

# Sopra la traslazione uniforme di un solido in un liquido indefinito.

(Di U. CISOTTI, a Padova.)

---

Si consideri la traslazione uniforme di un solido  $C$ , immerso in un liquido indefinitamente esteso, e sul quale non agiscono forze esterne.

Il moto di  $C$  mantiene nella massa liquida circostante una perturbazione (avente carattere permanente rispetto a  $C$  stesso) che si rende evanescente a grandi distanze da  $C$ .

I consueti metodi della idrodinamica razionale consentono, com'è ben noto, di caratterizzare analiticamente la questione, riconducendola, nel caso irrotazionale, ad un problema armonico esterno. — In modo preciso si è condotti alla ricerca di una funzione (*potenziale di velocità*) armonica e regolare nello spazio esterno a  $C$ , che soddisfa alle solite condizioni all'infinito, e della quale sono assegnati, sopra il contorno di  $C$ , i valori (dipendenti dalla velocità e dalla forma del solido) della derivata normale.

Si tratta insomma del problema di NEUMANN; in tal modo, dal punto di vista teorico, la questione può ritenersi risolta.

Ma è desiderabile, in via concreta, di possedere mezzi che conducano direttamente a espressioni definitive ed esaurienti degli elementi del moto, espressioni analoghe a quelle che, ad es., si hanno nel caso classico del solido sferico.

Per quanto mi consta, nessun tentativo in questo senso è stato fatto per risolvere in modo altrettanto esauriente il caso generale in cui  $C$  ha forma qualunque.

Un notevole progresso può essere raggiunto se ci si limita al problema piano (profilo rigido piano che si muove nel proprio piano).

La preventiva analisi dell'andamento qualitativo del fenomeno, giova a porre la questione in termini precisi.

Indi, l'utile impiego della teoria delle funzioni, seguendo il metodo do-

vuto a LEVI-CIVITA (\*) e già così fecondo di concrete applicazioni, consente di assegnare l'integrale generale dei moti in questione.

In modo preciso, si perviene alla conclusione che ad ogni funzione analitica  $\omega(\zeta)$  della variabile complessa  $\zeta = \xi + i\eta$ , regolare per  $|\zeta| > 1$  (punto all'infinito compreso), corrisponde il moto liquido subordinato alla traslazione uniforme di un certo profilo rigido. — Il profilo viene in tal modo caratterizzato a posteriori (\*\*).

Che se si pone il problema della determinazione della funzione  $\omega$  corrispondente ad un profilo preventivamente assegnato, giova distinguere tre casi:

- a) il profilo è poligonale (a segmenti rettilinei);
- b) il profilo è curvilineo a punti ordinari (non angolosi);
- c) il profilo è mistilineo e presenta un numero finito di punti angolosi.

Nel primo caso si riesce ad assegnare la definitiva espressione di  $\omega$ ; nel secondo la funzione  $\omega$  rimane caratterizzata da una relazione funzionale, tra la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario, che dev'essere soddisfatta al contorno  $|\zeta| = 1$  del cerchio di regolarità; il terzo caso dipende manifestamente da convenienti combinazioni dei due primi.

Come illustrazione, particolarmente semplice, di profili curvilinei, assegno l'integrale  $\omega$  corrispondente al profilo di forma circolare.

Si ritrovano in tal modo risultati ben noti.

Quale esempio di profili poligonali, prendo in esame il caso più semplice in cui il profilo consta di una lamina rettilinea comunque inclinata sulla direzione del suo moto. Si valutano agevolmente tutte le caratteristiche del moto liquido, in particolare le pressioni che il liquido esercita sugli elementi

(\*) *Scie e leggi di resistenza* [Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1907, Tomo XXIII, pag. 1-37].

(\*\*) Non mi sembra superfluo far rilevare il vantaggio contenuto in questo risultato. Infatti, a prima vista si sarebbe tratti a ritenere che l'originario problema di NEUMANN non è che un'altra forma dell'integrale generale della questione. Ora, assegnata, nel piano del moto, una funzione armonica  $\psi$  (*funzione di corrente*, coniugata al potenziale di velocità  $\varphi$ ) regolare all'infinito, è bensì vero che ad ogni linea  $\psi = \text{costante}$ , chiusa, e tale che, nello spazio ad essa esterno, la  $\psi$  si comporti regolarmente, corrisponde un profilo rigido (e la  $\psi$  stessa caratterizza il moto subordinato del liquido), *ma il campo di regolarità della  $\psi$  risulta in tal modo una incognita funzione della  $\psi$  stessa.* — Colla introduzione d'una opportuna funzione analitica  $\omega(\zeta)$  il campo di regolarità è invece sempre, la regione esterna alla circonferenza  $|\zeta| = 1$ .

della lamina. — Com'è noto (\*) queste pressioni si riducono ad un'unica coppia. — Essa è nulla solamente quando la lamina forma colla direzione della traslazione un angolo nullo, oppure di  $90^\circ$  (com'è del resto evidente essendo questi i due soli casi possibili di *simmetria*).

Non è più nulla negli altri casi: la coppia tende allora a fare assumere alla lamina direzione normale a quella di traslazione.

Tale conclusione non è priva di interesse, specialmente se si immagina di passare (mediante il noto artificio di imprimere a tutto il sistema solido-liquido una traslazione uniforme *opposta* a quella del solido) al problema (analiticamente equivalente) della corrente liquida che investe la lamina *fissa*.

Supposto che invece di essere *fissa*, la lamina sia semplicemente *fissata nel suo punto di mezzo*, la conclusione precedente consente di asserire che la lamina può trovarsi in equilibrio soltanto in due posizioni: quando forma colla direzione generale della corrente investitrice un angolo nullo, oppure di  $90^\circ$ .

In quest'ultima posizione, l'equilibrio è *stabile*; *instabile* nell'altra.

Posta in una posizione intermedia, la lamina va ad assumere quella di equilibrio stabile.

### 1. — Generalità.

Sia  $C$  una porzione di piano, dotata di traslazione uniforme (nel suo stesso piano) con velocità unitaria, in valore assoluto, e la cui direzione assumeremo come verso *negativo* di un asse  $x$ , rigidamente collegato con  $C$ .

Sia  $\gamma$  il contorno di  $C$  (*profilo rigido*).

Immaginiamo  $C$  immerso in un liquido (fluido omogeneo incompressibile, la cui densità, costante, converrà assumere eguale ad 1) che riempie tutto lo spazio  $S$  esterno a  $C$ , e libero da forze di massa.

