Ricerche sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche.

MEMORIA I.

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

PARTE SECONDA.

§ 16.

Sistema differenziale pel caso del paraboloide reale ellittico.

Il metodo che abbiamo sviluppato, dal § 11 in poi, per la ricerca dei sistemi tripli coniugati con deformate del paraboloide a parametri puramente immaginarii, può applicarsi egualmente nel caso dei paraboloidi *reali.* Soltanto qui i sistemi di Weingarten di partenza dovrebbero assumersi negli spazî di curvatura costante, secondo le formole che ho stabilito in una Memoria del 1887 (*). Per brevità, sopprimendo qui la deduzione geometrica, si daranno senz'altro le equazioni differenziali da cui dipende il nostro problema.

Cominciamo dal caso del paraboloide reale ellittico

$$\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}=1,$$

fra i cui parametri p, q (positivi) porremo, come al § 87 Vol. III delle *Le-*

(*) *Sui sistemi di Weingarten negli spazî a curvatura costante* (Memorie dei Lincei, Serie 4.ª, vol. 4.º).

zioni, la relazione

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1, \tag{35}$$

ciò che può sempre ottenersi, *intendendo per ora escluso il caso del paraboloide rotondo*, col sostituire al paraboloide generale dato un paraboloide simile.

Si sa che la ricerca delle superficie S applicabili sulla *regione reale* di questo paraboloide dipende dalla equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \omega \cos \omega,$$

dove le linee (u, v) tracciano sulla S il sistema coniugato permanente, ridotto ai parametri isometrici u, v. Ora introduciamo una terza variabile w, e scriviamo per la funzione incognita $\omega = \omega\,(u, v, w)$ e per le due

$$A = \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial w}, \quad B = \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \, \partial w}$$

il seguente sistema di equazioni a derivate parziali:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \omega \cos \omega \\
&\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial w} = A \cos \omega, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \, \partial w} = B \operatorname{sen} \omega \\
&\frac{\partial A}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v} B + \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial w}, \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} B \\
&\frac{\partial B}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v} A, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} A - \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \omega}{\partial w}.
\end{aligned}\right\} \tag{VI}$$

In primo luogo ci conviene esaminare il grado di arbitrarietà nelle soluzioni di questo sistema. Per ciò (applicando il metodo generale che vale pure pei sistemi di tipo analogo già incontrati (I), (II) § 4, (III) § 8, ecc.) lo riduciamo alla forma lineare canonica, completamente integrabile del Bourlet (*), colla introduzione delle due nuove funzioni incognite

$$\omega_1 = \frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad \omega_2 = \frac{\partial \omega}{\partial v};$$

(*) Vedi Bourlet, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées.* Annales de l'École Normale Supérieure, t. VIII, 3ème Serie, Supplément 1891. I risultati stabiliti dal Bourlet esso si scrive allora

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = \omega_1 , \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = \omega_2 , \qquad *$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial u} = -\frac{\partial \omega_2}{\partial v} + \operatorname{sen} \omega \cos \omega , \qquad * \quad , \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial w} = A \cos \omega$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial u} = \frac{\partial \omega_1}{\partial v} , \qquad * \quad , \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial w} = B \operatorname{sen} \omega$$

$$\frac{\partial A}{\partial u} = -B \omega_2 + \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial w} , \quad \frac{\partial A}{\partial v} = B \omega_1 . \qquad *$$

$$\frac{\partial B}{\partial u} = -A \omega_2 , \quad \frac{\partial B}{\partial v} = A \omega_1 - \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \omega}{\partial w} , \qquad * \quad ,$$

ed ha appunto la forma lineare canonica. Per le funzioni ω, A, B la variabile w è parametrica, le u, v principali; per le due altre invece ω_1, ω_2 la v è parametrica e le u, w principali; inoltre le due espressioni delle derivate seconde miste doppiamente principali tratte dal sistema stesso coincidono, e però il sistema è completamente integrabile. Applicando il teorema fondamentale d'esistenza del BOURLET (l. c.), si vede dunque che esiste uno ed un solo sistema integrale (ω, A, B, ω_1, ω_2) tale che, essendo ($u_0\, v_0\, w_0$) un sistema iniziale di valori delle variabili, le tre funzioni ω, A, B si riducano per $u = u_0$, $v = v_0$ a funzioni prefissate arbitrarie (olomorfe) di w, e similmente ω_1, ω_2 si riducano per $u = u_0$, $w = w_0$ a due funzioni arbitrarie (olomorfe) di v. Il sistema (VI) ammette dunque una soluzione generale con cinque funzioni arbitrarie. Ma è da osservarsi che, siccome il sistema (VI) non cangia di forma cangiando comunque il parametro w, in realtà una delle tre funzioni arbitrarie di w è solo apparente, e così: *La soluzione generale del sistema* (VI) *dipende da quattro funzioni arbitrarie essenziali.*

Quanto alla integrazione effettiva del sistema (VI), nulla insegnano i metodi generali; ma qui appunto, come negli altri casi analoghi, i metodi di trasformazione, che svilupperemo fra poco, permettono di costruirne soluzioni con un numero qualunque di costanti arbitrarie.

---

in questa Memoria, in particolare il teorema fondamentale VIII a pag. 35, bastano per la maggior parte dei sistemi di equazioni alle derivate parziali che si presentano in problemi di geometria infinitesimale, senza ricorrere ai teoremi più generali, ma anche molto più complessi, dovuti a MÉRAY et RIQUIER (Vedi RIQUIER, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles.* Paris, G. Villars, 1910).

Si osservi ancora che, se si pone per un momento

$$\Omega = B^2 - A^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial w}\right)^2,$$

segue subito dalle (VI): $\frac{\partial \Omega}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial \Omega}{\partial v} = 0$, e per ciò Ω è funzione della sola w, ma disponendo del parametro w si può senz'altro supporre $\Omega = \text{cost}$. Dunque: *Per ogni terna* (ω, A, B) *di soluzioni del sistema* (VI) *possiamo porre la relazione quadratica*

$$B^2 - A^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial w}\right)^2 = \text{cost.} \tag{36}$$

§ 17.

Sistema lineare omogeneo in (x, ξ, η, ζ).

Ad ogni terna (ω, A, B) di soluzioni delle (VI), fissate le costanti positive p, q che soddisfino la (35), si associa il seguente sistema lineare omogeneo in quattro funzioni incognite (x, ξ, η, ζ):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\cos\omega}{\sqrt{q}}\cdot\eta, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{q}}\cdot\zeta, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\frac{\partial \omega}{\partial w}\cdot\xi\\
&\frac{\partial \xi}{\partial u} = -\frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{p}}\cdot\eta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\cos\omega}{\sqrt{p}}\cdot\zeta,\\
&\qquad\qquad\qquad \frac{\partial \xi}{\partial w} = -\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\frac{\partial \omega}{\partial w}x - \sqrt{p}\,A\,.\,\eta + \sqrt{p}\,B\,.\,\zeta\\
&\frac{\partial \eta}{\partial u} = -\frac{\cos\omega}{\sqrt{q}}x + \frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{p}}\xi - \frac{\partial \omega}{\partial v}\zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial w} = \sqrt{p}\,A\,.\,\xi\\
&\frac{\partial \zeta}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v}\eta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{q}}x + \frac{\cos\omega}{\sqrt{p}}\xi + \frac{\partial \omega}{\partial u}\eta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial w} = \sqrt{p}\,B\,.\,\xi.
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Questo è un sistema completamente integrabile, a causa delle (VI) e della relazione (35) fra p e q; esso possiede l'integrale quadratico

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = \text{cost.}, \tag{38}$$

onde segue più in generale che fra due quaderne qualunque (x, ξ, η, ζ), $(x', \xi', \eta', \zeta')$ di soluzioni sussiste la relazione

$$x x' + \xi \xi' + \eta \eta' - \zeta \zeta' = \text{cost.} \tag{38*}$$

Interpretando, analogamente al § 10, x, ξ, η, ζ quali coordinate omogenee di punto nello spazio, introduciamo la quadrica

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0, \tag{Q}$$

che è qui reale ed *a punti ellittici.* Se un punto (x, ξ, η, ζ) non giace sopra (Q), esso sarà esterno od interno a Q secondo che la costante del secondo membro in (38) è positiva, ovvero negativa. *Normalizziamo* anche qui le coordinate x, ξ, η, ζ col rendere

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1 \quad \text{pei punti esterni a (Q)}$$
$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = -1 \quad \text{pei punti interni.}$$

Ora, se consideriamo nuovamente un tetraedro coniugato $P_0 P_1 P_2 P_3$ rispetto alla quadrica (Q), essendo questa a punti ellittici, un vertice, supponiamo P_0, sarà interno alla quadrica, gli altri tre esterni. Corrispondentemente ai quattro vertici, assumiamo quattro quaderne di soluzioni normalizzate

$$(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r) \quad r = 0, 1, 2, 3$$

del sistema (37), che si riducano inizialmente (per $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$) alle rispettive coordinate dei quattro vertici P_r. Ne risulta che il determinante

$$\begin{vmatrix} x_0\sqrt{-1} & \xi_0\sqrt{-1} & \eta_0\sqrt{-1} & \zeta_0 \\ x_1 & \xi_1 & \eta_1 & -\zeta_1\sqrt{-1} \\ x_2 & \xi_2 & \eta_2 & -\zeta_2\sqrt{-1} \\ x_3 & \xi_3 & \eta_3 & -\zeta_3\sqrt{-1} \end{vmatrix} \tag{39}$$

sarà ortogonale per linee, quindi anche per colonne, e sussisteranno in particolare le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 + x_0^2 \\ & \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1 + \xi_0^2 \\ & x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 = x_0 \xi_0 . \end{aligned}\right\} \tag{39*}$$

§ 18.

Sistemi tripli coniugati con deformate proprie del paraboloide ellittico.

Dopo questi preliminari, imitiamo l'analisi del § 11, e *tenendo dapprima fissa w*, consideriamo le tre espressioni differenziali

$$d\,y_i = q\,x_i\,d\,x_0 + p\,\xi_i\,d\,\xi_0 \quad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{40}$$

che constatiamo essere differenziali esatti. Esprimendoli invero per le variabili u, v, abbiamo dalle (37)

$$d\,y_i = \eta_0\,(\sqrt{q}\cos\omega\,x_i - \sqrt{p}\,\mathrm{sen}\,\omega\,\xi_i)\,d\,u + \zeta_0\,(\sqrt{q}\,\mathrm{sen}\,\omega\,x_i + \sqrt{p}\cos\omega\,\xi_i)\,d\,v,$$

e dalle (37) stesse risulta identicamente

$$\frac{\partial}{\partial v}\Big[\eta_0\,(\sqrt{q}\cos\omega\,x_i - \sqrt{p}\,\mathrm{sen}\,\omega\,\xi_i)\Big] = \frac{\partial}{\partial u}\Big[\zeta_0\,(\sqrt{q}\,\mathrm{sen}\,\omega\,x_i + \sqrt{p}\cos\omega\,\xi_i)\Big] =$$

$$= \frac{\partial\,\eta_0}{\partial\,v}(\sqrt{q}\cos\omega\,x_i - \sqrt{p}\,\mathrm{sen}\,\omega\,\xi_i) + \frac{\partial\,\zeta_0}{\partial\,u}(\sqrt{q}\,\mathrm{sen}\,\omega x_i + \sqrt{p}\cos\omega\,\xi_i).$$

Con quadrature si hanno dunque dalle (40) le tre funzioni y_1, y_2, y_3 che soddisfano alle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\,y_i}{\partial\,u} &= \eta_0\,(\sqrt{q}\cos\omega\,x_i - \sqrt{p}\,\mathrm{sen}\,\omega\,\xi_i) \\ \frac{\partial\,y_i}{\partial\,v} &= \zeta_0\,(\sqrt{q}\,\mathrm{sen}\,\omega\,x_i + \sqrt{p}\cos\omega\,\xi_i) \end{aligned}\quad (i=1,\ 2,\ 3)\ \right\} \tag{40*}$$

ed all'altra

$$\frac{\partial^2\,y_i}{\partial\,u\,\partial\,v} = \frac{\partial\log\eta_0}{\partial\,v}\,\frac{\partial\,y_i}{\partial\,u} + \frac{\partial\log\zeta_0}{\partial\,u}\,\frac{\partial\,y_i}{\partial\,v}. \tag{41}$$

Interpretando y_1, y_2, y_3 come coordinate ortogonali di un punto P, questo descrive, al variare di u, v (restando fissa w), una superficie S il cui elemento lineare, secondo le (40 e (39*), ha l'espressione

$$d\,s^2 = q^2\,(1 + x_0^2)\,d\,x_0^2 + 2\,p\,q\,x_0\,\xi_0\,d\,x_0\,d\,\xi_0 + p^2\,(1 + \xi_0^2)\,d\,\xi_0^2. \tag{41*}$$

Questa appartiene alla quadrica di equazioni parametriche

$$X = p\,\xi_0, \quad Y = q\,x_0, \quad Z = \frac{q\,x_0^2 + p\,\xi_0^2}{2},$$

vale a dire alla *regione reale* del paraboloide ellittico

$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 2\,Z.$$

Con calcoli analoghi a quelli eseguiti al § 11, si prova che sulla S il sistema (u, v) è isotermo-coniugato a parametri isometrici, e coincide col sistema coniugato permanente della S.

