Le equazioni differenziali lineari equivalenti alle rispettive equazioni differenziali aggiunte di Lagrange.

(Del prof. F. Brioschi, *Milano.)*

1.° Le proprietà di quella equazione differenziale lineare la quale considerata per la prima volta da Lagrange fu poi denominata equazione differenziale aggiunta di Lagrange, furono stabilite da Jacobi, da Hesse, da Bertrand, da Darboux. Questi autori hanno dimostrato che allorquando la equazione differenziale aggiunta ammetta gli stessi integrali che l'equazione differenziale primitiva, cioè sia ad essa *equivalente*, sussiste fra quegli integrali e le loro derivate un determinato numero di relazioni quadratiche (*).

In modo particolare se n è un numero dispari, ed $y_1, y_2, \dots, y_n$ rappresentano un sistema fondamentale di integrali della equazione differenziale lineare:

$$y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2} p_2 y^{(n-2)} + \cdots + n p_{n-1} y' + p_n y = 0, \tag{1}$$

se l'equazione differenziale aggiunta di Lagrange è equivalente alla superiore, si hanno le:

$$\left.\begin{array}{l}
f(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\
f(y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
f\left(y_1^{\left(\frac{n-b}{2}\right)}, y_2^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}, \dots, y_n^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}\right) = 0 \\
f\left(y_1^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}, y_2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \dots, y_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right) = 1,
\end{array}\right\} \tag{2}$$

essendo f una forma quadratica a coefficienti costanti.

(*) Darboux. *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* Deuxième partie. Chapitre V.

2.° Nel volume 13.° di questi *Annali* (anno 1885) e nel 14.° degli *Acta Mathematica* (anno 1890) ho dato una formola generale di derivazione successiva per una forma $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ d'ordine m qualsivoglia, ai coefficienti costanti.

Supponendo che le $n-1$ quantità $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ possano assumere i valori $0, 1, 2, \dots, m$; posto:

$$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1},$$

ed:

$$f^{(r)}(y_1) = \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r} f_r(y_1),$$

ed analogamente per le altre derivate, indico con $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$ la espressione:

$$(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}) = f_r(y_1) y'^{\,r_1}_1 y''^{\,r_2}_1 \dots y_1^{(n-1)^{r_{n-1}}} + \cdots$$

e quindi:

$$(0, 0, \dots, 0) = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}) = 0 \quad \text{per} \quad r > m$$

$$(1, 0, 0, \dots, 0) = f_1(y_1) y'_1 + f_1(y_2) y'_2 + \cdots + f_1(y_n) y'_n$$

$$(2, 0, 0, \dots, 0) = f_2(y_1) y'^2_1 + \cdots + 2 f_2(y_1, y_2) y'_1 y'_2 + \cdots$$

e così di seguito.

Ciò posto la formola di derivazione successiva è la seguente:

$$\frac{d(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})}{dx} = \sum_1^{n-2} {}_s\, r_s (r_1, r_2, \dots, r_s - 1, r_{s+1} + 1 \dots r_{n-1}) +$$

$$+ (m - r)(r_1 + 1, r_2, \dots, r_n) -$$

$$- r_{n-1} \sum_2^n {}_s \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{1 \cdot 2 \dots s} p_s(r_1, r_2, \dots, r_{n-s} + 1 \dots r_{n-1} - 1).$$

Il numero delle espressioni $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$ è evidentemente eguale a:

$$\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} = \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{1 \cdot 2 \dots m}.$$

3.° Il caso che intendiamo qui considerare è quello in cui:

$$m = 2 \quad \text{e} \quad (0, 0, \dots, 0) = 0,$$

ed in conseguenza:

$$(1, 0, 0, \dots, 0) = 0.$$

In esso le altre $\frac{n^2+n-4}{2}$ quantità $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ si possono esprimere in funzione delle $\frac{n-1}{2}$ seguenti:

$$(2, 0, 0, \ldots, 0), \qquad (0, 2, 0, \ldots, 0), \qquad (0, 0, 2, \ldots, 0) \ldots$$

cioè dei primi membri delle equazioni (2). Queste però non sono fra loro indipendenti, ma bensì legate da $\frac{n+1}{2}$ relazioni fra esse e le loro derivate, ad eccezione del caso di $n=3$.

