Ricerche sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche.

MEMORIA I.

(*di* Luigi Bianchi *a Pisa*)

PREFAZIONE.

La teoria delle superficie applicabili sulle quadriche generali ha acquistato ormai un assetto definitivo: essa fornisce invero l'estensione più naturale e completa della teoria delle superficie applicabili sulla sfera (reale od immaginaria), e delle loro trasformazioni (*). Ma se passiamo dalle superficie isolate a considerare famiglie di tali superficie, troviamo nella teoria delle superficie a curvatura costante un importante capitolo, quello che tratta delle famiglie appartenenti a sistemi tripli ortogonali (famiglie di Lamé), al quale finora non ne corrispondeva uno analogo per le deformate delle quadriche generali. Colla presente Memoria vogliamo iniziare appunto, per le deformate delle quadriche generali, lo studio degli enti da riguardarsi come analoghi ai sistemi tripli ortogonali contenenti una serie di superficie a curvatura costante (**).

La prima questione che si presenta è di riconoscere in quale senso una tale estensione è possibile. Si vedrà che conviene per questo abbandonare la condizione dell'ortogonalità e ricorrere alla teoria generale dei ***sistemi***

(*) Vedi le mie *Lezioni di Geometria differenziale*, Vol. III (Pisa, Spörri, 1909).

(**) Una prima notizia sulle presenti ricerche ho dato nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, Vol. XXIII (serie 5ª) (marzo 1914).

tripli coniugati costruita dal DARBOUX (*). Di tale opportunità ci si persuade ricordando le proprietà dei sistemi tripli ortogonali (u, v, w) colla serie $w =$ cost. formata di superficie a curvatura costante, fra le quali la fondamentale seguente:

Le trajettorie ortogonali (w) della famiglia di superficie a curvatura costante segnano su queste una corrispondenza che conserva i sistemi coniugati di linee, in particolare alle linee di curvatura (che formano un sistema isotermo-coniugato) fa corrispondere le linee di curvatura.

Ora sopra ogni superficie a curvatura costante il sistema delle linee di curvatura può caratterizzarsi come il *sistema coniugato-permanente*, cioè come quel sistema coniugato che si conserva coniugato applicando la superficie sulla sfera (reale od immaginaria). D'altra parte sulle deformate delle quadriche generali il sistema coniugato permanente, pur conservando la proprietà di costituire un sistema isotermo-coniugato, non è più ortogonale ma obliquo. Dopo queste osservazioni apparirà naturale se, nella teoria delle deformate delle quadriche generali, consideriamo quali enti analoghi ai sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie a curvatura costante i sistemi tripli coniugati (u, v, w), che godono delle seguenti proprietà:

a) *Le superficie della serie $w =$ cost. sono applicabili sopra quadriche;*

b) *Il sistema coniugato (u, v) intercettato sopra una qualunque superficie $w =$ cost. dalle superficie delle altre due serie è il sistema coniugato permanente;*

c) *Le trajettorie (w), intersezioni delle superficie delle due prime famiglie $u =$ cost., $v =$ cost., segnano sulle deformate $w =$ cost. delle quadriche una corrispondenza che conserva i sistemi coniugati.*

In riguardo alla proprietà a), è da dirsi che la quadrica su cui è applicabile la $w =$ cost. può variare con questa superficie, e in particolare rimanere sempre la stessa. Il primo caso corrisponde alle famiglie generali di LAMÉ composte di superficie a curvatura costante (**), il secondo al caso particolare dei sistemi di WEINGARTEN.

È poi da osservarsi che l'ultima proprietà c), come pure l'altra che sopra ciascuna $w =$ cost. il sistema (u, v) è *isotermo-coniugato*, sono di loro natura proprietà *projettive*. E infatti se un sistema triplo coniugato possiede la pro-

(*) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IV.ème Partie, n.i 1047 a 1052; cf. anche *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, Livre III, Chap. III (2.ème édition, 1910).

(**) Vedi il Cap. XXVII, Vol. II delle mie *Lezioni*.

prietà c), ed eventualmente l'altra ora ricordata, una qualunque trasformazione *omografica* lo cangia in un altro sistema triplo coniugato colle medesime proprietà. In particolare ciò accade applicando una qualunque trasformazione omografica ad un sistema di WEINGARTEN, colla ulteriore particolarità, in quest'ultimo caso, che i sistemi tripli coniugati così ottenuti ammettono *trasformazioni asintotiche* (*), le quali risultano dall'applicare l'omografia stessa alle trasformazioni di BÄCKLUND B_σ dei sistemi di WEINGARTEN.

Ritornando ai nostri sistemi tripli coniugati (u, v, w), colle superficie S della serie $w = \text{cost.}$ applicabili sopra quadriche, si vedrà che essi ammettono pure trasformazioni asintotiche, e queste, considerate per le singole superficie S, non sono altro che le trasformazioni B_h della teoria generale. Inoltre vale qui ancora, come per le superficie isolate, il *teorema di permutabilità*, con tutte le sue conseguenze per la semplificazione del procedimento di trasformazione.

L'esistenza dei nostri sistemi tripli coniugati, per le deformate delle quadriche generali, può stabilirsi mediante considerazioni infinitesimali che tengono qui il posto della costruzione infinitesimale di WEINGARTEN per le relative famiglie di LAMÉ. Ma il passaggio dalle trasformazioni infinitesime generatrici ai sistemi di equazioni alle derivate parziali, che permettono di costruire la teoria generale in modo analitico rigoroso, richiede più ampi sviluppi che mi riservo di dare in seguito.

In questa prima Memoria mi limito a trattare estese classi di siffatti sistemi che si deducono dalle formole già costruite per le famiglie di LAMÉ a curvatura costante, alcune in termini finiti, altre con quadrature, altre infine integrando equazioni differenziali ordinarie. In particolare bastano questi mezzi analitici per costruire classi di siffatti sistemi: 1.° per le deformate delle quadriche rotonde, 2.° per quelle dei *generali* paraboloidi, reali od immaginarii, 3.° per le deformate delle quadriche (immaginarie) a centro di DARBOUX, tangenti all'assoluto. In questi ultimi due casi però ci limiteremo, per semplificare la ricerca, a supporre che le superficie $w = \text{cost.}$ siano applicabili sulla medesima quadrica; le formole così ottenute si estenderebbero facilmente al caso più generale.

(*) Diremo che due sistemi tripli coniugati (u, v, w) sono trasformati asintotici l'uno dell'altro, quando si corrispondono biunivocamente, punto a punto, in guisa che le congiungenti le coppie (P, P') di punti corrispondenti, per ciascuna coppia (S, S') di superficie corrispondenti nel sistema $w = \text{cost.}$, *formano una congruenza W.*

I risultati che otteniamo per queste classi di sistemi tripli coniugati, e le considerazioni geometriche che vi si collegano, indicano già la via che sarà da tenersi in seguito per la costruzione della teoria generale.

Alla ricerca dei sistemi tripli coniugati (u, v, w) con superficie $w = \text{cost.}$ applicabili sopra effettive quadriche è premesso lo studio (§ 3) di sistemi tripli coniugati contenenti una serie di superficie applicabili sul catenoide, ovvero sulle evolute delle superficie a curvatura costante positiva. Questi sistemi hanno proprietà molto affini a quelle dei sistemi tripli coniugati con una serie di superficie applicabili su quadriche.

PARTE PRIMA.

§ 1.

Sistemi tripli coniugati in generale.

Per maggior chiarezza delle ricerche seguenti riportiamo qui le considerazioni fondamentali, relative ai sistemi tripli coniugati, secondo Darboux (l. c.).

Supponiamo che le coordinate cartesiane ortogonali x, y, z di un punto mobile nello spazio siano espresse per le coordinate curvilinee u, v, w colle formole

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \tag{1}$$

e che il sistema curvilineo coordinato (u, v, w) sia un *sistema triplo coniugato,* che cioè su ciascuna superficie di una qualunque delle tre serie le superficie delle altre due serie traccino un sistema coniugato di linee. Le condizioni a ciò necessarie e sufficienti consistono nell'annullarsi del determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}, \end{vmatrix}$$

e degli altri due analoghi dedotti da questo con permutazione circolare delle lettere u, v, w. Queste condizioni possono esprimersi in altro modo dicendo che x, y, z debbono essere soluzioni di un sistema di equazioni simultanee di LAPLACE della forma:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} &= a_{21}\frac{\partial \theta}{\partial u} + a_{12}\frac{\partial \theta}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} &= a_{32}\frac{\partial \theta}{\partial v} + a_{23}\frac{\partial \theta}{\partial w} \\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial w \partial u} &= a_{13}\frac{\partial \theta}{\partial w} + a_{31}\frac{\partial \theta}{\partial u},
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

dove i coefficienti a_{ik} sono funzioni di u, v, w. Ora se si forma, nei tre modi possibili dalle (2), la derivata terza $\frac{\partial^3 \theta}{\partial u \partial v \partial w}$, facendo uso delle (2) stesse, le relazioni lineari omogenee nelle derivate prime $\frac{\partial \theta}{\partial u}$, $\frac{\partial \theta}{\partial v}$, $\frac{\partial \theta}{\partial w}$ debbono ridursi ad *identità*. Nel caso contrario infatti da una qualunque di esse, applicata ad x, y, z, seguirebbe l'annullarsi del determinante funzionale $\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)}$, ciò che contraddice alle nostre ipotesi.

Se si scrivono effettivamente le dette condizioni di illimitata integrabilità per le (2), si trova (DARBOUX, IV$^{\text{ème}}$ partie, p. 268) che al sistema (2) si può dare la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial \log H_1}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \log H_2}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} &= \frac{\partial \log H_2}{\partial w}\frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \log H_3}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial w} \\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial w \partial u} &= \frac{\partial \log H_3}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial w} + \frac{\partial \log H_1}{\partial w}\frac{\partial \theta}{\partial u},
\end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

dove le funzioni H_1, H_2, H_3 di u, v, w soddisfano al sistema di equazioni alle derivate parziali:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_1}{\partial v \partial w} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{\partial H_1}{\partial v} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial w} \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial w \partial u} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial H_2}{\partial w} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial u} \\
\frac{\partial^2 H_3}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial H_3}{\partial u} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial v}.
\end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Viceversa, se H_1, H_2, H_3 soddisfano le (β), le (α) formano un sistema completamente integrabile ed ammettono una soluzione generale θ con tre funzioni arbitrarie di u, v, w rispettivamente.

Scegliendo una terna qualunque (x, y, z) di tali soluzioni ***indipendenti***, si ha un corrispondente sistema triplo coniugato.