Se ora facciamo variare w, le y_1, y_2, y_3 sono determinate dalle (40*) a meno di funzioni additive di w, e noi cerchiamo di determinarle in guisa che la famiglia (S) di deformate (proprie) del paraboloide ellittico appartenga ad un sistema triplo coniugato (u, v, w). Procedendo per questo come al § 12, dal confronto della (41) colla (α_1) § 1, siamo condotti a porre $H_1 = \eta_0$, $H_2 = \zeta_0$, poi dalle (β_2), (β_3) § 1, confrontate colle (37), $H_3 = \xi_0$. Se ora nelle (α_2), (α_3) § 1 poniamo $\theta = y_i$ e ricordiamo che, per la (35), $q - p = p\,q$, ne risulta concordemente

$$\frac{\partial y_i}{\partial w} = p^{\frac{3}{2}}\,\xi_0 \left(\sqrt{q}\,\frac{\partial \omega}{\partial w}\,x_i - A\,y_i + B\,\zeta_i\right),$$

e, riunendo questa alle (40*), si hanno le formole definitive:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial y_i}{\partial u} &= \eta_0 \left(\sqrt{q}\cos\omega\,x_i - \sqrt{p}\,\mathrm{sen}\,\omega\,\xi_i\right)\\
\frac{\partial y_i}{\partial v} &= \zeta_0 \left(\sqrt{q}\,\mathrm{sen}\,\omega\,x_i + \sqrt{p}\cos\omega\,\xi_i\right)\\
\frac{\partial y_i}{\partial w} &= p^{\frac{3}{2}}\,\xi_0 \left(\sqrt{q}\,\frac{\partial \omega}{\partial w}\,x_i - A\,\eta_i + B\,\zeta_i\right),
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

dove non resta più altro che verificare le residue condizioni d'integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial y_i}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y_i}{\partial w}\right), \quad \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial y_i}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y_i}{\partial w}\right).$$

Per ciò basta tener conto delle identità seguenti, conseguenze delle (37):

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\sqrt{q}\cos\omega\,x_i - \sqrt{p}\,\mathrm{sen}\,\omega\,\xi_i\right) = -p\,\mathrm{sen}\,\omega\left(\sqrt{p}\,\frac{\partial \omega}{\partial w}\,x_i - A\,\eta_i + B\,\zeta_i\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial w}(\sqrt{q}\,\mathrm{sen}\,\omega\, x_i + \sqrt{p}\cos\omega\,\xi_i) = \quad p\cos\omega\left(\sqrt{p}\,\frac{\partial\omega}{\partial w}\,x_i - A\,\eta_i + B\,\zeta_i\right)$$

$$p\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{q}\,\frac{\partial\omega}{\partial w}\,x_i - A\,\eta_i + B\,\zeta_i\right) = \quad A\,(\sqrt{q}\cos\omega\, x_i - \sqrt{p}\,\mathrm{sen}\,\omega\,\xi_i)$$

$$p\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{q}\,\frac{\partial\omega}{\partial w}\,x_i - A\,\eta_i + B\,\zeta_i\right) = \quad B\,(\sqrt{q}\,\mathrm{sen}\,\omega\, x_i + \sqrt{p}\cos\omega\,\xi_i).$$

Le (42) definiscono dunque, per quadrature, un sistema triplo coniugato (u, v, w), nel quale le $w =$ cost. sono tutte applicabili sulla regione reale del paraboloide ellittico, trovandosi d'altronde verificate le altre due proprietà caratteristiche b) c) della prefazione.

§ 19.

Classe particolare di questi sistemi tripli coniugati.

Si ottiene una classe notevole degli attuali sistemi tripli coniugati, supponendo che nell'integrale quadratico (36) del sistema (VI) sia nulla la costante del secondo membro, che si abbia cioè:

$$A^2 - B^2 = \left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2.$$

In tal caso possiamo ridurre il sistema (VI) a forma più semplice, introducendo una nuova funzione incognita θ col porre p. e:

$$A = \cosh\theta\,\frac{\partial\omega}{\partial w}, \quad B = \mathrm{senh}\,\theta\,\frac{\partial\omega}{\partial w};$$

così il sistema (VI) diventa

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\omega}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} = -\cos\omega\,\mathrm{senh}\,\theta, \quad \frac{\partial\omega}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial v} = \mathrm{sen}\,\omega\cosh\theta \\ &\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} = \cos\omega\cosh\theta\,\frac{\partial\omega}{\partial w}, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} = \mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{senh}\,\theta\,\frac{\partial\omega}{\partial w}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII)}$$

Procedendo come al § 16, l'applicazione del teorema generale del Bourlet

(l. c.) dimostra che nella soluzione generale (ω, θ) del sistema (VII) entrano *tre funzioni arbitrarie essenziali.*

I particolari sistemi tripli coniugati, con deformate proprie del paraboloide ellittico, di cui ora ci occupiamo, godono di una proprietà geometrica tanto più interessante in quanto che questa si riproduce per classi di sistemi tripli coniugati con deformate delle quadriche *generali.* Per descrivere questa proprietà, si consideri nel sistema triplo coniugato una qualunque superficie S della serie $w=$cost. (applicabile sul paraboloide) e la congruenza (C) formata dalle tangenti alle trajettorie (w) nei punti di S, e si osservi che le sviluppabili di questa congruenza tagliano S secondo il sistema coniugato permanente (u, v). Ora si suppongano i raggi della congruenza (C) invariabilmente legati (al modo di Beltrami) alla superficie S nelle sue flessioni, e si avrà la proprietà in discorso:

Quando la S si distende sul paraboloide, i raggi della congruenza (C) vanno tutti ad appoggiarsi, dopo la deformazione, alla parabola focale del piano yz:

$$X=0, \quad Y^2=(q-p)(2Z-p).$$

Per dimostrarlo osserviamo, in primo luogo, che i coseni di direzione Y_1, Y_2, Y_3 della normale alla S, nella sua configurazione attuale, sono dati, per le (42), da

$$Y=\frac{\zeta_0 \eta_i-\eta_0 \zeta_i}{\sqrt{\zeta_0^2-\eta_0^2}} \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

D'altronde i coseni di direzione Z_1, Z_2, Z_3 delle tangenti alle trajettorie (w) sono *proporzionali*, per la (42_3), alle espressioni

$$Z_i \equiv \sqrt{q}\, x_i-\cosh\theta\, \eta_i+\operatorname{senh}\theta\, \zeta_i.$$

Trattandosi ora di considerare la S deformabile, insieme alla congruenza (C), conviene riferirsi ad elementi invariabili per flessione, e così sostituiremo alle variabili u, v le variabili x_0, ξ_0, onde per le (40) avremo

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_0}=q\, y_i \quad \frac{\partial y_i}{\partial \xi_0}=p\, \xi_i.$$

Ed ora poniamo Z_1, Z_2, Z_3 sotto la forma

$$Z_i=l\frac{\partial y_i}{\partial x_0}+m\frac{\partial y_i}{\partial \xi_0}+n\, Y_i \quad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{43}$$

dove i coefficienti l, m, n, indipendenti dalle flessioni, saranno da calcolarsi dalle formole

$$\sqrt{q}\, x_i - \cosh\theta\, \eta_i + \operatorname{senh}\theta\, \zeta_i = l\, q\, x_i + m\, p\, \xi_i + n\, \frac{\zeta_0\, \eta_i - \eta_0\, \zeta_i}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}},$$

ossia dalle altre

$$(l\, q - \sqrt{q})\, x_i + m\, p\, \xi_i + \left(\frac{n\, \zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}} + \cosh\theta\right)\eta_i - $$
$$- \left(\frac{n\, \eta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}} + \operatorname{senh}\theta\right)\xi_i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Queste sono tre equazioni lineari omogenee nelle quattro quantità

$$l\, q - \sqrt{q}, \quad m\, p, \quad \frac{n\, \zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 + \eta_0^2}} + \cosh\theta, \quad \frac{n\, \eta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}} + \operatorname{senh}\theta,$$

e a queste tre equazioni soddisfano pure x_0, ξ_0, η_0, ζ_0, a causa della ortogonalità del determinante (39), § 17. Dunque le quattro quantità scritte sono proporzionali a x_0, ξ_0, η_0, ζ_0, dopo di che risultano subito le formole:

$$\left.\begin{aligned} l\, q &= \sqrt{q} + \frac{\zeta_0 \operatorname{senh}\theta - \eta_0 \cosh\theta}{\zeta_0^2 - \eta_0^2} \cdot x_0 \\ m\, p &= \frac{\zeta_0 \operatorname{senh}\theta - \eta_0 \cosh\theta}{\zeta_0^2 - \eta_0^2} \cdot \xi_0 \\ n &= \frac{\eta_0 \operatorname{senh}\theta - \zeta_0 \cosh\theta}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}} \,. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Ora, se facciamo assumere, per flessione, alla S la forma del paraboloide, possiamo porre nella configurazione finale:

$$y_1 = p\, \xi_0, \quad y_2 = q\, x_0, \quad y_3 = \frac{q\, x_0^2 + p\, \xi_0^2}{2}$$
$$Y_1 = \frac{\xi_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}}, \quad Y_2 = \frac{x_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}}, \quad Y_3 = \frac{-1}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}},$$

e calcolando colle (43), (44) i valori di Z_1, Z_2, Z_3, *coll'omettere un fattore di proporzionalità*, risulta:

$$Z_1 \equiv e^{-\theta}\, \xi_0, \quad Z_2 \equiv e^{-\theta}\, x_0 - \sqrt{q}\,(\zeta_0 - \eta_0),$$
$$Z_3 \equiv (\eta_0 \cosh\theta - \zeta_0 \operatorname{senh}\theta)\,(\zeta_0 - \eta_0) - \sqrt{q}\, x_0\,(\zeta_0 - \eta_0) - e^{-\theta}.$$

Le coordinate X, Y, Z di un punto qualunque, preso sopra il raggio (x_0, ξ_0) della nostra congruenza, sono date da

$$X = y_1 + T Z_1, \quad Y = y_2 + T Z_2, \quad Z = y_3 + T Z_3,$$

dove T è un parametro. Volendo considerare il punto ove il raggio incontra il piano $y z$, bisogna dare a T il valore $T = -\frac{y_1}{Z_1} = -p e^\theta$, onde avremo per Y, Z

$$Y = (q - p) x_0 + p \sqrt{q} e^\theta (\zeta_0 - \eta_0),$$

$$Z = \frac{q x_0^2 + p \xi_0^2}{2} + p \sqrt{q} e^\theta x_0 (\zeta_0 - \eta_0) + p e^\theta (\zeta_0 \operatorname{senh} \theta - \eta_0 \cosh \theta)(\zeta_0 - \eta_0) + p.$$

Resta a verificare che questi valori di Y, Z soddisfano alla equazione della parabola focale

$$Y^2 = (q - p)(2 Z - p).$$

Ora, essendo per la (35): $q - p = p q$, la identità da verificarsi risulta

$$p \left[\sqrt{q} x_0 + e^\theta (\zeta_0 - \eta_0)\right]^2 = q x_0^2 + p \xi_0^2 + 2 p \sqrt{q} e^\theta x_0 (\zeta_0 - \eta_0) +$$
$$+ 2 p e^\theta (\zeta_0 \operatorname{senh} \theta - \eta_0 \cosh \theta)(\zeta_0 - \eta_0) + p,$$

e si risolve nell'altra

$$x_0^2 + \xi_0^2 + \eta_0^2 - \zeta_0^2 = -1,$$

che effettivamente sussiste per l'ortogonalità del determinante (39). La proprietà enunciata resta così stabilita.

