Sull'operazione funzionale rappresentata da un integrale definito, riguardata come elemento d'un calcolo.

(Di Adolfo Viterbi, *a Mantova.)*

III (*).

Nel presente lavoro, col quale si chiude la Memoria dedicata allo studio del calcolo, in cui sia elemento l'operazione funzionale rappresentata da un integrale definito, mi propongo di studiare anzitutto le equazioni fra operazioni I. A quest'argomento è dedicata la prima parte del lavoro. Sul principio vengono esposte alcune generalità sulle equazioni fra operazione I; indi si dà un concetto analogo a quello d'equazione algebrica. Si studiano poi le equazioni aventi forma d'equazioni differenziali lineari. Quando in questa teoria si considerino solo funzioni d'un'operazione I variabile, le quali siano rappresentate da una serie di potenze a coefficienti costanti di quest'operazione, si possono, nel calcolo qui studiato, svolgere passo passo teorie analoghe a quelle che si hanno per le equazioni differenziali lineari studiate nel calcolo ordinario, perchè per le operazioni rappresentate da tali serie di potenze vale la legge distributiva. Così si dimostra il teorema dell'esistenza delle soluzioni d'una data equazione, avente forma d'un'equazione differenziale lineare, rispetto a una funzione d'un'operazione I variabile, per una funzione-oggetto assegnata, a cui si applichi l'operazione rappresentata dal primo membro dell'equazione stessa. Indi vengono svolte per le equazioni della forma accennata la teoria della scomposizione, in fattori differenziali del primo ordine, per il suo primo membro, e quella del moltiplicatore e dell'equa-

(*) Le prime due parti della presente Memoria furono pubblicate nel tomo 26.° (2.ª serie) di questi *Annali*. In questo lavoro mi valgo di tutte le notazioni e convenzioni introdotte nei due precedenti.

zione aggiunta, seguendo in ciò passo passo lo SCHLESINGER (*). Nell'esposizione di queste teorie m'arrestai alle relazioni che stabiliscono la reciprocità fra gli integrali d'un'equazione differenziale lineare data d'ordine qualunque (finito) e quelli dell'equazione aggiunta, perchè tali relazioni erano necessarie per l'estensione che feci al calcolo qui studiato del metodo d'integrazione d'una equazione differenziale lineare non omogenea, mediante serie procedenti secondo le derivate successive della funzione costituente il secondo membro dell'equazione stessa, dato dal prof. PINCHERLE. Qui appunto estesi detto metodo alle equazioni tra funzioni d'un'operazione I variabile aventi la forma d'equazioni differenziali lineari non omogenee.

Non mi fu possibile estendere le mie ricerche alle equazioni tra funzioni d'operazioni I analoghe alle equazioni a derivate parziali, non potendosi estendere a tali equazioni le teorie che si hanno nel calcolo ordinario chè le operazioni I distinte non sono permutabili. Riguardo ai concetti di questo capitolo va premesso che quando si dice che una data funzione che può essere anche il risultato d'un'operazione I applicata ad una funzione sodisfi a certe condizioni di limitazione, consistenti nel mantenersi inferiore, in modulo a un certo limite, deve intendersi che esiste almeno una porzione finita che è quella che si considererà, compresa nella regione in cui è definita la funzione in discorso, nella quale sia sodisfatta la limitazione indicata. Non deve cioè intendersi che questa condizione sia sodisfatta, in tutta la regione in cui è definita la funzione, il che urterebbe contro un teorema fondamentale della teoria delle funzioni. Nella seconda parte del presente lavoro diedi una applicazione del calcolo qui studiato. L'applicazione consiste in questo: avendo il prof. LEVI-CIVITA definiti e studiati gruppi d'operazioni I caratterizzati dal fatto che le operazioni onde sono costituiti lasciano invariate certe forme differenziali lineari, mi basai su questo per stabilire una corrispondenza fra una forma differenziale lineare e le operazioni I che la lasciano inalterata, e, fondandomi poi sui concetti intorno alle funzioni d'operazioni I precedentemente svolti, stabilii le formole indicanti il passaggio dagli integrali ai coefficienti e reciprocamente dai coefficienti agli integrali d'un'equazione differenziale lineare non omogenea, valendomi anche qui di risultati ottenuti dal prof. PINCHERLE (**).

(*) SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen.* Vol. I, Lipsia 1895.

(**) PINCHERLE, *Sulle serie procedenti secondo le derivate successive d'una funzione.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tom. XI, fasc. 4.° e 5.°

1.°

1. *Prime generalità sulle equazioni fra operazioni I.* Si consideri l'equazione $Xf(y_1) = \varphi(y_2)$ ove pertanto siano $f(y_1)$, $\varphi(y_2)$ funzioni assegnate e sia X un'operazione I incognita da determinarsi in modo che sia sodisfatta l'equazione proposta. Si dia intanto alla linea d'integrazione di X una determinazione speciale a nostro arbitrio che però sottostia alla solita condizione rispetto a $f(y_1)$ (*I° e*). Indi si determini la funzione caratteristica di X in modo da sodisfare la relazione. Ci si varrà in ciò del metodo dei coefficienti indeterminati. Dicasi ora l la linea d'integrazione attribuita a X e $x(y_1, y_2)$ la funzione caratteristica da determinarsi. Si ponga:

$$x(y_1, y_2) = \sum_{\nu_1=0,\nu_2=0}^{\nu_1=\infty,\nu_2=\infty} k_{\nu_1\nu_2}\, y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2}, \quad \varphi(y_2) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu\, y_2^{\nu}; \tag{1}$$

allora per i coefficienti $k_{\nu_1\nu_2}$ si hanno le relazioni:

$$\sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} k_{\nu_1}\int_l y_1^{\nu_1} f(y_1)\, d\, y_1 = h_0, \quad \sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} k_{\nu_1}\int_l y_1^{\nu_1} f(y_1)\, d\, y_1 = h_1, \ldots,$$

$$\sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} k_{\nu_1 m}\int_l y_1^{\nu_1} f(y_1)\, d\, y_1 = h_m, \ldots$$

Così per l'equazione: $Xf(y_1) = \varphi(y_2)$ che si dirà « Equazione algebrica lineare del 1.° ordine nell'operazione X rispetto alla funzione $f(y_1)$ » si ha per ogni determinazione che si dia alla linea d'integrazione di X una semplice infinità di determinazioni per la funzione caratteristica.

Abbiasi ora l'equazione: (2) $X^m f(y_1) = \varphi(y_{m+1})$ essendo ancora $f(y_1)$, $\varphi(y_2)$ funzioni assegnate. Per ogni determinazione l assegnata alla linea d'integrazione di X, si avrà, usando ancora i simboli precedenti, per la funzione caratteristica di X, il seguente sistema di relazioni:

$$\sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} k_{\nu_1 0}\int_{lmvk}\left[\ldots\left\{\int_l y_m^{\nu_1} \sum_{\nu_1=0,\nu_2=0}^{\nu_1=\infty,\nu_2=\infty} k_{\nu_1\nu_2}\, y_{m-1}^{\nu_1}\, y_m^{\nu_2}\, d\, y_m\right\}\ldots\right] f(y_1)\, d\, y_1 = h_0, \ldots,$$

$$\sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} k_{\nu_1 m}\int_{lmvk}\left[\ldots\left\{\int_l y_m^{\nu_1} \sum_{\nu_1=0,\nu_2=\infty}^{\nu_1=0,\nu_2=\infty} k_{\nu_1\nu_2}\, y_{m-1}^{\nu_1}\, y_m^{\nu_2}\, d\, y_m\right\}\ldots\right] f(y_1)\, d\, y_1 = h_m, \ldots,$$

Avvertenza. — Colle citazioni (I°) o (II°) intendo riferirmi rispettivamente alla prima o alla seconda parte della presente Memoria.

dal quale si ricava per i coefficienti $k_{\nu_1\nu_2}$ un'infinità d'ordine m di soluzioni.

E più in generale abbiasi l' equazione :

$$X^m f(y_1) + c_1 X^{m-1} f(y_1) + c_2 X^{m-2} f(y_1) \ldots + c_{m-1} X f(y_2) + c_m f(y_{m+1}) = 0, \quad (3)$$

ove $c_1 \ldots c_m$ siano coefficienti costanti: (il primo d'essi può sempre supporsi $=$ all'unità). La (3) si dirà: « Equazione algebrica lineare dell'ordine m nell'operazione X rispetto alla funzione $f(y_1)$ ». Ripetendo le considerazioni fatte per la (2) si vede che per ogni speciale determinazione data alla linea d'integrazione di X per la funzione caratteristica si ha un'infinità d'ordine m di soluzioni, sicchè per le equazioni fra operazioni I vale la proposizione seguente :

« Un'equazione algebrica lineare dell'ordine m in un'operazione I ammette, per ogni determinazione data alla linea d'integrazione dell'operazione che figura come incognita, un sistema d'infinite soluzioni per la funzione caratteristica il cui ordine è m. »

Si possono considerare anche equazioni algebriche fra operazioni I in numero maggiore d'uno: ad es. si può prendere in esame l'equazione:

$$X^m Y^n f(y_1) + c_1 X^{m-1} Y^n f(y_1) \ldots + c_{m+n-1} X f(y_1) + c_{m+n} f(y_{m+n+1}) = 0,$$

la quale si dirà « Equazione lineare algebrica d'ordine m in X, d'ordine n in Y rispetto alla funzione $f(y_1)$ ». Per ogni determinazione speciale data ad es. a Y quest'equazione si riduce ad un'equazione d'ordine m in X ecc. Un'equazione algebrica in X rispetto a una data funzione $f(y_1)$ che contenesse termini della forma $(X^\nu f(y_1))^q$, si direbbe « Equazione algebrica d'ordine m (se m è il suo ordine in base alla precedente definizione) e di grado p $\{$se p è l'indice della potenza più alta a cui compare in essa un'espressione della forma $X^\nu f(y_1)$ $(\nu = 0, 1 \ldots m)\}$ in X rispetto alla data funzione oggetto $f(y_1)$ ».

2. *Serie geometrica d'un'operazione I.* Per procedere nelle presenti ricerche è mestieri che consideriamo certe funzioni che diremo: serie geometriche d'un'operazione I. Consideriamo pertanto un'espressione rappresentata dal risultato che s'ottiene applicando a una data funzione-oggetto un'operazione consistente in una serie di potenze d'un'operazione I avente la forma stessa d'una serie geometrica.

Quest'operazione è precisamente quella che si dirà « Serie geometrica dell'operazione I in discorso ».

La funzione in esame avrà dunque la forma:

$(1+X+X^2\ldots+X^\mu+\ldots)f(y_1)$ che scriveremo brevemente $F(X)f(y_1)$. (4)

Stabiliamo di considerare soltanto le determinazioni di X comprese nel campo di convergenza assoluta della serie $F(X)$ relativamente (I^o) alla funzione $f(y_1)$. Si dovranno pertanto prendere in esame soltanto quelle determinazioni di X tali che sia per ogni valore dell'indice ν:

$$\left|\frac{X^{\nu+1}f(y_1)}{X^\nu f(y_1)}\right|<1.$$

Detta quindi S_q la somma dei primi q (q numero finito) termini della nostra serie e posto: $S_{q+1}=XS_q$, è chiaro che sarà:

$$S_{q+1}-S_q=(X-1)S_q=X^{q+1}f(y_1)-I(y_{q+2}).$$

Da ciò risulta che $S_q=$ al quoziente simbolico:

$$\frac{X^{q+1}f(y_1)-f(y_{q+2})}{X-1}.$$

Ora per ipotesi al tendere di q all'infinito $X^{q+1}f(y_1)$ tende a 0, talchè la somma della serie in discorso è precisamente il risultato (sempre a prescindere da operazioni 1) dell'inversa dell'operazione $1-X$ applicata alla funzione $f(y_1)$ (ben inteso ciò vale solo per le determinazioni di X comprese nel campo di convergenza assoluta di $F(X)$ relativamente a $f(y_1)$). Ossia, in altri termini:

« La serie $1+X+\cdots+X^\mu+\cdots$ è relativamente ad una qualsiasi funzione oggetto equivalente all'inversa dell'operazione $1-X$ sotto la condizione di convergenza assoluta relativamente alla funzione-oggetto assunta in ogni singolo caso. »

Applicando poi la regola di derivazione per le funzioni d'operazioni I (I^o) si ha, per una determinazione generica di X sodisfacente all'accennata condizione:

$$\frac{d\,F(X)\,f(y_1)}{d\,X}=\frac{d\,(1-X)^{-1}f(y_1)}{d\,X}=-(X-1)^{-2}\dot{f}(y_1),\text{ ecc., ecc.}$$

Così, se in luogo della serie geometrica di X, nella (4) figurasse la serie geometrica di $X-1_k$ essendo k un fattore costante, la somma della serie in discorso si trova essere, applicando le considerazioni precedenti, il risultato dell'operazione inversa a $X-1_k-1$ applicato a $f(y_1)$ operazione rappresentata dalla funzione simbolica:

$$-\frac{1}{X-\mathbf{1}_k-1}, \text{ equivalente all'altra: } \frac{(\mathbf{1}_k-X)^{-1}}{1-\frac{1}{\mathbf{1}_k-X}},$$

sempre a prescindere da operazioni $\mathbf{1}$.