Si osservi subito un caso particolare di immediata evidenza geometrica, che può dirsi il caso dei sistemi *di traslazione*. Se si prende una superficie qualunque S_0, data dalle formole

$$x_0 = x_0(u, v), \quad y_0 = y_0(u, v), \quad z_0 = z_0(u, v),$$

che sia riferita ad un sistema coniugato (u, v), indi si assoggetta la S_0 ad un movimento continuo traslatorio, per modo che un punto di S_0 descriva una curva arbitrariamente prescritta, la S_0 verrà appunto a descrivere un tale sistema triplo coniugato, corrispondente alle formole

$$x = x_0 + W_1, \quad y = y_0 + W_2, \quad z = z_0 + W_3,$$

dove W_1, W_2, W_3 sono funzioni arbitrarie di w. Manifestamente qui si ha

$$\frac{\partial \log H_1}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial \log H_2}{\partial w} = 0; \quad \frac{\partial \log H_3}{\partial u} = \frac{\partial \log H_3}{\partial v} = 0,$$

sicchè si può prendere $H_3 = 1$ ed H_1, H_2 indipendenti da w. Viceversa, con tali valori di H_1, H_2, H_3, le (β) sono soddisfatte ed i corrispondenti sistemi tripli coniugati sono di traslazione.

In particolare se per S_0 prendiamo una deformata di una quadrica, e per sistema coniugato (u, v) quello coniugato permanente, il sistema triplo coniugato (u, v, w) verrà manifestamente a soddisfare alle nostre condizioni a), b), c) (Prefazione); ma questi ovvii sistemi tripli coniugati s'intenderanno naturalmente nel seguito sempre esclusi.

§ 2.

Spazî curvi normali.

Facciamo una breve digressione dall'argomento principale per osservare un'interpretazione geometrica delle equazioni (β). Si consideri lo spazio curvo a tre dimensioni il cui ds^2 è dato dalla forma differenziale quadratica ternaria

$$d s^2 = H_1^2 d u^2 + H_2^2 d v^2 + H_3^2 d w^2. \tag{3}$$

Le tre equazioni (β) esprimono che per questa forma differenziale sono nulli ordinatamente i tre simboli Riemanniani: (31, 12), (12, 23), (23, 31) [cfr. Vol. I, pag. 344] (*). Ne segue che, in questo spazio curvo, le linee coordinate (u), (v), (w) segnano, in ogni punto, le tre *direzioni principali* (Vol. I, § 163); alle giaciture ortogonali, cioè a quelle delle tre superficie coordinate $u =$ cost., $v =$ cost., $w =$ cost., corrispondono le tre curvature principali K_1, K_2, K_3 date dalle formole:

$$\begin{aligned}
K_1 &= -\frac{1}{H_2 H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\right)\right\} - \frac{1}{H_1^2 H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial u}\\
K_2 &= -\frac{1}{H_3 H_1}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\right)\right\} - \frac{1}{H_2^2 H_3 H_1}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial v}\\
K_3 &= -\frac{1}{H_1 H_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)\right\} - \frac{1}{H_3^2 H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Si sa che, per qualunque spazio curvo a tre dimensioni, le tre direzioni principali in un punto costituiscono un triedro trirettangolo ed esistono tre congruenze principali formate dalle linee che seguono in ogni loro punto una delle tre direzioni principali. Ma in generale queste congruenze non sono *normali*, e non avviene che colle tre congruenze principali si possa costituire un sistema triplo ortogonale. Quando questa circostanza si presenta si dirà che lo spazio curvo è *normale;* l'elemento lineare di un tale spazio assumerà la forma (3), soddisfacendo H_1, H_2, H_3 alle equazioni (β).

Così ogni sistema triplo coniugato dello spazio euclideo dà luogo ad infiniti spazî curvi normali, poichè i coefficienti H_1, H_2, H_3 possono alterarsi ciascuno per un fattore funzione arbitraria di u, v, w rispettivamente. E viceversa ad ogni spazio curvo normale sono associati infiniti sistemi tripli coniugati, dipendenti da tre funzioni arbitrarie.

(*) Qui come in seguito i richiami alle: *Lezioni di geometria differenziale* si faranno colla indicazione del volume e del paragrafo, o pagina.

§ 3.

Sistemi tripli coniugati con deformate del catenoide.

Il Darboux ha dimostrato (l. c. n. 1042) che ai sistemi differenziali completamente integrabili del tipo (α) sono applicabili le sostituzioni di Laplace. Interpretando geometricamente questo risultato si ha una costruzione geometrica che permette di dedurre da ogni sistema triplo coniugato noto (u, v, w) sei nuovi sistemi, in termini finiti (l. c. n. 1052). Basta per questo, per ciascuna superficie S di una delle tre serie, p. e. delle $w =$ cost., condurre le tangenti alle linee (v) (o alle (u)); queste formano una congruenza rettilinea di cui la S è una delle due falde focali, mentre la seconda falda focale S_1 descrive, al variare di S, una famiglia (S_1) appartenente ad un nuovo sistema triplo coniugato (u, v, w).

Se applichiamo in particolare questa costruzione ad un sistema triplo *ortogonale* (u, v, w), le seconde falde focali S_1 diventano manifestamente il luogo dei centri di curvatura (di un sistema) per le superficie $v =$ cost. e si ha quindi il teorema: ***Da ogni sistema triplo ortogonale si ottengono sei sistemi tripli coniugati assumendo, delle superficie di una qualunque delle tre serie le prime, ovvero le seconde falde dell'evoluta.*** È da osservare altresì che per questi sistemi tripli coniugati le linee (v) del sistema coniugato sulle S_1 sono linee geodetiche.

Particolarizziamo ancora questo risultato e supponiamo che nel sistema triplo ortogonale (u, v, w) le superficie $w =$ cost. siano a curvatura costante $K = \pm \frac{1}{R^2}$, dove R sarà in generale una funzione di $w : R = R(w)$, e diventerà una costante nel caso dei ***sistemi di Weingarten.*** Supponiamo p. es., per fissare le idee, che K sia negativa e le $w =$ cost. siano quindi superficie pseudosferiche Σ. Applichiamo il teorema precedente alle prime e seconde falde delle evolute delle superficie pseudosferiche. Queste sono tutte superficie S applicabili sul catenoide; di più sulla S e sulla Σ si corrispondono i sistemi coniugati, e in particolare alle linee di curvatura (u, v) di Σ corrisponde sopra S un sistema isotermo coniugato. Pertanto i sistemi tripli coniugati (u, v, w), che così si ottengono, godono delle proprietà seguenti:

1.ª *ciascuna superficie S della serie $w =$ cost. è applicabile sul catenoide,*

2.ª *le trajettorie (w) segnano sulla S una corrispondenza che conserva i sistemi coniugati.*

Per queste proprietà gli attuali sistemi tripli coniugati si ravvicinano evidentemente a quelli con una serie di deformate di quadriche (vedi Prefazione), come già in riguardo alla teoria dell'applicabilità le singole deformate del catenoide si comportano analogamente alle deformate delle quadriche.

L'analogia si spinge ancora più in là per la teoria delle *trasformazioni.* E invero del sistema triplo ortogonale pseudosferico (u, v, w) si prenda un altro tale sistema derivato per una trasformazione qualunque B_σ di Bäcklund (Vol. II, § 433). Se delle superficie $w =$ cost. dei due sistemi prendiamo le falde omonime della evoluta, queste sono superficie applicabili sul catenoide, legate fra loro da una corrispondente trasformazione asintotica (Vol. II, § 397); dunque: *I sistemi tripli coniugati contenenti una serie di deformate del catenoide ammettono trasformazioni asintotiche in* (∞^2) *sistemi della medesima specie.*

Abbiamo qui supposto $K < 0$. Nell'altro caso $K > 0$ il risultato è perfettamente analogo, le superficie S essendo allora applicabili sulle evolute delle superficie a curvatura costante positiva. Però in questo caso le corrispondenti trasformazioni asintotiche diventano immaginarie.

§ 4.

Richiamo delle formole pei sistemi tripli ortogonali a curvatura costante.

Per il seguito delle nostre ricerche dobbiamo sempre riferirci alle formole fondamentali, relative ai sistemi tripli ortogonali (u, v, w), nei quali le $w =$ cost. siano superficie a curvatura costante $K = \pm \frac{1}{R^2}$, con $R = R(w)$, che qui torniamo per comodità a trascrivere, distinguendo i due casi di $K = -\frac{1}{R^2}$, $K = +\frac{1}{R^2}$.

1.° caso: $K = -\frac{1}{R^2}\cdot$ L'elemento lineare ds dello spazio, riferito al sistema triplo ortogonale pseudosferico (u, v, w), assume la forma caratteristica

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2 + R^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2, \tag{4}$$

dove la funzione $\theta = \theta(u, v, w)$, e le due funzioni

$$A = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}, \quad B = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}$$

sono legate fra loro dal sistema differenziale seguente (che rappresenta le condizioni di Lamé per l'appartenenza dell'elemento (4) allo spazio euclideo):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{R^2}\\
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} = A\cos\theta, \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} = B\operatorname{sen}\theta\\
&\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v}B + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{R}\right), \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u}B\\
&\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v}A, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial u}A - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\cos\theta}{R}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Indicando poi con x, y, z le coordinate di un punto mobile nello spazio espresse per u, v, w e con (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) i coseni di direzione delle normali alle superficie $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, $w = \text{cost.}$, sussistono le formole del quadro seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \cos\theta\, X_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta\, X_2, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = R\frac{\partial\theta}{\partial w}X_3\\
&\frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v}X_2 + \frac{\operatorname{sen}\theta}{R}X_3, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u}X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial w} = R A\,.\,X_3\\
&\frac{\partial X_2}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}X_1, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial u}X_1 - \frac{\cos\theta}{R}X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial w} = R B\,.\,X_3\\
&\frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{R}X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \frac{\cos\theta}{R}X_2, \quad \frac{\partial X_3}{\partial w} = -R(A X_1 + B X_2),
\end{aligned}\right\} \tag{I*}$$

colle analoghe rispetto agli assi y, z.