§ 20.

Sistema differenziale per le deformate improprie del paraboloide ellittico.

Si sa che, accanto alle superficie effettivamente applicabili sul paraboloide ellittico (regione reale), conviene anche considerare superficie *reali* applicabili sulla regione *ideale* del paraboloide stesso (Vedi Vol. III, §§ 42, 87).

Le prime diciamo deformate *proprie*, le seconde deformate *improprie* del paraboloide. Ora noi vogliamo dimostrare che anche colle deformate improprie del paraboloide ellittico possono costruirsi famiglie (S) appartenenti a sistemi tripli coniugati.

Sappiamo che la determinazione di queste deformate improprie dipende dalla equazione a derivate parziali (l. c. § 47):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}=\operatorname{senh}\theta\cosh\theta,$$

dove le linee (u, v) tracciano sopra S il sistema coniugato permanente. Introducendo ora una terza variabile w, il sistema differenziale da cui dipendono i nuovi sistemi tripli coniugati, si scriverà nella terna di funzioni incognite

$$\theta=\theta(u, v, w),\quad \overline{A}=\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w},\quad \overline{B}=\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w},$$

sotto la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}=\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\\
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}=\overline{A}\cosh\theta,\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}=\overline{B}\operatorname{senh}\theta\\
&\frac{\partial \overline{A}}{\partial u}=-\frac{\partial\theta}{\partial u}\overline{B}+\cosh\theta\frac{\partial\theta}{\partial w},\quad \frac{\partial\overline{A}}{\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\overline{B}\\
&\frac{\partial\overline{B}}{\partial u}=\frac{\partial\theta}{\partial v}\overline{A},\quad \frac{\partial\overline{B}}{\partial v}=-\frac{\partial\theta}{\partial u}\overline{A}+\operatorname{senh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}.
\end{aligned}\right\}\quad \text{(VIII)}$$

Esso tiene qui il luogo del sistema (VI) § 16, e le sue soluzioni $(\theta, \overline{A}, \overline{B})$ dipendono ancora da *quattro* funzioni arbitrarie essenziali (cf. § 16).

Il sistema (VIII) possiede l'integrale quadratico

$$\overline{A}^2+\overline{B}^2-\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=f(w),$$

che possiamo scrivere, disponendo del parametro w

$$\overline{A}^2+\overline{B}^2-\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=\text{cost.}\tag{45}$$

Ad ogni terna (θ, $\bar{A}$, $\bar{B}$) di soluzioni delle (VIII) si coordina un sistema lineare omogeneo in quattro funzioni incognite $\bar{x}$, $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, che corrisponde al sistema (37) § 17, e si scrive:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u}=\dfrac{\cosh\theta}{\sqrt{q}}\bar{\eta}, \quad \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v}=\dfrac{\operatorname{senh}\theta}{\sqrt{q}}\bar{\zeta}, \quad \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial w}=\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\dfrac{\partial\theta}{\partial w}\bar{\xi} \\[2ex]
\dfrac{\partial \bar{\xi}}{\partial u}=\dfrac{\operatorname{senh}\theta}{\sqrt{p}}\bar{\eta}, \quad \dfrac{\partial \bar{\xi}}{\partial v}=\dfrac{\cosh\theta}{\sqrt{p}}\bar{\zeta}, \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial \bar{\xi}}{\partial w}=\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\dfrac{\partial\theta}{\partial w}\bar{x}+\sqrt{p}\,(\bar{A}\,\bar{\eta}+\bar{B}\,\bar{\zeta}) \\[2ex]
\dfrac{\partial \bar{\eta}}{\partial u}=-\dfrac{\cosh\theta}{\sqrt{q}}\bar{x}+\dfrac{\operatorname{senh}\theta}{\sqrt{p}}\bar{\xi}-\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\bar{\zeta}, \quad \dfrac{\partial \bar{\eta}}{\partial v}=\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\bar{\zeta}, \quad \dfrac{\partial \bar{\eta}}{\partial w}=\sqrt{p}\,\bar{A}\,\bar{\xi} \\[2ex]
\dfrac{\partial \bar{\zeta}}{\partial u}=\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\bar{\eta}, \quad \dfrac{\partial \bar{\zeta}}{\partial v}=-\dfrac{\operatorname{senh}\theta}{\sqrt{p}}\bar{x}+\dfrac{\cosh\theta}{\sqrt{q}}\bar{\xi}-\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\bar{\eta}, \quad \dfrac{\partial \bar{\zeta}}{\partial w}=\sqrt{p}\,\bar{B}\,\bar{\xi}.
\end{array}\right\} \tag{46}$$

Questo è un sistema completamente integrabile, a causa delle (VIII), e possiede l'integrale quadratico

$$\bar{x}^2-\bar{\xi}^2+\bar{\eta}^2+\bar{\zeta}^2=\text{cost.}$$

Come al § 17, noi normalizziamo le quaderne ($\bar{x}$, $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$) di soluzioni, per le quali non sia nulla la costante del secondo membro, col rendere

$$\bar{x}^2-\bar{\xi}^2+\bar{\eta}^2+\bar{\zeta}^2=\pm 1;$$

e se, interpretando nuovamente $\bar{x}$, $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ quali coordinate omogenee di punto, introduciamo la quadrica a punti ellittici

$$\bar{x}^2-\bar{\xi}^2+\bar{\eta}^2+\bar{\zeta}^2=0, \tag{Q}$$

si presenterà il primo ovvero il secondo caso, secondo che il punto ($\bar{x}$, $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$) è esterno ovvero interno alla quadrica (Q).

§ 21.

I corrispondenti sistemi tripli coniugati.

Consideriamo quattro quaderne $(\bar{x}_r, \bar{\xi}_r, \bar{\eta}_r, \bar{\zeta}_r)$ $r=0, 1, 2, 3$, integrali delle (46), i cui valori iniziali corrispondano ai quattro vertici $P_0\, P_1\, P_2\, P_3$ di un tetraedro coniugato rispetto alla quadrica (Q), il vertice P_0 essendo interno e gli altri tre esterni (cf. § 17); avremo in conseguenza che il determinante:

$$\left|\begin{array}{llll} \bar{x}_0\sqrt{-1}, & \bar{\xi}_0, & \bar{\eta}_0\sqrt{-1}, & \bar{\zeta}_0\sqrt{-1} \\ \bar{x}_1, & -\bar{\xi}_1\sqrt{-1}, & \bar{\eta}_1, & \bar{\zeta}_1 \\ \bar{x}_2, & -\bar{\xi}_2\sqrt{-1}, & \bar{\eta}_2, & \bar{\zeta}_2 \\ \bar{x}_3, & -\bar{\xi}_3\sqrt{-1}, & \bar{\eta}_3, & \bar{\zeta}_3 \end{array}\right| \tag{47}$$

sarà ortogonale, e sussisteranno in particolare le relazioni

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}_1^2+\bar{x}_2^2+\bar{x}_3^2=\bar{x}_0^2+1 \\ \bar{\xi}_1^2+\bar{\xi}_2+\bar{\xi}_3^2=\bar{\xi}_0^2-1 \\ \bar{x}_1\,\bar{\xi}_1+\bar{x}_2\,\bar{\xi}_2+\bar{x}_3\,\bar{\xi}_3=\bar{x}_0\,\bar{\xi}_0 . \end{array}\right\} \tag{48}$$

Se resta fissa w, le tre espressioni

$$d\,\bar{y}_i = q\,\bar{x}_i\,d\,\bar{x}_0 - p\,\bar{\xi}_i\,d\,\bar{\xi}_0 \qquad (i=1, 2, 3) \tag{49}$$

sono differenziali esatti, poichè, calcolandole nelle variabili u, v, abbiamo

$$d\,\bar{y}_i = \bar{\eta}_0\,(\sqrt{q}\cosh\theta\,\bar{x}_i - \sqrt{p}\,\mathrm{senh}\,\theta\,\bar{\xi}_i)\,d\,u + \bar{\zeta}_0\,(\sqrt{q}\,\mathrm{senh}\,\theta\,\bar{x}_i - \sqrt{p}\cosh\theta\,\bar{\xi}_i)\,d\,v,$$

ed è identicamente

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\bar{\eta}_0\,(\sqrt{q}\cosh\theta\,\bar{x}_i - \sqrt{p}\,\mathrm{senh}\,\theta\,\bar{\xi}_i)\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\bar{\zeta}_0\,(\sqrt{q}\,\mathrm{senh}\,\theta\,\bar{x}_i - \sqrt{p}\cosh\theta\,\bar{\xi}_i)\right] =$$

$$= \frac{\partial\,\bar{y}_0}{\partial\,v}\,(\sqrt{q}\cosh\theta\,\bar{x}_i - \sqrt{p}\,\mathrm{senh}\,\theta\,\bar{\xi}_i) + \frac{\partial\,\bar{\zeta}_0}{\partial\,u}\,(\sqrt{q}\,\mathrm{senh}\,\theta\,\bar{x}_i - \sqrt{p}\cosh\theta\,\bar{\xi}_i).$$

Le funzioni $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$, $\overline{y}_3$, determinate per quadrature dalle (49), soddisfano alle equazioni

$$\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial u} = \overline{\eta}_0 (\sqrt{q} \cosh\theta\, \overline{x}_i - \sqrt{p} \operatorname{senh}\theta\, \overline{\xi}_i)$$

$$\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial v} = \overline{\zeta}_0 (\sqrt{q} \operatorname{senh}\theta\, \overline{x}_i - \sqrt{p} \cosh\theta\, \overline{\xi}_i),$$

ed all'altra

$$\frac{\partial^2 \overline{y}_i}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \log \overline{\eta}_0}{\partial v} \frac{\partial \overline{y}_i}{\partial u} + \frac{\partial \log \overline{\zeta}_0}{\partial u} \frac{\partial \overline{y}_i}{\partial v}.$$

Il punto $\overline{P}$ di coordinate $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$, $\overline{y}_3$ descrive, al variare di u, v (restando fissa w), una superficie $\overline{S}$, il cui elemento è dato, per le (48), (49), da

$$d\overline{s}^2 = q^2 (1 + \overline{x}_0^2)\, d\overline{x}_0^2 - 2pq\, \overline{x}_0\, \overline{\xi}_0\, d\overline{x}_0\, d\overline{\xi}_0 + p^2 (\overline{\xi}_0^2 - 1)\, d\overline{\xi}_0^2,$$

e si identifica col ds^2 del paraboloide ellittico calcolato dalla (41*) § 18 col porre

$$x_0 = \overline{x}_0, \quad \xi_0 = \overline{\xi}_0 \sqrt{-1};$$

dunque le nostre superficie $\overline{S}$ sono applicabili sulla *regione ideale* del paraboloide ellittico

$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 2Z.$$

E nuovamente si ha che sulla $\overline{S}$ il sistema (u, v) è isotermo-coniugato, a parametri isometrici, e coincide col sistema coniugato permanente.