3. *Estensione del concetto di funzione algebrica al calcolo qui studiato.* Sia l'equazione:

$$\left.\begin{aligned} &F^m(X)\psi_0(X)f(y_1)+F^{m-1}(X)\psi_1(X)f(y_1)+ \\ &+\cdots F(X)\psi_{m-1}(X)f(y_1)+\psi_m(X)f(y_1)=0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ove sia $f(y_1)$ sempre una funzione-oggetto nota e $\psi_0(X)$, $\psi_1(X)\ldots\psi_m(X)$ siano funzioni note dell'operazione variabile X, aventi forma di polinomi razionali interi. Si tratta di determinare la funzione $F(X)$, in modo da soddisfare l'equazione proposta. Si applichi pertanto il metodo dei coefficienti indeterminati (I^o), considerando cioè uno sviluppo di $F(X)$ in serie di potenze di X a coefficienti costanti indeterminati:

$$\sum_{\nu=\infty}^{\nu=0} k_\nu X^\nu. \quad \text{Sia: } \psi_i=\sum_{\nu=\mu_i}^{\nu=0} h_\nu^{(i)} X^\nu \ (i=0,\ 1,\ldots,m),$$

essendo ν_i un numero intero finito. Ciò posto si sostituisca lo sviluppo $\sum_{\nu=\infty}^{\nu=0} k_\nu X^\nu$ nella (4) a $F(X)$: detto sviluppo renderà sodisfatta quell'equazione, a patto che sussistano le relazioni:

$$k_0^m h_0^{(0)}+k_0^{m-1} h_0^{(1)}\cdots+h_0 h_0^{(m-1)}+h_0^{(m)}=0,$$
$$k_0^m h_1^{(0)}+m\,k_1 k_0^{m-1} h_0^{(0)}+k_0^{m-1} h_1^{(1)}+(m-1)\,k_0^{m-2} k_1 h_0^{(1)}\cdots+h_1^{(m)}=0,\ldots,$$
$$k_1^m h_0^{(0)}+m\,k_1^{m-1} k_1 h_0^{(0)},\ldots,+h_m^{(m)}=0,\ldots$$

Cioè i coefficienti dello sviluppo di $F(X)$ sono dati da sistemi d'equazioni algebriche di grado m. Perciò la (5) sarà sodisfatta da m sviluppi, in generale distinti, di $F(X)$. L'equazione in parola si dirà: « Equazione algebrica di grado m nella funzione $F(X)$ dell'operazione variabile X relativamente alla funzione-oggetto $f(y_1)$ »: le m determinazioni di $F(X)$ che sodisfano la (5) si diranno « Le radici dell'equazione stessa »: ed il loro insieme si dirà che costituisce « La funzione algebrica dell'operazione X definita dall'equazione in parola relativamente alla funzione-oggetto $f(y_1)$.

4. *Equazioni differenziali lineari omogenee per una funzione d'un'operazione I:*

a) Esistenza delle soluzioni. Sia l'equazione:

$$\left.\begin{array}{r} F^{(n)}(X)\,f(y_1) - \{F^{(n-1)}(X)\,\psi_1(X)\,f(y_1) \cdots + F'(X)\,\psi_{n-1}(X)\,f(y_1) + \\ + F(X)\,\psi_n(X)\,f(y_1)\} = 0, \end{array}\right\} \quad (6)$$

ove $f(y_1)$ abbia il solito significato, e $\psi_1(X) \ldots \psi_n(X)$ siano funzioni di X rappresentate da serie di potenze intere e positive. Si può sempre supporre che nel primo termine manchi il coefficiente cognito, perchè se così non fosse, se cioè ad es. il primo termine anzichè aver la forma $F^{(n)}(X)\,f(y_1)$ avesse la forma $F^{(n)}(X)\,\Psi_0(X)\,f(y_1)$, ove sia $\Psi_0(X)$ una funzione dell'operazione X della stessa natura di $\Psi_1(X) \ldots \Psi_n(X)$, l'equazione non subirebbe alcuna alterazione sostanziale quando a $\Psi_0(X)$ si sostituisse l'operazione identica a $\Psi_1(X)$ l'operazione rappresentata da $\{\Psi_0(X)\}^{-1}\,\Psi_1(X) \ldots$ a $1\ \Psi_n(X)$ si sostituisse $\{\Psi_0(X)\}^{-1}\,\Psi_n(X)$, perchè si tratterebbe d'eseguire la divisione (simbolica) dei singoli elementi di cui si compone il primo membro della (6) per uno stesso fattore. Ciò premesso, si tratta nella (5), di determinare la funzione incognita $F(X)$ in modo da rendere sodisfatta l'accennata equazione. Detta equazione si dirà poi:

« Equazione differenziale lineare omogenea d'ordine n, nella funzione $F(X)$ dell'operazione X relativamente alla funzione-oggetto $f(y_1)$ ». Una determinazione di $F(X)$ che sodisfi la (6) se ne dirà « Un integrale ». A questo proposito sussiste anche qui il seguente teorema fondamentale analogo a quello che sussiste nel calcolo ordinario:

« Ogni equazione differenziale lineare omogenea nella funzione $F(X)$ dell'operazione X, nella quale il coefficiente della derivata d'indice più alto abbia un valore costante ammette sempre e soltanto un integrale che per una determinazione costante dell'operazione variabile X, nel cui contorno (I^o e II^o) i coefficienti $\psi_i\,(i = 1 \ldots n)$ siano sviluppabili in serie di potenze convergenti assolutamente rispetto a $f(y_1)$ abbia insieme colle sue prime $n-1$ derivate determinazioni assegnate. Di più la serie di potenze che rappresenta quest'integrale ha rispetto alla funzione $f(y_1)$ un campo di convergenza (I^o) esteso almeno quanto quello tale che, detta X la determinazione di X corrispondente ai punti della superficie della sfera di convergenza assoluta (II^o) degli sviluppi delle $\Psi_i(X)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$, ogni determinazione $\overline{X}$ di X compresa in esso sodisfi la disuguaglianza:

$$\left| \frac{\overline{X}^{\mu+1} f(y_1)}{\overline{X}^{\mu} f(y_1)} \right| < \eta \left| \frac{\mathrm{X}^{\mu+1} f(y_1)}{\mathrm{X}^{\mu} f(y_1)} \right|,$$

da un certo valore finito dell'indice μ in poi (η sia un numero positivo < 1). »

Sia, detta $\Phi(X)$ una funzione qualunque dell'operazione variabile X, sviluppabile in serie di potenze, M una quantità in valore assoluto non minore del massimo della funzione $\dfrac{\Phi(X) f(y_1)}{\mathbf{I} f(y_1)}$ entro il campo delle determinazioni di X, nel quale è convergente assolutamente lo sviluppo di $\Phi(X)$ in serie di potenze di $X - \mathbf{I}_k$ (k essendo al solito un fattore costante). Allora dalla formola di Mac Laurin generalizzata (I^o):

$$\Phi(X) f(y_1) = \Phi(\mathbf{I}_k) f(y_1) + (X - \mathbf{I}_k) \Phi'(\mathbf{I}_k) f(y_1) \ldots +$$
$$+ \frac{(X - \mathbf{I}_k)}{\underline{|\nu}} \Phi^{(\nu)}(\mathbf{I}_k) f(y_1) + \ldots$$

risulta evidentemente:

$$\left| \frac{\Phi^{(\nu)}(\mathbf{I}_k) f(y_1)}{\mathbf{I} f(y_1)} \right| < \nu! \frac{M}{\mathrm{X} - \mathbf{I}_k},$$

ove designi X la determinazione di X corrispondente al limite di convergenza di $\Phi(X)$ relativamente a $f(y_1)$ (I^o). Così (v. 3) sarà, posto:

$$\Phi_1(X) f(y_1) = \frac{M}{1 - \dfrac{X - \mathbf{I}_k}{\mathrm{X} - \mathbf{I}_k}} f(y_1),$$

$\Phi(X)$ convergente relativamente a $f(y_1)$ per tutte le determinazioni di X, appartenenti al campo di convergenza di $\Phi_1(X)$ (sviluppata in serie di potenze di $X - \mathbf{I}_k$) sempre rispetto a $f(y_1)$. Detto ora in generale M_i ($i = 1 \ldots n$) il numero che rispetto a $\Psi_i(X)$ ha lo stesso significato che fu testè attribuito a M rispetto a $\Phi(X)$ (sempre riferendosi alla funzione-oggetto $f(y_1)$) e posto:

$$\overline{\Psi}_i(X) f(y_1) = \frac{M_i}{1 - \dfrac{X - \mathbf{I}_k}{\mathrm{X} - \mathbf{I}_k}} f(y_1),$$

lo sviluppo in serie di potenze di $X - \mathbf{I}_k$ di $\Psi_i(X)$ rispetto a $f(y_1)$ sarà convergente per tutte le determinazioni di X comprese nel campo di convergenza dello sviluppo analogo di $\overline{\Psi}_i(X)$. Ora tentisi di determinare una funzione $F(X - \mathrm{I}_k) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (X - \mathrm{I}_k)^\nu$ tale da sodisfare la formola (6). Allora per i coefficienti h_ν si ha applicando ancora il metodo dei coefficienti indeterminati la formola seguente:

$$h_n = \frac{1}{\lfloor n} F^{(\nu)}(\mathrm{I}_k)\,(*) = \frac{1}{\lfloor \nu} \sum_{i=1}^{n} F^{(n-i)}(\mathrm{I}_k)\, \Psi_i(\mathrm{I}_k),$$

$$h_{n+1} = \frac{1}{\lfloor n} \sum_{i=1}^{i=n} F^{(n-i)}(\mathrm{I}_k)\, \Psi_i^1(\mathrm{I}_k) + \frac{1}{\lfloor n+1} \sum_{i=1}^{i=n} F^{(n-i-1)}(\mathrm{I}_k)\, \Psi_i(\mathrm{I}_k),$$

$$h_{n+\nu} = \frac{1}{\lfloor n} \sum_{i=1}^{n} F^{(n-i)}(\mathrm{I}_k) \frac{\Psi_i^{(\nu)}}{\lfloor \nu}(\mathrm{I}_k) + \cdots \frac{1}{\lfloor n+\nu} \sum_{i=1}^{n} F^{(n-i+\nu)}(\mathrm{I}_k)\, \Psi_i(\mathrm{I}_k), \ldots,$$

cioè nell'espressione di ciascuno di questi coefficienti h, figurano somme di prodotti delle determinazioni di $F(X)$ per $X = \mathrm{I}_k$ e di prodotti delle sue successive derivate per le determinazioni dei coefficienti $\Psi_1 \ldots \Psi_n$ delle loro derivate successive pure per $X = \mathrm{I}_h$ Ora veniamo a considerare l'equazione differenziale lineare della forma della (6) e che differisca da questa solo perchè ai coefficienti Ψ si sostituiscano rispettivamente le funzioni di X, $\Psi_i(X)$. Si tenti di sodisfarla mediante lo sviluppo in serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h'_\nu (X - \mathrm{I}_k)^\nu$: i coefficienti h'_ν di questo sviluppo saranno costruiti mediante determinazioni dello svlluppo stesso e delle sue successive derivate corrispondenti alla determinazione I_k di X e mediante le determinazioni delle $\overline{\Psi}_i$ e delle loro successive derivate corrispondenti alla determinazione I_k di X nello stesso modo con cui i coefficienti h_ν sono costruiti rispettivamente mediante le $F(\mathrm{I}_k) \ldots F^{(\nu)}(\mathrm{I}_k) \ldots$ e le $\Psi_i(\mathrm{I}_k) \ldots \Psi_i^{(\nu)}(\mathrm{I}_k) \ldots$ Ora s'è visto che le $\Psi_i(X)$ sviluppate in serie di potenze di $X - \mathrm{I}_k$ avevano i singoli coefficienti in modulo inferiori ai coefficienti omologhi dell'analogo sviluppo delle $\Psi_i(X)$: ciò avviene anche delle singole derivate rispettivamente degli sviluppi di queste funzioni: perciò i coefficienti di $\mathsf{F}(\mathrm{I}_k) \ldots \mathsf{F}(\mathrm{I}_k) \ldots$ ove si ponga brevemente $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h'_\nu (X - \mathrm{I}_k) = \mathsf{F}(\mathrm{I}_k)$ non saranno mai negativi. Se non che