2.° caso: $K = +\frac{1}{R^2}\cdot$ In questo caso l'elemento lineare dello spazio può scriversi

$$d s^2 = \operatorname{senh}^2 \theta\, d u^2 + \cosh^2 \theta\, d v^2 + R^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 d w^2 \quad \left(R = R(u)\right); \tag{5}$$

le equazioni (I) sono sostituite dalle altre:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = -\frac{\operatorname{senh}\theta \cosh\theta}{R^2} \\
&\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} = A \operatorname{senh}\theta, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} = B \cosh\theta \\
&\frac{\partial A}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} B - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\cosh\theta}{R}\right)\cdot \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} B \\
&\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} A, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} A - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\operatorname{senh}\theta}{R}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

mentre le corrispondenti alle (I*) si scrivono:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \operatorname{senh}\theta\, X_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \cosh\theta\, X_2, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = R\frac{\partial \theta}{\partial w} X_3 \\
&\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - \frac{\cosh\theta}{R} X_3, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial w} = R\, A \,.\, X_3 \\
&\frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} X_1, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} X_1 - \frac{\operatorname{senh}\theta}{R} X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial w} = R\, B \,.\, X_3 \\
&\frac{\partial X_3}{\partial u} = \frac{\cosh\theta}{R} X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \frac{\operatorname{senh}\theta}{R} X_2, \quad \frac{\partial X_3}{\partial w} = -R(A X_1 + B X_2).
\end{aligned}\right\} \tag{II*}$$

Rispetto ai sistemi di equazioni a derivate parziali (I) e (II) per la terna di funzioni θ, A, B, è da osservarsi che basta introdurre le due nuove funzioni incognite $\theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial u}$, $\theta_2 = \frac{\partial \theta}{\partial v}$ per dar loro la forma di sistemi lineari canonici completamente integrabili (Cf. più oltre § 16). Ne risulta l'esistenza e l'arbitrarietà del sistema integrale come dipendente da *cinque* funzioni arbitrarie (Vol. II, § 430).

§ 5.

Sistemi tripli coniugati con deformate della quadrica: $y^2 + z^2 + (x - y + i z)^2 = \text{cost.}$

Cominciamo ora le nostre ricerche sui sistemi tripli coniugati contenenti una serie effettiva di deformate di quadriche, considerando una classe di tali sistemi, le cui superficie S di una serie sono applicabili sulla quadrica immaginaria a centro

$$y^2 + z^2 + (x - y + z\sqrt{-1})^2 = \frac{1}{K}\,(\text{cost.}), \tag{6}$$

che oscula l'assoluto (Vol. II, §§ 308, 447). Si sa che le deformate (reali) di questa quadrica si ottengono dalle superficie Σ a curvatura costante di una famiglia di Lamé colla seguente costruzione in termini finiti:

In ogni famiglia (Σ) di Lamé di superficie Σ a curvatura costante K i piani osculatori delle trajettorie ortogonali della famiglia nei punti di una Σ inviluppano una superficie S applicabile sulla quadrica (6) (l. c. § 447).

Di più si sa che ai sistemi coniugati di Σ corrispondono i sistemi di S, in particolare alle linee (u, v) di curvatura di Σ il sistema coniugato permanente sopra S. Ora completiamo questa proposizione dimostrando l'ulteriore teorema:

Se alla superficie Σ a curvatura costante si fa descrivere la famiglia (Σ) di Lamé, ***corrispondentemente la** S **descrive una serie** (S) **appartenente ad un sistema triplo coniugato*** (u, v, w). Tale sistema godrà allora evidentemente delle proprietà a), b), c) enumerate nella prefazione.

Per dimostrare il teorema riferiamoci alle formole riportate nel paragrafo precedente e supponiamo p. es. di trovarci nel primo caso $K = -\frac{1}{R^2}$, sicchè valgono le formole (I), (I*). Per una superficie pseudosferica Σ del sistema $w = \text{cost.}$ indichiamo con S la corrispondente superficie ottenuta colla costruzione descritta e siano ξ, η, ζ le coordinate del punto di S che corrisponde al punto (x, y, z) di Σ; si trova allora facilmente:

$$\xi = x - \frac{R^2}{\frac{\partial \theta}{\partial w}}\left(A\,X_1 + B\,X_2 - \frac{R'}{R^2}\,X_3\right) \quad \left(R' = \frac{dR}{dw}\right) \tag{7}$$

e le analoghe per η, ζ. Dobbiamo provare (§ 1) che le tre derivate seconde miste

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial v \partial w}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial w}$$

si esprimono linearmente ed omogeneamente per le rispettive coppie di derivate prime

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial v}\right), \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \xi}{\partial w}\right), \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial w}\right)$$

con coefficienti identici pei tre casi. Ora se poniamo per abbreviare

$$\Omega_x = A X_1 + B X_2 - \frac{R'}{R^2} X_3, \tag{8}$$

con significato analogo per Ω_y, Ω_z, le (7) si scrivono

$$\xi = x - \frac{R^2}{\dfrac{\partial \theta}{\partial w}} \Omega_x. \tag{7*}$$

Formando le derivate rapporto ad u, v di Ω_x, coll'osservare le (I), (I*), otteniamo

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega_x}{\partial u} &= \frac{\cos\theta}{R^2} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_1 + \frac{A \operatorname{sen}\theta}{R} X_3 \\
\frac{\partial \Omega_x}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{R^2} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_2 - \frac{B \cos\theta}{R} X_3,
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

indi dalla (7*)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial u} &= \frac{R^2 A \cos\theta}{\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2} \left(\Omega_x - \frac{\operatorname{tg}\theta}{R} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_3\right) \\
\frac{\partial \xi}{\partial v} &= \frac{R^2 B \operatorname{sen}\theta}{\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2} \left(\Omega_x + \frac{\cot\theta}{R} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_3\right) \\
\frac{\partial \xi}{\partial w} &= R \frac{\partial \theta}{\partial u} X_3 - \frac{R^2}{\dfrac{\partial \theta}{\partial w}} \frac{\partial \Omega_x}{\partial w} + \frac{R^2 \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial w^2}}{\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2} \Omega_x - \frac{2 R R'}{\dfrac{\partial \theta}{\partial w}} \Omega_x.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ora dalle formole (1), (I*) si deducono le identità seguenti:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\Omega_x - \frac{\operatorname{tg}\theta}{R}\,\frac{\partial\theta}{\partial w}X_3\right) = -\frac{1}{R\cos\theta}\left(B + \frac{1}{\cos\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial v}\,\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)X_3$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\Omega_x - \frac{\operatorname{tg}\theta}{R}\,\frac{\partial\theta}{\partial w}X_3\right) = \frac{\partial}{\partial w}\log\left(\frac{\frac{\partial\theta}{\partial w}}{R^2\cos\theta}\right)\cdot\left(\Omega_x - \frac{\operatorname{tg}\theta}{R}\,\frac{\partial\theta}{\partial w}X_3\right) - \frac{\frac{\partial\theta}{\partial w}}{R^2}\,\frac{\partial\xi}{\partial w}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\Omega_x + \frac{\cot\theta}{R}\,\frac{\partial\theta}{\partial w}X_3\right) = \frac{\partial}{\partial w}\log\left(\frac{\frac{\partial\theta}{\partial w}}{R^2\operatorname{sen}\theta}\right)\cdot\left(\Omega_x + \frac{\cot\theta}{R}\,\frac{\partial\theta}{\partial w}X_3\right) - \frac{\frac{\partial\theta}{\partial w}}{R^2}\,\frac{\partial\xi}{\partial w},$$

dalle quali segue che $\frac{\partial}{\partial v}\left(\Omega_x - \frac{\operatorname{tg}\theta}{R}\,\frac{\partial\theta}{\partial w}X_3\right)$ si compone linearmente con $\frac{\partial\xi}{\partial u}$, $\frac{\partial\xi}{\partial v}$; similmente $\frac{\partial}{\partial w}\left(\Omega_x - \frac{\operatorname{tg}\theta}{R}\,\frac{\partial\theta}{\partial w}X_3\right)$ con $\frac{\partial\xi}{\partial u}$, $\frac{\partial\xi}{\partial w}$, e infine

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\Omega_x + \frac{\cot\theta}{R}\,\frac{\partial\theta}{\partial w}X_3\right) \quad \text{con} \quad \frac{\partial\xi}{\partial v},\ \frac{\partial\xi}{\partial w}.$$

La proposizione è così stabilita e risulta inoltre dai nostri calcoli che i valori di H_1, H_2, H_3 corrispondenti, secondo il § 1, a questo sistema triplo coniugato sono dati dalle formole

$$H_1 = \frac{A}{\frac{\partial\theta}{\partial w}},\quad H_2 = \frac{B}{\frac{\partial\theta}{\partial w}},\quad H_3 = \frac{1}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}. \tag{11}$$

Se ricordiamo poi (Vol. III, § 104) che le trasformazioni B_σ di Bäcklund per le superficie pseudosferiche Σ si traducono, per le deformate S della quadrica (6), nelle trasformazioni B_k della teoria generale, ne deduciamo: *Gli attuali sistemi tripli coniugati ammettono trasformazioni asintotiche B_k in altri sistemi della medesima specie.*

Un caso particolare notevole di questi sistemi tripli coniugati si ha quando la curvatura K delle superficie Σ è una costante assoluta. Allora il sistema triplo ortogonale è un sistema di Weingarten e le superficie S sono le *complementari* delle Σ rispetto alle geodetiche ortogonali ai circoli di livello (Vol. II, § 440); la quadrica (6) è da sostituire con una quadrica che iperoscula l'assoluto. Dunque: *Se in un sistema triplo ortogonale di* Weingarten *di ciascuna superficie Σ a curvatura costante si assume la complementare S rispetto* *al fascio di geodetiche ortogonali alle linee di livello, la serie (S) appartiene ad un sistema triplo coniugato della nostra specie.*

Ancora più in particolare, se il sistema di Weingarten è pseudosferico ed a flessione costante (Vol. II, § 441), il sistema (S) diventa alla sua volta il sistema pseudosferico complementare.

§ 6.

Sistemi tripli coniugati con deformate del paraboloide:

$$(x+y\sqrt{-1})^2 \pm \frac{z^2}{R^2} = x - y\sqrt{-1}.$$

La costruzione del paragrafo precedente, come quella del § 3, conduce dalle famiglie di Lamé a curvatura costante ai corrispondenti sistemi tripli coniugati senza alcun calcolo d'integrazione. Qui trattiamo altre classi di tali sistemi tripli coniugati che si deducono dalle famiglie stesse di Lamé *per quadrature.* Sono questi i sistemi tripli coniugati contenenti una famiglia di superficie applicabili sul paraboloide immaginario

$$(x+y\sqrt{-1})^2 \pm \frac{z^2}{R^2} = x - y\sqrt{-1},$$

tangente nel centro all'assoluto (Vol. III, § 100).