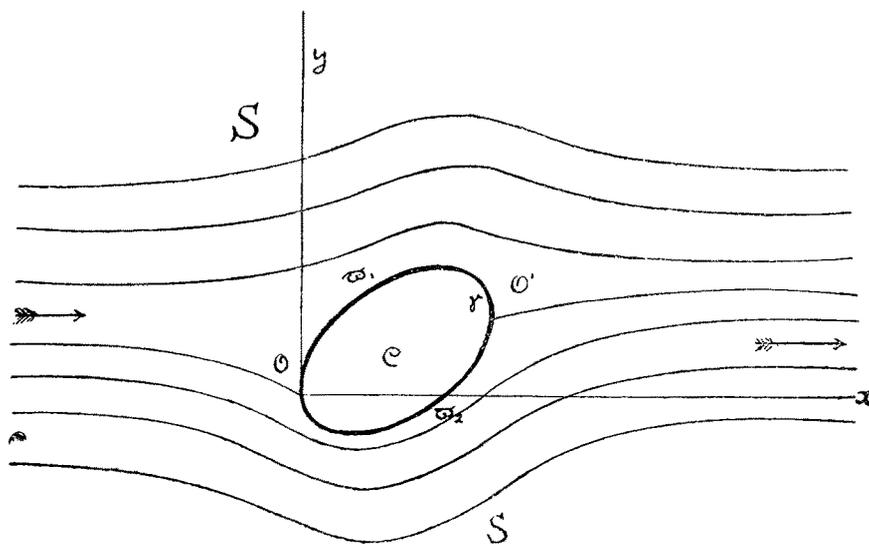
Il moto di  $C$  provoca nel liquido che trovasi in  $S$  una perturbazione, avente carattere stazionario (rispetto a  $C$ ) e che si rende tanto meno sensibile quanto più ci si discosta da  $C$ .

Supporremo che in  $S$  il moto sia *continuo* ed *irrotazionale*.

---

(\*) Cf. CISOTTI, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 1909, Tomo LXIX, pag. 444].

Poichè, come si è già rilevato, l'influenza della traslazione di  $C$  sul liquido diviene evanescente in punti lontani da  $C$ , si deduce, in particolare, che la velocità comunicata da  $C$  alle molecole liquide, tende a zero in punti infinitamente lontani da  $C$ .



Se si ricorre al notissimo artificio di imprimere a tutto il sistema (solido-liquido) una traslazione uniforme di velocità unitaria nel senso delle  $x$  positive, non viene manifestamente alterato il moto relativo delle singole parti.

Allora  $C$  è ridotto alla quiete, e le particelle che trovansi in  $S$  a grandi distanze da  $C$  scorrono con velocità limite unitaria nel senso delle  $x$  positive.

Si ha insomma una corrente modificata dalla presenza del profilo immobile  $\gamma$ .

La modificazione si può schematizzare nel modo seguente.

Un solo filetto, quello che colpisce il profilo  $\gamma$  a monte, subisce un momentaneo arresto in un punto  $O$  (*prora*), ivi si bipartisce, e i due rami proseguono: uno piega a *sinistra* e scorre lungo un tratto  $\sigma_1$  di  $\gamma$ , l'altro tiene la *destra* e lambisce la rimanente parte  $\sigma_2$  di  $\gamma$ . Dopo di avere in tal modo bagnato tutto il profilo  $\gamma$ , i due rami si riuniscono in un punto  $O'$  (*poppa*) di  $\gamma$  stesso, per dar luogo nuovamente ad un unico filetto che si protende indefinitamente a valle.

Tutti gli altri filetti vengono più o meno deviati; nessun'altro subisce arresti. — In sostanza ciò equivale a dire che il valore assoluto della ve-

locità è nullo in  $O$  e in  $O'$  e maggiore di zero in ogni altro punto di  $S$ ; più precisamente esclusi degli intorni (comunque piccoli) di  $O$  e  $O'$ , il valore assoluto della velocità ammette un limite inferiore positivo (\*).

Il problema della traslazione di  $C$  e quello della corrente investitrice sono analiticamente equivalenti.

Gioverà riferirsi a quest'ultimo, che riporta a elementi assoluti del moto.

Assumeremo la prora  $O$  come origine delle coordinate.

Sieno:  $2\alpha$  l'angolo delle tangenti in  $O$  a  $\varpi_1$  e  $\varpi_2$ , considerate nel verso del flusso ( $2\alpha = \pi$  quando  $O$  è un punto ordinario, non angoloso);  $\delta + \alpha$  l'angolo che la tangente a  $\varpi_1$ , nel senso del flusso, forma colla direzione positiva dell'asse  $x$ ; l'angolo dell'analoga tangente a  $\varpi_2$  sarà allora  $\delta - \alpha$ .

Parimenti siano:  $2\alpha'$  l'angolo delle tangenti in  $O'$  a  $\varpi_1$  e  $\varpi_2$ , considerate sempre nel verso del flusso ( $2\alpha' = -\pi$  quando  $O'$  è un punto ordinario, non angoloso);  $\delta' + \alpha'$  l'angolo che la tangente a  $\varpi_1$ , nel verso considerato, forma colla direzione positiva dell'asse  $x$ ; l'angolo dell'analoga tangente a  $\varpi_2$  sarà allora  $\delta' - \alpha'$ .

$\delta$  e  $\delta'$  sono nulli quando il profilo  $\gamma$  è simmetrico e simmetricamente orientato rispetto alla direzione dell'asse  $x$ .

Poichè, per ipotesi, in  $S$  il moto è regolare ed irrotazionale, dette  $u$  e  $v$  le componenti della velocità nel punto generico  $P(x, y)$  si avranno: un potenziale di velocità  $\varphi(x, y)$  ed una funzione di corrente  $\psi(x, y)$ , armoniche e regolari in  $S$ , definite dalle equazioni

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= u dx + v dy, \\ d\psi &= -v dx + u dy, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

colle determinazioni  $\varphi = \psi = 0$  in  $O$ .

L'ipotesi che i filetti liquidi sufficientemente lontani da  $C$  scorrano paralleli fra loro ed all'asse  $x$  con velocità unitaria, si traduce analiticamente nelle condizioni

$$\lim_{OP=\infty} u = 1, \quad \lim_{OP=\infty} v = 0. \quad (2)$$

Le condizioni al contorno  $\gamma$  provengono dall'esprimere che  $\gamma$  è costituita da linee di flusso. — Com'è ben noto, ciò dà luogo alla condizione  $\psi = \text{co-}$

---

(\*) Non è escluso che il valore assoluto della velocità possa annullarsi anche in un numero finito di punti (angolosi) del profilo  $\gamma$ ; vorrà dire che esso ammette un limite inferiore positivo in  $S$ , quando si escludano, con intorni comunque piccoli, anche questi punti.

stante sopra  $\gamma$ , e poichè  $\psi = 0$  in  $O$ , avremo

$$\psi = 0 \quad \text{sopra } \gamma. \quad (3)$$

Ciò posto, si può intanto concludere che la  $\psi$  è funzione uniforme. Per poter asserire altrettanto per la associata  $\varphi$  basta notare che la circolazione  $\int (u dx + v dy)$ , relativa ad una circonferenza di raggio infinitamente grande, è per (2) identicamente nulla, se si ammette — come facciamo — che a grandi distanze da  $C$ ,  $u - 1$  e  $v$  si annullino di ordine superiore al primo.

Il senso del moto è ovunque ben determinato, per essere

$$V = |\sqrt{u^2 + v^2}| > 0,$$

eccettuati i punti  $O$  e  $O'$  [ed eventualmente un numero finito di punti di  $\gamma$  (cfr. la nota a pag. 87)] in cui  $V = 0$ ; designando perciò con  $ds$  l'elemento d'arco di una generica linea di flusso, contato positivamente nel senso del flusso, si avrà

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V},$$

e quindi

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = V > 0,$$

in ogni punto, eccettuati  $O$  ed  $O'$  (e gli eventuali altri punti, angolosi, di  $\gamma$ ).