(*) Scrivendo ad es. $h_n = \frac{1}{\lfloor n} F^{(\nu)}(\mathrm{I}_k)$ s'intende che h_n è = (nel senso ordinario) al fattore per cui a prescindere da operazioni I, $\frac{1}{\lfloor n} F^{(\nu)}(\mathrm{I}_k)$ moltiplica una data funzione-oggetto, fattore che evidentemente è il medesimo qualunque sia questa funzione-oggetto. E quest'osservazione varrà ogniqualvolta nel seguito si trovino uguaglianze di questa natura.

nelle formole che servono alla determinazione rispettivamente delle h_ν, h'_ν rimangono arbitrarii gli n primi coefficienti di ciascuno sviluppo: così prenderemo ad arbitrio $h'_0 \ldots h'_{n-1}$ e sceglieremo poi $h_0 \ldots h_{n-1}$ in modo che sia: $h_i < | h'_i |$ $(i = 0,\ 1, \ldots,\ n-1)$. Ora, dalle precedenti relazioni segue altresì: $h_i < | h'_i |$ $(i = n,\ n+1, \ldots)$, perciò la serie $\mathrm{F}(X - \mathrm{I}_k)$ ha i singoli coefficienti maggiori dei coefficienti omologhi di $F(X - \mathrm{I}_k)$, e perciò quest'ultima serie relativamente alla funzione considerata convergerà sempre ogni qualvolta sia convergente relativamente alla stessa funzione $\mathrm{F}(X - \mathrm{I}_k)$. Se non che posto brevemente $1 - \dfrac{X - \mathrm{I}_k}{\mathrm{X}} = Y$, $h'_\nu = h_\nu \mathrm{X}^\nu$, l'equazione differenziale lineare della forma (6), a cui sodisfa la funzione $\mathrm{F}(X - \mathrm{I}_k)$, diverrà, a meno d'operazioni I:

$$\mathrm{F}^{(n)}(Y)(1 - Y) f(y_1) = M_1 \mathrm{X}\, \mathrm{F}^{(n-1)}(Y) f(y_1) + \cdots M_n \mathrm{X}^n \mathrm{F}(Y) f(y_1).$$

Da questa si hanno, per la determinazione dei coefficienti h'_ν le seguenti relazioni ricorrenti, le quali naturalmente equivalgono alle formole prima trovate per gli stessi coefficienti:

$$\left.\begin{aligned} &(n+\nu)!\, h'_{n+\nu} - \nu\,(n+\nu-1)!\, h'_{n+\nu-1} = \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} M_i \mathrm{X}^i (n+\nu-i)!\, h'_{n+\nu-i} \quad (\nu = 0,\ 1, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Per il modo con cui scelsero $h_0,\ h_1, \ldots,\ h_{n-1}$, si ha:

$$h'_{n+\nu} = \frac{\nu + \mathrm{k}\, M_1}{n + \nu}\, h'_{n+\nu-1} + p,$$

ove designi p un numero positivo. Ora, prendendo M_1 abbastanza grande affinchè sia:

$$M_1\, \mathrm{k} > n,$$

(ciò è sempre possibile essendo M_1 soggetto, sinora, all'unica limitazione d'essere maggiore del massimo valore assoluto di $\dfrac{\Psi_1(X) f(y_1)}{\mathrm{I} f(y_1)}$ sviluppato in serie di potenze di $X - \mathrm{I}_k$, ogniqualvolta:

$$\left| \frac{(X - \mathrm{I}_k)^\nu f(y_1)}{(X - \mathrm{I}_k)^{\nu-1} f(y_1)} \right| < \mathrm{I}_k f(y_1)),$$

si ha:

$$h'_{n+\nu} > h'_{n+\nu-1}, \quad \text{ossia} \quad \frac{h'_{n+\nu-1}}{h'_{n+\nu}} < 1\,.$$

Posta la (7) sotto la forma:

$$\frac{h'_{n+\nu}}{h'_{n+\nu-1}} = \frac{\nu + \mathbf{k} M_1}{n+\nu} + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\mathbf{k}^i M_i (n+\nu-i)!}{(n+\nu)!} \frac{h'_{n+\nu-i}}{h'_{n+\nu-1}},$$

risulta:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{h'_{n+\nu}}{h'_{n+\nu-1}} = 1.$$

Conseguenza di ciò è che la serie che rappresenta $\mathsf{F}(Y)$ è convergente relativamente a una qualsiasi funzione-oggetto $\varphi(y_1)$ per tutte le determinazioni di Y, che sodisfano alla condizione:

$$\left| \frac{Y^\mu \varphi(y_1)}{Y^{\mu-1} \varphi(y_1)} \right| < 1,$$

da un certo valore finito dell'indice μ in poi.

Ne viene che, per la funzione-oggetto da noi considerata il campo di convergenza è dato da tutte quelle determinazioni di X tali che:

$$\left| \frac{(X-\mathrm{I}_k)^\mu f(y_1)}{(X-\mathrm{I}_k)^{\mu-1} f(y_1)} \right| < \mathrm{I}_{\mathbf{k}} f(y_1),$$

da un certo valore finito dell'indice μ in poi, ossia per tutte le determinazioni di X appartenenti, come si è visto al campo di convergenza dei coefficienti della (6) relativamente a $f(y_1)$. Di più per le relazioni stabilite fra le funzioni $F(X)$, $\mathsf{F}(X)$ risulta che nell'accennato campo sarà a più forte ragione convergente relativamente a $f(y_1)$ lo sviluppo di $F(X)$ in serie di potenze di $X - \mathrm{I}_k$, sviluppo che rappresenta un integrale della (6). Detto integrale ha poi anche la proprietà che quando X assume la determinazione I_k, esso assume, in un colle sue prime $n-1$ derivate a X le determinazioni fisse, a meno d'operazioni I:

$$F(\mathrm{I}_k) = h_0 \ldots F^{(n-1)}(\mathrm{I}_k) = \frac{h_{n-1}}{(n-1)!}.$$

Così il teorema enunciato risulta completamente dimostrato.

b) Estensione del concetto di « conservazione delle proprietà analitiche ». Per procedere oltre nelle ricerche sulle equazioni differenziali lineari tra funzioni d'un'operazione I è necessario dare l'estensione al calcolo, in cui è elemento l'operazione I del principio importantissimo della conservazione delle proprietà analitiche che si ha per le funzioni analitiche studiate nell'analisi ordinaria. L'accennato principio è riassunto nel seguente:

Teorema. Se un elemento d'una funzione analitica d'un'operazione I variabile gode d'una certa proprietà (relativa a una data funzione-oggetto) tutti gli elementi dedotti da quello mediante la continuazione analitica (II^o) godono della stessa proprietà.

Abbiasi pertanto un'equazione della forma:

$$F\{\mathfrak{P}_1(X-\mathrm{I}_k),\ \mathfrak{P}_2(X-\mathrm{I}_k),\ldots,\ \mathfrak{P}_n(X-\mathrm{I}_k)\}\,f(y_1)=0, \tag{8}$$

ove le $\mathfrak{P}_1(X-\mathrm{I}_{k_1})\ldots\mathfrak{P}_n(X-\mathrm{I}_{k_n})$ convergono in una sfera comune il cui centro corrisponda a una certa determinazione costante I_k di X (II^o). $F(p_1\ldots p_n)$ sia simbolo di funzione avente rispetto alle funzioni di X: $p_1\ldots p_n$ forma di funzione razionale intera o di serie di potenze di tali operazioni variabili convergente entro un certo campo di determinazioni del loro insieme relativamente a $f(y_1)$. Ogni termine del primo membro della (8) avrà la forma:

$$h_\nu\,[\mathfrak{P}_1(X-\mathrm{I}_k),\ \mathfrak{P}_2(X-\mathrm{I}_k),\ \ldots,\ \mathfrak{P}_n(X-\mathrm{I}_k)]\,f(y_1),$$

(h_ν è un coefficiente costante, l'operazione applicata a $f(y_1)$ è un prodotto simbolico).

Ora, per avere le $\mathfrak{P}_i(X-\mathrm{I}_k)$ ($i=1\ldots n$) una sfera comune di convergenza assoluta relativamente a $f(y_1)$ ciascuno di quei termini si potrà sviluppare mediante un'unica serie di potenze di $X-\mathrm{I}_k$ convergente nella sfera comune di convergenza delle $\mathfrak{P}_i(X-\mathrm{I}_k)$. Ora nell'ipotesi più generale $F(p_1\ldots p_n)$ è una serie di potenze di queste n operazioni aventi un certo campo di convergenza relativamente a $f(y_1)$: di più per tutte le determinazioni di X corrispondenti a punti (II^o) compresi in una sfera di raggio, sia pure di quanto poco si vuole, inferiore a quello della sfera di convergenza delle $\mathfrak{P}_i(X-\mathrm{I}_k)$ e concentrica a questa, sarà convergente in ugual grado relativamente a $f(y_1)$. Potendosene quindi ordinare i termini come si vuole, senza che venga meno la sua convergenza, potrà essere trasformata in un'unica serie di potenze:

$$\mathfrak{P}(X-\mathrm{I}_k),$$

convergente per i punti interni all'accennata sfera relativamente a $f(y_1)$. Preso ora un punto interno a questa sfera a cui corrisponda una determinazione costante di X: I_{k_1}, si esaminino le serie dedotte (II^o) dalle $\mathfrak{P}_i(X-\mathrm{I}_k)$ rispetto a I_{k_1}. Esse avranno una sfera di convergenza che potrà anche uscire dalla sfera di convergenza degli sviluppi loro in serie di potenze di $X - \mathrm{I}_k$. Il primo membro della (8) diverrà:

$$F \{ \mathfrak{P}_i (X, \mathrm{I}_k, \mathrm{I}_{k_1} \ldots \mathfrak{P}_n (X, \mathrm{I}_k, \mathrm{I}_{k_1}) \} f(y_1). \qquad (8')$$

Ora l'espressione (8′) come si vede ripetendo le considerazioni precedenti si può trasformare in un'unica serie di potenze di $X - \mathrm{I}_{k_1}$: $\mathfrak{P}_1 (X - \mathrm{I}_{k_1})$ convergente relativamente a $f(y_1)$ nella sfera comune di convergenza degli elementi dedotti dalle $\mathfrak{P}_1 (X - \mathrm{I}_k)$ rispetto a I_{k_1}. Ma per le determinazioni di X corrispondenti a punti interni ad entrambe le sfere considerate, di centri corrispondenti a I_k, I_{k_1}, il primo membro della (8) e l'espressione (8′) coincidono, perciò le due espressioni $\mathfrak{P}(X - \mathrm{I}_k) f(y_1)$, $\mathfrak{P}_1 (X - \mathrm{I}_{k_1}) f(y_1)$ saranno per le determinazioni di X corrispondenti agli accennati punti, identiche. Dovranno dunque essere identicamente nulle ambedue le serie relativamente a $f(y_1)$, e ciascuna d'esse sarà nulla per le determinazioni di X corrispondenti a punti compresi nella propria sfera di convergenza. Con ciò il teorema è dimostrato, essendo provato che se la (8) è soddisfatta dagli elementi $\mathfrak{P}_i (X - \mathrm{I}_k)$ essa sarà soddisfatta anche dagli elementi dedotti immediatamente da questi colla continuazione analitica. Così deducendo successivamente nello stesso modo dagli sviluppi: $\mathfrak{P}_i (X, \mathrm{I}_k, \mathrm{I}_{k_1})$ $(i = 1 \ldots n)$, altri elementi delle stesse funzioni analitiche, si scorge che questi pure rendono soddisfatta la (8). Naturalmente la deduzione dei nuovi elementi deve ogni volta essere fatto rispetto a una stessa determinazione di X, per ciascuna delle n funzioni. « Il caso considerato racchiude poi in sè stesso tutti gli altri casi che si possono presentare nello studio qui fatto nelle funzioni d'operazioni I: infatti esso, oltre a comprendere il caso delle equazioni algebriche studiate nel n.° 3, comprende anche quello delle equazioni differenziali lineari, potendo benissimo essere alcune delle $\mathfrak{P}_i (X - \mathrm{I}_k)$ $(i = 1 \ldots n)$ derivate di una o più delle altre di esse. »

c) Estensione dei concetti d'equazione riducibile e irriducibile e riduzione d'un'equazione riducibile quando se ne conoscono alcuni integrali particolari. Scomposizione d'un'espressione differenziale d'ordine $n > 1$ in espressioni differenziali del primo ordine. Si consideri l'equazione differenziale lineare:

$$F^{(n)} (X) f(y_1) + \cdots F(X) \Psi_{n-1} (X) f(y_1) = 0, \qquad (6')$$

analoga alla (6) salvo il mutamento di segno che si ha per maggiore comodità. Con un'ovvia estensione dei concetti del calcolo ordinario, una soluzione dell'equazione (6′), la quale dopo aver fissate (il che abbiamo visto (*a*) essere in nostro arbitrio) le determinazioni sue e delle sue prime $n - 1$ derivate per una certa determinazione costante I_k dell'operazione X che figura nell'equazione in parola, compresa nel campo di convergenza dei coefficienti relativamente alla funzione-oggetto considerata, si ottenga mediante sviluppo in serie di potenze di $X - I_k$, se ne dirà « un integrale particolare ». Che poi lo sviluppo così ottenuto sodisfi l'equazione studiata risulta dal teorema testè dimostrato (b). Per contro, detti $F_1(X) \dots F_n(X)$, n integrali particolari della (6), linearmente indipendenti (v. Nota), la funzione di X:

$$F(X) = \nu_1 F_1(X) + \dots \nu_n F_n(X),$$

(dove $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ sono altrettante costanti arbitrarie), che quando facciamo assumere a ciascuna delle $\nu_1 \dots \nu_n$ altrettanti valori assegnati è suscettibile di rappresentare qualunque integrale particolare della (6) si dirà « L'integrale generale dell'equazione in parola ».