Consideriamo dapprima questo caso. La formola di derivazione diventa:

$$\frac{d(r_1, r_2)}{dx} = r_1(r_1-1, r_2+1) + (2-r)(r_1+1, r_2) -$$
$$- r_2[3p_2(r_1+1, r_2-1) + p_3(r_1, r_2-1)],$$

da cui:

$$\frac{d(0, 0)}{dx} = 2(1, 0), \qquad \frac{d(1, 0)}{dx} = (0, 1) + (2, 0), \qquad \frac{d(2, 0)}{dx} = 2(1, 1)$$

$$\frac{d(0, 1)}{dx} = (1, 1) - [3p_2(1, 0) + p_3(0, 0)]$$

$$\frac{d(1, 1)}{dx} = (0, 2) - [3p_2(2, 0) + p_3(1, 0)]$$

$$\frac{d(0, 2)}{dx} = -2[3p_2(1, 1) + p_3(0, 1)].$$

Supposto:

$$(0, 0) = 0, \qquad (2, 0) = \lambda,$$

si deducono le:

$$(1, 0) = 0, \qquad (0, 1) = -\lambda, \qquad (1, 1) = \frac{1}{2}\lambda',$$

e per la quarta:

$$(1, 1) = 0, \qquad \lambda = \text{cost.}$$

$$(0, 2) = 3p_2\lambda, \qquad \frac{d(0, 2)}{dx} = 2p_3\lambda,$$

da cui per l'ultima:

$$2p_3 - 3p'_2 = 0,$$

cioè nullo l'invariante della equazione differenziale (1), come è noto.

4.° Sia in secondo luogo $n=5$. La formola di derivazione è in questo caso:

$$\frac{d(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)}{dx} = r_1(r_1-1,\ r_2+1,\ r_3,\ r_4) + r_2(r_1,\ r_2-1,\ r_3+1,\ r_4) +$$
$$+ r_3(r_1,\ r_2,\ r_3-1,\ r_4+1) + (2-r)(r_1+1,\ r_2,\ r_3,\ r_4) -$$
$$- r_4[10p_2(r_1,\ r_2,\ r_3+1,\ r_4-1) + 10p_3(r_1,\ r_2+1,\ r_3,\ r_4-1) +$$
$$+ 5p_4(r_1+1,\ r_2,\ r_3,\ r_4-1) + p_5(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4-1)].$$

Le funzioni $(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)$ sono in numero di 15 e posto:

$$(0,\ 0,\ 0,\ 0)=0, \qquad (2,\ 0,\ 0,\ 0)=\lambda, \qquad (0,\ 2,\ 0,\ 0)=\mu,$$

si ha:

$$(1,\ 0,\ 0,\ 0)=0,$$

e le altre undici espressioni sono funzioni di λ e di μ; ma dalla formola di derivazione, esclusa la prima, si hanno quattordici relazioni, rimarranno quindi tre relazioni fra λ, μ e loro derivate.

Si avranno così:

$$(0,\ 1,\ 0,\ 0)=-\lambda, \qquad (1,\ 1,\ 0,\ 0)=\frac{1}{2}\lambda', \qquad (0,\ 0,\ 1,\ 0)=-\frac{3}{2}\lambda'$$
$$(1,\ 0,\ 1,\ 0)=\frac{1}{2}\lambda''-\mu, \qquad (0,0,0,1)=-2\lambda''+\mu, \qquad (0,\ 1,\ 1,\ 0)=\frac{1}{2}\mu$$
$$(1,\ 0,\ 0,\ 1)=\frac{1}{2}\lambda'''-\frac{3}{2}\mu',$$

ma:

$$\frac{d(0,\ 0,\ 0,\ 1)}{dx}=(1,\ 0,\ 0,\ 1)-[10p_2(0,\ 0,\ 1,\ 0)+10p_3(0,\ 1,\ 0,\ 0)+$$
$$+5p_4(1,\ 0,\ 0,\ 0)+p_5(0,\ 0,\ 0,\ 0)],$$

quindi si avrà la prima relazione fra λ, μ:

$$\mu'=\lambda'''+6p_2\lambda'+4p_3\lambda, \tag{3}$$

e per essa:

$$(0,\ 1,\ 1,\ 0)=\frac{1}{2}\lambda'''+3p_2\lambda'+2p_3\lambda$$
$$(1,\ 0,\ 0,\ 1)=-\lambda'''-9p_2\lambda'-6p_3\lambda.$$