Partiamo p. es. da una famiglia pseudosferica (Σ) di Lamé, e da ciascuna superficie Σ deduciamo, nel noto modo (l. c.), una superficie S applicabile sul paraboloide:

$$\left(x+y\sqrt{-1}\right)^2 + \frac{z^2}{R^2} = x - y\sqrt{-1}, \tag{a}$$

procedendo come segue. Introduciamo le tre distanze

$$W_1 = S\,x\,X_1, \quad W_2 = S\,x\,X_2, \quad W_3 = S\,x\,X_3$$

dell'origine dalle tre facce del triedro principale nel sistema triplo ortogonale (u, v, w), e per le formole (I*), § 4, avremo per W_1, W_2, W_3 il seguente sistema lineare

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial W_1}{\partial u}=\frac{\partial \theta}{\partial v}W_2+\frac{\operatorname{sen}\theta}{R}W_3+\cos\theta,\quad \frac{\partial W_1}{\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial u}W_2,\quad \frac{\partial W_1}{\partial w}=R\,A.W_3\\
&\frac{\partial W_2}{\partial u}=-\frac{\partial\theta}{\partial v}W_1,\quad \frac{\partial W_2}{\partial v}=-\frac{\partial\theta}{\partial u}W_1-\frac{\cos\theta}{R}W_3+\operatorname{sen}\theta,\quad \frac{\partial W_2}{\partial w}=R\,B.W_3\\
&\frac{\partial W_3}{\partial u}=-\frac{\operatorname{sen}\theta}{R}W_1,\quad \frac{\partial W_3}{\partial v}=\frac{\cos\theta}{R}W_2,\quad \frac{\partial W_3}{\partial w}=-R(AW_1+BW_2)+R\frac{\partial\theta}{\partial w}.
\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

Se indichiamo con ξ, η, ζ le coordinate del punto della superficie S (applicabile sul detto paraboloide), che corrisponde al punto (x, y, z) di Σ, avremo ξ, η, ζ per quadrature dalle formole

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi}{\partial u}=(x\cos\theta-R\operatorname{sen}\theta\,X_3).\,W_1\\
&\frac{\partial\theta}{\partial v}=(x\operatorname{sen}\theta+R\cos\theta\,X_3)\,W_2,
\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

e dalle analoghe per η, ζ. La condizione d'integrabilità per queste equazioni è identicamente soddisfatta, perchè, calcolando dall'una o dall'altra delle (13) il valore di $\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v}$, si trova concordemente:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\log W_1}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial\log W_2}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}.\tag{14}$$

La superficie S, corrispondente ad un dato valore di w, è determinata dalle (13) a meno di una traslazione nello spazio; essa corrisponde alla superficie pseudosferica Σ per sistemi coniugati, in particolare il sistema (u, v) è sopra S il sistema coniugato permanente nell'applicabilità sul paraboloide (a) (cfr. Vol. III, § 100). Ora, se facciamo variare w, la S descriverà una famiglia (S) di deformate del paraboloide (a), e noi, *determinando convenientemente le tre rispettive funzioni arbitrarie di w, additive in ξ, η, ζ secondo le* (13), vogliamo cercare di costituire una famiglia (S) appartenente ad un sistema triplo coniugato (u, v, w). Per questo confrontiamo la (14) colla (α_1), § 1 ed identifichiamole ponendo

$$H_1=W_1,\quad H_2=W_2;$$

successivamente dalle (β_1), (β_2), § 1 deduciamo

$$\frac{\partial\log H_3}{\partial u}=\frac{\partial\log W_3}{\partial u},\quad \frac{\partial\log H_3}{\partial v}=\frac{\partial\log W_3}{\partial v},$$

onde ponendo: $H_1 = W_1$, $H_2 = W_2$, $H_3 = W_3$ veniamo a soddisfare anche alla (β_3). Ed ora dalle due seconde equazioni (α) si trae

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial w} = \frac{\partial}{\partial w}\left[(x \operatorname{sen} \theta + R \cos \theta \, X_3) W_2\right] = \frac{\partial \log W_2}{\partial w} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \log W_3}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial w} = \frac{\partial}{\partial w}\left[(x \cos \theta - R \operatorname{sen} \theta \, X_3) W_1\right] = \frac{\partial \log W_1}{\partial w} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \log W_3}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial w},$$

e dall'una o dall'altra di queste segue per $\frac{\partial \xi}{\partial w}$ il valore

$$\frac{\partial \xi}{\partial w} = \left\{ x \frac{\partial \theta}{\partial w} - R^2 (A X_1 + B X_2) + R' X_3 \right\} R \, W_3 .$$

D'altra parte le due condizioni d'integrabilità per quest'ultima, confrontata colle (13), si trovano soddisfatte. Possiamo dunque concludere: La nuova classe di sistemi tripli coniugati (u, v, w), con superficie $w = \text{cost.}$ applicabili sul paraboloide (a), è definita per quadrature dalle formole:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial u} &= W_1 (x \cos \theta - R \operatorname{sen} \theta \, X_3) \\
\frac{\partial \xi}{\partial v} &= W_2 (x \operatorname{sen} \theta + R \cos \theta \, X_3) \\
\frac{\partial \xi}{\partial w} &= R W_3 \left\{ x \frac{\partial \theta}{\partial w} - R^2 (A X_1 + B X_2) + R' X_3 \right\} .
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Segue poi anche facilmente, dai risultati stabiliti al Vol. III, § 101: *Gli attuali sistemi tripli coniugati ammettono trasformazioni asintotiche B_k in sistemi della medesima specie.*

Abbiamo supposto fin qui la famiglia (Σ) di LAMÉ pseudosferica. Se fossimo invece nel secondo caso $K = + \frac{1}{R^2}$ del § 4, valendo le (II), (II*), alle (15) si sostituirebbero le altre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial u} &= W_1 (x \operatorname{senh} \theta - R \cosh \theta \, X_3) \\
\frac{\partial \xi}{\partial v} &= W_2 (x \cosh \theta - R \operatorname{senh} \theta \, X_3) \\
\frac{\partial \xi}{\partial w} &= R W_3 \left\{ x \frac{\partial \theta}{\partial w} + R^2 (A X_1 + B X_2) - R' X_3 \right\},
\end{aligned}$$

le quali definiscono, a meno di una traslazione nello spazio, un sistema triplo coniugato (u, v, w) colle superficie della serie $w = \text{cost.}$ applicabili sul paraboloide

$$(x + y\sqrt{-1})^2 - \frac{z^2}{R^2} = x - y\sqrt{-1}.$$

§ 7.

Sistemi tripli coniugati con deformate di quadriche a centro rotonde.

Nelle mie ricerche del 1899 sulla inversione dei teoremi di Guichard relativi alle deformate delle quadriche rotonde (*) ho stabilito il sistema di equazioni differenziali dalla cui integrazione dipende la ricerca delle superficie applicabili sulle quadriche, di rotazione attorno all'asse focale, *associate ad una data superficie* Σ *a curvatura costante.* Ogni soluzione nota di questo sistema conduce ad una nuova superficie Σ', colla medesima curvatura costante, e legata a Σ da una trasformazione *reale* composta di due trasformazioni opposte di Bäcklund, reali ovvero puramente immaginarie. Sussistono inoltre le proprietà geometriche seguenti: Le normali alle superficie Σ, Σ' in coppie (P, P') di punti corrispondenti si incontrano in un punto P_0 (equidistante da P, P'), il quale descrive una superficie S_0 deformata di una quadrica a centro rotonda; sulla S_0 i sistemi coniugati corrispondono a quelli di (Σ, Σ'), in particolare quello coniugato permanente alle linee di curvatura.

Passando dalle superficie a curvatura costante isolate alle loro famiglie (Σ) di Lamé, ho anche dimostrato (negli ultimi capitoli della Memoria citata) che le dette trasformazioni reali sono pure applicabili a queste famiglie (Σ) di Lamé (cfr. Vol. II, § 438); ed è appunto di questi risultati che ci serviremo ora per costruire sistemi tripli coniugati con una famiglia (S_0) di deformate di quadriche a centro rotonde. Dimostreremo per ciò che sussiste l'ulteriore proprietà: *Se nella costruzione precedente si fa percorrere a* Σ, Σ' *le coppie di*

(*) Vedi la Memoria: *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* (Annali di matematica, T. III della Serie 3ª).

superficie corrispondenti in due famiglie di Lamé (Σ), (Σ') *a curvatura costante, legate da una delle dette trasformazioni, la deformata S_0 della quadrica rotonda descrive una famiglia (S_0) appartenente ad uno dei nuovi sistemi tripli coniugati.*

Si ricordi poi che, nel caso della curvatura K negativa, le coppie (Σ), (Σ') di famiglie pseudosferiche di Lamé ammettono trasformazioni *reali* B_σ di Bäcklund in altre tali coppie, onde segue che le famiglie (S_0) di deformate di quadriche rotonde ammettono trasformazioni reali asintotiche B_k in altre famiglie della medesima specie.

Descritta così la generazione geometrica dei nuovi sistemi tripli coniugati con deformate di quadriche rotonde dalle famiglie (Σ) di Lamé a curvatura costante K, andiamo a stabilire le formole effettive, separando i due casi di $K<0$, o $K>0$.

§ 8.

Caso di K negativa.

Partiamo da una famiglia (Σ) di Lamé a curvatura costante negativa $K=-\frac{1}{R^2}$, definita dalle formole (I), (I*) § 4. Al sistema di equazioni differenziali fondamentali per le ricordate trasformazioni si può dare la forma lineare omogenea seguente, dove A, M, Φ, W indicano quattro funzioni incognite di u, v, w e c una costante arbitraria:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial u}=\cos\theta\,A,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial v}=\operatorname{sen}\theta\,M,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial w}=R\frac{\partial\theta}{\partial w}\cdot W\\
&\frac{\partial A}{\partial u}=c\cos\theta\,.\,\Phi+\frac{1-cR^2}{R}\operatorname{sen}\theta\,.\,W+\frac{\partial\theta}{\partial v}M,\quad \frac{\partial A}{\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial u}M,\quad \frac{\partial A}{\partial w}=RA\,.\,W\\
&\frac{\partial M}{\partial u}=-\frac{\partial\theta}{\partial v}A,\quad \frac{\partial M}{\partial v}=c\operatorname{sen}\theta\,.\,\Phi-\frac{1-cR^2}{R}\cos\theta\,W-\frac{\partial\theta}{\partial u}A,\quad \frac{\partial M}{\partial w}=RB\,.\,W\\
&\frac{\partial W}{\partial u}=-\frac{\operatorname{sen}\theta}{R}A,\quad \frac{\partial W}{\partial v}=\frac{\cos\theta}{R}M,\quad (1-cR^2)\frac{\partial W}{\partial w}=\\
&\qquad=cRR'\,.\,W+cR\frac{\partial\theta}{\partial w}\Phi-RA\,.\,A-RB\,.\,M.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(III)}$$

In forza delle (1) § 4, questo è un sistema completamente integrabile: esso possiede l'integrale quadratico

$$A^2 + M^2 - c\,\Phi^2 + (1 - c\,R^2)\,W^2 = \text{cost.}, \tag{16}$$

poichè le derivate rapporto ad u, v, w del primo membro sono nulle per le (III).