Quando si abbiano n integrali dell'equazione (6) linearmente indipendenti, detti questi $F_1(X) \dots F_n(X)$ è chiaro che al primo membro dell'equazione in parola si potrà dar la forma:

$$\begin{vmatrix} F_i(X) & F'_i(X) \dots F_i^{(n)}(X) \\ F_1(X) & F'_1(X) \dots F_1^{(n)}(X) \\ \dots & \dots \\ F_n(X) & \dots\dots F_n^{(n)}(X) \end{vmatrix} f(y_1) \quad (i = 1 \dots n). \tag{9}$$

Infatti quest'espressione è evidententemente nulla quando $F_i(X)$, $F'_i(X), \dots,$ $F_i^{(n)}(X)$ assumano rispettivamente le determinazioni $F_1(X) \dots F_1^{(n)}(X)$, $F_2(X) \dots F_2^{(n)}(X), \dots$ Di più, detto brevemente $D\{F_1(X) \dots F_n(X)\}$ il determinante simbolico:

$$\begin{vmatrix} F_1(X) \dots F_1^{(n-1)}(X) \\ \dots\dots \\ F_n(X) \dots F_n^{(n-1)}(X) \end{vmatrix},$$

e $D_i\{F_1(X) \dots F_n(X)\}$ ciò che esso diviene, quando ai singoli termini della sua i^{esima} colonna si sostituisca rispettivamente $F_1^{(n)}(X) \dots F_n^{(n)}(X)$, mediante lo sviluppo dell'espressione (9) la (6) assumerà la forma (intendendo di designare con $F_i(X)$ uno degli integrali $F_i(X) \dots F_n(X)$):

$$F_i^{(n)}(X) f(y_1) - F_i^{(n-1)}(X) [D_n \{F_1(X) \dots F_n(X)\}]^{-1} D_n \{F_1(X) \dots F_n(X)\} f(y_1) \dots +$$
$$+ (-1)^n F_i(X) [D \{F_1(X) \dots F_n(X)\}]^{-1} D_1 \{F_1(X) \dots\} f(y_1) = 0.$$

Cioè il coefficiente $\Psi_i(X)$ $(i = 1 \ldots n)$ della (6) sarà dato dal quoziente (simbolico):

$$\frac{(-1)^i D_i \{ F_1(X) \ldots F_n(X) \}}{D \{ F_1(X)_1 \ldots F_n(X) \}},$$

Così $t\,(t < n)$ integrali linearmente indipendenti della (6') sodisferanno un'equazione differenziale lineare della stessa forma d'ordine t. Detti cioè: $\mathsf{F}_1(X) \ldots \mathsf{F}_t(X)$ questi integrali, essi saranno altresì integrali d'un'equazione differenziale lineare d'ordine t, nella quale la funzione-oggetto è ancora la stessa $f(y_1)$ ed in cui il coefficiente del termine d'ordine $i+1$ (incominciando a contare da quello contenente la derivata d'ordine t $(i = 1 \ldots t)$) coefficiente che designeremo con $\chi_i(X)$ avrà la forma:

$$\chi_i(X) = \frac{(-1)^i D_i \{ \mathsf{F}_1(X) \ldots \mathsf{F}_t(X) \}}{D \{ \mathsf{F}_1(X) \ldots \mathsf{F}_t(X) \}},$$

ove le espressioni che figurano in questo quoziente simbolico hanno forma analoga a quella che fu attribuita dianzi ai simboli $D_i \{ F_1(X) \ldots F_n(X) \}$, ecc., colla sola differenza che in luogo dell'indice n qui si ha l'indice inferiore t. Ora, detti brevemente $P \{ F(X),\ f(y_1) \}$ il primo membro della (6'), e $P_t \{ F(X), f(y_1) \}$ il primo membro dell'equazione a cui sodisfano, $\mathsf{F}_1(X) \ldots \mathsf{F}_t(X)$ si avrà ponendo per $F(X)$ uno qualunque degli integrali comuni alle due equazioni:

$$\left. \begin{aligned} & P \{ F(X),\ f(y_1) \} = R\, P_t \{ F(X),\ f(y_1) \} = \\ & = R \begin{vmatrix} \mathsf{F}_i(X) \ldots \mathsf{F}_i^{(t)}(X) \\ \mathsf{F}_1(X) \ldots \mathsf{F}_1^{(t)}(X) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathsf{F}_t(X) \ldots \mathsf{F}_t^{(t)}(X) \end{vmatrix} f(y_1) = 0 \quad (i = 1 \ldots t), \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

ove evidentemente, in causa della forma stessa di $P \{ F(X),\ f(y_1) \}$, R sarà un'espressione differenziale lineare simbolica (cioè un'espressione differenziale lineare in una funzione dell'operazione variabile X) d'ordine $n - t$. Quando la (6') ammetta una scomposizione in fattori come quella rappresentata dalla (10) essa si dirà « un'equazione riducibile ». Per le equazioni della forma (6') riducibili si può dare un metodo d'effettiva scomposizione dell'espressione differenziale (lineare) simbolica che figura nel loro primo membro in espressioni differenziali lineari del primo ordine perfettamente analoga a quella che si ha per le equazioni differenziali lineari studiate nel calcolo ordinario. Anche qui però per effettuare la scomposizione si richiede la conoscenza d'alcuni integrali particolari dell'equazione in discorso. Sia pertanto $\overline{F}_1(X)$ un integrale particolare qualunque (soggetto all'unica limitazione di non essere nullo in via assoluta) dell'equazione (6') e, detto $F(X)$ l'integrale generale della (6') si ponga, valendosi della rappresentazione geometrica delle operazioni I già introdotta e delle considerazioni che ne derivarono (II^o):

$$F(X) = \left(\int \Phi_1(X)\, d\, X\right) \overline{F}_1(X),$$

e si sostituisca quest'espressione nella (6'), la quale così assumerà la forma:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi^{(n-1)}(X)\, f(y_1) + \Phi^{(n-2)}(X)\, [\, \{ \overline{\overline{F}}_1(X) \}^{-1} \{ \Psi_1(X) + \\ &+ n\, \overline{\overline{F}}'_1(X) \}]\, f(y_1) + \Phi^{(n-3)}(X)\, [\, \{ \overline{\overline{F}}_1(X) \}^{-1} \{ \Psi_2(X) + \\ &+ (n-1)\, \overline{\overline{F}}'_1(X)\, \Psi_1(X) + \binom{n}{2} \overline{\overline{F}}''_1(X) \}]\, f(y_1) + \cdots = 0. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

La (6') si trasforma dunque in un'equazione d'ordine $n-1$ in $\Phi\,(X)$, in cui il coefficiente dell' $i+1^{\text{esimo}}$ $(i = 1 \ldots n-1)$ termine ha la forma:

$$\left.\begin{aligned} &\{ \overline{\overline{F}}_1(X) \}^{-1} \Big\{ \Psi_{i-1}(X) + (n-i+1)\, \overline{\overline{F}}'_1(X)\, \Psi_{i-2}(X) + \\ &+ \binom{n-i}{2} \overline{\overline{F}}''_1(X)\, \Psi_{i-3}(X) + \cdots \binom{n}{i-1} \overline{\overline{F}}_1^{(i-1)}(X) \Big\}. \end{aligned}\right\} \quad (11')$$

Detto ora $\overline{\overline{F}}_2(X)$ un integrale particolare della (11) non però nullo in via assoluta, e posto:

$$\Phi_1(X) = \left(\int \Phi_2(X)\, d\, X\right) \overline{\overline{F}}_2(X),$$

e sostituendo quest'espressione di $\Phi_1(X)$ nella (11) questa si riduce ad un'equazione differenziale lineare omogenea d'ordine $n-2$ in $\Phi_2(X)$, i cui coefficienti sono costruiti mediante le $\overline{\overline{F}}_2(X) \ldots \overline{\overline{F}}_2^{(n-2)}(X)$ e i coefficienti della (11) secondo la stessa legge, colla quale i coefficienti della (11) sono costruiti mediante $\overline{\overline{F}}_1(X) \ldots \overline{\overline{F}}_1^{(n-1)}(X)$ e i coefficienti della (6'). Così procedendo si trova che detto $\overline{\overline{F}}_3(X)$ un integrale particolare qualunque, non nullo in via assoluta dell'equazione così ottenuta e posto: $\Phi_2(X) = \left(\int \Phi_3(X)\, d\, X\right) \overline{\overline{F}}_3(X)$, ripetendo le considerazioni precedenti si trova che $\Phi_3(X)$ è integrale d'un'equazione differenziale lineare d'ordine $n-3$ i cui coefficienti si determinano secondo il metodo stabilito dianzi. Procedendo in questo modo si giunge ad avere rappresentato mediante il prodotto simbolico:

$$\left(\int\overline{\overline{F}}_{n-1}(X)\,d\,X\right)\left(\int\overline{\overline{F}}_{n-2}(X)\,d\,X\right)\ldots\left(\int\overline{\overline{F}}_2(X)\,d\,X\right)\overline{\overline{F}}_1(X),$$

(dove $\Phi_{n-1}(X)$, per il modo stesso con cui fu determinato, è integrale d'un'equazione differenziale lineare del primo ordine), un integrale particolare della (6'), come sono integrali particolari della (6'):

$$\left(\int\overline{\overline{F}}_2(X)\,d\,X\right)\overline{\overline{F}}_1(X),\quad \left(\int\overline{\overline{F}}_3(X)\,d\,X\right)\overline{\overline{F}}_2(X)\ldots$$

Tenendo per gli n integrali particolari della (6') che così s'ottengono la notazione $\mathsf{F}_1(X)\ldots\mathsf{F}_n(X)$, si ha per essi la seguente:

Proposizione. Gli n integrali in parola non possono sodisfare ad un'equazione lineare a coefficienti costanti sussistente in via assoluta (cioè indipendentemente dalla particolare funzione-oggetto a cui possa essere applicata l'operazione rappresentata dal suo primo membro).

Se infatti si avesse una relazione della forma:

$$c_1\,\mathsf{F}_1(X)+c_2\,\mathsf{F}_2(X)\ldots+c_n\,\mathsf{F}_n(X)=0, \tag{12}$$

da questa mediante divisione per $\overline{F}_1(X)$ e derivazione, poi mediante divisione per $\overline{F}_2(X)$ e derivazione, ecc., ecc., si giungerebbe alla relazione:

$$c_n\,\overline{\overline{F}}_n(X)=0,$$

la quale, per non essere $\overline{\overline{F}}_n(X)$ nulla in via assoluta porterebbe con sè che fosse $c_n=0$: se non che l'equazione precedente alla (n^{esima}) ottenuta col procedimento indicato è:

$$c_{n-1}+c_n\int\Phi_{n-1}(X)\,d\,X=0,$$

dalla quale risulta, se $c_n=0$ che anche $c_{n-1}=0$. Ripetendo sempre questo ragionamento si giungerà facilmente alla conclusione che la (12) può sussistere solo a patto che siano nulli tutti i coefficienti $c_i\,(c=1\ldots n)$.

Ciò equivale a dire che:

« Le funzioni: $\mathsf{F}_1(X)\ldots\mathsf{F}_n(X)$ costituiscono un sistema fondamentale d'integrali dell'equazione (6') ».