Dopo questi risultati, i rimanenti calcoli per costruire il sistema triplo coniugato procedono come al § 18, e si trovano così le formole:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{y}_i}{\partial u} &= \overline{\eta}_0 (\sqrt{q} \cosh\theta\, \overline{x}_i - \sqrt{p} \operatorname{senh}\theta\, \overline{\xi}_i) \\ \frac{\partial \overline{y}_i}{\partial v} &= \overline{\zeta}_0 (\sqrt{q} \operatorname{senh}\theta\, \overline{x}_i - \sqrt{p} \cosh\theta\, \overline{\xi}_i) \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \frac{\partial \overline{y}_i}{\partial w} &= p^{\frac{3}{2}}\, \overline{\xi}_0 \left(\sqrt{q}\, \frac{\partial \theta}{\partial w}\, \overline{x}_i - \overline{A}\, \overline{\eta}_i - \overline{B}\, \overline{\zeta}_i \right), \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

le quali definiscono per quadrature i sistemi tripli coniugati (u, v, w) colle $w = \text{cost.}$ deformate improprie del paraboloide ellittico.

Merita qui ancora speciale attenzione il caso che, nell'integrale quadratico (45) del sistema (VIII), sia nulla la costante del secondo membro, cioè si abbia

$$\overline{A}^2 + \overline{B}^2 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2.$$

La particolare classe di sistemi tripli coniugati così ottenuta corrisponde a quella del § 19, e la congruenza (C) delle tangenti alle trajettorie (w) nei punti di una deformata $\overline{S}$ impropria del paraboloide, trasportata dalla $\overline{S}$ sul paraboloide, viene a constare di raggi che si appoggiano alla parabola focale.

§ 22.

Le trasformazioni B_σ per le soluzioni dei sistemi (VI), (VIII) (§§ 16, 20).

I sistemi differenziali (VI), (VIII), dalla cui integrazione dipende rispettivamente la ricerca dei sistemi tripli coniugati (u, v, w) colle superficie $w =$ cost. applicabili sulla regione reale, ovvero sulla regione ideale, del paraboloide ellittico, possono legarsi fra loro mediante formole di trasformazione di Bäcklund B_σ nel modo seguente (*). Indicando con σ un angolo costante qualunque, *tale però che* $\cos\sigma$ *non sia nullo*, introduciamo le quattro espressioni

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \cos\sigma\cos\omega\,\mathrm{senh}\,\theta - \mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\omega\cosh\theta\\
\beta &= \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\omega\cosh\theta + \mathrm{sen}\,\sigma\cos\omega\,\mathrm{senh}\,\theta\\
\gamma &= \cos\sigma\cos\omega\cosh\theta - \mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{senh}\,\theta\\
\delta &= \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{senh}\,\theta + \mathrm{sen}\,\sigma\cos\omega\cosh\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Supposto ora che la terna di funzioni

$$\omega,\quad A = \frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w},\quad B = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}$$

(*) I teoremi che sviluppiamo in questo paragrafo sono già contenuti nella mia Memoria del 1887, citata al § 16 (Vedi n.° 18 della detta Memoria). Nuova ne è qui l'interpretazione geometrica riguardo alle deformate del paraboloide ellittico.

soddisfi alle (VI) § 16, consideriamo per la funzione incognita $\theta = \theta(u, v, w)$ il seguente sistema di equazioni differenziali simultanee:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = \beta - \dfrac{\partial \omega}{\partial v}, \quad \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = \dfrac{\partial \omega}{\partial u} - \alpha \\ \cos\sigma \dfrac{\partial \theta}{\partial w} = \operatorname{sen}\sigma \dfrac{\partial \omega}{\partial w} + A \cosh\theta - B \operatorname{senh}\theta. \end{array}\right\} \tag{52}$$

Tenendo conto delle (VI), si vede che queste formano, rispetto a θ, un sistema completamente integrabile, sicchè la soluzione generale θ contiene (oltre σ) una costante arbitraria. Ora, se poniamo

$$\overline{A} = \frac{1}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial w}, \quad \overline{B} = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v\, \partial w},$$

dalla (52_3), derivando rapporto ad u, v, seguono le formole:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\sigma\, \overline{A} = \cos\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial w} + \delta A - \beta B \\ \cos\sigma\, \overline{B} = \operatorname{sen}\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial w} - \alpha A + \gamma B. \end{array}\right\} \tag{53}$$

Con queste formole (52), (53) si constata subito che la terna $(\theta, \overline{A}, \overline{B})$ viene sempre a soddisfare al sistema (VIII) § 20. Inoltre, sommando i quadrati della (53) e sottraendovi il quadrato della (52_3) si trova la formola importante:

$$\overline{A}^2 + \overline{B}^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 = B^2 - A^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial w}\right)^2. \tag{54}$$

Notiamo poi che, se si risolvono rispetto ad A, B, $\dfrac{\partial \omega}{\partial w}$ le tre equazioni lineari (53) e (52_3), risultano le altre:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\sigma\, A = \cosh\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial w} - \delta \overline{A} + \alpha \overline{B} \\ \cos\sigma\, B = \operatorname{senh}\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial w} - \beta \overline{A} + \gamma \overline{B} \\ \cos\sigma \dfrac{\partial \omega}{\partial w} = -\operatorname{sen}\sigma \dfrac{\partial \theta}{\partial w} + \overline{A}\cos\omega + \overline{B}\operatorname{sen}\omega. \end{array}\right\} \tag{55}$$

Dopo ciò, se supponiamo ora data la terna di funzioni $(\theta, \overline{A}, \overline{B})$ che soddisfi alle (VIII), il sistema simultaneo per ω

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial u}=\alpha+\frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial v}=\beta-\frac{\partial \theta}{\partial u} \\ \cos\sigma\frac{\partial \omega}{\partial w}=-\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial \theta}{\partial w}+\bar{A}\cos\omega+\bar{B}\operatorname{sen}\omega\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

risulta illimitatamente integrabile, e le tre funzioni

$$\omega, \quad A=\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial w}, \quad B=\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial v\,\partial w}$$

vengono a soddisfare alle (VI) § 16.

In fine si osservi che i sistemi differenziali (52) per θ, o (56) per ω, ove si assumano rispettivamente per funzioni incognite $\operatorname{tgh}\frac{\theta}{2}$, o $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$, prendono la forma di equazioni ai differenziali totali del tipo di Riccati (completamente integrabili). Per la ricerca delle soluzioni dei sistemi (VI) e (VIII), possono quindi applicarsi i metodi di *integrazione alternata*, dove, appena integrata la prima equazione di Riccati, l'applicazione indefinitamente ripetuta del processo richiede sole quadrature. Ma anche le quadrature possono risparmiarsi, facendo uso del *teorema di permutabilità* le cui formole sono facili a stabilirsi (*).

§ 23.

Le trasformazioni B_σ per le quaderne (x, ξ, η, ζ), $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$.

Abbiasi una qualunque coppia (ω, θ) di soluzioni dei rispettivi sistemi differenziali (VI), (VIII), legate fra loro dalle formole (52) di una trasformazione B_σ. Supponiamo inoltre che, corrispondentemente ad ω, sia nota una quaderna (x, ξ, η, ζ) di soluzioni delle equazioni differenziali (37) § 17, e mostriamo come ne risulti determinata biunivocamente una corrispondente quaderna $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ di soluzioni delle (46) § 20. Per questo introduciamo la co-

(*) Le formole in questione sono date al § 8 della mia Memoria: *Sulla deformazione dei paraboloidi*, Annali di matematica, t. IX, Serie 3ª, 1903.

stante k definita dalla formola

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{p}-\cos^2\sigma=\frac{1}{q}+\operatorname{sen}^2\sigma, \tag{57}$$

e poniamo

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x}&=\sqrt{k}\left(-\operatorname{sen}\sigma\,x-\frac{\cosh\theta}{\sqrt{q}}\eta+\frac{\operatorname{senh}\theta}{\sqrt{q}}\zeta\right)\\
\bar{\xi}&=\sqrt{k}\left(-\cos\sigma\,\xi-\frac{\operatorname{senh}\theta}{\sqrt{p}}\eta+\frac{\cosh\theta}{\sqrt{p}}\zeta\right)\\
\bar{\eta}&=\sqrt{k}\left(\frac{\cos\omega}{\sqrt{q}}x-\frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{p}}\xi-\delta\,\eta+\beta\,\zeta\right)\\
\bar{\zeta}&=\sqrt{k}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{q}}x+\frac{\cos\omega}{\sqrt{p}}\xi+\alpha\,\eta-\gamma\,\zeta\right).
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

La nuova quaderna $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ soddisfa, come subito si verifica, alle (46) § 20; inoltre fra le due quaderne corrispondenti sussiste l'identità

$$\bar{x}^2-\bar{\xi}^2+\bar{\eta}^2+\bar{\zeta}^2=x^2+\xi^2+\eta^2-\zeta^2. \tag{59}$$

Risolvendo le equazioni lineari (58) rispetto alla quaderna x, ξ, η, ζ, si hanno le formole inverse

$$\left.\begin{aligned}
x&=\sqrt{k}\left(-\operatorname{sen}\sigma\,\bar{x}+\frac{\cos\omega}{\sqrt{q}}\bar{\eta}+\frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{q}}\bar{\zeta}\right)\\
\xi&=\sqrt{k}\left(\cos\sigma\,\bar{\xi}-\frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{p}}\bar{\eta}+\frac{\cos\omega}{\sqrt{p}}\bar{\zeta}\right)\\
\eta&=\sqrt{k}\left(-\frac{\cosh\theta}{\sqrt{q}}\bar{x}+\frac{\operatorname{senh}\theta}{\sqrt{p}}\bar{\xi}-\delta\,\bar{\eta}+\alpha\,\bar{\zeta}\right)\\
\zeta&=\sqrt{k}\left(-\frac{\operatorname{senh}\theta}{\sqrt{q}}\bar{x}+\frac{\cosh\theta}{\sqrt{p}}\bar{\xi}-\beta\,\bar{\eta}+\gamma\,\bar{\zeta}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

e queste dimostrano reciprocamente che ad una quaderna $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ di soluzioni delle (46) corrisponde una ed una sola quaderna (x, ξ, η, ζ) di soluzioni delle (37).

Dalla identità (59) segue poi che se (x, ξ, η, ζ), $(x', \xi', \eta', \zeta')$ sono due quaderne qualunque di soluzioni delle (37), e con $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$, $(\bar{x}', \bar{\xi}', \bar{\eta}', \bar{\zeta}')$ si indicano le corrispondenti delle (46), si ha identicamente

$$\bar{x}\bar{x}'-\bar{\xi}\bar{\xi}'+\bar{\eta}\bar{\eta}'+\bar{\zeta}\bar{\zeta}'=x\,x'+\xi\,\xi'+\eta\,\eta'-\zeta\,\zeta';$$

dunque: *Un tetraedro coniugato di soluzioni delle* (37) $(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r)$ $r = 0, 1, 2, 3$ *si muta, colle formole* (58), *in un tetraedro coniugato di soluzioni* $(\overline{x}_r, \overline{\xi}_r, \overline{\eta}_r, \overline{\zeta}_r)$ *delle* (46).

§ 24.

Le trasformazioni B_k pei sistemi tripli coniugati.

Dopo tutti questi preparativi, possiamo venire all'oggetto finale della nostra ricerca e dimostrare il teorema: *Le trasformazioni B_σ del § 22, per le soluzioni ω, θ dei sistemi differenziali* (VI), (VIII), *si traducono geometricamente in trasformazioni asintotiche B_k pei sistemi tripli coniugati contenenti una serie di deformate del paraboloide ellittico; esse conducono dai sistemi con deformate proprie a sistemi con deformate improprie, e viceversa. Le coppie di deformate corrispondenti S, $\overline{S}$ sono legate fra loro da una B_k della teoria generale, la costante k avendo il valore assegnato dalla formola* (57).