Per dedurre dalle superficie pseudosferiche Σ le superficie S_0 deformate di quadriche rotonde, occorre scegliere una qualunque quaderna (A, M, Φ, W) di soluzioni delle (III) per la quale la costante del secondo membro nelle (16) sia nulla, onde avremo

$$A^2 + M^2 - c\,\Phi^2 + (1 - c\,R^2)\,W^2 = 0. \tag{16*}$$

Dopo di ciò le formole

$$x_0 = x - \frac{\Phi}{W} X_3, \quad y_0 = y - \frac{\Phi}{W} Y_3, \quad z_0 = z - \frac{\Phi}{W} Z_3 \tag{17}$$

definiranno una famiglia (S_0) di superficie applicabili sopra quadriche a centro rotonde (immaginarie). Noi vogliamo ora verificare che queste formole (17) definiscono appunto un sistema triplo coniugato (u, v, w), che apparterrà per ciò alla classe del paragrafo precedente. Per dimostrarlo cominciamo dal calcolare le derivate prime $\frac{\partial x_0}{\partial u}, \frac{\partial x_0}{\partial v}, \frac{\partial x_0}{\partial w}$, ciò che dà:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_0}{\partial u} &= \frac{R W \cos\theta + \Phi \operatorname{sen}\theta}{R W^2}\,(W X_1 - A X_3)\\
\frac{\partial x_0}{\partial v} &= \frac{R W \operatorname{sen}\theta - \Phi \cos\theta}{R W^2}\,(W X_2 - M X_3)\\
\frac{\partial x_0}{\partial w} &= \frac{\Phi}{W}\left\{ R\,(A X_1 + B X_2) + \frac{\partial \log W}{\partial w} X_3 \right\}.
\end{aligned}$$

D'altra parte sussistono le identità seguenti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v}(W X_1 - A X_3) &= \frac{M \cos\theta}{R W}(W X_1 - A X_3) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{A \cos\theta}{R\,W}\right)(W X_2 - M X_3)\\
\frac{\partial}{\partial w}(W X_1 - A X_3) &= \frac{\partial \log W}{\partial w}(W X_1 - A X_3) + \frac{A W}{\Phi}\,\frac{\partial x_0}{\partial w}\\
\frac{\partial}{\partial w}(W X_2 - M X_3) &= \frac{\partial \log W}{\partial w}(W X_2 - M X_3) + \frac{M\,W}{\Phi}\,\frac{\partial x_0}{\partial w},
\end{aligned}$$

le quali dimostrano che $\frac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial v}$ si compone linearmente ed omogeneamente con $\left(\frac{\partial x_0}{\partial u}, \frac{\partial x_0}{\partial v}\right)$, similmente $\frac{\partial^2 x_0}{\partial u\, \partial w}$ con $\left(\frac{\partial x_0}{\partial u}, \frac{\partial x_0}{\partial w}\right)$, e infine $\frac{\partial^2 x_0}{\partial v\, \partial w}$ con $\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}, \frac{\partial x_0}{\partial w}\right)$. Il sistema (u, v, w) definito dalle (17) è dunque in effetto un sistema triplo coniugato. Dai calcoli stessi eseguiti si deduce poi che i valori corrispondenti di H_1, H_2, H_3 (§ 1) sono dati qui dalle formole

$$H_1 = \cos\theta + \frac{\Phi \operatorname{sen}\theta}{R\, W}, \quad H_2 = \operatorname{sen}\theta - \frac{\Phi\cos\theta}{R\, W}, \quad H_3 = \frac{\Phi}{W}.$$

Si è già detto che le superficie S_0 della serie $w = \text{cost.}$ sono applicabili sopra quadriche rotonde, che nel caso attuale $(K < 0)$ sono però immaginarie. Ma si può anche assumere come superficie tipica su cui la S_0 è applicabile una superficie rotonda reale, precisamente (Vol. II, § 259):

un catenoide accorciato	se	$1 - c R^2 < 0$
un sinusoide iperbolico	se	$1 - c R^2 > 0$
la superficie logaritmica	se	$1 - c R^2 = 0.$

In quest'ultimo caso R è costante ed il sistema triplo ortogonale è un sistema pseudosferico di Weingarten. È notevole il caso in cui questo sistema (Σ) dà luogo ad una serie infinita di sistemi contigui complementari (Vol. II, § 445):

$$\ldots (\Sigma_{-2}),\ (\Sigma_{-1}),\ (\Sigma),\ (\Sigma_1),\ (\Sigma_2) \ldots,$$

estendentesi all'infinito nei due sensi. In tal caso, possiamo dedurne, *senza alcun calcolo d'integrazione,* una catena corrispondente di sistemi tripli coniugati con una serie (S_0) di deformate della superficie logaritmica di rotazione. E invero due sistemi come (Σ_1), (Σ_{-1}) contigui a destra ed a sinistra ad un medesimo (Σ) si trovano nelle condizioni geometriche descritte al paragrafo precedente, e le normali in punti corrispondenti a due superficie Σ_1, Σ_{-1} si incontrano in un punto P_0 che descrive una tale superficie. La famiglia (S_0) appartiene al sistema triplo coniugato.

§ 9.

Caso di K positiva.

Supponiamo ora $K > 0$ e riferiamoci alle formole (II), (II*) § 4. In questo caso al sistema (III) è da sostituirsi il seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \operatorname{senh}\theta \,.\, A, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \cosh\theta \,.\, M, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial w} = R\frac{\partial \theta}{\partial w} \,.\, W \\
&\frac{\partial A}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} M + c \operatorname{senh}\theta \,.\, \Phi - \frac{cR^2+1}{R}\cosh\theta\, W, \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} M, \frac{\partial A}{\partial w} = RA \,.\, W \\
&\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} A, \frac{\partial M}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} A + c\cosh\theta\Phi - \frac{cR^2+1}{R}\operatorname{senh}\theta \,.\, W, \frac{\partial M}{\partial w} = RB \,.\, W \\
&\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\cosh\theta}{R} A, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = \frac{\operatorname{senh}\theta}{R} M, \quad (cR^2+1)\frac{\partial W}{\partial w} = - \\
&\qquad = -cRR'W + cR\frac{\partial \theta}{\partial w}\Phi - RA\Lambda - RBM,
\end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

dove c indica nuovamente una costante arbitraria. Il sistema (IV) è completamente integrabile, a causa delle (II), e possiede l'integrale quadratico

$$A^2 + M^2 - c\,\Phi^2 + (c\,R^2 + 1)\,W^2 = \text{cost.} \tag{18}$$

Prendiamo anche qui una quaderna (Λ, M, Φ, W) di soluzioni delle (IV) per la quale la costante del secondo membro sia nulla:

$$A^2 + M^2 - c\,\Phi^2 + (c\,R^2 + 1)\,W^2 = 0, \tag{18*}$$

e le formole stesse (17)

$$x_0 = x - \frac{\Phi}{W} X_3, \text{ ecc.}$$

daranno, per ogni valore di w, una superficie S_0 applicabile sopra una quadrica reale di rotazione attorno all'asse focale. Precisamente la quadrica sarà un *ellissoide allungato* se la costante c è negativa, un *iperboloide a due falde* se c è positiva; questa quadrica resterà la stessa se R è costante, in generale varierà con w.

Ora andiamo a verificare che, al variare di w, la S_0 descrive un sistema triplo coniugato (u, v, w). Per questo calcoliamo le derivate prime di x_0 colle formole

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = \frac{RW \operatorname{senh} \theta - \Phi \cosh \theta}{RW^2} (W X_1 - A X_3)$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial v} = \frac{RW \cosh \theta - \Phi \operatorname{senh} \theta}{RW^2} (W X_2 - M X_3)$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial w} = \frac{\Phi}{W} \left\{ R (A X_1 + B X_2) + \frac{\partial \log W}{\partial w} X_3 \right\},$$

ed osserviamo le identità

$$\frac{\partial}{\partial v} (W X_1 - A X_3) = \frac{M \operatorname{senh} \theta}{R W} (W X_1 - A X_3) + \\ + \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{A \operatorname{senh} \theta}{R W} \right) (W X_2 - M X_3)$$

$$\frac{\partial}{\partial w} (W X_1 - K X_3) = \frac{\partial \log W}{\partial w} (W X_1 - A X_3) + \frac{A W}{\Phi} \frac{\partial x_0}{\partial w}$$

$$\frac{\partial}{\partial w} (W X_2 - M X_3) = \frac{\partial \log W}{\partial w} (W X_2 - M X_3) + \frac{M W}{\Phi} \frac{\partial x_0}{\partial w}.$$

Da queste segue che le formole (17) definiscono nuovamente un sistema (u, v, w) triplo coniugato, e pei corrispondenti coefficienti H_1, H_2, H_3 del § 1 si trovano i valori

$$H_1 = \operatorname{senh} \theta - \frac{\Phi \cosh \theta}{R W}, \quad H_2 = \cosh \theta - \frac{\Phi \operatorname{senh} \theta}{R W}, \quad H_3 = \frac{\Phi}{W}.$$

§ 10.

Quaderne armoniche di soluzioni del sistema (IV). Tetraedri coniugati.

L'integrazione del sistema differenziale (III) o (IV), associato ad una famiglia (Σ) di Lamé a curvatura costante, ci ha condotto a sistemi tripli coniugati contenenti una famiglia (S_0) di superficie applicabili sopra quadriche rotonde; ma ora vogliamo provare che se ne può dedurre ancora classi di sistemi tripli coniugati con superficie S_0 applicabili sui *generali* paraboloidi a parametri puramente immaginarii:

$$\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} = 2z\sqrt{-1}.$$

Per semplicità supporremo R costante, e faremo senz'altro $R = 1$, per modo che lè superficie S_0 nella serie $w =$ cost. risulteranno applicabili sul *medesimo* paraboloide. Premettiamo alcune osservazioni sulle quaderne di soluzioni (A, M, Φ, W) p. e. del sistema differenziale (IV) (nel quale si farà $R = 1$), che varranno pure nei casi analoghi che incontreremo in seguito.

Si è già detto che per ogni tale quaderna di soluzioni è costante l'espressione

$$A^2 + M^2 - c\Phi^2 + (c+1) W^2,$$

onde segue, poichè il sistema è lineare omogeneo, che per due quaderne qualunque di soluzioni (A, M, Φ, W), $(\overline{A}, \overline{M}, \overline{\Phi}, \overline{W})$ è costante l'espressione

$$\Omega = A\overline{A} + M\overline{M} - c\Phi\overline{\Phi} + (c+1) W\overline{W}.$$

[La stessa cosa si può verificare direttamente dalle (IV) ed analoghe per $\overline{A}, \overline{M}, \overline{\Phi}, \overline{W}$, provando che le tre derivate di Ω si annullano].