Anzi, siccome esclusi due intorni  $I$  e  $I'$ , comunque piccoli, di  $O$  e  $O'$  [ed eventuali piccoli intorni di punti angolosi di  $\gamma$ ] il limite inferiore dei valori di  $V$  è una costante  $\varepsilon > 0$ , potremo ritenere in tutti i punti di una generica linea di flusso esterni a detti intorni,

$$\frac{d\varphi}{ds} = V \geq \varepsilon > 0.$$

Ora, detto  $\varphi'$  il valore di  $\varphi$  in  $O'$ , per essere  $\varphi = 0$  in  $O$ , dalla precedente disequaglianza scende che la  $\varphi$  va sempre crescendo, quando si procede nel senso del flusso, sia sopra  $\varpi_1$  che sopra  $\varpi_2$ , assumendo in entrambi i casi tutti i valori da 0 fino a  $\varphi' > 0$ .

2. — La funzione  $\omega$ .

Posto, al solito

$$\left. \begin{aligned} x + iy &= z, \\ u - iv &= w, \\ \varphi + i\psi &= f, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

per le (1),  $w$  ed  $f$  risultano funzioni della variabile complessa  $z = x + iy$ , e le (1) stesse si compendiano nella relazione

$$\frac{df}{dz} = w. \quad (5)$$

La funzione  $w(z)$  è uniforme in  $S$ , per le (2) all'infinito  $|w| = V = 1$ , mentre  $|w| = V > 0$  nei punti di  $S$  al finito, eccettuati i punti  $O$  e  $O'$  [ed eventualmente un numero finito di punti appartenenti a  $\gamma$ ], in cui  $|w| = 0$ .

La funzione  $f(z)$  è regolare (al finito) e per (5) è  $\left| \frac{df}{dz} \right| > 0$  entro  $S$ .

Poniamo

$$w = e^{-i\omega}, \quad (6)$$

facendo la convenzione che per  $z = \infty$  [ $|w| = 1$ ], sia  $\omega = 0$ ; rimane così definita una funzione  $\omega(z)$ , uniforme in  $S$ , finita e continua anche su  $\gamma$ , ad eccezione dei punti  $O$ ,  $O'$  (ed eventualmente un numero finito di punti).

Dalle (6), posto

$$\omega = \vartheta + i\tau, \quad (\vartheta \text{ e } \tau \text{ reali}), \quad (7)$$

si deducono le relazioni

$$\left. \begin{aligned} |w| &= |\sqrt{u^2 + v^2}| = V = e^\tau, \\ \frac{u + iv}{V} &= e^{i\vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

La parte reale  $\vartheta$  di  $\omega$  definisce, come si vede, l'angolo che in ogni punto, la linea di flusso che lo contiene, forma colla direzione positiva dell'asse  $x$ .

Per le ipotesi fatte, facilmente si riconosce che  $\vartheta$  va contato fra  $-\pi$  e  $\pi$ ,

positivamente nel verso  $x \rightarrow y$ , partendo dalla direzione positiva dell'asse  $x$ ; negativamente nel verso opposto.

Per quanto si è visto al n.º 1 si ha senz'altro,

$$\left. \begin{aligned} \lim \mathcal{S} &= \delta + \alpha, \text{ avvicinandosi a } O \text{ sopra } \varpi_1, \\ \lim \mathcal{S} &= \delta - \alpha, \text{ avvicinandosi a } O \text{ sopra } \varpi_2, \\ \lim \mathcal{S} &= \delta' + \alpha', \text{ avvicinandosi a } O' \text{ sopra } \varpi_1, \\ \lim \mathcal{S} &= \delta' - \alpha', \text{ avvicinandosi a } O' \text{ sopra } \varpi_2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

la  $\mathcal{S}$  dovendo naturalmente seguire anche negli altri punti di  $\varpi_1$  e  $\varpi_2$  l'andamento del profilo rigido.

Lasciando per ora indeterminata la forma del profilo  $\gamma$ , ci basterà tenere presente che *la funzione  $\omega(z) = \mathcal{S}(x, y) + i\tau(x, y)$  dev'essere regolare in  $S$ , annullarsi all'infinito, e sul contorno  $\gamma$  la sua parte reale deve soddisfare alle (9).*

### 3. — Cambiamenti di variabile.

Converrà eseguire dei cambiamenti di variabile che consentano di sostituire al campo  $S$ , la parte di piano esterna a una circonferenza di raggio 1.

Cominciamo col rappresentare nel piano complesso  $f = \varphi + i\psi$  i valori che assume la funzione  $f(z)$ , col variare di  $z$  in  $S$ .

Quando  $z$  si trova sul profilo  $\gamma$ ,  $f$  è reale, in causa di (3); in particolare al punto  $O$  corrisponde  $f=0$ . Procedendo poi da  $O$  su  $\gamma$ , in uno qualunque dei due sensi fino a  $O'$  (percorrendo cioè  $\varpi_1$  oppure  $\varpi_2$ ),  $f$  assume tutti i valori reali compresi fra 0 e  $\varphi'$  [Cfr. n.º 1]; c'è quindi corrispondenza (1, 2) fra il profilo  $\gamma$  del piano  $z$  e il tratto  $(0, \varphi')$  dell'asse reale del piano  $f$ .

La corrispondenza si rende manifestamente biunivoca immaginando di praticare nel piano  $f$ , un taglio lungo il segmento  $(0, \varphi')$  dell'asse reale.

In tal modo il tratto  $(0, \varphi')$  rimane sdoppiato, e per la biunivocità della corrispondenza, basta convenire che, p. es., il lembo superiore del taglio (quello rivolto verso il semipiano  $\psi > 0$ ) rappresenti i valori presi, da  $f$ , sopra  $\varpi_1$ , il lembo inferiore i valori che  $f$  assume sopra  $\varpi_2$ .

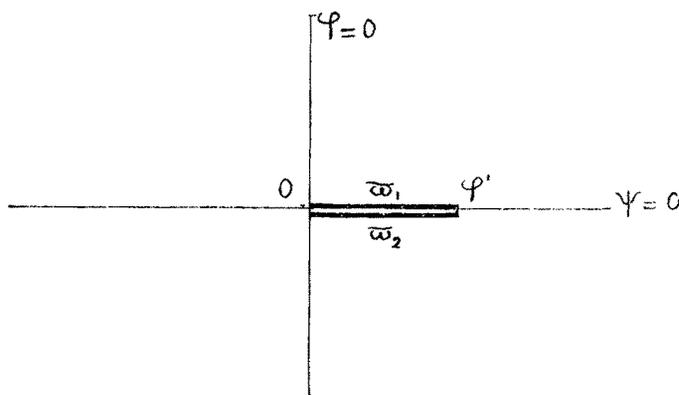
Dopo ciò, se si tiene presente [Cfr. n.º 2] che  $f(z)$  si mantiene, in  $S$ , regolare per valori di  $z$  il cui modulo è finito, mentre che per  $z = \infty$  è  $f = \infty$ ,

abbiamo quanto basta per poter concludere che la relazione

$$f = f(z),$$

stabilisce una corrispondenza biunivoca fra il campo  $S$  e il piano tagliato  $f$ .