Nello stesso modo si vede che le funzioni:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\overline{F}}_{t+1}(X),\quad \left(\int \overline{\overline{F}}_{t+2}(X)\,d\,X\right)\overline{\overline{F}}_{t+1}(X),\ldots,\\ \left(\int \overline{\overline{F}}_{n}(X)\,d\,X\right)\left(\int \overline{\overline{F}}_{n-1}(X)\,d\,X\right)\ldots\left(\int \overline{\overline{F}}_{t+2}(X)\,d\,X\right)\overline{\overline{F}}_{t+1}(X),\end{array}\right\} \tag{13}$$

costituiscono un sistema fondamentale dell'equazione d'ordine $n-t(t=1, 2,\ldots)$ alla quale soddisfa: $\overline{\overline{F}}_{t+1}(X)$ e, mediante considerazioni di per sè stesse evidente si rappresenta nella forma (13) qualunque sistema fondamentale, scegliendo opportunamente l'elemento di questo sistema che si designa con $\overline{\overline{F}}_{t+1}(X)$, assumendo per $\overline{\overline{F}}_{t+\lambda}(X)$ in modo opportuno un integrale dell'equazione d'ordine $n-\lambda-t+1$ a cui sodisfa $\Phi_{t+\lambda-2}$ e scegliendo opportunamente le costanti (rispetto ad X) d'integrazione che man mano si vengono a presentare. Così si può riguardare $\mathsf{F}_1(X)\ldots\mathsf{F}_n(X)$ come un sistema fondamentale arbitrario della (6').

Ora daremo alcune relazioni notevoli che esistono fra i determinanti simbolici dei sistemi fondamentali d'integrali delle equazioni della forma (11) che si vengono successivamente a ottenere. Detto D_t il determinante del sistema fondamentale d'integrali (13) d'una di queste equazioni che è quella d'ordine $n-t$ e detto $\overline{\Psi}_t(X)$ il coefficiente della derivata d'ordine $n-t-1$ in quest'equazione (quello della derivata $n-t^{esima}$ si suppone = all'unità), è evidentemente: $D_t = C_t\, e^{-\int \overline{\Psi}(X)dX}$ ove sia C_t un fattore costante rispetto a X.

Detto quindi $\overline{\Psi}_{t+1}(X)$ il coefficiente della derivata d'ordine $n-t-2$ nell'equazione a cui sodisfa $\Phi_{-t+1}(X)$ sarà come risulta dalla (9'):

$$\overline{\Psi}_{t+1}(X) = \overline{\Psi}_t(X) + (n-t)\,\frac{d\log \mathsf{F}_{t+1}(X)}{d\,X},$$

da cui:

$$D_{t+1} = \frac{C_{t+1}}{C_t}\,\mathsf{F}_{t+1}^{-n+1}(X)\,D_t$$

(ove D_{t+1} abbia per l'equazione a cui sodisfa $\Phi_{n-t}(X)$ lo stesso significato che ha D_t per quella a cui sodisfa $\Phi_{n-t+1}(X)$), e:

$$D_t = \frac{C_t}{C_{t+1}}\,\mathsf{F}_{t+1}(X)\,D_{t+1}. \tag{14}$$

Costruendo le formole analoghe alla (14) per i casi di:

$$t=\lambda,\ \lambda+1\ldots n-1\ (\lambda=0,\ 1\ldots n-1),$$

e osservando che dai calcoli fatti risulta $\overline{\overline{F}}_n(X) = e^{-\int \Psi_n(X) dX}$ ove $\overline{\Psi}_n(X)$ sia il coefficiente della derivata prima nell'equazione a cui sodisfa $\overline{\overline{F}}_n(X)$ si giunge al risultato:

$$D_\lambda = c_\lambda \mathsf{F}_{\lambda+1}^{n-\lambda}(X) \ldots \mathsf{F}_n(X),$$

e in particolare:

$$D_0 = D(\mathsf{F}_1(X) \ldots \mathsf{F}_n(X)) = C \overline{\overline{F}}_1^n(X) \overline{\overline{F}}_2^{n-1}(X) \ldots \overline{\overline{F}}_n(X),$$

designando C un fattore costante rispetto a X. Di più:

$$D(\mathsf{F}_1(X) \ldots \mathsf{F}_\mu(X)) = \begin{vmatrix} \mathsf{F}_1(X) \ldots \mathsf{F}_1^{(\mu-1)}(X) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathsf{F}_\mu(X) \ldots \mathsf{F}_\mu^{(\mu-1)}(X) \end{vmatrix} =$$

$$= C' \overline{\overline{F}}_1^\mu(X) \overline{\overline{F}}_2^{\mu-1}(X) \ldots \overline{\overline{F}}_\mu(X), \quad (\mu < n),$$

ove sia anche C' una costante. Segue da queste ultime relazioni che, posto brevemente:

$$H_i(X) = \overline{\overline{F}}_1(X) \ldots \overline{\overline{F}}_i(X), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

e scelti opportunamente i fattori costanti C, C' si ha l'uguaglianza simbolica:

$$H_\mu(X) = \frac{D(\mathsf{F}_1(X), \mathsf{F}_2(X), \ldots, \mathsf{F}_\mu(X))}{D(\mathsf{F}_1(X), \mathsf{F}_2(X), \ldots, \mathsf{F}_{\mu-1}(X))}.$$

Chiaramente ciascuna delle funzioni $H_\mu(X)$ sodisfa l'equazione differenziale lineare (simbolica) del primo ordine:

$$H_\mu(X) \frac{d}{dX} \frac{F(X)}{H_\mu(X)} f(y_1) = \left\{ F'(X) - \frac{H'_1(X)}{H_1(X)} F(X) \right\} f(y_1) = 0,$$

(quest'ultima trasformazione è lecita, trattandosi di serie di potenze di X a coefficienti costanti e l'equazione sussiste per una qualunque funzione-oggetto). Solo $H_1(X)$ poi sodisfa la (6'), il cui primo membro, designata $F'(X) - \frac{H'_1(X)}{H_1(X)} F(X)$ brevemente con $Q_1(F(X))$ assumerà la forma:

$$\{R_1(F(X))\} \{Q_1(F(X))\},$$

ove $R_1(F(X))$ è un'espressione differenziale d'ordine $n-1$ nella funzione $F(X)$ di X. Se non che $Q_1(F(X)) f(y_1)$ si annulla solo quando alla funzione incognita che in esso figura si dia la determinazione $H_1(X)$ e perciò deve essere:

$$R_1\,\{Q_1(H_i(X))\}\,f(y_1)=0,\quad (i=2,\,3\ldots n).$$

Possiamo perciò affermare che l'equazione: $R_1(F(X))\,f(y_1)=0$ ammette gli integrali $H_2(X)\ldots H_n(X)$, ossia:

$$H_2(X),\quad H_2(X)\int\frac{H_3(X)}{H_2(X)}\,d\,X,\ldots,$$

$$H_2(X)\left(\int\frac{H_3(X)}{H_2(X)}\,d\,X\right)\int\ldots\left(\int\frac{H_n(X)}{H_{n-1}(X)}\,d\,X\right).$$

Così si vede che $R_1\,\{F(X)\}$ si può rappresentare mediante un'espressione della forma: $R_2\,\{Q_2(F(X))\}\,f(y_1)$ ove designi $Q_2(F(X))$ un'espressione differenziale del primo ordine e $R_2(F(X))$ un'espressione differenziale d'ordine $n-2$ tale che l'equazione:

$$R_2(F(X))\,f(y_1)=0,$$

abbia per integrali:

$$H_3(X),\quad H_3(X)\int\frac{H_4(X)}{H_3(X)}\,d\,X,\ldots,$$

$$H_3(X)\left(\int\frac{H_4(X)}{H_3(X)}\,d\,X\right)\left(\int\ldots\right)\left(\int\frac{H_n(X)}{H_{n-1}(X)}\,d\,X\right).$$

Così proseguendo, si vede che il primo membro della (6') si può rappresentare mediante il prodotto simbolico di n fattori differenziali del primo ordine e può così assumere la forma:

$$P_\mu(F(X))-H_n(X)\left(\frac{d}{d\,X}\frac{H_{n-1}(X)}{H_n(X)}\right),\ldots\left(\frac{d}{d\,X}\frac{H_1(X)}{H_2(X)}\right)\left(\frac{d}{d\,X}\frac{F(X)}{H_1(X)}\right).$$

Così l'equazione:

$$H_\mu(X)\ldots\left(\frac{d}{d\,X}\frac{F(X)}{H_1(X)}\right)=0,$$

ha le soluzioni $\mathsf{F}_1(X)\ldots\mathsf{F}_\mu(X)$ e l'equazione:

$$R_\mu(X)=H_n(X)\ldots\left(\frac{d}{d\,X}\frac{\Phi(X)}{H_{\mu+1}(X)}\right)=0,$$

ha le soluzioni:

$$P_\mu(\mathsf{F}_{\mu+1}(X)),\quad P_\mu(\mathsf{F}_{\mu+2}(X))\ldots P_\mu(\mathsf{F}_n(X)).$$

Così, partendo dai μ integrali particolari $\mathsf{F}_i(X)\,(i=1,\,2\ldots\mu)$ della (6') che supporremo dati, pel primo membro della (6') si ha una scomposizione della forma: $R_\mu(F(X))\,P_\mu(F(X))$ e la conoscenza d'un sistema fondamentale di integrali dell'equazione: $R_\mu(F(X))\,f(y_i)=0$, oltre quella degli accennati integrali particolari della (5') permette di determinare, mediante semplici integrazioni, gli altri $n-\mu$ integrali della stessa (6'), i quali, insieme con $\mathsf{F}_1(X)\ldots\mathsf{F}_\mu(X)$, costituiscono un sistema fondamentale.

c) Moltiplicatori. Equazione aggiunta. Applicando una formola già stabilita (quella per l'integrazione per parti (I°)), dette $F(X)$, $\Phi(X)$ due funzioni di X, si ha, come si verifica agevolmente con un calcolo materiale:

$$\sum_{h=0}^{h=\mu-1}(-1)^h\int\Phi^{(h)}(X)\,F^{(\mu-h)}(X)\,dX=\sum_{h=0}^{\mu-1}(-1)^h\,\Phi^{(h)}(X)\,F^{(\mu-h-1)}(X)+$$
$$+\sum_{h=0}^{h=\mu-1}\Phi^{(h+1)}(X)\,F^{(\mu-h-1)}(X)\,dX,$$

dalla quale si ricava la relazione equivalente:

$$\int\Phi(X)\,F^{(\mu)}(X)\,dX=$$
$$=\sum_{h=0}^{h=\mu-1}(-1)^h\,\Phi^{(h)}(X)\,F^{(\mu-h-1)}(X)+(-1)^\mu\int\Phi^{(\mu)}(X)\,F(X)\,dX.$$

Ponendo ora per $F(X)$, l'operazione rappresentata dal primo membro della (6') che si designerà brevemente con $P\{F(X)\}$ si avrà:

$$\left.\begin{aligned}&\int\Phi(X)\,P\{F(X)\}\,dX=\\&=\sum_{\mu=0}^{\mu=n}\sum_{h=0}^{h=\mu-1}(-1)^h\,F^{(\mu-h-1)}(X)\,\frac{d^h\,\Psi_{n-h}(X)\,F(X)}{dX^h}+\\&\quad+\int F(X)\,P'\{\Phi(X)\}\,dX.\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

Ora $P'\{\Phi(X)\}$ evidentemente:

$$=\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^h\,\frac{d^h\{\Psi_{n-h}(X)\,\Phi(X)\}}{dX^h}.$$

Proponiamoci ora la questione seguente:

« Sotto quale condizione il primo membro della (16) è un'espressione differenziale lineare dell'ordine $n-1$ in $F(X)$? »

Anzitutto il primo termine del secondo membro della (16) è appunto un'espressione di tal natura, il secondo termine si riduce esso pure ad una espressione di tal fatta, solo a patto che sia $F(X)\,P'\{\Phi(X)\}$ la derivata d'un'espressione dell'accennata forma. Ciò per altro non è, in generale, possibile, talchè questo termine deve annullarsi affinchè il primo membro della (16) assuma la forma da noi indicata. Ora in generale, non essendo $F(X)$ identicamente nulla in via assoluta, $F(X)\,P'\,\{\Phi(X)\}$ s'annulla in via assoluta solo se è:

$$P'\,\{\Phi(X)\}=0,$$

per qualunque funzione-oggetto a cui sia applicata l'operazione che esso rappresenta. Possiamo quindi affermare che:

« Il primo membro della (16) si riduce ad un'espressione differenziale lineare d'ordine $n-1$ quando per $\Phi(X)$ si ponga un integrale dell'equazione:

$$P'\,\{\Phi(X)\}\,\varphi(y_1)=0, \tag{17}$$

designando $\varphi(y_1)$ una funzione-oggetto qualunque. »

Una tale funzione che abbia la proprietà, sostituita a $\Phi(X)$, di far assumere a $\int \Phi(X)\,P\,\{F(X)\}\,dX$ la forma in discorso si dirà, con un'estensione d'un concetto del calcolo ordinario: « Moltiplicatore simbolico dell'equazione (6') ». E l'equazione (17) che definisce tali funzioni si dirà, adottando la definizione data dal Fuchs per le equazioni differenziali del calcolo ordinario: « Equazione aggiunta dell'equazione (6'). » L'operazione rappresentata dal primo membro della (17) si dirà: « Equazione differenziale aggiunta dell'espressione $P\,\{F(X)\}$. »

Derivando la (14) rispetto a X membro a membro si ha:

$$\Phi(X)\,P(F(X))-F(X)\,P'(\Phi(X))=\frac{d\,Q(F(X)\,\Phi(X))}{d\,X}, \tag{18}$$

ove sia:

$$Q(F(X)\,.\,\Phi(X))=\sum_{h=0}^{h=n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k\,F^{(h-k-1)}(X)\,\frac{d^k}{d\,X^k}\,\{\Psi_{n-h}(X)\,\Phi(X)\}.$$

Proseguendo ad estendere le denominazioni che si hanno nel calcolo ordinario, in base a queste $Q(F(X)\,\{\Phi(X))\}$, si dirà: « Espressione differenziale bilineare (simbolica) nelle funzioni $F(X)$, $\Phi(X)$ dell'operazione I variabile X, d'ordine $n-1$ in entrambe. » Siamo quindi giunti al risultato espresso dalla seguente:

Proposizione « Sia $P'\,\{\Phi(X)\}$ l'espressione differenziale aggiunta dell'espressione differenziale $P\,\{F(X)\}$ ove siano $F(X)$, $\Phi(X)$ funzioni arbitrarie dell'operazione I variabile X:

$$\Phi(X)\, P(\Phi(X)) - F(X) \frac{d}{dX} P(\Phi(X)),$$

la derivata rispetto alla stessa operazione X d'un'espressione differenziale bilineare (simbolica) nelle funzioni $F(X)$, $\Phi(X)\,dX$ d'ordine $n-1$ in entrambe. »

Quando poi per $\Phi(X)$ si ponga un moltiplicatore della (6′), risulta dalle considerazioni precedenti che detto $M(X)$ questo moltiplicatore:

$$M(X)\, P\{F(X)\},$$

è la derivata rispetto a X d'un'espressione differenziale bilineare di $F(X)$, $M(X)$ d'ordine $n-1$ in entrambe.