Il primo sistema (S), con deformate proprie, sia definito (a meno di una traslazione nello spazio) dalle formole (42) § 18, corrispondentemente ad una soluzione ω delle (VI) e ad un tetraedro coniugato di soluzioni $(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r)$ delle (37). Colle formole (58) del paragrafo precedente, calcoliamo un corrispondente tetraedro coniugato di soluzioni $(\overline{x}_r, \overline{\xi}_r, \overline{\eta}_r, \overline{\zeta}_r)$ delle (46), essendo θ legato dalle formole della trasformazione B_σ del § 22. Colle formole (50) del § 21, noi determiniamo (a meno di una traslazione) il corrispondente sistema triplo coniugato con una serie $(\overline{S})$ di deformate improprie del paraboloide ellittico. Dimostriamo che, supposta fissata la posizione di (S) nello spazio, si può determinare in uno ed in un sol modo quella di $(\overline{S})$ in guisa che sia soddisfatta la condizione seguente: *Le congiungenti coppie di punti corrispondenti di due superficie corrispondenti S, $\overline{S}$ formino una congruenza W, di guisa che appunto S, $\overline{S}$ risulteranno legate fra loro da una B_k della teoria generale.*

Intanto si osservi che, sostituendo nelle due prime (50) per $\overline{x}_i$, $\overline{\xi}_i$, $\overline{\eta}_i$, $\overline{\zeta}_i$ i valori tratti dalle (58), abbiamo le formole:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial u} &= \sqrt{k}\,\overline{\eta}_0\left(-\sqrt{q}\operatorname{sen}\sigma\cosh\theta\, x_i + \sqrt{p}\cos\sigma\operatorname{senh}\theta\,\xi_i - \eta_i\right)\\ \frac{\partial \overline{y}_i}{\partial v} &= \sqrt{k}\,\overline{\zeta}_0\left(-\sqrt{q}\operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh}\theta\, x_i + \sqrt{p}\cos\sigma\cosh\theta\,\xi_i + \zeta_i\right).\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Se la proprietà indicata sussiste, deve essere possibile determinare due incognite l, m per modo che sussistano le relazioni

$$\overline{y}_i = y_i + l\frac{\partial y_i}{\partial u} + m\frac{\partial y_i}{\partial v} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

ovvero per le (42)

$$\overline{y}_i = y_i + l\,\eta_0\,(\sqrt{q}\cos\omega\, x_i - \sqrt{p}\,\mathrm{sen}\,\omega\,\xi_i) + m\,\zeta_0\,(\sqrt{q}\,\mathrm{sen}\,\omega\, x_i + \sqrt{p}\cos\omega\,\xi_i).$$

Se deriviamo queste rapporto ad u, v (colle (37) § 17 e le (42) § 18), dal confronto dei coefficienti di η_i, ζ_i con quelli corrispondenti nelle (61) deduciamo

$$l = -\sqrt{k}\,\frac{\overline{\eta}_0}{\eta_0}\,, \quad m = -\sqrt{k}\,\frac{\overline{\zeta}_0}{\zeta_0}\,,$$

e così per le formole richieste

$$\overline{y}_i = y_i - \sqrt{k}\left(\frac{\overline{\eta}_0}{\eta_0}\frac{\partial y_i}{\partial u} + \frac{\overline{\zeta}_0}{\zeta_0}\frac{\partial y_i}{\partial v}\right) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{62}$$

ovvero, esprimendo tutto per gli elementi relativi al primo sistema (S):

$$\left.\begin{aligned}\overline{y}_i = y_i - k\,x_i\Big[x_0 - \sqrt{q}\,\mathrm{sen}\,\sigma\,(\eta_0\cosh\theta - \zeta_0\,\mathrm{senh}\,\theta)\Big] \\ - k\,\xi_i\Big[\xi_0 + \sqrt{p}\cos\sigma\,(\eta_0\,\mathrm{senh}\,\theta - \zeta_0\cosh\theta)\Big]\,.\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Se si formano le derivate rapporto ad u, v, w di queste tre espressioni si verifica che esse riescono identiche alle derivate delle $\overline{y}_i$ calcolate dalle (50) § 21. Concludiamo che, mediante le formole (62) o (63), il sistema triplo coniugato $(\overline{S})$ viene collocato nello spazio nella posizione voluta rispetto al sistema (S).

§ 25.

SISTEMI TRIPLI CONIUGATI CON DEFORMATE PROPRIE DEL PARABOLOIDE IPERBOLICO.

Passiamo ora a trattare dei sistemi tripli coniugati contenenti una serie di deformate proprie, ovvero improprie, del paraboloide iperbolico

$$\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 1,$$

fra i cui parametri p, q *positivi* porremo (Vol. III, § 87) la relazione

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1. \tag{64}$$

L'analogia della ricerca con quella già eseguita pel caso del paraboloide ellittico ci permette qui di limitarci soltanto ad indicare i punti principali della ricerca.

Cominciando dal caso delle deformate *proprie*, ricordiamo (Vol. III, § 87) che la loro determinazione dipende dalla equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \operatorname{senh} \theta \cosh \theta.$$

Introducendo ora una terza variabile w, la determinazione dei sistemi tripli coniugati (u, v, w) colle $w =$ cost. applicabili sulla regione reale del detto paraboloide dipenderà dal seguente sistema differenziale nella terna (θ, A, B) di funzioni incognite:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \operatorname{senh} \theta \cosh \theta \\
&\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} = A \cosh \theta, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} = B \operatorname{senh} \theta \\
&\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} B - \cosh \theta \frac{\partial \theta}{\partial w}, \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} B \\
&\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} A, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} A + \operatorname{senh} \theta \frac{\partial \theta}{\partial w}.
\end{aligned}\right\} \tag{IX}$$

Esso tiene qui il luogo del sistema (VI) § 16 ed ammette soluzioni (θ, A, B) dipendenti da quattro funzioni arbitrarie essenziali; inoltre possiede l'integrale quadratico

$$A^2 - B^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 = F(w),$$

che al solito, disponendo del parametro w, può scriversi più semplicemente

$$A^2 - B^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 = \text{cost.} \tag{65}$$

Al sistema (IX), supposto soddisfatto da θ, A, B, si coordina il seguente sistema lineare omogeneo in quattro funzioni incognite x, ξ, η, ζ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\cosh\theta}{\sqrt{p}}\eta, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\operatorname{senh}\theta}{\sqrt{p}}\zeta, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\frac{\partial \theta}{\partial w}\xi \\
&\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\operatorname{senh}\theta}{\sqrt{q}}\eta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\cosh\theta}{\sqrt{q}}\zeta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial w} = -\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\frac{\partial \theta}{\partial w}x - \sqrt{q}\,A\,\eta + \sqrt{q}\,B\,\zeta \\
&\frac{\partial \eta}{\partial u} = -\frac{\cosh\theta}{\sqrt{p}}x - \frac{\operatorname{senh}\theta}{\sqrt{q}}\xi + \frac{\partial \theta}{\partial v}\zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial w} = \sqrt{q}\,A\,.\,\xi \\
&\frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\eta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = \frac{\operatorname{senh}\theta}{\sqrt{p}}x + \frac{\cosh\theta}{\sqrt{q}}\xi + \frac{\partial \theta}{\partial u}\eta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial w} = \sqrt{q}\,B\,.\,\xi,
\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

che è un sistema completamente integrabile, per le (IX), e possiede l'integrale quadratico:

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = \text{cost.}$$

Normalizziamo, come al § 17, ogni quaderna (x, ξ, η, ζ), per la quale non sia nulla la costante del secondo membro, col rendere

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1, \quad \text{ovvero} \quad x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = -1,$$

secondo che il punto di coordinate omogenee (x, ξ, η, ζ) è esterno o interno alla quadrica a punti ellittici

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0.$$

In fine prendiamo anche qui una quaderna di soluzioni

$$(x_r,\ \xi_r,\ \eta_r,\ \zeta_r) \qquad r = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

corrispondente ad un tetraedro $P_0 P_1 P_2 P_3$ coniugato rispetto a questa quadrica, di cui sia P_0 il vertice interno.

Se teniamo fissa w, le tre espressioni

$$d y_i = p x_i d x_0 - q \xi_i d \xi_0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sono tre differenziali esatti e la superficie S, descritta dal punto P di coordinate y_1, y_2, y_3 al variare di u, v, ha l'elemento lineare

$$d s^2 = p^2 (1 + x_0^2) d x_0^2 - 2 p q x_0 \xi_0 d x_0 d \xi_0 + q^2 (1 + \xi_0^2) d \xi_0^2,$$

che appartiene alla quadrica

$$X = p x_0 \qquad Y = q \xi_0 \qquad Z = \frac{p x_0^2 - q \xi_0^2}{2},$$

cioè alla regione reale del paraboloide iperbolico

$$\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 2 Z.$$

Inoltre sulla S il sistema (u, v) è isotermo-coniugato, a parametri isometrici, e coincide col sistema coniugato permanente.

Facendo ora variare w, si possono situare le deformate S del paraboloide iperbolico nello spazio in guisa che la serie (S) appartenga ad un sistema triplo coniugato (u, v, w). Per questo basta procedere come al § 18, e si ottengono le formole definitive:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial y_i}{\partial u} &= \eta_0 (\sqrt{p} \cosh \theta\, x_i - \sqrt{q} \operatorname{senh} \theta\, \xi_i) \\
\frac{\partial y_i}{\partial v} &= \zeta_0 (\sqrt{p} \operatorname{senh} \theta\, x_i - \sqrt{q} \cosh \theta\, \xi_i) \qquad (i = 1, 2, 3). \\
\frac{\partial y_i}{\partial w} &= q^{\frac{3}{2}} \zeta_0 \left(\sqrt{p} \frac{\partial \theta}{\partial w} x_i + A \eta_i - B \zeta_i\right)
\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Le condizioni d'integrabilità per le (67) sono identicamente soddisfatte, ed abbiamo così determinato per quadrature il sistema triplo coniugato richiesto (u, v, w), nel quale le superficie S della serie $w = \text{cost.}$ sono deformate proprie del paraboloide iperbolico.

§ 26.

Classe particolare associata ad una parabola focale.

Consideriamo quella classe particolare degli attuali sistemi tripli coniugati, per la quale è nulla la costante del secondo membro nell' integrale quadratico (65), cioè

$$B^2 - A^2 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2.$$

Indicando allora con φ una nuova funzione incognita, potremo porre p. es.

$$B = \cosh \varphi \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad A = \operatorname{senh} \varphi \frac{\partial \theta}{\partial w}.$$

(l'altra ipotesi $B = -\cosh \varphi \frac{\partial \theta}{\partial w}$, $A = \operatorname{senh} \varphi \frac{\partial \theta}{\partial w}$ conducendo a formole del tutto simili), dopo di che le equazioni (IX) si riducono semplicemente al seguente sistema:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} \varphi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \cosh \theta \cosh \varphi \\ &\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} = \cosh \theta \operatorname{senh} \varphi \frac{\partial \theta}{\partial w}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} = \operatorname{senh} \theta \cosh \varphi \frac{\partial \theta}{\partial w}, \end{aligned}\right\} \quad (\text{IX}^*)$$

che possiede soluzioni dipendenti da tre funzioni arbitrarie essenziali.