Piano  $f = \varphi + i\psi$



Considerando pertanto la  $z$  come funzione di  $f$  nel piano tagliato, la  $z$  si mantiene regolare, al finito, e diviene infinita per  $f$  infinito.

Vogliamo ora eseguire un cambiamento di variabile per cui il piano tagliato  $f$  venga sostituito dalla parte di piano esterna ad una circonferenza di raggio 1.

Basta porre a tal uopo

$$f = \frac{1}{4} \varphi' \left( 2 + \zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \tag{10}$$

designando  $\zeta = \xi + i\eta$  una nuova variabile complessa.

Si vede tosto che, mediante questa relazione, si può sostituire al piano tagliato  $f$  il campo di punti  $|\zeta| \geq 1$  del piano  $\zeta = \xi + i\eta$ .

Posto infatti

$$\zeta = \rho e^{i\sigma},$$

dalla (10), che diviene

$$f = \varphi + i\psi = \frac{1}{4} \varphi' \left\{ 2 + \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \sigma + i \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \sigma \right\},$$

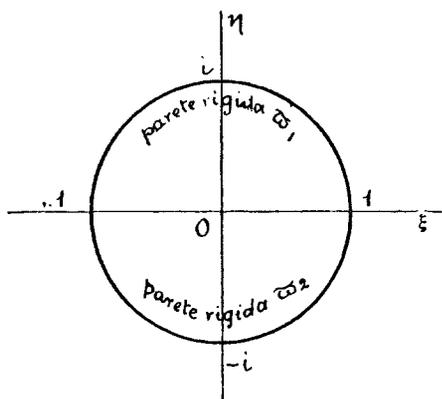
scendono le relazioni seguenti

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4} \varphi' \left\{ 2 + \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \sigma \right\}, \\ \psi &= \frac{1}{4} \varphi' \left\{ \rho - \frac{1}{\rho} \right\} \operatorname{sen} \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Per  $\rho = 1$ , le precedenti divengono

Piano  $\zeta = \xi + i\eta$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \varphi' (1 + \cos \sigma), \\ \psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11')$$



Ciò intanto mostra che ai punti della circonferenza  $|\zeta| = 1$  del piano  $\zeta$  fanno riscontro punti appartenenti all'asse reale del piano tagliato  $f$ .

Poichè, come risulta dalla prima delle (11'), facendo variare  $\sigma$  da  $\pi$  fino a  $0$ , oppure da  $-\pi$  fino a  $0$ ,  $\varphi$  assume in entrambi i casi tutti i valori da  $0$  fino a  $\varphi'$ , si può concludere che alle semicirconferenze  $(-1, i, 1)$  e  $(-1, -i, 1)$  si possono far corri-

spondere i lembi, rispettivamente superiore e inferiore, del taglio del piano  $f$ . Ai punti  $O$  e  $\varphi'$  [rappresentativi della prora  $O$  e della poppa  $O'$ ] fanno riscontro i punti  $-1$  e  $+1$ .

Notiamo infine che per  $\rho \geq 1$  e  $0 \leq \sigma \leq \pi$  è  $\psi \geq 0$ ; mentre per  $\rho \geq 1$  e  $-\pi \leq \sigma \leq 0$  è  $\psi \leq 0$ .

Ciò significa che ai punti del piano  $\zeta$  esterni alla circonferenza  $|\zeta| = 1$ , corrispondono punti  $f$  del piano tagliato non appartenenti ai lembi del taglio, e precisamente ai punti di ordinate di un determinato segno dell'uno, punti di ordinate dello stesso segno dell'altro, e in particolare a punti appartenenti all'asse reale dell'uno, punti dell'asse reale dell'altro.

Pertanto la (10) definisce l'annunciata corrispondenza biunivoca fra il piano tagliato  $f = \varphi + i\psi$  e il campo  $|\zeta| \geq 1$  del piano  $\zeta = \xi + i\eta$ .

Facilmente si scorge che, a coppie di punti  $z$  simmetrici rispetto all'asse reale, fanno pure riscontro nei rispettivi piani  $f$  e  $\zeta$ , coppie di punti simmetrici rispetto all'asse reale.

Ciò posto, considerando la  $\omega = \mathfrak{S} + i\tau$ , del numero precedente, come funzione dell'argomento  $\zeta$  nel campo  $|\zeta| \geq 1$ , essa dev'essere regolare per  $|\zeta| > 1$ , annullarsi all'infinito, e per le (9), la sua parte reale  $\mathfrak{S}$  deve comportarsi, sopra  $|\zeta| = 1$ , nel modo seguente

$$\left. \begin{aligned} \lim \mathfrak{S} &= \delta + \alpha && \text{quando } \zeta \text{ si avvicina a } -1 \text{ lungo l'arco } (-1, i), \\ \lim \mathfrak{S} &= \delta - \alpha && \text{» » » » } -1 \text{ » » } (-1, -i), \\ \lim \mathfrak{S} &= \delta' + \alpha' && \text{» » » » } 1 \text{ » » } (1, i), \\ \lim \mathfrak{S} &= \delta' - \alpha' && \text{» » » » } 1 \text{ » » } (1, -i). \end{aligned} \right\} (9')$$

4. — **Integrale generale corrispondente a profili poligonali.**

Immaginiamo decomposta la semicirconferenza  $(1, i, -1)$  del piano  $\zeta$  in  $p$  parti, e la semicirconferenza  $(-1, -i, 1)$  in  $n - p$  ( $n > p$ ) parti, mediante  $n - 1$  punti di divisione

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= e^{i\sigma_1}, & \zeta_2 &= e^{i\sigma_2}, \dots, & \zeta_p &= e^{i\sigma_p} = e^{i\pi} = -1, \\ \zeta_{p+1} &= e^{i\sigma_{p+1}}, & \zeta_{p+2} &= e^{i\sigma_{p+2}}, \dots, & \zeta_{n-1} &= e^{i\sigma_{n-1}}; & \zeta_n &= e^{i\sigma_n} = e^{2i\pi} = 1. \end{aligned}$$

Poniamo

$$\left. \begin{aligned} \delta' + \alpha' &= \mathfrak{S}_1, \\ \delta + \alpha &= \mathfrak{S}_p, \\ \delta - \alpha &= \mathfrak{S}_{p+1}, \\ \delta' - \alpha' &= \mathfrak{S}_n; \end{aligned} \right\} (12)$$

e

$$\left. \begin{aligned} \pi \omega(\zeta) &= \frac{1}{2} \mathfrak{S}_1 \sigma_1 - i \mathfrak{S}_1 \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_1}}{1 - \zeta} + \\ &+ \sum_{\frac{n}{2}}^n \mathfrak{S}_r \left[ \frac{\sigma_r - \sigma_{r-1}}{2} - i \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_r}}{1 - \zeta e^{-i\sigma_{r-1}}} \right]. \end{aligned} \right\} (13)$$