Così si vede che la teoria del moltiplicatore delle equazioni differenziali lineari s'estende completamente alle equazioni differenziali lineari in funzioni d'un'operazione I variabile, i cui coefficienti siano serie di potenze di quest'operazione a coefficienti costanti.

d) Relazione che v'è fra un'espressione differenziale lineare in una funzione d'un'operazione I variabile e la sua aggiunta. Ponendo le uguaglianze simboliche:

$$\left.\begin{aligned}
&\Xi_n(X) = \frac{1}{H_n(X)} \dots \Xi_\mu(X) = \\
&= \frac{1}{H_n(X)}\left(\int \frac{H_n(X)}{H_{n-1}(X)}\, dX\right)\left(\int \dots \frac{H_{\lambda+2}(X)}{H_{\lambda+1}(X)}\, dX\right)\left(\int \frac{H_{\lambda+1}(X)}{H_\lambda(X)}\, dX\right) \\
&\qquad (\lambda = 2, 3, \dots, n-1) \\
&\Xi_1(X) = \frac{1}{H_n(X)}\left(\int \frac{H_n(X)}{H_{n-1}(X)}\, dX\right)\left(\int \dots\right)\left(\int \frac{H_2(X)}{H_1(X)}\, dX\right).
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Dalla (14) si ricava, posto brevemente:

$$P_\mu\{F(X)\} = H_{n-\mu}(X)\left(\frac{d}{dX}\frac{H_{n-\mu-1}(X)}{H_{n-\mu}(X)}\right) \dots \frac{H_1(X)}{H_2(X)}\left(\frac{d}{dX}\frac{F(X)}{H_2(X)}\right)$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, n-\lambda+1)$$

$$\Xi_{\lambda\mu}(X) = \frac{1}{H_{n-\mu}(X)}\left(\int \frac{H_{n-\mu}(X)}{H_{n-\mu-1}(X)}\, dX\right) \dots \left(\int \frac{H_{\lambda+1}(X)}{H_\lambda(X)}\, dX\right)$$

$$(\mu = 0, 2, \dots, n-\lambda,\ \Xi_{\lambda_0}(X)$$

è equivalente a $\Xi_\lambda(X)$), il seguente sistema di relazioni:

$$\Xi_{\lambda,n-\lambda-1}(X)\,P_{n-\mu-1}\{F(X)\} =$$
$$= \frac{d}{dX}\left(\Xi_{\lambda,n-\mu-\lambda}(X)\,P_{n-\mu}\{F(X)\}\right) - \Xi_{\lambda,n-\mu}(X)\,P_{n-\mu}\{F(X)\},$$

(intendendosi che $P_0\{F(X)\}$ sia lo stesso $P\{F(X)\}$, $\mu = n-1\ldots\lambda$). L'ultima di queste relazioni è:

$$M_{\lambda,n-\lambda}(X)\,P_{n-\lambda}\{F(X)\} = \frac{d}{dX}\left(\Xi_{\lambda,n-\lambda}(X)\,P_{n-\lambda+1}(X)\right),$$

e addizionando queste equazioni membro a membro si ha:

$$M_\lambda(X)\,P\{F(X)\} = \frac{d}{dX}\sum_{\mu=0}^{n-\lambda} M_{\lambda,\mu}(X)\,P_{\mu+1}\{F(X)\} \quad (\lambda = 1\ldots n). \tag{20}$$

Ora dall'essere il secondo membro della (20) la derivata rispetto all'operazione X d'un'espressione differenziale lineare d'ordine $n-1$ nella funzione $F(X)$ dell'operazione X, segue che $\Xi_1(X)\ldots\Xi_n(X)$ sono da riguardarsi come moltiplicatori della (6'). Di più dall'essere:

$$M_{\lambda\mu}(X) = \frac{1}{H_{n-\mu+1}(X)}\left(\frac{d}{dX}\frac{H_{n-\mu+1}(X)}{H_{n-\mu+2}(X)}\right)\left(\frac{d}{dX}\frac{H_{n-\mu+2}(X)}{H_{n-\mu+3}(X)}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\frac{d}{dX}\frac{H_{n-1}(X)}{H_n(X)}\right)\left(\frac{d\,H_n(X)}{dX}\right)M_\lambda(X),$$

si hanno i coefficienti di quest'espressione differenziale in una funzione d'una operazione I variabile rappresentati come espressioni differenziali lineari del moltiplicatore.

Ora per i moltiplicatori si diedero le espressioni rappresentate dalle (20): confrontando queste colle altre espressioni:

$$\mathsf{F}_{n-\lambda}(X) = H_1(X)\left(\int\frac{H_2(X)}{H_1(X)}\,dX\right)\left(\int\ldots\right)\left(\int\frac{H_{n-\lambda}(X)}{H_{n-\lambda-1}(X)}\,dX\right),$$

si trae la seguente conclusione:

« I moltiplicatori $\Xi_1(X)\ldots\Xi_n(X)$ della (6') si traggono da $\mathsf{F}_1(X)\ldots\mathsf{F}_n(X)$, sostituendo rispettivamente $H_1(X)\ldots H_n(X)$ mediante:

$$H'_1(X) = \frac{1}{H_n(X)}\cdots H'_n(X) = \frac{1}{H_1(X)},$$

e detti moltiplicatori $\Xi_i(X)$ costituiscono un sistema fondamentale d'integrali dell'equazione differenziale lineare omogenea (in una funzione dell'operazione I variabile X):

$$\left.\begin{aligned}(-1)^n H'_n(X)\left(\frac{d}{dX}\frac{H'_{n-1}(X)}{H'_n(X)}\right)\left(\frac{d}{dX}\frac{H'_{n-2}(X)}{H'_{n-1}(X)}\right)\cdots\\ \cdots\left(\frac{d}{dX}\frac{H'_1(X)}{H'_2(X)}\right)\left(\frac{d}{dX}\frac{\Phi(X)}{H'_1(X)}\right)\varphi(y_1)=0,\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

nello stesso modo con cui le $F_i(X)$ $(i=1\ldots n)$ hanno l'analoga proprietà rispetto all'equazione:

$$H_n(X)\left(\frac{d}{dX}\frac{H_{n-1}(X)}{H_n(X)}\right)\cdots\left(\frac{d}{dX}\frac{H_1(X)}{H_2(X)}\right)\left(\frac{d}{dX}\frac{F(X)}{H_1(X)}\right)\varphi(y_1)=0,$$

($\varphi(y_1)$, funzione-oggetto qualunque). »

Inoltre poichè l'equazione (16) ha fra i suoi integrali qualunque moltiplicatore della (6') e quindi le $\Xi_i(X)$, dovrà il primo membro della (16) essere identico col primo membro della (20) in via assoluta. Dovrà perciò sussistere l'uguaglianza simbolica (posto per le $H'_i(X)$ le loro espressioni equivalenti):

$$\left.\begin{aligned}P'\{\Phi(X)\}=(-1)^n\frac{1}{H_1(X)}\left(\frac{d}{dX}\frac{H_1(X)}{H_2(X)}\right)\cdots\\ \cdots\left(\frac{d}{dX}\frac{H_{n-1}(X)}{H_n(X)}\right)\left(\frac{d\{H_n(X)\Phi(X)\}}{dX}\right)=0,\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

la quale ci esprime che:

« L'espressione differenziale aggiunta a $P\{F(X)\}$ s'ottiene sostituendo alle funzioni $H_1(X)\ldots H_n(X)$ dell'operazione I variabile X, le quali servono alla scomposizione di $P\{F(X)\}$, le funzioni inverse a questa, prese con ordine di successione inverso, e moltiplicando il risultato per $(-1)^n$. »

Evidentemente l'espressione differenziale aggiunta all'espressione differenziale di primo ordine:

$$A_\lambda(X)=H_\lambda(X)\frac{d}{dX}\left(\frac{F(X)}{H_\lambda(X)}\right),$$

è:

$$A'_\lambda(X)=-\frac{1}{H_\lambda(X)}\frac{d}{dX}\{H_\mu(X)\Phi(X)\}.$$

Abbiamo quindi la proposizione seguente:

« L'espressione differenziale aggiunta dell'espressione differenziale lineare d'ordine n: $P\{F(X)\}$ si può rappresentare mediante il prodotto (simbolico) delle espressioni differenziali aggiunte delle espressioni differenziali di primo ordine che servono alla rappresentazione dell'espressione $P\{F(X)\}$ mediante il loro prodotto (v. formola 14) prese con ordine inverso. »

Di questa proposizione si ha il seguente:

« *Corollario.* L'espressione differenziale aggiunta d'un'espressione differenziale lineare (in una funzione d'un'operazione I variabile), la quale sia rappresentata mediante il prodotto simbolico di più espressioni differenziali lineari, è data dal prodotto simbolico delle espressioni aggiunte di queste espressioni-fattori prese con ordine inverso. »

Ciò si dimostra, scomponendo ognuna di queste espressioni differenziali che sono i fattori dell'espressione data in fattori del primo ordine sì da ottenere l'espressione data rappresentata mediante un prodotto simbolico di fattori differenziali del primo ordine e, applicando poi la proposizione testè enunciata. Poichè le $\Xi_i(X)$ $(i = 1 \ldots n)$ costituiscono un sistema fondamentale d'integrali della (22), sarà integrale di quest'equazione anche ogni loro combinazione lineare a coefficienti costanti. Così dalla reciprocità che sussiste fra equazioni differenziali aggiunte e dal modo stesso con cui fu definito il moltiplicatore d'un'equazione differenziale lineare è lecito trarre la conclusione seguente:

« I moltiplicatori dell'equazione differenziale (6′) sono dati dalle soluzioni dell'equazione differenziale aggiunta alla stessa (6′) e reciprocamente i moltiplicatori di quest'equazione aggiunta (22) sono dati dagli integrali della (6′). »

Poniamo ora le uguaglianze simboliche:

$$\Phi_\alpha(X) = (-1)^{n+\alpha} \frac{D(\mathsf{F}_1(X) \ldots \mathsf{F}_{\alpha-1}(X),\ \mathsf{F}_{\alpha+1}(X) \ldots \mathsf{F}_n(X))}{D(\mathsf{F}_1(X) \ldots \mathsf{F}_n(X))} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{23}$$

ove al solito $\mathsf{F}_1(X) \ldots \mathsf{F}_n(X)$ abbiano il significato d'un sistema fondamentale d'integrale della (6′). Ora si sa essere:

$$P(F(X)) = (-1)^n \frac{D(F(X),\ F_1(X) \ldots F_n(X))}{D(F_1(X) \ldots F_n(X))}, \tag{24}$$

di più evidentemente:

$$\frac{d}{dX} \frac{\mathsf{F}_2(X)}{\mathsf{F}_1(X)} = \frac{D(\mathsf{F}_1(X),\ \mathsf{F}_2(X))}{\mathsf{F}_1^2(X)} \cdots \frac{d}{dX} \frac{\mathsf{F}_n(X)}{\mathsf{F}_1(X)} = \frac{D(\mathsf{F}_1(X),\ \mathsf{F}_n(X))}{\mathsf{F}_1^2(X)}.$$