Come al § 19, consideriamo la congruenza (C), formata dalle tangenti alle trajettorie (w) nei punti di una superficie S, come invariabilmente legata alle flessioni di S e dimostriamo: *Se la superficie S si applica sul paraboloide iperbolico, i raggi della congruenza (C) vengono tutti ad appoggiarsi alla parabola focale:*

$$Y = 0, \quad X^2 = (p + q)(2Z + q).$$

Cominciamo dall'osservare che, secondo le (67), i coseni di direzione Y_1, Y_2, Y_3 della normale alla S sono dati da

$$Y_i = \frac{\zeta_0 \eta_i - \eta_0 \zeta_i}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

mentre i coseni di direzione Z_1, Z_2, Z_3 delle tangenti alle trajettorie (w) sono proporzionali, per la (67_3), alle espressioni

$$Z_i \equiv \sqrt{p}\, x_i + \eta_i \operatorname{senh} \varphi - \zeta_i \cosh \varphi.$$

Poniamo questi valori sotto la forma invariabile per flessione (cf. § 19)

$$Z_i = l \frac{\partial y_i}{\partial x_0} + m \frac{\partial y_i}{\partial \xi_0} + n\, Y_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

e troveremo, procedendo nello stesso modo come al § 19:

$$l\, p = \sqrt{p} + \frac{\eta_0 \operatorname{senh} \varphi + \zeta_0 \cosh \varphi}{\zeta_0^2 - \eta_0^2} \cdot x_0$$

$$-m\, q = \frac{\eta_0 \operatorname{senh} \varphi + \zeta_0 \cosh \varphi}{\zeta_0^2 - \eta_0^2} \cdot \xi_0$$

$$n = \frac{\eta_0 \cosh \varphi + \zeta_0 \operatorname{senh} \varphi}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}}.$$

Se diamo alla S la forma del paraboloide iperbolico, ponendo

$$y_1 = p\, x_0, \quad y_2 = q\, \xi_0, \quad y_3 = \frac{p\, x_0^2 - q\, \xi_0^2}{2},$$

avremo

$$Y_1 = -\frac{x_0}{\sqrt{\zeta_1^2 - \eta_0^2}}, \quad Y_2 = \frac{\xi_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}}, \quad Y_3 = \frac{1}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}},$$

ed omettendo in Z_1, Z_2, Z_3 un fattore di proporzionalità si trova

$$Z_1 \equiv \sqrt{p}\, (\zeta_0 + \eta_0) + e^{-\varphi} x_0, \quad Z_2 \equiv - e^{-\varphi} \xi_0$$

$$Z_3 \equiv \sqrt{p}\, x_0 (\zeta_0 + \eta_0) + (\eta_0 \operatorname{senh} \varphi + \zeta_0 \cosh \varphi)\, (\zeta_0 + \eta_0) - e^{-\varphi}.$$

Le coordinate X, Y, Z di un punto qualunque del raggio (x_0, ξ_0) della nostra congruenza si scrivono

$$X = y_1 + T Z_1, \quad Y = y_2 + T Z_2, \quad Z = y_3 + T Z_3,$$

ed al punto d'incontro del raggio col piano XZ corrisponde pel parametro T il valore

$$T = -\frac{y_2}{Z_2} = q\, e^{\varphi}.$$

Dopo ciò i valori di X, Z diventano

$$X = (p+q)\,x_0 + q\sqrt{p}\,e^{\varphi}(\zeta_0 + \eta_0)$$

$$Z = \frac{p\,x_0^2 - q\,\xi_0^2}{2} + q\sqrt{p}\,e^{\varphi}\,x_0(\zeta + \eta_0) + q\,e^{\varphi}(\eta_0 \operatorname{senh}\varphi + \zeta_0 \cosh\varphi)(\zeta_0 + \eta_0) - q,$$

e resta solo da verificare che questi soddisfano alla equazione della parabola focale

$$X^2 = (p+q)(2Z + q).$$

Tenendo conto della relazione (64) fra $p, q : p + q = p\,q$, la relazione ora scritta si cangia nella identità

$$x_0^2 + \xi_0^2 + \eta_0^2 - \zeta_0^2 = -1$$

e la proposizione è dimostrata.

§ 27.

Le trasformazioni B_k dei nuovi sistemi tripli coniugati.

Indicando con σ una costante arbitraria, con θ' una nuova funzione di (u, v, w), pongasi

$$\alpha = \cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta' + \operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \cosh\theta'$$

$$\beta = \cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta' + \operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta'$$

$$\gamma = \cosh\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta' + \operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta'$$

$$\delta = \cosh\sigma \cosh\theta \cosh\theta' + \operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta',$$

e si consideri il sistema di equazioni simultanee per θ':

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\theta'}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} = -\beta, \quad \frac{\partial\theta'}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial v} = \gamma \\ &\frac{\partial\theta'}{\partial w} + \operatorname{tgh}\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w} = \frac{1}{\cosh\sigma}(A\cosh\theta' + B\operatorname{senh}\theta'). \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

A causa delle (IX), questo è un sistema completamente integrabile per θ', e la soluzione generale contiene (oltre σ) una seconda costante arbitraria.

Ora se poniamo

$$A' = \frac{1}{\cosh\theta'}\frac{\partial^2\theta'}{\partial u\,\partial w}, \quad B' = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta'}\frac{\partial^2\theta'}{\partial v\,\partial w},$$

troviamo facilmente dalle (68)

$$\left.\begin{aligned} \cosh\sigma\,.\,A' &= -\alpha A - \beta B - \cosh\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} \\ \cosh\sigma\,.\,B' &= \gamma A + \delta B + \operatorname{senh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}\,. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Da queste formole risulta, con breve calcolo, che la terna di funzioni (θ', A', B') soddisfa nuovamente alle (IX). Anche è da osservarsi che, quadrando e sottraendo le (69), risulta

$$A'^2 - B'^2 + \left(\frac{\partial\theta'}{\partial w}\right)^2 = A^2 - B^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2, \tag{70}$$

cioè, nel passaggio da una terna (θ, A, B) di soluzioni delle (IX) ad una terna trasformata, la costante del secondo membro nell'integrale quadratico (65) resta invariata.

Siano ora θ, θ' due tali soluzioni delle (IX), legate fra loro dalle (68), che diremo le formole della trasformazione B_σ, e sia nota, in corrispondenza alla θ, una quaderna (x, ξ, $\varkappa$, ζ) di soluzioni delle (66). In analogia ai risultati del § 23, ne dedurremo una quaderna *corrispondente* (x', ξ', η', ζ') relativa alla funzione θ', colle seguenti formole di sostituzione lineare. Posto

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{p} + \operatorname{senh}^2\sigma = \cosh^2\sigma - \frac{1}{q}, \tag{71}$$

avremo

$$\left.\begin{aligned} x' &= \sqrt{k}\left(-\operatorname{senh}\sigma\,.\,x + \frac{\cosh\theta'}{\sqrt{p}}\eta + \frac{\operatorname{senh}\theta'}{\sqrt{p}}\zeta\right) \\ \xi' &= \sqrt{k}\left(\cosh\sigma\,.\,\xi + \frac{\operatorname{senh}\theta'}{\sqrt{q}}\eta + \frac{\cosh\theta'}{\sqrt{q}}\zeta\right) \\ \eta' &= -\sqrt{k}\left(\frac{\cosh\theta}{\sqrt{p}}x + \frac{\operatorname{senh}\theta}{\sqrt{q}}\xi + \alpha\eta + \beta\zeta\right) \\ \zeta' &= \sqrt{k}\left(\frac{\operatorname{senh}\theta}{\sqrt{p}}x + \frac{\cosh\theta}{\sqrt{q}}\xi + \gamma\eta + \delta\zeta\right), \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

e sarà identicamente

$$x'^2 + \xi'^2 + \eta'^2 - \zeta'^2 = x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2.$$

Ne segue che quattro quaderne $(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r)$ $r = 0, 1, 2, 3$, appartenenti ad un tetraedro coniugato si cangiano, colle (72), in altre quattro quaderne $(x'_r, \xi'_r, \eta'_r, \zeta'_r)$ della medesima specie. Ora siano (S), (S') le corrispondenti famiglie di deformate proprie del paraboloide iperbolico appartenenti a sistemi tripli coniugati (u, v, w), dei quali il primo è definito, a meno di una traslazione nello spazio, dalle formole (67), ed il secondo dalle formole analoghe:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial y'_i}{\partial u} &= \eta'_0 (\sqrt{p} \cosh \theta' x'_i - \sqrt{q} \operatorname{senh} \theta' \xi'_i) \\
\frac{\partial y'_i}{\partial v} &= \zeta'_0 (\sqrt{p} \operatorname{senh} x' \xi'_i - \sqrt{q} \cosh \theta' \xi'_i) \qquad (i = 1, 2, 3) \\
\frac{\partial y'_i}{\partial w} &= q^{-\frac{3}{2}} \xi'_0 \left(\sqrt{p} \frac{\partial \theta'}{\partial w} x'_i + A' \eta'_i - B' \zeta'_i\right).
\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Si tratta anche qui di dimostrare che le famiglie (S), (S') possono collocarsi nello spazio in tale posizione relativa che due superficie corrispondenti qualunque S, S' risultino legate fra loro da una trasformazione asintotica B_k. Per questo, procedendo come al § 24, cerchiamo di soddisfare alle (73) ponendo

$$y'_i = y_i + l \frac{\partial y_i}{\partial u} + m \frac{\partial y_i}{\partial v} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{74}$$

con valori convenienti di l, m. Le due prime (73), introducendovi i valori (72) si scrivono

$$\frac{\partial y'_i}{\partial u} = \sqrt{k}\, \eta'_0 (-\sqrt{p} \operatorname{senh} \sigma \cosh \theta' x_i - \sqrt{q} \cosh \sigma \operatorname{senh} \theta' \xi_i + \eta_i)$$

$$\frac{\partial y'_i}{\partial v} = -\sqrt{k}\, \zeta'_0 (\sqrt{p} \operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \theta' x_i + \sqrt{q} \cosh \sigma \cosh \theta' \xi_i + \zeta_i),$$

e paragonando i coefficienti di η_i, ζ_i in queste coi corrispondenti che risultano dalla derivazione diretta delle (74), si trova

$$l = \sqrt{k} \frac{\eta'_0}{\eta_0}, \quad m = \sqrt{k} \frac{\zeta'_0}{\zeta_0},$$

e quindi

$$y'_i = y_i + \sqrt{k}\left(\frac{\eta'_0}{\eta_0}\frac{\partial y_i}{\partial u} + \frac{\zeta'_0}{\zeta_0}\frac{\partial y_i}{\partial v}\right),$$

le quali formole si mutano nelle definitive:

$$\left.\begin{aligned} y'_i = y_i - k\,x_i &\left[x_0 + \sqrt{p}\,\mathrm{senh}\,\sigma\,(\eta_0 \cosh\theta' + \zeta_0\,\mathrm{senh}\,\theta')\right] \\ - k\,\xi_i &\left[\xi_0 + \sqrt{q}\cosh\sigma\,(\eta_0\,\mathrm{senh}\,\theta' + \zeta_0\cosh\theta')\right]. \end{aligned}\right\} \tag{74*}$$

È facile constatare che, mediante queste formole, le due famiglie (S), (S') vengono ad acquistare effettivamente nello spazio la posizione voluta.

§ 28.

Sistemi tripli coniugati con deformate improprie del paraboloide iperbolico.