La funzione  $\omega(\zeta)$ , ora definita, è regolare per  $|\zeta| > 1$ , finita all'infinito,

e sopra la circonferenza  $|\zeta| = 1$  la parte reale  $\mathfrak{S}$  di  $\omega$  prende (\*)

$$\begin{aligned}
 & \text{il valore } \mathfrak{S}_1 && \text{per } 0 < \sigma < \sigma_1, \\
 & \text{» } \mathfrak{S}_2 && \text{» } \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, \\
 & \dots && \dots \\
 & \text{» } \mathfrak{S}_p && \text{» } \sigma_{p-1} < \sigma < \sigma_p = \pi, \\
 & \text{» } \mathfrak{S}_{p+1} && \text{» } \sigma_p < \sigma < \sigma_{p+1}, \\
 & \dots && \dots \\
 & \text{» } \mathfrak{S}_n && \text{» } \sigma_{n-1} < \sigma < \sigma_n = 2\pi.
 \end{aligned}$$

Per  $\zeta = \infty$  dev'essere  $\omega = 0$  [Cfr. n.º 3]; questa condizione dà luogo alla seguente relazione tra le costanti  $\sigma_r$  e  $\mathfrak{S}_r$ :

$$\mathfrak{S}_1 \sigma_1 + \sum_2^n \mathfrak{S}_r (\sigma_r - \sigma_{r-1}) = 0. \tag{14}$$

Tenendo conto di questa identità, la (13) definisce una funzione  $\omega(\zeta)$  che soddisfa a tutte le volute condizioni [Cfr. la fine del n.º 3].

Essa è pertanto integrale del problema che stiamo trattando.

Vediamo a quale tipo di profili rigidi corrisponde.

Tenendo presente il significato di  $\mathfrak{S}$  [Cfr. n.º 2], ed il comportamento della parte reale della  $\omega(\zeta)$  definita da (13), scende tosto che il profilo  $\gamma$  è costituito di segmenti rettilinei, corrispondenti agli archi  $(1, \zeta_1), (\zeta_1, \zeta_2), \dots$ , ed inclinati sull'asse  $x$  rispettivamente degli angoli  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$  (naturalmente considerato ciascun segmento nel verso del flusso).

Possiamo adunque concludere che la (13), tenuto conto di (14), costituisce l'integrale generale corrispondente a profili poligonali comunque assegnati.

Nel caso particolare e notevole di profili simmetrici e simmetricamente orientati rispetto all'asse  $x$ , alla condizione (14) sono da aggiungersi le ovvie

(\*) Per la costruzione della  $\omega(\zeta)$  definita da (13) si può seguire del tutto il metodo che ho già avuto occasione di esporre [Cfr. CISOTTI, *Vene fluenti*. Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1908, Tomo XXV, pag. 166 e seguenti]. Il calcolo è stato fatto recentemente dal sig. VILLAT, *Sur le problème de Dirichlet relatif au cercle* [Bulletin de la Société math. de France, t. XXXIX, 1911, pag. 443 e seguenti].

condizioni (*condizioni di simmetria*) [Cfr. n.º 3]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_h + \sigma_{n-h} &= 0, & (h = 1, 2, \dots, n-1); \\ \mathfrak{S}_j + \mathfrak{S}_{n-j+1} &= 0, & (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

5. — **Profili curvilinei a punti ordinari (non angolosi).**

Poniamo

$$\omega_0(\zeta) = i \log \left( 1 - \frac{1}{\zeta^2} \right). \quad (16)$$

La funzione  $\omega_0(\zeta)$  è regolare per  $|\zeta| > 1$ , si annulla per  $\zeta = \infty$ ; di più sopra la circonferenza  $|\zeta| = 1$ , soddisfa alle condizioni (9) in cui si faccia  $\alpha = -\alpha' = \frac{\pi}{2}$ ,  $\delta = \delta' = 0$ .

Posto infatti nella precedente  $\zeta = e$ , e  $\omega_0 = \mathfrak{S}_0 + i\tau_0$ , si ricava

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_0 = \sigma - \frac{\pi}{2}, & \quad \tau_0 = \log 2 + \log \sin \sigma & \text{per} & \quad 0 \leq \sigma \leq \pi, \\ \mathfrak{S}_0 = \sigma_0 + \frac{\pi}{2}, & \quad \tau_0 = \log 2 + \log |\sin \sigma| & \text{per} & \quad -\pi \leq \sigma \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (16')$$

Risulta appunto da queste che la parte reale  $\mathfrak{S}_0$  di  $\omega_0$  ha sopra la circonferenza  $|\zeta| = 1$ , il comportamento accennato, c. d. d.

La  $\omega_0$ , soddisfacendo a tutte le volute condizioni [Cfr. n.º 3] è un integrale particolare della questione.

Vedremo tra poco a quale tipo di profili essa corrisponde; cerchiamo ora di assegnare l'integrale generale cui danno luogo i profili curvilinei senza punti angolosi.

Designi  $\Omega(\zeta)$  una funzione di  $\zeta$ , regolare per  $|\zeta| \geq 1$ , nulla per  $\zeta = \infty$  e tale che

$$\left. \begin{aligned} \Omega(-1) &= \delta, \\ \Omega(+1) &= \delta'. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Si può concludere che la funzione

$$\omega = \omega_0 + \Omega, \quad (18)$$

soddisfa nel modo più generale alle condizioni specificate alla fine del n.º 3, nell'ipotesi che il profilo  $\gamma$  sia a punti ordinari (non angolosi). Essa ne costituisce pertanto l'integrale generale.

Poichè  $\Omega(\zeta)$  è funzione regolare per  $|\zeta| \geq 1$ , e si annulla per  $\zeta = \infty$ , essa si può rappresentare mediante una serie di TAYLOR

$$\Omega(\zeta) = \sum_1^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^n}, \quad (19)$$

i cui coefficienti (complessi)  $c_n$ , rendono la serie stessa convergente fuori e sopra la circonferenza  $|\zeta| = 1$ .

Le condizioni (17), portano tra le costanti  $c_n$ , i vincoli espressi dalle due relazioni seguenti

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^{\infty} (-1)^n c_n &= \delta, \\ \sum_1^{\infty} c_n &= \delta'. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Vediamo quali semplificazioni consente di introdurre l'ipotesi che si tratti di profili simmetrici e simmetricamente orientati rispetto all'asse  $x$ .

In tale ipotesi, in punti simmetrici rispetto all'asse  $x$  le velocità pure devono essere simmetriche, si hanno cioè per  $w = u - iv$  valori coniugati; in particolare sull'asse reale dev'essere  $w$  reale.

A norma della (6)

$$w = e^{-i\omega},$$

anche  $i\omega$  deve assumere valori coniugati in punti coniugati e, in particolare, reali sull'asse reale. Ma a coppie di punti coniugati del piano  $z$  fanno riscontro coppie di punti coniugati nel piano  $\zeta$  [Cfr. n.º 3], in particolare si corrispondono i rispettivi assi reali. Pertanto  $i\omega$  dev'essere reale sull'asse reale.

Se si nota che  $i\omega_0$  è reale per  $\zeta$  reale e  $> 1$ , e che quando c'è simmetria,  $\delta = \delta' = 0$  [Cfr. n.º 1], si può concludere che per profili simmetrici e simmetricamente orientati rispetto all'asse  $x$ ,  $\delta = \delta' = 0$ , e  $\Omega$  è funzione di  $\zeta$  puramente immaginaria sull'asse reale.