Ora diremo che le due quaderne (A, M, Φ, W), $(\overline{A}, \overline{M}, \overline{\Phi}, \overline{W})$ sono *armoniche* quando sia

$$A\overline{A} + M\overline{M} - c\Phi\overline{\Phi} + (c+1) W\overline{W} = 0.$$

Manifestamente per ottenere due quaderne armoniche di soluzioni basta legare i valori iniziali delle due quaderne, per un sistema iniziale di valori $u_0\, v_0\, w_0$ delle variabili, in guisa che si annulli *inizialmente* l'espressione Ω sopra scritta.

La denominazione di quaderne armoniche risponde alle considerazioni geometriche seguenti. Riguardiamo A, M, Φ, W quali coordinate *omogenee* di un punto nello spazio e consideriamo la quadrica (Q) di equazione

$$(Q) \quad A^2 + M^2 - c\Phi^2 + (c+1) W^2 = 0.$$

Ad ogni quaderna (A, M, Φ, W) di soluzioni corrisponde, per ciascun sistema (u, v, w) di valori delle variabili, un punto dello spazio; a due quaderne armoniche corrispondono sempre due punti ***coniugati armonici*** rispetto alla quadrica (Q).

Ora prendiamo uu qualunque tetraedro coniugato (autoconiugato) $P_0\,P_1\,P_2\,P_3$ rispetto alla quadrica (Q) e, corrispondentemente a ciascun vertice P_r $(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$, consideriamo una quaderna di soluzioni del sistema (IV)

$$(A_r,\ M_r,\ \Phi_r,\ W_r) \qquad r=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

che si riduca alle coordinate di P_r quando vi si fa $u=u_0$, $v=v_0$, $w=w_0$. Queste quattro quaderne saranno due a due armoniche, e noi diremo brevemente per ciò che esse formano un ***tetraedro coniugato di soluzioni.***

Le considerazioni ora svolte si applicano sia al sistema (IV), sia al sistema (III), e più oltre saranno invocate pei sistemi differenziali analoghi che si presenteranno nel caso delle deformate dei paraboloidi reali. Qui, ritornando al caso particolare del sistema (IV), diamo alla costante c un valore negativo, tale però che $c+1$ riesca positivo, e poniamo

$$c=-\frac{1}{a^2},\quad 1-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2} \qquad (a,\ b,\ \text{reali}). \tag{19}$$

La quadrica (Q) diventa allora la quadrica immaginaria

$$A^2+M^2+\frac{\Phi^2}{a^2}+\frac{W^2}{b^2}=0,$$

e, disponendo per ogni quaderna di soluzioni del fattore costante arbitrario di omogeneità, noi ***normalizzeremo*** la quaderna di soluzioni col rendere

$$A^2+M^2+\frac{\Phi^2}{a^2}+\frac{W^2}{b^2}=1.$$

Per tal modo ad un tetraedro coniugato di soluzioni $(A_r,\ M_r,\ W_r,\ \Phi_r)$ $r=0,\ 1,\ 2,\ 3$ corrisponderà un determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} A_0, & M_0, & \dfrac{\Phi_0}{a}, & \dfrac{W_0}{b} \\ A_1, & M_1, & \dfrac{\Phi_1}{a}, & \dfrac{W_1}{b} \\ A_2, & M_2, & \dfrac{\Phi_2}{a}, & \dfrac{W_2}{b} \\ A_3, & M_3, & \dfrac{\Phi_3}{a}, & \dfrac{W_3}{b} \end{vmatrix};$$

in particolare avremo le relazioni:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1^2+\Phi_2^2+\Phi_3^2&=a^2-\Phi_0^2\\ W_1^2+W_2^2+W_3^2&=b^2-W_0^2\\ \Phi_1 W_1+\Phi_2 W_2+\Phi_3 W_3&=-\Phi_0 W_0.\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

§ 11.

Deformate del paraboloide immaginario:

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{X^2}{b^2}=2Z\sqrt{-1}.$$

Le costanti a, b avendo il significato dato dalle (19), prendiamo come sopra un tetraedro coniugato di soluzioni del sistema (IV). *Diamo alla variabile w un valore fisso* lasciando u, v variabili e verifichiamo che le tre espressioni

$$\Phi_i\, d\,\Phi_0-W_i\, d\, W_0\quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

sono *differenziali esatti.* E infatti, esprimendole in coordinate u, v, abbiamo per le (IV) (ove si faccia $R=1$)

$$\Phi_i d\Phi_0-W_i dW_0=A_0\,(\Phi_i \operatorname{senh}\theta-W_i\cosh\theta)\,d\,u+M_0\,(\Phi_i\cosh\theta-W_i\operatorname{senh}\theta)dv,$$

e basta verificare la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial v}\Big[A_0\,(\Phi_i\operatorname{senh}\theta-W_i\cosh\theta)\Big]=\frac{\partial}{\partial u}\Big[M_0\,(\Phi_i\cosh\theta-W_i\operatorname{senh}\theta)\Big].$$

Ma dalle (IV) segue subito che il primo ed il secondo membro di questa hanno il valor comune

$$\frac{\partial A_0}{\partial v}\,(\Phi_i\operatorname{senh}\theta-W_i\cosh\theta)+\frac{\partial M_0}{\partial u}\,(\Phi_i\cosh\theta-W_i\operatorname{senh}\theta),$$

ciò che prova l'asserzione. Dopo ciò, se introduciamo le tre funzioni y_1, y_2, y_3 di u, v, w, i cui differenziali (rapporto ad u, v) sono le tre dette espressioni, avremo

$$d\,y_i=\Phi_i\, d\,\Phi_0-W_i\, dW_0\quad (i=1,\ 2,\ 3),\tag{21}$$

indi le formole

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial y_i}{\partial u}&=\Lambda_0(\Phi_i \operatorname{senh}\theta - W_i\cosh\theta)\\ \frac{\partial y_i}{\partial v}&=M_0(\Phi_i\cosh\theta - W_i \operatorname{senh}\theta),\end{aligned}\quad (i=1,\ 2,\ 3)\right\}\tag{22}$$

mentre dal calcolo sopra eseguito risulterà

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\log\Lambda_0}{\partial v}\frac{\partial y_i}{\partial u}+\frac{\partial\log M_0}{\partial u}\frac{\partial y_i}{\partial v}\quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Ora riguardiamo y_1, y_2, y_3 quali coordinate cartesiane ortogonali di un punto P nello spazio, e consideriamo la superficie S descritta dal punto P al variare di u, v (rimanendo fissa w). L'elemento lineare di S sarà dato per le (21) da

$$ds^2=\sum_{i=1}^{i=3}(\Phi_i\,d\Phi_0 - W_i\,dW_0)^2,$$

ossia, per le (20), da

$$ds^2=(a^2-\Phi_0^2)\,d\Phi_0^2+2\Phi_0W_0\,d\Phi_0\,dW_0+(b^2-W_0^2)\,dW_0^2.$$

Se poniamo

$$X=a\Phi_0,\quad Y=bW_0,\quad 2Z\sqrt{-1}=\Phi_0^2-W_0^2,\tag{24}$$

risulta

$$ds^2=dX^2+dY^2+dZ^2;$$

dunque: *la nostra superficie S è applicabile sulla quadrica* (24), *cioè sul paraboloide*

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=2Z\sqrt{-1}$$

a parametri puramente immaginarii (di segno contrario).

Dimostriamo ora di più che: *nella corrispondenza stabilita fra i punti di S e della superficie a curvatura costante Σ i sistemi coniugati si corrispondono, ed alle linee (u, v) di curvatura di Σ corrisponde sopra S il sistema coniugato permanente.*

Per questo cominciamo dal calcolare per la S i coseni di direzione della normale Y_1, Y_2, Y_3, e troveremo subito dalle (22)

$$Y_i = \frac{A_0 M_i - M_0 A_i}{\sqrt{A_0^2 + M_0^2}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dopo ciò calcoliamo i coefficienti D, D', D'' della seconda forma quadratica fondamentale di S:

$$D = \sum_i Y_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial u^2}, \quad D' = \sum_i Y_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial u \partial v}, \quad D'' = \sum_i Y_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial v^2}.$$

Se si osservano le identità:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\Phi_i \operatorname{senh} \theta - W_i \cosh \theta) = (\Phi_i \cosh \theta - W_i \operatorname{senh} \theta)\frac{\partial \theta}{\partial u} - A_i$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\Phi_i \operatorname{senh} \theta - W_i \cosh \theta) = (\Phi_i \cosh \theta - W_i \operatorname{senh} \theta)\frac{\partial \theta}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\Phi_i \cosh \theta - W_i \operatorname{senh} \theta) = (\Phi_i \operatorname{senh} \theta - W_i \cosh \theta)\frac{\partial \theta}{\partial v} + M_i,$$

si trovano per D, D', D'' i valori

$$D = D'' = \frac{A_0 M_0}{\sqrt{A_0^2 + M_0^2}}, \qquad D' = 0.$$

Il sistema (u, v) è dunque isotermo-coniugato sulla S come sulla Σ, e di più ridotto in ambedue i casi a parametri isometrici, ciò che dimostra la prima parte della proposizione enunciata. Che poi sopra S questo sistema (u, v) sia il sistema coniugato permanente, nell'applicabilità di S sul paraboloide (24), risulta da ciò che la seconda forma fondamentale di questo paraboloide è proporzionale, in coordinate Φ_0, W_0, alla espressione $d\Phi_0^2 - dW_0^2$, la quale, espressa in coordinate u, v, manca del termine in $du\,dv$, avendosi per le (IV) (ove $R = 1$): $\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v}$.

Facciamo da ultimo l'osservazione, senza più ripeterla nei seguenti casi analoghi, che la deformata S del paraboloide è già intrinsecamente determinata dalla prima quaderna di soluzioni (A_0, M_0, Φ_0, W_0), poichè dai calcoli eseguiti risulta che i coefficienti delle sue due forme fondamentali dipendono solo da questa. La stessa cosa appare evidente dalle formole (21), poichè se, conservando la quaderna (A_0, M_0, W_0, Φ_0), si mutano le altre tre $(A_i, M_i,$

Φ_i, W_i) nelle nuove ($\overline{A}_i$, $\overline{M}_i$, $\overline{\Phi}_i$, $\overline{W}_i$), avremo

$$\overline{A}_i = \sum_{k=1}^{k=3} c_{ik} A_k, \quad \overline{M}_i = \sum_{k=1}^{k=3} c_{ik} M_k,$$

$$\overline{\Phi}_i = \sum_{k=1}^{k=3} c_{ik} \Phi_k, \quad \overline{W}_i = \sum_{k=1}^{k=3} c_{ik} \Phi_k \qquad (i = 1, 2, 3),$$

dove le c_{ik} sono i nove coefficienti di una sostituzione ortogonale. Le (21) provano allora che i differenziali $d y_i$ subiscono corrispondentemente la medesima sostituzione ortogonale, e perciò: *la superficie S si muove rigidamente nello spazio.*

§ 12.