Si sa che le deformate improprie del paraboloide iperbolico dipendono dalla equazione stessa

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

che si presenta per le superficie pseudosferiche ordinarie (cfr. Vol. III, § 87); dimostreremo ora che i sistemi tripli coniugati con una serie di tali deformate dipendono dalle equazioni che caratterizzano i sistemi pseudosferici di Weingarten. Queste sono le (I) § 4, ove essendo R costante, *prenderemo* $R = 1$. Indichino, come prima, p, q due costanti positive legate fra loro dalla relazione (64), e si consideri nella quaderna (x, ξ, η, ζ) di funzioni incognite il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{p}}\eta, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{p}}\zeta, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\frac{\partial\theta}{\partial w}\xi - \sqrt{p}\,A\,\eta - \sqrt{p}\,B\,\zeta \\
&\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{q}}\eta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{q}}\zeta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial w} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\frac{\partial\theta}{\partial w}x \\
&\frac{\partial \eta}{\partial u} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{p}}x + \frac{\cos\theta}{\sqrt{q}}\xi + \frac{\partial\theta}{\partial v}\zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u}\zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial w} = \sqrt{p}\,A\,.\,x \\
&\frac{\partial \zeta}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}\eta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = -\frac{\cos\theta}{\sqrt{p}}x + \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{q}}\xi - \frac{\partial\theta}{\partial u}\eta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial w} = \sqrt{p}\,B\,.\,x.
\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Il sistema è illimitatamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$x^2 - \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{cost}.$$

Normalizziamo le quaderne (x, ξ, η, ζ) di soluzioni (per le quali non è nulla la costante del secondo membro) col rendere al solito

$$x^2 - \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \pm 1,$$

ed assumiamo quattro quaderne $(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r)$ $r = 0, 1, 2, 3$ di soluzioni delle (75) corrispondenti ad un tetraedro $P_0 P_1 P_2 P_3$ coniugato rispetto alla quadrica

$$x^2 - \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0,$$

dei cui quattro vertici P_0 sia l'interno; avremo in particolare (cf. § 21)

$$\begin{gathered} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_0^2 + 1 \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \xi_0^2 - 1 \\ x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 = x_0 \xi_0 . \end{gathered}$$

Ora, *se manteniamo fissa w*, le tre espressioni

$$d y_i = p x_i d x_0 + q \xi_i d \xi_0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sono differenziali esatti, ed il punto P di coordinate ortogonali y_1, y_2, y_3 descrive, al variare di u, v, una superficie S il cui $d s^2$ è dato da

$$d s^2 = p^2 (x_0^2 + 1) d x_0^2 + 2 p q x_0 \xi_0 d x_0 d \xi_0 + q^2 (\xi_0^2 - 1) d \xi_0^2,$$

ed appartiene alla quadric di equazioni parametriche

$$X = p \quad {}_0, \quad Y = i q \xi_0, \quad Z = \frac{p x_0^2 + q \xi_0^2}{2},$$

cioè alla regione *ideale* del paraboloide iperbolico (reale)

$$\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 2 Z.$$

Infine, facendo variare w, otteniamo una famiglia (S) appartenente ad un sistema triplo coniugato, purchè si determini convenientemente, col solito processo, $\frac{\partial y_i}{\partial w}$; così troviamo le formole definitive

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial y_i}{\partial u} &= \eta_0 \left(\sqrt{q} \cos\theta\, \xi_i - \sqrt{p} \operatorname{sen}\theta\, x_i\right) \\
\frac{\partial y_i}{\partial v} &= \zeta_0 \left(\sqrt{q} \operatorname{sen}\theta\, \xi_i + \sqrt{p} \cos\theta\, x_i\right) \qquad (i = 1, 2, 3) \\
\frac{\partial y_i}{\partial w} &= p^{\frac{3}{2}}\, x_0 \left(\sqrt{q}\, \frac{\partial \theta}{\partial u}\, \xi_i - A\, \eta_i - B\, \zeta_i\right).
\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Queste definiscono, a meno di una traslazione, gli attuali sistemi tripli coniugati (u, v, w) colle superficie S della serie $w = \text{cost.}$ ápplicabili sulla regione ideale del paraboloide iperbolico.

Aggiungiamo infine, senza sviluppare i calcoli relativi, che le trasformazioni B_σ di Bäcklund dei sistemi pseudosferici di Weingarten si traducono in corrispondenti trasformazioni asintotiche B_k degli attuali sistemi tripli coniugati.

§ 29.

Sistemi tripli coniugati con deformate del paraboloide rotondo reale.

Ritorniamo sui risultati dei §§ 16-21, relativi ai sistemi tripli coniugati con deformate del paraboloide ellittico generale, e completiamoli colla considerazione del caso del paraboloide rotondo che sfugge all'analisi ivi sviluppata.

Le deformate (proprie) di quest'ultimo paraboloide dipendono dall'equazione a derivate parziali: $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = 0$, e la ricerca dei corrispondenti sistemi tripli coniugati dal seguente sistema di equazioni alle derivate parziali:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial w} = A \cos\omega, \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial v\, \partial w} = B \operatorname{sen}\omega \\
&\frac{\partial A}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v} B, \qquad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} B \\
&\frac{\partial B}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v} A, \qquad \frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} A,
\end{aligned}\right\} \tag{X}$$

che tiene qui il luogo del sistema (VI) § 16 e verrà ridotto più oltre a forme più semplici (§ 30); esso possiede l'integrale quadratico

$$A^2 - B^2 = f(w),$$

che si può anche scrivere, disponendo del parametro w:

$$A^2 - B^2 = c \quad \text{(costante)}. \tag{77}$$

Supposte soddisfatte le (X), consideriamo nella quaderna (x, ξ, η, ζ) di funzioni incognite il sistema lineare omogeneo

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \cos\omega\,\eta, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{sen}\omega\,\zeta, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\partial \omega}{\partial w}\,\xi\\
&\frac{\partial \xi}{\partial u} = -\operatorname{sen}\omega\,\eta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \cos\omega\,\zeta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial w} = -\frac{\partial \omega}{\partial w}x - A\,\eta + B\,\zeta\\
&\frac{\partial \eta}{\partial u} = -\cos\omega\,x + \operatorname{sen}\omega\,\xi - \frac{\partial \omega}{\partial v}\zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial w} = A\,\xi\\
&\frac{\partial \zeta}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v}\eta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = \operatorname{sen}\omega\,x + \cos\omega\,\xi + \frac{\partial \omega}{\partial u}\eta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial w} = B\,\xi,
\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

che si ottiene dalle (37) § 17 col porvi $p = q = 1$. Il sistema è completamente integrabile per le (X), e possiede l'integrale quadratico

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = \text{cost.}$$

Normalizziamo le coordinate omogenee x, ξ, η, ζ nel solito modo, e prendiamo quattro quaderne di soluzioni $(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r)$ $r = 0, 1, 2, 3$ appartenenti ad un tetraedro $P_0\,P_1\,P_2\,P_3$ coniugato rispetto alla quadrica

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0,$$

con P_0 vertice interno. *Rimanendo fissa* w, le tre espressioni

$$d\,y_i = x_i\,d\,x_0 + \xi_i\,d\,\xi_0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sono differenziali esatti, e la superficie S descritta dal punto P di coordinate ortogonali y_1, y_2, y_3, al variare di u, v, ha l'elemento lineare

$$d\,s^2 = (1 + x_0^2)\,d\,x_0^2 + 2\,x_0\,\xi_0\,d\,x_0\,d\,\xi_0 + (1 + \xi_0^2)\,d\,\xi_0^2,$$

cioè quello della regione reale del paraboloide rotondo

$$X = x_0, \quad Y = \xi_0, \quad Z = \frac{x_0^2 + \xi_0^2}{2} \qquad (\text{ovvero } X^2 + Y^2 = 2Z).$$

Dopo ciò, se facciamo variare w, le ∞^1 superficie S possono collocarsi nello spazio in guisa che ne risulti un sistema triplo coniugato (u, v, w). Questo si ottiene determinando per quadrature y_1, y_2, y_3 dalle formole (cf. § 18):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= \eta_0 (\cos\omega\, x_i - \operatorname{sen}\omega\, \xi_i) \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= \zeta_0 (\operatorname{sen}\omega\, x_i + \cos\omega\, \xi_i) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \\ \frac{\partial y_i}{\partial w} &= \xi_0 \,(= A\,\eta_i + B\,\zeta_i), \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

le condizioni d'integrabilità trovandosi identicamente soddisfatte.

Precisamente come nel caso del paraboloide rotondo immaginario (§ 15) si dimostra che: *Per ciascuna deformata S del paraboloide rotondo nel sistema $w = cost.$ le tangenti alle trajettorie (w) nei punti di S sono normali alle trasformate dei paralleli $x_0^2 + \xi_0^2 = cost.$*

Ne segue che se la congruenza (C) formata da queste tangenti si immagina invariabilmente legata alle flessioni della S, quando S si applica sul paraboloide tutti i raggi della congruenza vanno ad appoggiarsi all'asse. Questa proprietà deve ravvicinarsi all'altra riscontrata nelle classi di sistemi tripli coniugati con deformate del generale paraboloide ellittico od iperbolico di cui ai §§ 19, 26, poichè nel caso del paraboloide rotondo le parabole focali vengono appunto a ridursi all'asse di rotazione.

Accanto a questi sistemi tripli coniugati con deformate *proprie* S del paraboloide rotondo sono da considerarsi quelli contenenti deformate *improprie* S; questi si ottengono semplicemente dai primi, sussistendo la proprietà:

Le superficie $\overline{S}$ complementari delle S (rispetto alle deformate dei meridiani) in uno dei nostri sistemi tripli coniugati formano un nuovo sistema triplo coniugato.

Questo si verifica colle formole seguenti, di cui è facile la deduzione. Indicando con $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3$ le coordinate del punto della complementare $\overline{S}$ corrispondente al punto $(y_1\, y_2\, y_3)$ sopra S, le $\overline{y}_i$ sono date dalle formole

$$\overline{y}_i = y_i - x_i x_0 - \xi_i \xi_0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{80}$$

dalle quali, derivando, seguono le altre:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial u} &= \eta_i (\operatorname{sen} \omega\, \xi_0 - \cos \omega\, x_0) \\
\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial v} &= -\zeta_i (\cos \omega\, \xi_0 + \operatorname{sen} \omega\, x_0) \\
\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial w} &= \xi_i (A\, \eta_0 - B\, \zeta_0)
\end{aligned}\right\} \tag{80*}$$

D'altronde la complementare $\overline{S}$ di una deformata propria S del paraboloide rotondo è una deformata impropria.

§ 30.

Sistemi di superficie d'area minima corrispondenti.

Ciascuna deformata propria S del paraboloide rotondo determina, secondo il primo teorema di Guichard (Vol. II, § 257), due superficie Σ, Σ' d'area minima corrispondenti. Queste sono le due falde dell'inviluppo di sfere descritte coi centri nei punti P di S ed aventi ciascuna raggio eguale alla distanza del punto corrispondente P_0 sul paraboloide dal fuoco. Alle famiglie (S) dei nostri sistemi tripli coniugati si coordinano quindi due sistemi di superficie d'area minima che vogliamo ora esaminare più da vicino. Per questo osserviamo che, nella configurazione paraboloidica, la distanza T del punto $P_0 \equiv (x_0, \xi_0)$ dal fuoco è data da

$$T = \frac{1 + x_0^2 + \xi_0^2}{2} = \frac{1}{2} (\zeta_0^2 - \eta_0^2). \tag{81}$$

Se indichiamo poi con (Z_1, Z_2, Z_3), (Z'_1, Z'_2, Z'_3) i rispettivi coseni di direzione dei raggi che vanno dal punto $P \equiv (x_0\, \xi_0)$ di S ai due punti di contatto della sfera con Σ, Σ', dalle formole relative agli inviluppi di sfere ricaviamo facilmente per Z_i, Z'_i i valori seguenti:

$$Z_i = \frac{\zeta_i - \eta_i}{\zeta_0 - \eta_0}, \quad Z'_i = \frac{\zeta_i + \eta_i}{\zeta_i + \eta_0}. \tag{82}$$

Ed ora andiamo a verificare in effetto, senza nemmeno ricorrere al teorema di Guichard, che le congruenze rettilinee formate dai raggi che escono dai punti di una S ($w=$ cost.) coi coseni di direzione Z_i, ovvero Z'_i, sono normali a due superficie minime. [Con ciò il teorema di Guichard resta nuovamente dimostrato.]