Lo sviluppo di  $\Omega(\zeta)$  risulta quindi del tipo

$$\Omega(\zeta) = i \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{\zeta^n}, \quad (19')$$

dove  $b_n$  sono costanti reali.

Le condizioni (17') vanno naturalmente sostituite colle seguenti

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^{\infty} (-1)^n b_n &= 0, \\ \sum_1^{\infty} b_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (17'')$$

o, ciò che è lo stesso, colle seguenti

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^{\infty} b_{2n} &= 0, \\ \sum_1^{\infty} b_{2n-1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (17''')$$

le quali si possono enunciare brevemente dicendo che *la somma dei coefficienti d'indici pari e la somma dei coefficienti di indici dispari sono entrambe nulle.*

Ad ogni  $\omega$  che rientra nella (18) corrisponde adunque il moto subordinato alla traslazione uniforme di un determinato profilo, che in tal modo viene determinato a posteriori.

Ma può chiedersi, come si debba determinare la  $\omega$  che deve corrispondere ad un profilo preventivamente assegnato.

Come ora vedremo, la  $\omega$  rimane allora caratterizzata da una relazione funzionale tra la sua parte reale  $\mathfrak{S}$  ed il coefficiente  $\tau$  di  $i$ , che dev'essere soddisfatta sulla circonferenza  $|\zeta| = 1$ .

L'espressione dell'elemento lineare del piano  $z$ , cioè di  $|dz| = |\sqrt{dx^2 + dy^2}|$ , è, a norma di (5), (6) e (7),

$$|dz| = |e^{\omega}| |df| = e^{-\tau} |df|. \quad (20)$$

L'angolo di contingenza lungo una generica linea di flusso (in particolare, lungo  $\gamma$ ) è  $d\mathfrak{S}$ ; designando con  $c$  la curvatura, si ha, per la precedente

$$c = \frac{d\mathfrak{S}}{|dz|} = e^{\tau} \frac{d\mathfrak{S}}{|df|}. \quad (21)$$

Ora da (10), differenziando si ottiene,

$$df = \frac{1}{4} \varphi' \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}; \quad (22)$$

in particolare, essendo per i punti della circonferenza  $|\zeta| = 1$ ,

$$\zeta = e^{i\sigma} \quad (0 \leq \sigma \leq 2\pi)$$

si ha

$$df = -\frac{1}{2} \varphi' \operatorname{sen} \sigma d\sigma. \quad (22')$$

Ricordiamo che alla circonferenza  $|\zeta| = 1$  fa riscontro il profilo  $\gamma$  nel piano del moto [Cfr. n.º 3]; avremo quindi per l'arco elementare  $d\gamma$ , a norma delle (20) e (22'), la espressione

$$d\gamma = \frac{1}{2} \varphi' |\operatorname{sen} \sigma| \cdot |d\sigma|;$$

e per la curvatura  $c$ , a norma di (21),

$$c = \frac{d\mathfrak{S}}{d\gamma} = \frac{2e^\tau}{\varphi' |\operatorname{sen} \sigma|} \cdot \frac{d\mathfrak{S}}{|d\sigma|}. \quad (23)$$

Applichiamo questa relazione alla soluzione particolare  $\omega_0$ , definita da (16).

Poichè da (16') scendono le

$$\frac{d\mathfrak{S}_0}{d\sigma} = 1, \quad e^{\tau_0} = 2 |\operatorname{sen} \sigma|, \quad (24)$$

la (23) diviene

$$c = \frac{4}{\varphi'}.$$

Dunque la soluzione  $\omega_0$  corrisponde ad un profilo circolare. Ritroveremo questo risultato al numero seguente.

Ora notiamo che fra le parti reali ed i coefficienti di  $i$  in  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\Omega = \Theta + iT$ , sussistono, per (18), le relazioni

$$\tau = \tau_0 + T, \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 + \Theta;$$

tenendo presenti (24), la (23) dà luogo alla seguente relazione fra  $\Theta$  e  $T$ ,

$$\frac{d\Theta}{d\sigma} = \frac{1}{4} \varphi' c(\Theta) e^{-T} \quad (25)$$

con  $\sigma$  crescente da 0 a  $2\pi$ .

Scrivendo  $c(\Theta)$  si è voluto mettere in evidenza che  $c$  è a ritenersi funzione di  $\Theta$  conosciuta, quando si risguardi nota la forma geometrica del profilo  $\gamma$ .

Infatti, dato  $\gamma$ , la curvatura  $c$  è nota come funzione del punto corrispondente, e quindi anche come funzione di un qualunque parametro atto a definire  $\gamma$  stesso; in particolare come tale parametro può assumersi il  $\mathfrak{S}$  e quindi, per la (18),  $\Theta$ .

In definitiva, per un contorno assegnato, la funzione  $\Omega$  (e quindi  $\omega$ ) risulta caratterizzata: dalla relazione funzionale (25) tra  $\Theta$  e  $T$  sul contorno  $|\zeta|=1$ , oltre che dalla condizione di annullarsi per  $\zeta=\infty$ , e dalle condizioni (17).

#### 6. — Profilo circolare.

Abbiamo già veduto al numero precedente, che alla soluzione particolare  $\omega = \omega_0$  ( $\Omega = 0$ ) corrisponde un profilo  $\gamma$  di forma circolare.

Ci proponiamo di ritrovare questa conclusione per via diretta, e ricavare le espressioni ben note pel potenziale di velocità e per la funzione di corrente.

Da (5), (6), (16), (22) scende la seguente relazione differenziale

$$dz = e^{i\omega} df = \frac{1}{4} \varphi' d\zeta,$$

da cui, integrando, si ottiene

$$z - z_0 = \frac{1}{4} \varphi' \zeta \quad (z_0, \text{ costante di integrazione}). \quad (26)$$

Da questa relazione lineare che lega le affisse dei punti dei due piani complessi  $z = x + iy$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ , nel caso particolare che si considera, scende immediatamente che, quando  $\zeta$  descrive la circonferenza  $|\zeta|=1$ , il punto  $z$  descrive la circonferenza

$$|z - z_0| = \frac{1}{4} \varphi',$$

cioè la circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $\frac{1}{4} \varphi'$ .

Immaginiamo di riferirci al centro, e di chiamare  $r$  il raggio, si ha allora  $z_0 = 0$  e  $\frac{1}{4} \varphi' = r$ , e la (26) assume l'aspetto ancor più semplice

$$z = r \zeta. \quad (26')$$

Per questa la (16), tenuto conto di (6) e (5), permette di definire la velocità  $w$  e la funzione  $f$  nel modo seguente

$$\left. \begin{aligned} w &= 1 - \frac{r^2}{z^2}, \\ f &= z + \frac{r^2}{z^2} + \text{costante.} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Ponendo in quest'ultima  $f = \varphi + i\psi$ ,  $z = x + iy$ , e separando la parte reale dal coefficiente di  $i$ , si ricavano pel potenziale di velocità  $\varphi$ , e per la funzione di corrente  $\psi$ , le ben note espressioni (\*)

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= x \left[ 1 + \frac{r^2}{x^2 + y^2} \right] + \text{costante,} \\ \psi &= y \left[ 1 - \frac{r^2}{x^2 + y^2} \right] + \text{costante.} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

### 7. — Lamina rettilinea.

La (14) è identicamente soddisfatta se, ponendo in essa  $n = 4$ , si assume

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= \alpha - \pi, & \sigma_1 &= \alpha, \\ \varrho_2 &= \alpha, & \sigma_2 &= \pi, \\ \varrho_3 &= \alpha - \pi, & \sigma_3 &= \pi + \alpha, \\ \varrho_4 &= \alpha; & \sigma_4 &= 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

La (13) diviene in tal caso

$$\omega(\zeta) = i \log \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - e^{2i\alpha}}. \quad (30)$$

---

(\*) Cfr. ad es. LAMB, *Hydrodynamics* [Cambridge, University Press, third edition, 1906, pag. 74].

