ci è ora facile di studiare i differenti casi che possono presentarsi per le serie $\Sigma a_n$, $\Sigma b_n$.

1.° caso. Supponiamo che $\Sigma b_n$ sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, e $\Sigma a_n$ non lo sia.

In questo caso la serie $\Sigma\mu_n b_n$ è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, e quindi l'argomento del prodotto ha sempre lo stesso valore finito e determinato qualunque sia l'ordine dei fattori. In quanto al modulo poi, osserviamo che siccome esso può scriversi $e^{\Sigma\nu_n a_n+\Sigma\lambda_n b_n^2}$, e dallo essere convergente indipendentemente dall'ordine dei termini la serie $\Sigma b_n$ ne viene che tale è pure la $\Sigma b_n^2$ e quindi anche l'altra $\Sigma\lambda_n b_n^2$, così per vedere che cosa accada del modulo bisognerà studiare la serie $\Sigma\nu_n a_n$. Ora per considerare la serie $\Sigma\nu_n a_n$ basta considerare la serie $\Sigma a_n$ (§ 2. 2.°), giacchè le quantità $\nu_n$ sono positive finite e differenti da zero; quindi applicando il teorema del § 1 si può evidentemente concludere che: *Se nel prodotto infinito:*

$$(1+a_1+ib_1)(1+a_2+ib_2)\cdots(1+a_n+ib_n)\cdots$$

*la serie $\Sigma b_n$ è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, e la serie $\Sigma a_n$ non lo è; cangiando l'ordine dei fattori: 1.° esso sarà sempre zero se la serie formata colle $a_n$ negative è divergente e quella formata colle $a_n$ positive non lo è; 2.° avrà sempre un modulo infinito se accade l'opposto; 3.° il suo modulo passerà per tutti i valori da 0 a $\infty$ e anche per certi ordinamenti dei suoi fattori diverrà indeterminato se la serie delle $a_n$ positive e quella delle $a_n$ negative sono entrambe divergenti. L'argomento poi in ognuno di questi casi avrà sempre lo stesso valore finito e determinato qualunque sia l'ordine dei fattori.*

In particolare si ha di quì che: Se nel prodotto reale

$$(1+a_1)(1+a_1)\cdots(1+a_n),$$

la serie $\Sigma a_n$ non è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini; cangiando l'ordine dei fattori: 1.° il prodotto sarà sempre zero se la serie delle $a_n$ negative è divergente e quelle delle $a_n$ positive non lo è; 2.° il suo valore assoluto sarà sempre infinito se accade l'opposto; 3.° passerà per tutti i valori da zero all'infinito e anche diverrà indeterminato se nessuna di queste due serie è convergente.

Esempii. Il prodotto infinito:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{7^2}\right)\cdots$$

è zero in qualunque ordine si prendano i suoi fattori, e l'altro:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdots$$

è infinito per qualunque ordine dei suoi fattori.

Il prodotto infinito

$$\left(1+\frac{1}{2l2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4l4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots$$

cangiando l'ordine dei fattori in tutti i modi possibili, passa per tutti i valori da 0 a $\infty$ e anche diviene indeterminato.

2.° caso. Supponiamo ora che $\Sigma a_n$ sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, e $\Sigma b_n$ non lo sia.

In questo caso osservando che la serie $\Sigma\nu_n a_n$ è pure convergente indipendentemente dall'ordine dei termini e la serie $\Sigma\mu_n b_n$ non lo è, e scrivendo la (7) sotto la forma:

$$P=e^{\Sigma\nu_n a_n+\Sigma\lambda_n b_n^2+i\Sigma\mu_n b_n},$$

pei teoremi del n.° 1 si vede subito che: cangiando in $P$ l'ordine dei fattori in tutti i modi possibili, il suo modulo avrà sempre uno stesso valore finito e differente da zero, o sempre infinito secondo che la serie $\Sigma b_n^2$ è convergente o divergente; l'argomento poi o sarà sempre infinito o passerà per tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$ e per dati ordinamenti degli stessi fattori diverrà anche indeterminato.

3.° caso: Supponiamo in ultimo che nessuna delle due serie $\Sigma a_n$, $\Sigma b_n$ sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini.

In questo caso dalla formola (7) pei teoremi del n.° 1 si vede subito che cangiando l'ordine dei fattori in $P$, l'argomento del prodotto o passerà per tutti i valori da $+\infty$ a $-\infty$ e per dati ordinamenti degli stessi fattori diverrà anche indeterminato, o sarà sempre infinito. Pel modulo poi accadrà altrettanto o sarà sempre zero, a meno che la serie $\Sigma(a_n^2+2a_n+b_n^2)$ non sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini nel qual caso il modulo ha sempre uno stesso valore finito e differente da zero.

Notiamo che quì abbiamo supposto che le $a_n$ e $b_n$ tendessero a zero col crescere indefinitamente di $n$. I prodotti infiniti nei quali ciò non accade sono sempre nulli o infiniti o indeterminati, e di essi non è punto utile occuparsi.

Pisa, 16 Marzo 1868.