Se poniamo

$$U=\sum_i^{1-3} Z_i \frac{\partial y_i}{\partial u}\,,\qquad V=\sum_i^{1-3} Z_i \frac{\partial y_i}{\partial v}\,,$$

dall'osservare che si ha

$$\sum_i x_i Z_i = x_0\,,\qquad \sum \xi_i Z_i = \xi_0\,,$$

segue per le (79)

$$U=\eta_0\,(x_0\cos\omega-\xi_0\,\mathrm{sen}\,\omega),\qquad V=\zeta_0\,(x_0\,\mathrm{sen}\,\omega+\xi_0\cos\omega),$$

e quindi dalle (78) che $U\,d\,u+U\,d\,v$ è un differenziale esatto, precisamente $=d\,T$.

La congruenza è dunque in effetto normale (Vol. I, § 143) e le coordinate z_1, z_2, z_3 dei punti di una delle superficie normali sono date da

$$z_i=y_i-T\,Z_i\qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

ossia

$$z_i=y_i-\frac{1}{2}(\zeta_0+\eta_0)(\zeta_i-z_i). \tag{83}$$

Verifichiamo che la superficie Σ definita da queste formole è ad area minima e le linee (u, v) corrispondenti al sistema coniugato permanente di S sono le linee di curvatura.

Se deriviamo infatti le (82), (83) rapporto ad u, v, troviamo

$$\frac{\partial z_i}{\partial u}=-\frac{(\zeta_0-\eta_0)^2}{2}\frac{\partial Z_i}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z_i}{\partial v}=\frac{(\zeta_0-\eta_0)^2}{2}\frac{\partial Z_i}{\partial v}\,,$$

e queste formole dimostrano appunto che sulla Σ le linee u, v sono quelle di curvatura, ed i raggi principali di curvatura r_1, r_2 hanno i valori eguali ed opposti

$$r_1=\frac{1}{2}(\zeta_0-\eta_0)^2\,,\qquad r_2=-\frac{1}{2}(\zeta_0-\eta_0)^2.$$

Similmente per l'altra superficie Σ' si trovano le formole

$$z'_i = y_i - \frac{1}{2}(\zeta_0 - \eta_0)(\zeta_i + \eta_i), \tag{83*}$$

con

$$r'_1 = \frac{1}{2}(\zeta_0 + \eta_0)^2, \quad r_2 = -\frac{1}{2}(\zeta_0 + \eta_0)^2.$$

Osserviamo ancora che, derivando le (83), (83*) rapporto a w, risulta

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z_i}{\partial w} &= \frac{1}{2}(B - A)\Big[\xi_0(\zeta_i + \eta_i) - \xi_i(\zeta_0 + \eta_0)\Big] \\ \frac{\partial z'_i}{\partial w} &= \frac{1}{2}(B + A)\Big[\xi_0(\zeta_i - \eta_i) - \xi_i(\zeta_0 - \eta_0)\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Merita attenzione quella classe particolare dei nostri sistemi tripli coniugati per la quale la costante c nell'integrale quadratico (77) è nulla; allora è $A^2 = B^2$, o $A = \pm B$, poniamo p. es. $A = B$. In tal caso si vede che le Z_i coincidono coi coseni di direzione delle tangenti alle trajettorie (w) e sono indipendenti da w, come le z_i stesse. Dunque:

Se per la famiglia (S) di deformate del paraboloide rotondo la costante c è nulla, le trajettorie (w) sono linee rette e coincidono colle normali all'unica superficie minima Σ. Questa è il luogo descritto dal fuoco del paraboloide rotondo nel rotolamento sopra una qualunque delle superficie applicabili S.

Nel caso $c = 0$, ora considerato, le equazioni del sistema (X) possono scriversi più semplicemente, ponendo p. es. $A = B = e^\theta$, con che diventano

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} \\ &\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial w} = e^\theta \cos \omega, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial v\, \partial w} = e^\theta \operatorname{sen} \omega. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Ma anche nel caso generale $c \neq 0$ si può introdurre nel sistema (X) una semplificazione analoga. Supponendo, come è lecito, $c = 1$, possiamo porre p. es.

$$A = \cosh \theta, \quad B = \operatorname{senh} \theta,$$

e le (X) diventano

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} \\ &\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial w} = \cos \omega \cosh \theta, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial v\, \partial w} = \operatorname{sen} \omega \operatorname{senh} \theta. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Si osservi che, in ambedue i casi (85 o (86), le due prime equazioni del sistema dicono che $\omega + i\,\theta$ è una *funzione* della variabile complessa $\tau = u + i\,v$, diciamo

$$\omega + i\,\theta = F(\tau, w),$$

dove w è un parametro *reale*, da cui dipende la F. Manifestamente le due seconde equazioni del sistema (85) si compendiano nella equazione (di LIOUVILLE):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \tau\, \partial w} = e^{-iF},$$

e quelle del sistema (86) nell'altra

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \tau\, \partial w} = \cos F.$$

§ 31.

SISTEMI TRIPLI CONIUGATI CON DEFORMATE DELLE QUADRICHE A CENTRO TANGENTI ALL'ASSOLUTO.

Trattiamo in fine di quei sistemi tripli coniugati nei quali la famiglia (S) è costituita di superficie applicabili sulle quadriche a centro di DARBOUX tangenti all'assoluto (*).

Il caso limite di quadriche *osculanti* l'assoluto è già stato trattato al § 5; ivi i corrispondenti sistemi tripli coniugati furono dedotti con una costruzione in termini finiti dalle famiglie di LAMÉ a curvatura costante. Qui pel caso di quadriche semplicemente tangenti all'assoluto occorrerà ancora l'integrazione dei sistemi differenziali (III) § 8, o (IV) § 9, precisamente come pel caso delle quadriche rotonde (bitangenti all'assoluto).

Per non complicare la ricerca supporremo che il sistema triplo ortogonale (u, v, w) sia un sistema di WEINGARTEN, p. e. a curvatura positiva, e porremo nelle formole del § 9 $R = 1$.

(*) *Lezioni*, Vol. II, § 308, e più particolarmente la Memoria: *Sulla deformazione delle congruenze e sopra alcune classi di superficie applicabili* (Annali di matematica, t. VI della Serie III, 1900).

Sia (A, M, Φ, W) una qualunque quaderna di soluzioni del sistema differenziale (IV), onde avremo per le (18) ibid.

$$A^2 + M^2 - c\,\Phi^2 + (c+1)\,W^2 = a \qquad \text{(costante).} \tag{87}$$

Per una qualunque superficie Σ, a curvatura $K = +1$, del sistema di Weingarten, consideriamo la superficie $\overline{S}$ inviluppo dei piani normali alle linee $\Phi =$ cost. sulla Σ. Denotando con $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ le coordinate del punto $\overline{P}$ di $\overline{S}$, che corrisponde al punto $P \equiv (x, y, z)$ di Σ, troviamo

$$\overline{x} = x - \frac{1}{c\,\Phi}\left\{ A\,X_1 + M\,X_2 + (c+1)\,W\,X_3 \right\}, \tag{88}$$

colle formole analoghe per $\overline{y}$, $\overline{z}$, e l'elemento lineare della $\overline{S}$ ha la forma

$$\overline{ds}^2 = \frac{c^2\,\Phi^2\,dW^2 - 2c(c+1)\,\Phi\,W\,d\Phi\,dW + \left[c(c+1)\,W^2 + c\,\Phi^2 + a\right] d\,\Phi^2}{c^2\,\Phi^4}, \tag{89}$$

che dipende solo dalle costanti c, a, ed appartiene alla quadrica immaginaria di Darboux

$$c\,(y^2 + z^2) + 1 = x^2 + a\,c\,(y - z\sqrt{-1})^2. \tag{90}$$

Sulle superficie Σ, $\overline{S}$ i sistemi coniugati si corrispondono, in particolare alle linee (u, v) di curvatura di Σ corrisponde sopra $\overline{S}$ il sistema coniugato permanente.

Ora, se facciamo variare w, la $\overline{S}$ descrive una famiglia $(\overline{S})$, che vogliamo dimostrare appartenere ad un sistema triplo coniugato (u, v, w). Per ciò, derivando le (88) col por mente alle formole dei §§ 4, 9, troviamo

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = \frac{A}{c\,\Phi^2}\,\Omega_x, \quad \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = \frac{M}{c\,\Phi^2}\,\Omega'_x, \quad \frac{\partial \overline{x}}{\partial w} = \frac{W}{c\,\Phi^2}\,\Omega''_x,$$

dove si è posto per brevità:

$$\Omega_x = \operatorname{senh}\theta \left[A\,X_1 + M\,X_2 + (c+1)\,W\,X_3\right] - c\,\Phi \cosh\theta\,X_3$$

$$\Omega'_x = \cosh\theta \left[A\,X_1 + M\,X_2 + (c+1)\,W\,X_3\right] - c\,\Phi\operatorname{senh}\theta\,X_3$$

$$\Omega''_x = \frac{\partial\theta}{\partial w}\left[A\,X_1 + M\,X_2 + (c+1)\,W\,X_3\right] + c\,\Phi\,(A\,X_1 + B\,X_2).$$

con significato analogo per Ω_y, Ω_z, ecc.

Sarà provato il teorema se dimostriamo che $\frac{\partial \Omega_x}{\partial v}$ si esprime linearmente ed omogeneamente per (Ω_x, Ω'_x) con coefficienti, che rimangono gli stessi pei tre assi, similmente $\frac{\partial \Omega_x}{\partial w}$ per (Ω_x, Ω''_x), e in fine $\frac{\partial \Omega'_x}{\partial w}$ per (Ω'_x, Ω''_x). Questo risulta dalle identità seguenti, di facile verifica:

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial v} = \frac{M \cosh \theta}{\Phi} \Omega_x + \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{M \operatorname{senh} \theta}{\Phi}\right) \Omega'_x$$

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial w} = \frac{W}{\Phi} \frac{\partial \theta}{\partial w} \Omega_x + \left(\cosh \theta - \frac{W \operatorname{senh} \theta}{\Phi}\right) \Omega''_x$$

$$\frac{\partial \Omega'_x}{\partial w} = \frac{W}{\Phi} \frac{\partial \theta}{\partial w} \Omega'_x + \left(\operatorname{senh} \theta - \frac{W \cosh \theta}{\Phi}\right) \Omega''_x.$$

Dal calcolo eseguito risulta altresì che i valori dei coefficienti H_1, H_2, H_3 per il sistema triplo coniugato (88) sono dati semplicemente da

$$H_1 = \frac{A}{\Phi}, \quad H_2 = \frac{M}{\Phi}, \quad H_3 = \frac{W}{\Phi}.$$

Si avverta che, ove la costante a nella (87) sia nulla, la superficie $\bar{S}$ è la complementare di quella deformata S_0 di una quadrica a centro rotonda che è data dalle formole (17), § 8. In tal caso adunque la famiglia $(\bar{S})$ è la complementare delle famiglie (S_0) determinate ai §§ 8, 9. Ma anche nel caso $a \neq 0$ si possono porre i nuovi sistemi tripli coniugati in semplice dipendenza geometrica da quelli con deformate di quadriche rotonde, mediante il seguente teorema che qui ci limitiamo ad enunciare:

Fissato un sistema triplo ortogonale di Weingarten (u, v, w), *si costruiscano colle formole dei* §§ 8, 9, *tre diversi sistemi tripli coniugati colle famiglie* (S), (S'), (S'') *di deformate di quadriche rotonde. I piani tangenti in una terna qualunque* P, P', P'' *di punti corrispondenti su tre superficie* S, S', S'' *s'incontrano in un punto* $\bar{P}$ *che descrive, al variare della terna* (P, P', P'') *sulle tre superficie* (S, S', S'') *una deformata* $\bar{S}$ *di una quadrica di Darboux. E quando la terna* (S, S', S'') *varia, la superficie* $\bar{S}$ *descrive una famiglia* $(\bar{S})$ *appartenente ad uno dei nuovi sistemi tripli coniugati.*

Viareggio, Agosto 1914.