Sistemi tripli coniugati con deformate del paraboloide

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 2 Z \sqrt{-1}.$$

Nei risultati del paragrafo precedente rendiamo ora a w la sua variabilità, e la superficie S acquisterà una semplice infinità di configurazioni, ciascuna determinata dalle (22) *a meno di una traslazione* nello spazio. Precisamente come al § 6, vogliamo dimostrare che si possono fissare queste ∞^1 configurazioni S nello spazio in guisa che la famiglia (S) appartenga ad un sistema triplo coniugato, per la qual cosa basterà fissare in modo conveniente le tre funzioni di w che le (22) lasciano arbitrarie additive in y_1, y_2, y_3. Intanto dal confronto della (23) colle formole generali del § 1, siamo condotti a porre

$$H_1 = A_0, \qquad H_2 = M_0,$$

e successivamente, confrontando le (β) § 1 colle (IV), vediamo che basta porre ancora

$$H_3 = W_0,$$

affinchè le (β) siano soddisfatte. Dopo ciò le due ultime formole (α) § 1, nelle quali si ponga y_i per θ, dànno

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[M_0(\Phi_i \cosh\theta - W_i \operatorname{senh}\theta)\right] = \frac{\partial M_0}{\partial w}(\Phi_i \cosh\theta - W_i \operatorname{senh}\theta) + \frac{\partial \log W_0}{\partial v}\frac{\partial y_i}{\partial w},$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[A_0(\Phi_i \operatorname{senh}\theta - W_i \cosh\theta)\right] = \frac{\partial A_0}{\partial w}(\Phi_i \operatorname{senh}\theta - W_i \cosh\theta) + \frac{\partial \log W_0}{\partial u}\frac{\partial y_i}{\partial w},$$

ovvero

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \log W_0}{\partial u}\frac{\partial y_i}{\partial w} &= A_0 \frac{\partial}{\partial w}(\Phi_i \operatorname{senh}\theta - W_i \cosh\theta), \\ \frac{\partial \log W_0}{\partial v}\frac{\partial y_i}{\partial w} &= M_0 \frac{\partial}{\partial w}(\Phi_i \cosh\theta - W_i \operatorname{senh}\theta). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Eseguendo le derivazioni colle (IV), queste forniscono concordemente

$$\frac{\partial y_i}{\partial w} = W_0\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\Phi_i - \frac{\partial W_i}{\partial w}\right),$$

e dall'ultima delle (IV), osservando le (19), risulta

$$\frac{\partial W_i}{\partial w} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{\partial\theta}{\partial w}\Phi_i - b^2(A A_i + B M_i),$$

e quindi in definitiva

$$\frac{\partial y_i}{\partial w} = b^2 W_0\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\Phi_i + A A_i + B M_i\right).$$

Associando quest'ultima alle (22), veniamo a definire per quadratura le tre funzioni

$$y_1 = y_1(u, v, w), \quad y_2 = y_2(u, v, w), \quad y_3 = y_3(u, v, w)$$

colle formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= A_0(\Phi_i \operatorname{senh}\theta - W_i \cosh\theta) \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= M_0(\Phi_i \cosh\theta - W_i \operatorname{senh}\theta) \\ \frac{\partial y_i}{\partial w} &= b^2 W_0\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\Phi_i + A A_i + B M_i\right). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Resta soltanto da dimostrare che sono soddisfatte le ulteriori condizioni d'integrabilità:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w}\left[A_0(\Phi_i \operatorname{senh}\theta - W_i\cosh\theta)\right] &= b^2\frac{\partial}{\partial u}\left[W_0\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\Phi_i + A A_i + B M_i\right)\right]\\ \frac{\partial}{\partial w}\left[M_0(\Phi_i\cosh\theta - W_i\operatorname{senh}\theta)\right] &= b^2\frac{\partial}{\partial v}\left[W_0\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\Phi_i + A A_i + B M_i\right)\right]\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Ma dalle (25) risultano le identità

$$\frac{\partial}{\partial w}(\Phi_i \operatorname{senh}\theta - W_i\cosh\theta) = b^2\cosh\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\Phi_i + A A_i + B M_i\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial w}(\Phi_i \cosh\theta - W_i\operatorname{senh}\theta) = b^2\operatorname{senh}\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\Phi_i + A A_i + B M_i\right)$$

e si trova d'altronde direttamente dalle (II) § 4, e dalle (IV) § 9

$$b^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\Phi_i + A A_i + B M_i\right) = A(\Phi_i\operatorname{senh}\theta - W_i\cosh\theta)$$

$$b^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\Phi_i + A A_i + B M_i\right) = B(\Phi_i\cosh\theta - W_i\operatorname{senh}\theta);$$

con queste formole le (27) sono immediatamente verificate.

Da tutto ciò si conclude che le (26) definiscono per quadrature, a meno di una traslazione, un sistema triplo (u, v, w) coniugato il quale gode delle proprietà seguenti:

1.ª Le superficie S della serie $w = \text{cost.}$ sono tutte applicabili l'una sull'altra e sul paraboloide (24);

2.ª Sopra ciascuna S il sistema (u, v) è il sistema coniugato permanente;

3.ª Le trajettorie (w) segnano sopra le S una corrispondenza che conserva i sistemi coniugati.

Queste proprietà corrispondono precisamente alle a), b), c) della prefazione.

§ 13.

Caso delle deformate del paraboloide:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=2Z\sqrt{-1}.$$

L'analisi esposta nei due paragrafi precedenti può ripetersi per le famiglie pseudosferiche di Weingarten e per il sistema differenziale (III) § 8, nelle quali formole faremo ancora $R=1$.

Si dia alla costante c un valore negativo $c=-\frac{1}{a^2}$, e si ponga

$$1-c=1+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}, \tag{28}$$

talchè la relazione quadratica (16) § 8 potrà nuovamente normalizzarsi nella:

$$\mathcal{A}^2+M^2+\frac{\Phi^2}{a^2}+\frac{W^2}{b^2}=1.$$

Prendiamo ancora qui un tetraedro coniugato di soluzioni $(\mathcal{A}_r, M_r, \Phi_r, W_r)$ $r=0, 1, 2, 3$, ed osserviamo che, *tenendo fissa la variabile w,* le tre espressioni:

$$d\,y_i=\Phi_i\,d\,\Phi_0+W_i\,d\,W_0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{29}$$

sono differenziali esatti. Si ha invero

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial y_i}{\partial u}&=\mathcal{A}_0(\Phi_i\cos\theta-W_i\,\mathrm{sen}\,\theta)\\ \frac{\partial y_i}{\partial v}&=M_0(\Phi_i\,\mathrm{sen}\,\theta+W_i\cos\theta),\end{aligned}\qquad (i=1,\ 2,\ 3)\right\} \tag{29*}$$

e di qui concordemente

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\log\mathcal{A}_0}{\partial v}\,\frac{\partial y_i}{\partial u}+\frac{\partial\log M_0}{\partial u}\,\frac{\partial y_i}{\partial v}.$$

Il punto di coordinate ortogonali y_1, y_2, y_3 descrive, al variare di u, v (restando fissa w), una superficie S il cui elemento lineare ds calcolato dalle (29), coll'osservare le (20) § 10, ha il valore

$$d s^2 = (a^2 - \Phi_0^2)\, d\Phi_0^2 - 2\,\Phi_0 W_0\, d\Phi_0\, dW_0 + (b^2 - W_0^2)\, dW_0^2.$$

Questo appartiene alla quadrica di equazioni parametriche

$$X = a\,\Phi_0\,, \quad Y = b\,W_0, \quad 2\sqrt{-1}\,Z = \Phi_0^2 + W_0^2,$$

vale a dire al paraboloide

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 2\sqrt{-1}\,Z, \tag{24*}$$

di parametri puramente immaginarii positivi a^2, b^2. Si osservi che, essendo per le (28) $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 1$, è sempre $b^2 < a^2$, onde viene qui escluso il caso del paraboloide rotondo ($b^2 = a^2$); ma, eccettuato questo caso, basta sostituire un paraboloide omotetico per avere il più generale paraboloide a parametri puramente immaginarii (positivi).

Ed ora, come al paragrafo precedente, facciamo variare w, ed otterremo ∞^1 configurazioni della deformata S del paraboloide (24*), ciascuna determinata dalle (29*) a meno di una traslazione. Possiamo fissare i parametri di questa traslazione in guisa che la famiglia (S) appartenga ad un sistema triplo coniugato; e invero il procedimento stesso del § 12 conduce qui alle formole:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial y_i}{\partial u} &= A_0\,(\Phi_i \cos\theta - W_i \operatorname{sen}\theta)\\
\frac{\partial y_i}{\partial v} &= M_0\,(\Phi_i \operatorname{sen}\theta + W_i \cos\theta)\\
\frac{\partial y_i}{\partial w} &= b^2\,W_0\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\,\Phi_i - A\,A_i - B\,M_i\right),
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

che definisce per quadrature il sistema triplo coniugato richiesto, le condizioni d'integrabilità trovandosi identicamente soddisfatte.

Anche qui, come al § 11, si prova che la corrispondenza fra Σ, S conserva i sistemi coniugati ed alle linee (u, v) di curvatura di Σ fa corrispondere sopra S il sistema coniugato permanente.

Aggiungiamo infine che dalle trasformazioni B_σ di Bäcklund pei sistemi pseudosferici di Weingarten si possono dedurre corrispondenti trasformazioni B_k degli attuali sistemi tripli coniugati. Ma noi tralasciamo qui di scrivere le formole corrispondenti, i calcoli a ciò necessarii essendo affatto simili a quelli che eseguiremo più oltre nel caso dei paraboloidi reali (V.[i] § 24).

§ 14.

Caso del paraboloide immaginario rotondo: $X^2 + Y^2 = 2Z\sqrt{-1}$.