La formola di derivazione applicata a queste funzioni dà:

$$(0,\ 1,\ 0,\ 1)=-\lambda^{\mathrm{IV}}-4p_2\lambda''-(9p'_2+p_3)\lambda''-(6p'_3-5p_4)\lambda-10p_2\mu$$
$$(0,\ 0,\ 2,\ 0)=\frac{3}{2}\lambda^{\mathrm{IV}}+7p_2\lambda''+(12p'_2+3p_3)\lambda'+(8p'_3-5p_4)\lambda+10p_2\mu,$$

ma:

$$\frac{d(0,\ 0,\ 2,\ 0)}{dx} = 2(0,\ 0,\ 1,\ 1)$$

$$\frac{d(0,\ 1,\ 0,\ 1)}{dx} = (0,\ 0,\ 1,\ 1) - [10p_2(0,\ 1,\ 1,\ 0) + 10p_3(0,\ 2,\ 0,\ 0) + \\ + 5p_4(1,\ 1,\ 0,\ 0) + p_5(0,\ 1,\ 0,\ 0)],$$

in conseguenza dalla eliminazione di $(0,\ 0,\ 1,\ 1)$ si avrà la seconda relazione fra λ, μ: ossia:

$$0 = \frac{7}{4}\lambda^{V} + \frac{35}{2}p_2\lambda''' + \frac{1}{2}(45p'_2 + 5p_3)\lambda'' + \frac{1}{2}(30p''_2 + 25p'_3 - 20p_4 + \\ + 120p_2^2)\lambda' + \frac{1}{2}(20p''_3 - 15p'_4 + 2p_5 + 80p_2p_3)\lambda - 10\left(p_3 - \frac{3}{2}p'_2\right)\mu.$$

Questa relazione introducendo i valori a, b, c dei tre invarianti fondamentali della equazione differenziale del quinto ordine, cioè:

$$a = p_3 - \frac{3}{2}p'_2, \qquad b = p_4 - 2p'_3 + \frac{6}{5}p''_2 - \frac{16}{5}p_2^2$$

$$c = p_5 - \frac{5}{2}p'_4 + \frac{15}{7}p''_3 - \frac{5}{7}p'''_2 - \frac{80}{7}p_2a,$$

prende la forma:

$$\left.\begin{aligned} 10a\mu = \frac{7}{4}A - 15a\lambda'' - 25\left(a' + \frac{3}{4}b\right)\lambda' - \\ - \left(\frac{2.5^2}{7}a'' + \frac{3.5^2}{8}b' + \frac{3}{4}c - \frac{4.5.11}{7}p_2a\right)\lambda, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

posto:

$$A = \lambda^{V} + 10p_2\lambda''' + 10p_3\lambda'' + 5p_4\lambda' + p_5\lambda.$$

La terza relazione si deduce dai valori di:

$$\frac{d(0,\ 0,\ 1,\ 1)}{dx}, \qquad \frac{d(0,\ 0,\ 0,\ 2)}{dx},$$

ma prima di calcolarla distinguiamo il caso in cui:

$$\lambda = (2,\ 0,\ 0,\ 0) = 0,$$

dal caso contrario. Se $\lambda = 0$ si ottiene dalla (3) $\mu = \text{cost.}$ sussistono cioè le relazioni (2) per $n = 5$ e l'equazione differenziale è equivalente alla sua aggiunta.

Per la (4) sarà quindi:

$$a = 0,$$

e risultando in questo caso:

$$(0,\ 0,\ 1,\ 1) = 5p'_2\mu, \qquad (0,\ 0,\ 0,\ 2) = 5(p''_2 - p_4 + 20p^2_2)\mu,$$

dalla:

$$\frac{d(0,\ 0,\ 0,\ 2)}{dx} = -2\,[10p_2(0,\ 0,\ 1,\ 1) + 10p_3(0,\ 1,\ 0,\ 1) + \\ + 5p_4(1,\ 0,\ 0,\ 1) + p_5(0,\ 0,\ 0,\ 1)],$$

si ottiene che:

$$p_5 - \frac{5}{2}p'_4 + \frac{5}{2}p'''_2 - 4\,.\,5^2\,.\,p_2 a = 0,$$

ossia:

$$c = 0.$$

Se quindi la equazione differenziale (1) per $n = 5$ è equivalente alla rispettiva aggiunta di Lagrange gli invarianti di essa di grado dispari a, c sono nulli. Questa proprietà vale per n qualunque (dispari, o pari) come si è osservato nella seconda delle citate Memorie.