Dalle (29) scende che il profilo  $\gamma$  è costituito da una lamina rettilinea, inclinata di un angolo  $\alpha$  sopra l'asse  $x$ .

Ciò del resto lo si può dedurre direttamente.

Infatti da (5), (6) e (22) si ricava

$$dz = \frac{1}{4} \varphi' \left( 1 - \frac{e^{2i\alpha}}{\zeta^2} \right) d\zeta,$$

da cui, integrando,

$$z - z_0 = \frac{1}{4} \varphi' \left( \zeta + \frac{e^{2i\alpha}}{\zeta} \right),$$

$z_0$  designando la costante (complessa) di integrazione. Poichè a  $\zeta = -1$  corrisponde  $z = 0$ , avremo

$$z_0 = \frac{\varphi'}{4} (1 + e^{2i\alpha}),$$

e quindi in definitiva

$$z = \frac{1}{4} \varphi' (1 + \zeta) \left( e^{2i\alpha} + \zeta \right) \frac{1}{\zeta}. \quad (31)$$

Per avere le equazioni parametriche del profilo  $\gamma$ , basta porre in questa  $\zeta = e^{i\sigma}$ ,  $z = x + iy$  e separare la parte reale dalla parte puramente immaginaria. Si ottiene così

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \varphi' \cos \alpha \left[ \cos \alpha + \cos (\sigma - \alpha) \right], \\ y &= \frac{1}{2} \varphi' \sin \alpha \left[ \cos \alpha + \cos (\sigma - \alpha) \right], \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$(0 \leq \sigma \leq 2\pi).$$

Di qua eliminando il parametro  $\sigma$  si ottiene l'equazione del profilo  $\gamma$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha.$$

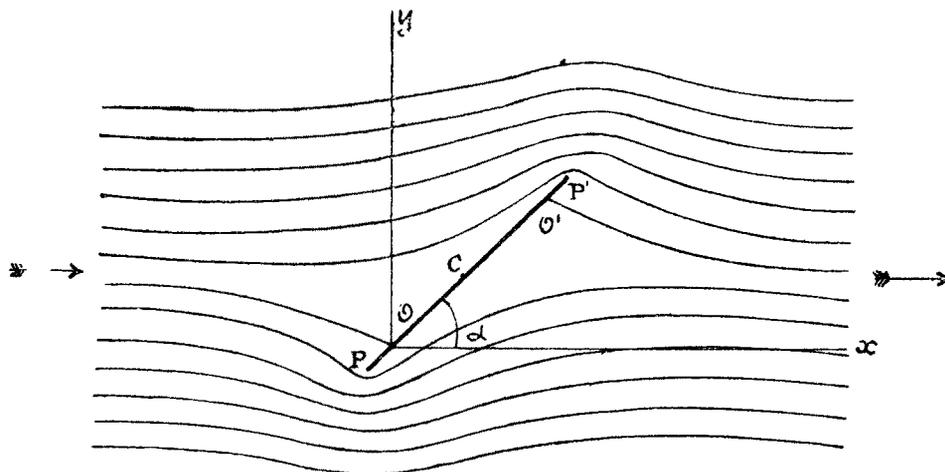
Si ritrova che il profilo è rettilineo ed inclinato di un angolo  $\alpha$  sull'asse  $x$ .

*Lunghezza della lamina.* — Ai punti  $P$  e  $P'$  (estremi della lamina) fanno riscontro i punti  $\zeta = -e^{i\alpha}$  e  $\zeta = e^{i\alpha}$  del piano  $\zeta$ ; si avranno quindi le coordinate dei punti  $P$  e  $P'$  ponendo nelle (32) rispettivamente  $\sigma = \pi + \alpha$  e

$\sigma = \alpha$ :

$$\left. \begin{aligned} x_P &= -\varphi' \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}, \\ y_P &= -\varphi' \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{P'} &= \varphi' \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \\ y_{P'} &= \varphi' \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$



Da queste si ricava

$$\left. \begin{aligned} \overline{OP} &= |\sqrt{x_P^2 + y_P^2}| = \varphi' \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}, \\ \overline{OP'} &= |\sqrt{x_{P'}^2 + y_{P'}^2}| = \varphi' \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

sommando membro a membro e chiamando  $2l$  la lunghezza  $\overline{PP'}$  della lamina, si deduce il seguente notevole significato della costante positiva  $\varphi'$

$$2l = \varphi'. \quad (36)$$

Portando questa espressione di  $\varphi'$  in (32) si deducono le definitive espres-

sioni parametriche delle coordinate dei punti della lamina :

$$\left. \begin{aligned} x &= l \cos \alpha \left[ \cos \alpha + \cos (\sigma - \alpha) \right], \\ y &= l \operatorname{sen} \alpha \left[ \cos \alpha + \cos (\sigma - \alpha) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (32')$$

*Posizioni della prua  $O$  e della poppa  $O'$  rispetto al centro della lamina.* — Le coordinate del centro  $C$  della lamina si possono ricavare immediatamente, tenendo presenti, p. es., le (33).

Si ottiene in tal modo

$$\left. \begin{aligned} x_c &= x_p + l \cos \alpha = l \cos^2 \alpha, \\ y_c &= y_p + l \operatorname{sen} \alpha = l \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

La distanza  $\overline{OC}$  della prua  $O$  dal centro della lamina sarà conseguentemente

$$\overline{OC} = \left| \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \right| = l \left| \cos \alpha \right|. \quad (38)$$

Dalle (37) scende che se l'angolo formato da  $PP'$  colla direzione positiva dell'asse  $x$  è acuto ( $\alpha < 0$ )  $x_c$  e  $y_c$  sono entrambe positive e quindi  $O$  si trova spostato dal centro della lamina verso quella banda che si protende nella direzione del moto (\*).

Se si immagina di riferire il moto al centro  $C$  della lamina (rimanendo beninteso immutata la orientazione degli assi) alle (32') vanno sostituite le espressioni più semplici

$$\left. \begin{aligned} x &= l \cos \alpha \cos (\sigma - \alpha), \\ y &= l \operatorname{sen} \alpha \cos (\sigma - \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (32'')$$

Vediamo ora di caratterizzare la posizione della *poppa*  $O'$ .