Il modo che abbiamo tenuto sopra per dedurre dai sistemi pseudosferici di Weingarten i sistemi tripli coniugati (u, v, w) con superficie S della serie $w =$ cost. applicabili sul paraboloide (24*) escludeva il caso del paraboloide rotondo $(a^2 = b^2)$. Diciamo però subito che anche in questo caso limite esistono i corrispondenti sistemi tripli coniugati; li avremmo trovati inclusi nel caso generale se invece che dai sistemi di Weingarten nello spazio euclideo fossimo partiti da quelli nello spazio *ellittico*, il caso limite corrispondendo allora a quello dei sistemi di Weingarten *con superficie a curvatura totale nulla* in geometria ellittica (*). Dalla Memoria sottocitata prenderemo ora le formole che occorrono al nostro scopo, prescindendo dal loro significato geometrico per lo spazio ellittico.

I sistemi tripli coniugati con una serie di deformate del paraboloide rotondo immaginario dipendono dal seguente sistema differenziale per due funzioni incognite θ, ω delle variabili u, v, w:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial v}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \\ &\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial w} = \cos\theta \operatorname{sen}\omega, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v\, \partial w} = \operatorname{sen}\theta \cos\omega. \end{aligned}\right\} \tag{V}$$

I teoremi generali sulle equazioni a derivate parziali (cf. più oltre § 16) mostrano che le soluzioni (θ, ω) del sistema (V) dipendono da *quattro* funzioni arbitrarie di una variabile ciascuna. Come ho dimostrato al § 15 della Memoria ora citata, le coppie (θ, ω) di soluzioni delle (V) dipendono biunivocamente dalle coppie di superficie pseudosferiche *arbitrariamente scelte* nello spazio euclideo; così anche ad ogni tale coppia di superficie pseudosferiche verrà a corrispondere un sistema triplo coniugato con deformate del

(*) Vedi la Memoria: *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica* (Annali di matematica, T. XXIV, della Serie II [1896]).

paraboloide rotondo immaginario. Supposto che (θ, ω) sia una coppia di soluzioni delle (V), si consideri nelle quattro funzioni incognite (x, ξ, η, ζ) il seguente sistema lineare omogeneo

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial x}{\partial u}=\cos\theta\,.\,\eta,\quad \dfrac{\partial x}{\partial v}=\operatorname{sen}\theta\,.\,\zeta,\quad \dfrac{\partial x}{\partial w}=\dfrac{\partial \theta}{\partial w}\,\xi\\[2mm]
\dfrac{\partial \xi}{\partial u}=-\operatorname{sen}\theta\,.\,\eta,\quad \dfrac{\partial \xi}{\partial v}=\cos\theta\,.\,\zeta,\quad \dfrac{\partial \xi}{\partial w}=-\dfrac{\partial \theta}{\partial w}\,x-\operatorname{sen}\omega\,.\,\eta-\cos\omega\,.\,\zeta\\[2mm]
\dfrac{\partial \eta}{\partial u}=-\cos\theta\,.\,x+\operatorname{sen}\theta\,\xi+\dfrac{\partial \theta}{\partial v}\,\zeta,\quad \dfrac{\partial \eta}{\partial v}=\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\,\zeta,\quad \dfrac{\partial \eta}{\partial w}=\operatorname{sen}\omega\,.\,\xi\\[2mm]
\dfrac{\partial \zeta}{\partial u}=-\dfrac{\partial \theta}{\partial v}\,\eta,\quad \dfrac{\partial \zeta}{\partial v}=-\operatorname{sen}\theta\,.\,x-\cos\theta\,.\,\xi-\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\,\eta,\quad \dfrac{\partial \zeta}{\partial w}=\cos\omega\,.\,\xi.
\end{array}\right\} \quad (31)$$

Questo è, in forza delle (V), un sistema completamente integrabile e di più *ortogonale*. Se ne consideri una quaderna di soluzioni $(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r)$ $(r=0, 1, 2, 3)$, appartenenti ad un determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} x_0 & \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0 \\ x_1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ x_2 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ x_3 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix},$$

e si determinino per quadrature le tre funzioni y_1, y_2, y_3 di u, v, w dalle formole

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial y_i}{\partial u}=\eta_0\,(x_i\cos\theta-\xi_i\operatorname{sen}\theta)\\[2mm]
\dfrac{\partial y_i}{\partial v}=\zeta_0\,(x_i\operatorname{sen}\theta+\xi_i\cos\theta)\\[2mm]
\dfrac{\partial y_i}{\partial w}=-\xi_0\,(\eta_i\operatorname{sen}\omega+\zeta_i\cos\omega),
\end{array}\right\} \quad (32)$$

che tengono qui il luogo delle (30). Le condizioni d'integrabilità risultano identicamente soddisfatte e le formole precedenti definiscono un sistema triplo coniugato (u, v, w) pel quale si ha

$$H_1=\eta_0, \quad H_2=\zeta_0, \quad H_3=\xi_0.$$

Ora consideriamo una superficie S della serie $w=\text{cost.}$; lungo la S abbiamo

$$d\,y_i=x_i\,d\,x_0+\xi_i\,d\,\xi_0 \qquad (i=1, 2, 3),$$

onde per l'elemento lineare ds della S

$$ds^2 = (1 - x_0^2)\,dx_0^2 - 2\,x_0\,\xi_0\,dx_0\,d\xi_0 + (1 - \xi_0^2)\,d\xi_0^2,$$

ciò che corrisponde a porre $a^2 = b^2 = 1$ nelle formole del § 11. Le superficie S sono dunque tutte applicabili sul paraboloide rotondo immaginario

$$X = x_0, \quad Y = \xi_0, \quad 2\sqrt{-1}\,Z = x_0^2 + \xi_0^2, \quad \text{ossia} \quad X^2 + Y^2 = 2\sqrt{-1}\,.\,Z.$$

Inoltre, procedendo come al § 11, si dimostra che il sistema (u, v) è sulle S il sistema coniugato permanente; esso è isotermo-coniugato ed i parametri u, v sono isometrici, onde le proprietà a), b), c) della prefazione si trovano anche qui verificate.

§ 15.

Proprietà geometriche di questi sistemi.

Consideriamo in uno dei sistemi tripli coniugati (u, v, w) ora trovati le tangenti alle trajettorie (w) nei punti di una superficie S ($w =$ cost.) deformata del paraboloide rotondo, e dimostriamo che ha luogo la seguente proprietà: *Le tangenti a queste trajettorie (w) sono normali alle deformate dei paralleli del paraboloide.*

Questa proprietà, che si ripete nel caso delle deformate del paraboloide rotondo *reale* (vedi § 29), merita di essere rilevata perchè appartiene in generale a classi di sistemi tripli coniugati con una serie di deformate di quadriche rotonde *qualunque.*

Per verificarla nel caso nostro, osserviamo che sulla S le deformate dei paralleli (linee di egual curvatura) sono quelle di equazione $x_0^2 + \xi_0^2 =$ cost., e quindi di equazione differenziale:

$$du : dv = \zeta_0\,(x_0 \operatorname{sen}\theta + \xi_0 \cos\theta) : -\eta_0\,(x_0 \cos\theta - \xi_0 \operatorname{sen}\theta).$$

Se indichiamo adunque con Z_1, Z_2, Z_3 i coseni di direzione della tangente a queste linee, abbiamo

$$Z_i = \frac{\xi_0\,x_i - x_0\,\xi_i}{\sqrt{x_0^2 + \xi_2^0}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ora si hanno le identità

$$\sum_i \eta_i Z_i = 0, \quad \sum_i \zeta_i Z_i = 0,$$

e per ciò anche dalla (32_3)

$$\sum_i \frac{\partial y_i}{\partial w} Z_i = 0,$$

ciò che dimostra la nostra proposizione.

Un' altra interessante proprietà degli attuali sistemi tripli coniugati consiste in questo, che essi si presentano a *coppie di sistemi complementari*, secondo il teorema:

Se di ciascuna superficie S nella serie $w = \text{cost.}$ del sistema triplo coniugato si prende la complementare $\overline{S}$, rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani del paraboloide, queste superficie $\overline{S}$ (che sono applicabili sul paraboloide stesso) appartengono ad un nuovo sistema triplo coniugato della medesima specie.

Analiticamente è la simmetria delle equazioni fondamentali (V) in θ, ω che pone in evidenza il sistema complementare, poichè dalle (V) si deduce

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial w} = \cos\omega \operatorname{sen}\theta, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \, \partial w} = \operatorname{sen}\omega \cos\theta,$$

sicchè possiamo scambiare nei nostri risultati θ con ω. Ora se indichiamo con $\overline{x}$, $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$ i valori di x, ξ, η, ζ corrispondenti ad ω, questi sono dati dalle formole di sostituzione ortogonale

$$\overline{x} = \eta \cos\omega - \zeta \operatorname{sen}\omega \qquad \overline{\eta} = -x\cos\theta + \xi \operatorname{sen}\theta$$

$$\overline{\xi} = -\eta \operatorname{sen}\omega - \zeta\cos\omega \qquad \overline{\zeta} = x \operatorname{sen}\theta + \xi\cos\theta.$$

Le coordinate $\overline{y}_0$ di un punto che descrive il nuovo sistema sono date, a meno di costanti additive, dalle formole corrispondenti alle (32):

$$\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial u} = \overline{\eta}_0 (\overline{x}_i \cos\omega - \overline{\xi}_i \operatorname{sen}\omega)$$

$$\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial v} = \overline{\zeta}_0 (\overline{x}_i \operatorname{sen}\omega + \overline{\xi}_i \cos\omega)$$

$$\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial w} = -\overline{\xi}_0 (\eta_i \operatorname{sen}\theta + \overline{\xi}_i \cos\theta),$$

che possono anche scriversi per le precedenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial u} &= \quad \eta_i(\xi_0 \operatorname{sen}\theta - x_0 \cos\theta) \\
\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial v} &= -\zeta_i(\xi_0 \cos\theta + x_0 \operatorname{sen}\theta) \\
\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial w} &= \quad \xi_i(\eta_0 \operatorname{sen}\omega + \zeta_0 \cos\omega).
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

D'altra parte, se si calcolano direttamente le coordinate $\overline{y}_i$ di un punto della superficie complementare $\overline{S}$ delle S, si trova semplicemente

$$\overline{y}_i = y_i - x_0 x_i - \xi_0 \xi_i, \tag{34}$$

e queste, derivate rapporto ad u, v, w, dànno in effetto le (33).

La trasformazione (involutoria) ora considerata dei nostri sistemi tripli coniugati corrisponde alla trasformazione complementare dei sistemi di Weingarten a curvatura nulla nello spazio ellittico (cfr. m. c. § 16). Più in generale, esistono per questi sistemi tripli coniugati trasformazioni B_k, ciò che vale del resto, come già abbiamo osservato al § 13, nel caso delle deformate del paraboloide generale (24*) a parametri immaginarii.