Ma aggiungiamo ora, ed è lo scopo di questo scritto, *la reciproca non sussiste.* Supponiamo infatti sieno $a = c = 0$ ma non λ. Le equazioni (3), (4) danno:

$$\mu' = \lambda''' + 6p_2\lambda' + 6p'_2\lambda \tag{5}$$

$$A - \frac{3\,.\,5^2}{7}\,b\lambda' - \frac{3\,.\,5^2}{2\,.\,7}\,b'\lambda = 0, \tag{6}$$

ossia:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^{\mathrm{V}} + 10p_2\lambda''' + 15p'_2\lambda'' + \left(9p''_2 + 16p_2^2 - \frac{5\,.\,8}{7}b\right)\lambda' + \\ &\quad + \left(2p'''_2 + 16p_2p'_2 - \frac{4\,.\,5}{7}\,b'\right)\lambda = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ed infine la terza relazione riducesi alla:

$$\left.\begin{aligned} &3\,.\,4\,.\,5\,.\,b\lambda''' + 3^2\,.\,5\,.\,b'\lambda'' + 3\,.\,5(b'' + 4^2\,.\,p_2 b)\lambda' + \\ &\quad + 2(b''' + 2\,.\,4^2\,.\,p_2 b' + 7\,.\,8\,.\,p'_2 b)\lambda = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Eliminando λ dalle (7) (8) si giunge ad una equazione di condizione fra l'invariante b, il coefficiente p_2 e le loro derivate. La (5) dà:

$$\mu = \lambda'' + 6p_2\lambda + \text{cost.},$$

e quindi si avranno i valori di λ, μ in funzione di b, p_2 e loro derivate.

Ma in questo caso (λ non $= 0$) la equazione differenziale (1) può opportunamente trasformarsi nel modo seguente. Pongasi:

$$y = \lambda v,$$

essendo v una funzione di z, e questa funzione di x. Supponendo:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -2\frac{z''}{z'},$$

e denominando con α, β, γ i tre invarianti fondamentali della equazione differenziale trasformata, saranno:

$$\alpha = 0, \qquad \gamma = 0,$$

e l'equazione stessa avrà la forma:

$$\frac{d^5 v}{d z^5} + 10 q_2 \frac{d^3 v}{d z^3} + 10 q_3 \frac{d^2 v}{d z^2} + 5 q_4 \frac{d v}{d z'} + q_5 v = 0, \tag{9}$$

essendo:

$$q_3 = \frac{3}{2}\frac{d q_2}{d z}, \qquad q_4 = \beta + \frac{9}{5}\frac{d^2 q_2}{d z^2} + \frac{16}{5} q_2^2$$

$$q_5 = \frac{5}{2}\frac{d\beta}{dz} + 2\frac{d^3 q_2}{d z^3} + 16 q_2 \frac{d q_2}{d z}.$$

Ma come è noto:

$$\beta z'^4 = b,$$

e trovasi facilmente essere:

$$q_5 z'^5 = \frac{A}{\lambda},$$

la equazione (6) condurrà così alla prima condizione:

$$q_5 = \frac{3 \cdot 5^2}{2 \cdot 7} \cdot \frac{d\beta}{dz},$$

ed in conseguenza:

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{7}{2 \cdot 5}\frac{d^3 q_2}{d z^3} + \frac{4 \cdot 7}{5} q_2 \frac{d q_2}{d z},$$

e:

$$\beta = \frac{7}{2 \cdot 5}\frac{d^2 q_2}{d z^2} + \frac{2 \cdot 7}{5} q_2^2 + K,$$

da cui:

$$q_4 = \frac{5}{2}\frac{d^2 q_2}{d z^2} + 6 q_2^2 + K.$$

Da ultimo l'equazione (8) per la stessa trasformazione diventa:

$$\frac{d^3\beta}{dz^3} + 2 \,.\, 4^2 \,.\, q_2 \frac{d\beta}{dz} + 7 \,.\, 8 \,.\, \beta \frac{dq_2}{dz} = 0,$$

e quindi:

$$\frac{1}{4^2 \,.\, 5} \frac{d^5 q_2}{dz^5} + \frac{1}{2} q_2 \frac{d^3 q_2}{dz^3} + \frac{dq_2}{dz} \frac{d^2 q_2}{dz^2} + 6 q_2^2 \frac{dq_2}{dz} + K \frac{dq_2}{dz} = 0. \qquad (10)$$

Si ha così il teorema: « Se gli invarianti di grado dispari di una equazione del quinto ordine sono nulli, la equazione può trasformarsi nella (9) ed in questa sono:

$$q_3 = \frac{3}{2} \frac{dq_2}{dz}, \qquad q_4 = \frac{5}{2} \frac{d^2 q_2}{dz^2} + 6 q_2^2 + K$$

$$q_5 = \frac{3 \,.\, 5}{4} \frac{d^3 q_2}{dz^3} + 5 \,.\, 6 \,.\, q_2 \frac{dq_2}{dz},$$

ed il coefficiente q_2 deve soddisfare l'equazione (10). »

Le stesse proprietà, deducesi tosto dalle relazioni (6), (8), sussistono per la equazione differenziale primitiva, nella ipotesi di $\lambda = \text{cost.}$

Agosto, 1896.