A tal uopo si noti che la *prua* e la *poppa* corrispondono rispettivamente ai valori  $\pi$  e  $0$  del parametro  $\sigma$ ; d'altra parte le precedenti espressioni di  $x$  e  $y$  mutano soltanto di segno quando si fa una prima volta  $\sigma = \pi$  ed una seconda  $\sigma = 0$ . Si può concludere che *la poppa  $O'$  e la prua  $O$  sono situate da parti opposte e ad egual distanza dal centro  $C$  della lamina.*

---

(\*) Alla medesima conclusione qualitativa si perviene quando si tenga conto della *scia*. [Cfr. LEVI-CIVITA, loc. cit., pag. 27].

*Velocità.* — Per le (6) e (30) la velocità  $w$  rimane definita, in funzione dell'ausiliaria  $\zeta$ , dalla relazione seguente

$$w = \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - e^{2i\alpha}}. \quad (39)$$

In particolare, per i punti appartenenti alla lamina essendo  $\zeta = e^{i\sigma}$ , si ottiene

$$w = \frac{e^{2i\sigma} - 1}{e^{2i\sigma} - e^{2i\alpha}}. \quad (39')$$

Se  $\bar{w}$  designa il coniugato di  $w$ , si ha per il quadrato della velocità,

$$V^2 = w \cdot \bar{w} = \frac{e^{2i\sigma} - 1}{e^{2i\sigma} - e^{2i\alpha}} \cdot \frac{e^{-2i\sigma} - 1}{e^{-2i\sigma} - e^{-2i\alpha}} = \frac{\text{sen}^2 \sigma}{\text{sen}^2 (\sigma - \alpha)}, \quad (40)$$

e quindi

$$V = \left| \frac{\text{sen } \sigma}{\text{sen} (\sigma - \alpha)} \right|. \quad (40')$$

Come si vede  $V$  non cambia quando a  $\sigma$  si sostituisce  $\sigma + \pi$ ; inoltre risulta da (32'') che alla coppia  $\sigma, \sigma + \pi$  di valori del parametro  $\sigma$ , corrisponde una coppia di punti della lamina opposti rispetto al centro  $C$ , di cui uno va considerato appartenente alla banda rivolta a monte e l'altro alla banda affacciata a valle.

Dopo ciò si può concludere: *in punti della lamina, egualmente distanti dal suo centro e rivolti uno a monte e l'altro a valle, i valori assoluti delle velocità sono eguali.*

*Pressione.* — Trattandosi di moto irrotazionale e permanente in assenza di forze di massa, le equazioni idrodinamiche si compendiano in una relazione tra la pressione  $p$  ed il valore assoluto  $V$  della velocità (ricordiamo di avere assunto eguale a 1 la densità di liquido). Tale relazione è

$$p = -\frac{1}{2} V^2 + \text{costante}.$$

Se indichiamo con  $p_0$  la pressione idrostatica, quella cioè che il liquido possiede a grandi distanze dal profilo  $\gamma$ , e si ricorda che a tali distanze è  $V = 1$ , si deve avere

$$p_0 = -\frac{1}{2} + \text{costante}.$$

Eliminando la costante fra questa e la precedente si ottiene la seguente relazione

$$p = p_0 + \frac{1}{2} (1 - V^2). \quad (41)$$

Questa, tenendo conto di (39), definisce la pressione in ogni punto.

In particolare, sopra la lamina, avuto riguardo alla (40), o più precisamente alla conclusione relativa ai valori che la velocità assume in punti opposti rispetto al centro della lamina, si può asserire: *in punti della lamina, egualmente distanti dal suo centro, e rivolti uno a monte e l'altro a valle, le pressioni hanno eguali intensità.*

In particolare è nulla la loro risultante (\*). Non è però nullo il loro momento, poniamo rispetto al centro della lamina, come ora vedremo.

*Azione deviatrice della corrente.* — Immaginiamo di percorrere la lamina sempre nello stesso senso partendo da  $P$  fino a  $P'$  nel seguire il lembo della lamina rivolto a monte, e ritornare da  $P'$  al punto di partenza  $P$  sopra l'orlo rivolto a valle.

Ciò posto, designi  $d\gamma$  un elemento della lamina,  $n$  la normale a  $d\gamma$  volta verso la destra di chi percorre la lamina nel senso indicato; diciamo  $p_1 d\gamma$  la pressione che si esercita sopra un generico elemento  $d\gamma$ , dalla banda rivolta a monte, e  $p_2 d\gamma$  la pressione che viene esercitata sullo stesso elemento, dalla banda che guarda a valle.

Il momento risultante delle pressioni subite dagli elementi della lamina, ha manifestamente per espressione

$$M = \int_{PP'} [p_1 - p_2] [x \cos(ny) - y \cos(nx)] d\gamma,$$

l'integrazione andando estesa a tutto il cammino rettilineo  $PP'$ ; esso tende a provocare rotazione attorno alla normale al piano [nel verso  $x \rightarrow y$ , o nell'opposto, secondo che  $M$  è positivo o negativo].

Dette  $V_1$  e  $V_2$  le velocità (valori assoluti) di due punti affacciati (e geometricamente coincidenti) della lamina, di cui il primo a monte, e a valle l'altro, si ha da (41),

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2).$$

---

(\*) Cfr. CISOTTI, loc. cit., *Sul moto permanente*, ecc., pag. 444.

D'altra parte, essendo  $dx$  e  $dy$  le componenti dell'arco elementare  $d\gamma$ , si ha

$$\begin{aligned}\cos(n\alpha) d\gamma &= dy, \\ \cos(\alpha) d\gamma &= -dx.\end{aligned}$$

Avremo quindi, sostituendo,

$$M = \frac{1}{2} \int_{PP'} (V_1^2 - V_2^2) (x dx + y dy).$$

Ora, poichè da (32) scende che a coppie di valori del parametro  $\sigma$  la cui somma è  $2\alpha$ , corrispondono, sulla lamina, coppie di punti affacciati (e geometricamente coincidenti), si ha per (40),

$$V_1^2 - V_2^2 = \frac{1}{\sin^2(\sigma - \alpha)} \left\{ \sin^2 \sigma - \sin^2(2\alpha - \sigma) \right\} = 2 \sin 2\alpha \cot(\sigma - \alpha).$$

Dalle (32'') stesse si ricava inoltre

$$x dx + y dy = -\frac{1}{2} l^2 \sin 2(\sigma - \alpha).$$

Sarà quindi

$$M = l^2 \sin 2\alpha \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \cos^2(\sigma - \alpha) d\sigma.$$

Il valore di questo integrale è  $\frac{\pi}{2}$ , avremo dunque in definitiva

$$M = \frac{1}{2} \pi l^2 \sin 2\alpha. \quad (42)$$

Da questa risulta che  $M$  è nullo: o quando la lamina è ortogonale all'asse  $x$  ( $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ ), oppure quando è parallela ( $\alpha = 0$ , oppure  $\alpha = \pm \pi$ ).

In tutti gli altri casi  $M$  esprime la tendenza del liquido a fare assumere alla lamina direzione ortogonale al corso generale della corrente (\*).

Padova, aprile 1912.

---

(\*) Per  $\alpha = 45^\circ$  si ha  $M = \frac{1}{2} \pi l^2$  [Cfr. LAMB, loc. cit., pag. 81].