Pertanto, posto per brevità:

$$D(\mathsf{F}_1(X),\ \mathsf{F}_\mu(X)) = \Omega_\mu(X) \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

si avrà:

$$D(\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_n(X)) = \frac{D(\Omega_1(X)\dots\Omega_n(X))}{\mathsf{F}_1^2(X)},$$

da cui:

$$D(\mathsf{F}_1(X),\ \mathsf{F}_2(X),\ \mathsf{F}_\nu(X)) = \frac{D(\Omega_2(X)\dots\Omega_\nu(X))}{\mathsf{F}_1(X)} \quad (\nu = 3,\ 4, \dots,\ n),$$

e anche:

$$D(\Omega_1(X)\dots\Omega_n(X)) = \frac{D\{D(\Omega_2(X),\ \Omega_3(X))\dots D(\Omega_2(X),\ \Omega_n(X))\}}{\mathsf{F}_2^{n-3}(X)},$$

quindi:

$$D(\mathsf{F}_2(X)\dots\mathsf{F}_n(X)) = \frac{D(T_1(X)\dots T_{n-2}(X))}{D(\mathsf{F}_1(X),\ \mathsf{F}_2(X))^{n-3}},$$

ove si ponga:

$$T_i(X) = D(\mathsf{F}_1(X),\ \mathsf{F}_2(X),\ \mathsf{F}_{i+2}(X)).$$

Abbiansi ora: $\rho + \sigma$ funzioni di X:

$$N_1(X)\dots N_\rho(X),\ P_1(X)\dots P_\sigma(X):$$

si verifica facilmente essere:

$$D(N_1(X)\dots N_\rho(X),\ T_1(X)\dots T_\sigma(X)) = \frac{D(U_1(X)\dots U_\sigma(X))}{D(N_1(X)\dots N_\rho(X))^{\sigma-1}}, \qquad (25)$$

ove si sia posto:

$$D(N_1(X)\dots N_\rho(X),\ P_\tau(X)) = U_\tau(X) \quad (\tau = 1,\ 2, \dots,\ \sigma),$$

(ρ e σ siano due numeri qualunque). Se pertanto a ρ s'attribuisce il valore $\mu - 1$, a σ il valore 2 e se si sostituiscono alle funzioni $N(X)$ rispettivamente le funzioni: $\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_{\lambda-1}(X)$, $\mathsf{F}_{\lambda+1}(X)\dots\mathsf{F}_\mu(X)$ e alle $P(X)$ rispettivamente le funzioni: $\mathsf{F}_\lambda(X)$, $\mathsf{F}_{\mu+1}(X)$, la (24) assume la forma:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{D(\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_{\lambda-1}(X),\ \mathsf{F}_{\lambda+1}(X)\dots\mathsf{F}_\mu(X))\,D(\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_{\mu+1}(X))}{D(\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_\mu(X))^2} = \\ &= \frac{d}{dX}\,\frac{D(\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_{\lambda-1}(X),\ \mathsf{F}_{\lambda+1}(X)\dots\mathsf{F}_{\mu+1}(X))}{D(\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_\mu(X))}. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Ciò premesso, se nella (26) si fa $\lambda = \alpha$, $\mu = n$ e si pone $\mathsf{F}_{\mu+1}(X) = F(X)$ essa in virtù delle (23) e (24) si trasforma nella relazione seguente:

$$\Phi_\alpha(X)\,P(F(X)) = \frac{d}{dX}P(F(X),\ \Phi_\alpha(X)), \qquad (27)$$

ove si ponga:

$$P(F(X),\ \Phi_\alpha(X)) = (-1)^{\alpha-1}\frac{D(\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_{\alpha-1}(X),\ \mathsf{F}_{\alpha+1}(X)\dots\mathsf{F}_n(X))}{D(\mathsf{F}_1(X),\ \mathsf{F}_2(X)\dots\mathsf{F}_n(X))}.$$

Colla (27) è espressa la proprietà delle $\Phi_\alpha(X)$ $(\alpha = 1\dots n)$ d'essere moltiplicatori dell'equazione differenziale (6′). Ora sviluppiamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathsf{F}_1(X)\dots \mathsf{F}_1^{(n-2)}(X), & \mathsf{F}_1^{(\alpha)}(X) \\ \mathsf{F}_2(X)\dots \mathsf{F}_2^{(n-2)}(X), & \mathsf{F}_2^{(\alpha)}(X) \\ \dots\dots\dots & \dots \\ \mathsf{F}_n(X)\dots \mathsf{F}_n^{(n-2)}(X), & \mathsf{F}_n^{(\alpha)}(X) \end{vmatrix} \quad (\alpha = 0,\ 1,\dots,\ n-2),$$

si avrà per la (23), facendo lo sviluppo per la colonna d'ordine α:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \mathsf{F}_\alpha^{(\lambda)}(X)\,\Phi_\alpha(X) = 0 \text{ in via assoluta} \\ &\qquad\qquad\qquad (\lambda = 0,\ 1,\dots,\ n-2) \\ &\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \mathsf{F}_\alpha^{(n-1)}(X)\,\Phi_\alpha(\alpha) = \text{all'operazione identica.} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Posto brevemente: $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \mathsf{F}_\alpha^{(\mu)}(X)\,\Phi_\alpha^{(\lambda)}(X) = S_{\mu,\lambda}(X)$, per $\lambda = 0$ le $S_{\mu,\lambda}(X)$ sono tutte uguali a 0 in via assoluta all'infuori che per $\mu = n-1$, nel qual caso si ha per $S_{\mu,\lambda}(X)$ l'operazione identica. Si hanno poi le relazioni:

$$\frac{d\,S_{\mu-1,0}}{d\,X} = S_{\mu,0} + S_{\mu-1},\quad \frac{d^2\,S_{\mu-2,0}}{d\,X^2} = S_{\mu,0} + 2\,S_{\mu-1,1} +$$
$$+ S_{\mu-2,2}\dots \frac{d^\mu\,S_{0,0}}{d\,X^\mu} = S_{\mu,0} + \mu\,S_{\mu-1,1} + \cdots S_{0,\mu}.$$

Ora per $\mu < n-1$: $S_{\mu,\lambda}(X) = 0$ quando $\mu + \lambda < n-1$, mentre per $n = \mu - 1$, si ricava dalle formole precedenti:

$$S_{n-1,0}(X) = 1,\ S_{n-2,1}(X) = 1\dots, \text{ ecc.},$$

con legge alternata e altrettanto si ha per $\mu = n$. Quindi:

$$S_{\mu,\lambda}(X) = \begin{cases} 0 \text{ per } \lambda + \mu < n-1 \\ (-1)^{n-1} \text{ per } \lambda + \mu < n-1. \end{cases}$$

ossia nel caso particolare di $\mu = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=n} \Phi_\alpha^{(\lambda)}(X)\, F_\alpha(X) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad (\lambda = 0,\ 1, \ldots,\ n-1) \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=n} \Phi_\alpha^{(n-1)}(X)\, F_\alpha(X) = (-1)^{n-1}, \end{array}\right\} \tag{29}$$

formola questa che in un colla (28) indica sotto una nuova forma la reciprocità esistente fra le $\Phi_\alpha(X)$, $F_\alpha(X)$.

5. *Equazioni differenziali lineari non omogenee in funzioni d'un'operazione I variabile.*

a) Serie procedenti secondo le derivate successive d'una data funzione d'un'operazione I variabile. Si consideri ora la serie:

$$\Sigma \frac{P_n(X)}{\underline{|n}} \frac{d^n F(X)}{d X^n} f(y_1), \tag{30}$$

ove $F(X)$ sia una funzione data di X, analitica (II^o) entro un certo campo di determinazioni di detta operazione X rispetto a $f(y_1)$, la quale sia una funzione-oggetto qualunque. Le $P_n(X)$ alla lor volta ($n = 0,\ 1,\ 2\ldots$) siano funzioni della stessa X rappresentate da serie di potenze a coefficienti costanti di quest'operazione I variabile sodisfacenti alla condizione:

$$\left| \frac{P_n(X)\,\underline{|n-1}}{P_{n-1}(X)\,\underline{|n}} \frac{F^{(n)}(X) f(y_1)}{F^{(n-1)}(X) f(y_1)} \right| < \frac{R^n(X)}{R^{n-1}(X)} \frac{F^{(n)}(X) f(y_1)}{F^{(n-1)}(X) f(y_1)},$$

per tutti i valori dell'indice n, e per tutte le determinazioni di X comprese in un certo campo T, ove sia $R(X)$ una funzione data di X, analitica entro T rispetto a $F(X) f(y_1)$ e che di più sia tale che le:

$$R^n(X)\, F^{(n)}(X) f(y_1) \quad (n = 0,\ 1\ldots),$$

siano per tutte le determinazioni di X comprese in T, reali e positive per un certo insieme E di valori della variabile da cui dipende la funzione da esse rappresentata. Suppongasi inoltre che $F(X)$ sia funzione analitica di X rispetto a $f(y_1)$ per tutte le determinazioni di X appartenenti a un insieme T_1 compreso per intero in T. Ora si dimostrerà come si possa determinare una porzione di T_1, tale che per le determinazioni di X comprese in questa la serie (30) sia convergente assolutamente e in ugual grado.

Converremo pertanto di designare, dopo avere introdotta la rappresentazione delle operazioni I mediante punti dello spazio (II^o), con $\frac{D(X)f(y_1)}{\mathbf{I}f(y_1)}$ il limite inferiore della differenza, rispetto a $f(y_1)$, fra una data determinazione di X corrispondente ad un punto interno alla regione costituita dai punti che corrispondono alle determinazioni di X appartenenti a T_1 e le determinazioni di X che corrispondono ai punti situati sul contorno della regione stessa. Questo limite inferiore: $\frac{D(X)f(y_1)}{\mathbf{I}f(y_1)}$ sarà una funzione che varierà da uno all' altro punto dell' accennata regione, che diremo R: di più sarà nulla per i punti del contorno di R, mentre sarà reale, positiva e continua per punti interni al contorno stesso (cioè $D(X)$) sarà per punti, ecc. ecc. continua rispetto a $f(y_1)$. Fissiamo ora un punto P interno a R, a cui corrisponda una determinazione costante $\mathbf{I}_h$ di X: dimostreremo questa proposizione:

« Esista un punto di R, tale che, detta X la determinazione di X che gli corrisponde sia:

$$\frac{\mathsf{R}^n(\mathsf{X})\,F^n(X)f(y_1)}{\mathsf{R}^{(n-1)}(X)\,F^{(n-1)}(X)f(y_1)} < \frac{D^n(\mathsf{X})f(y_1)}{D^{n-1}(\mathsf{X})f(y^1)}, \tag{31}$$

per ogni valore dell'indice n da 1 in poi. In questo caso, per la continuità di D, esisterà un' intera regione interna a R (II^o), tale che per le determinazioni di X corrispondenti ai singoli punti interni a questa regione, che designeremo brevemente con R_1, sia sodisfatta la (31). Allora per i punti interni a R_1, la serie (30) è convergente assolutamente ed in ugual grado sotto la condizione però che entro R_1 esista un punto tale che ad esso corrisponda una determinazione costante $\mathbf{I}_h$ di X. »

Infatti, per essere $F(X)$ funzione analitica di X entro T rispetto a $f(y_1)$, essa sarà sviluppabile in serie di potenze di $X - \mathbf{I}_h$ convergente nella sfera il cui centro sia il punto corrispondente a $\mathbf{I}_h$, e sulla cui superficie si trovino i punti corrispondenti a $\mathbf{I}_h + \mathbf{I}_\alpha$, posto brevemente $\alpha = \frac{D(\mathbf{I}_h)f(y_1)}{\mathbf{I}f(y_1)}$.

Se ora indichiamo con t_1, t_2, t_3 tre numeri positivi (i quali per le ipotesi poste si potranno sempre assegnare) tali che:

$$\frac{\mathsf{R}(\mathbf{I}_h)f(y_1)}{\mathbf{I}f(y_1)} < t_1 < t_2 < t_3 < \frac{D(\mathbf{I}_h)f(y_1)}{\mathbf{I}f(y_1)} \tag{32}$$

(si noti che:

$$\frac{\mathrm{R}(\mathrm{I}_h) f(y_1)}{\mathrm{I} f(y_1)} \quad \text{e} \quad \frac{D(\mathrm{I}_h) f(y_1)}{\mathrm{I} f(y_1)},$$

sono fattori costanti, qualunque sia la funzione $f(y_1)$) si potrà sviluppare la funzione $F(X + \mathrm{I}_{t_2}) f(y_1)$ mediante la formola del Taylor generalizzata, per le determinazioni di X sodisfacenti alla condizione seguente (per ogni valore dell'indice n):

$$\frac{\{ | (X - \mathrm{I}_h) f(y_1) + \mathrm{I}_{t_2} f(y_1) | \}^n}{\{ | (X - \mathrm{I}_h) f(y_1) + \mathrm{I}_{t_2} f(y_1) | \}^{n-1}} < \frac{D(\mathrm{I}_h) f(y_1)}{\mathrm{I} f(y_1)};$$

si avrà cioè per queste determinazioni:

$$F(X + \mathrm{I}_{t_2}) f(y_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{I}_{t_2}}{|\underline{n}} \right)^n F^{(n)}(X) f(y_1) \tag{33}$$

(al solito con $F^{(o)}(X)$ s'intende di rappresentare la stessa $F(X)$), mentre d'altra parte per la continuità di $\mathrm{R}(X)$ relativamente a $f(y_1)$ vi sarà un'intera porzione della regione R comprendente il punto corrispondente a I^h, tale che per le determinazioni di X corrispondenti a' suoi singoli punti, $\mathrm{R}(X)$ continui a sodisfare la disuguaglianza (32). D'altra parte lo sviluppo (33) sarà valido certo per le determinazioni di X tali che sia sodisfatta la disuguaglianza:

$$\left| \frac{X^n f(y_1)}{X^{n-1} f(y_1)} \right| < t_3 - t_2 - h,$$

per tutti i valori dell'indice n e per tutti i valori della variabile da cui dipende $X^n f(y_1)$ compresi in E: e per le determinazioni di X comprese in questo campo, $\frac{F(X) f(y_1)}{\mathrm{I} f(y_1)}$ ammetterà quindi un massimo (per tutti i valori della variabile da cui dipende la funzione in discorso compresi in E). Diciamo m questo massimo, sarà:

$$\frac{1}{|\underline{n}} \left| \frac{F^{n)}(X) f(y_1)}{\mathrm{I} f(y_1)} \right| < \frac{m}{t^2{}_n}.$$

Ritornando ora alla serie (29) è chiaro che per tutte le determinazioni di X appartenenti al campo in cui sia:

$$\left| \frac{X^n f(y_1)}{X^{n-1} f(y_1)} \right| < t_3 - t_2 - h,$$

e sia contemporaneamente continua $D(X)$ relativamente a $f(y_1)$, cioè per tutte le determinazioni di X costituenti la porzione comune di questi due campi, si avrà:

$$\left| \frac{P_n(X)}{|\underline{n}} F^{(n)}(X) f(y_1) \right| < \text{F}^n(X) F^{(n)}(X) f(y_1) <$$
$$< t_1^n F^{(n)}(X) f(y_1) < t_2^n F^{(n)}(X) f(y_1).$$

Ne consegue che la serie (31) è convergente assolutamente ed in ugual grado per tutte le determinazioni di X compreso nel campo in cui è convergente la (33) c. d. d.

L'insieme delle funzioni di X tali che messe nella (31) al posto di $F(X)$, rendano convergente questa serie si dirà, estendendo una definizione data dal prof. Pincherle « campo funzionale di convergenza di questa funzione dell'operazione I variabile in discorso ».

b) Integrazione d'equazioni differenziali lineari non omogenee in funzioni d'un'operazione I variabile. Abbiasi ora l'equazione:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^m \Phi(X)}{dX^m} f(y_1) + \dfrac{d^{m-1}\Phi(X)}{dX^{m-1}} \Psi_1(X) f(y_1) + \cdots \\ \quad \ldots \Phi(X) \Psi_m(X) f(y_1) = F(X) f(y_1), \end{array}\right\} \tag{34}$$

ove i coefficienti $\Psi_i(X)$ e $F(X)$ siano funzioni cognite di X, rappresentate da serie di potenze di quest'operazione I variabile, a coefficienti costanti e $f(y_1)$ sia al solito una funzione-oggetto assegnata. Si tratta di determinare la funzione incognita $\Phi(X)$ in guisa da rendere sodisfatta la (34). Un'equazione siffatta si dirà: « Equazione differenziale lineare non omogenea in una funzione dell'operazione I variabile X, rispetto alla funzione-oggetto $f(y_1)$. » Formalmente la (34) sussiste indipendentemente da qualunque funzione particolare $f(y_1)$, ma è necessario prendere in considerazione la forma speciale che in ogni singolo caso può presentarsi onde determinare il campo di convergenza della funzione $\Phi(X)$ dell'operazione X che sodisfa la (34) (integrale di quest'equazione). Ora:

« L'equazione (34) è sodisfatta da una funzione della forma (31), da una serie cioè procedente secondo le derivate successive rispetto all'operazione X della funzione $F(X) f(y_1)$ che figura nel secondo membro dell'equazione stessa. »

Infatti riguardiamo il primo membro della (34) come un risultato d'un'operazione che designeremo con $\Delta\{\Phi(X) f(y_1)\}$ applicata a $\Phi(X) f(y_1)$; allora si potrà indicare $\Phi(X) f(y_1)$ col simbolo $\Delta^{-1} \{ F(X) f(y_1) \}$, intendendo di rappresentare con Δ^{-1} l'inversa dell'operazione Δ, poichè:

$$F(X) f(y_1) = \Delta \{ \Phi(X) f(y_1) \}.$$

Proponiamoci quindi di determinare la funzione $\Delta^{-1} \{ F(X) f(y_1) \}$, rappresentandola mediante una serie della forma (31) in guisa da rendere sodisfatta la (34). Ora trattandosi di serie di potenze a coefficienti costanti di X, per le quali quando si faccia il prodotto simbolico d'una per l'altra, vale la legge distributiva e poichè (I^o) per la derivazione rispetto ad un'operazione I variabile valgono le stesse leggi fondamentali che valgono per la derivazione studiata nel calcolo ordinario, per la determinazione formale dell' integrale della (34) si può applicare il medesimo metodo col quale il prof. Pincherle (*) determinò formalmente l' integrale delle equazioni differenziali lineari non omogenee che si presentano nel calcolo ordinario. Seguendo questa via si trova che la (34) è sodisfatta da una serie della forma:

$$\Delta^{-1} \{ F(X) f(y_1) \} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^n \mathfrak{P}_i(X) D^{-(n+1)} [M_i(X)] \frac{d^n F(X)}{d X^n} f(y_1), \quad (35)$$

ove le funzioni $\mathfrak{P}_i(X)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ siano un sistema fondamentale d'integrali dell'equazione $\Delta \{ \Phi(X) f(y_1) \} = 0$ e le funzioni $M_i(X)$ siano il sistema corrispondente di moltiplicatori (v. 4) dell'equazione stessa mentre con $D^{-n} \{ M_i(X) \}$ s'intenda di rappresentare l'espressione:

$$\int_{\mathfrak{I}_h}^{X} \int_{\mathfrak{I}_h}^{X} \ldots \int_{\mathfrak{I}_h}^{X} M_i(X) \, d X^n,$$

(per la formazione di quest'integrale v. (II^o)). Di più sia $\mathfrak{I}_h$ una determinazione costante di X tale che in tutto un campo che la comprende le $M_i(X)$ siano funzioni analitiche finite di X relativamente alle funzioni:

$$\frac{d^n F(X)}{d X^n} f(y_1) \quad (n = 0, 1 \ldots).$$

Sappiamo poi (4) che fra le $M_i(X)$, $\mathfrak{P}_i(X)$ sussiste una relazione della forma (30) che è appunto una delle relazioni fondamentali nella determinazione formale della serie (34) (v. Pincherle, loc. cit.).

(*) Loc. cit.

Ciò premesso passiamo a stabilire se si possa determinare un campo di convergenza per la serie:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{i=m} \mathrm{P}_i(X)\, D^{-(n+1)}\,[M_i(X)]\, \frac{d^n F(X)}{d X^n}, \tag{36}$$

relativamente a $f(y_1)$. Anzitutto si sa (4) che nel campo di determinazione di X, in cui le funzioni $\Psi_i\,(i=1 \ldots n)$ relativamente a $f(y_1)$ sono funzioni analitiche regolari di X, anche le serie che rappresentano le funzioni: $\mathrm{P}_i(X)$, $M_i(X)$ sono convergenti relativamente alla stessa $f(y_1)$. (Che questo sia anche delle $M_i(X)$ si desume dal fatto che per il modo stesso con cui si costruisce l'equazione aggiunta d'un'equazione differenziale lineare data in una funzione d'un'operazione I variabile, integrali e coefficienti dell'una sono convergenti relativamente a una data funzione-oggetto nel campo di convergenza che spetta a integrali e coefficienti dell'altra. Prendasi la determinazione costante I_h nel campo di convergenza delle funzioni $\mathrm{P}_i(X)$, $M_i(X)$ e si consideri un campo comprendente I_h tale che le determinazioni di esso differiscano da I_h relativamente a $f(y_1)$, di non più della funzione $D(\mathrm{I}_h)$ avente rispetto a I_h e al campo di convergenza delle $\mathrm{P}_i(X)$, $M_i(X)$ la proprietà che le si attribuì in a). Detto T_1 il campo così determinato, entro T_1 la funzione $\dfrac{\mathrm{P}_i(X) f(y_1)}{\mathrm{I} f(y_1)}$ avrà per un certo insieme E di valori della variabile da cui dipende un massimo valore assoluto che diremo ρ_i. Posto quindi:

$$M_i(X) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}(X - \mathrm{I}_h) + \alpha_{i,2}(X - \mathrm{I}_h)^2 \ldots \quad (i = 1 \ldots m),$$

la funzione $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\alpha_{i,n})(X - \mathrm{I}_h)^n f(y_1)}{\mathrm{I} f(y_1)}$, avrà pure entro T_1 un massimo valore assoluto che diremo γ_i. In virtù delle posizioni:

$$D^{-(n+1)} M_i(X) = \int_{\mathrm{I}_h}^{X} D^{-n} M_i(X)\, d X, \quad D^{-1} M_i(X) = \int_{\mathrm{I}_h}^{X} M_i(X)\, d X,$$

sarà certo per tutte le determinazioni di X comprese in T_1:

$$\left| \frac{D^{-(n+1)} M_i(X) f(y_1)}{\mathrm{I} f(y_1)} \right| < \frac{\dfrac{\gamma_i \,|(X - \mathrm{I}_h)|^{n+1}}{\underline{|n+1}}\, f(y_1)}{\mathrm{I} f(y_1)}.$$

Pertanto, valendo nella moltiplicazione delle funzioni dell'operazione X qui considerate la legge distributiva sarà nella (36) il termine:

$$\frac{d^n F(X)}{d X^n} f(y_1) < \text{in modulo di } \frac{1}{\underline{|n}}\, \frac{\varepsilon (X - \mathrm{I}_h)^{n+1}}{n+1} \text{ posto } \sum_{i=1}^{i=m} \gamma_i \rho_i = \varepsilon.$$

Senonchè $X - I_n$ è relativamente a $f(y_1) < D(I_h)$ onde la condizione (33) essendo sodisfatta così per tutte le determinazioni di X comprese in T_1, la serie (36) rappresenta l'integrale della (34), convergente rispetto alla funzione-oggetto $f(y_1)$. Essa rappresenta cioè *effettivamente* (rispetto a $f(y_1)$) l'espressione $\Delta^{-1}\{F(X)\}$, posta l'uguaglianza simbolica:

$$F(X) = \Delta\{\Phi(X)\} = \frac{d^m \Phi(X)}{d X^m} + \ldots \Phi(X)\Psi_m(X).$$

II.

1. *Operazioni I che lasciano invariata una forma differenziale lineare data. Relazione fra una forma differenziale lineare e le operazioni I che la lasciano inalterata.* Sia la forma differenziale lineare d'ordine n:

$$\Delta u(y_1) = P_0 \frac{d^n u}{d y_1{}^n} + P_1 \frac{d^{n-1} u}{d y_1{}^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{d u}{d y_1} + P_n u, \qquad (1)$$

ove i coefficienti $P_0, P_1 \ldots P_n$ siano funzioni analitiche della variabile y_1, uniformi e regolari in un certo campo E_{y_1} di valori di y_1. Il prof. Levi-Civita (*) determinò le operazioni I che lasciano inalterata una forma differenziale della natura della (1). Un'operazione I che lasci inalterata la (1) soddisferà pertanto alle seguenti condizioni:

a) La linea d'integrazione sia tale che in corrispondenza à tutti i valori della variabile situati su essa, la funzione caratteristica sia regolare almeno per qualche punto (e quindi area) compresa nel campo di valori E_{y_h} della variabile d'integrazione y_{h+1} (h indice variabile a norma delle convenzioni poste (I^o)).

b) La linea stessa sia tutta interna alla regione E_{y_h} designandosi con y_h, in generale, la variabile d'integrazione.

c) Questa linea sia chiusa o tale che ne' suoi estremi si annullino la funzione caratteristica e le sue prime $n-1$ derivate.

d) La funzione caratteristica di detta operazione, che designeremo con $x(y_h, y_{h+1})$ (nel caso qui esaminato sarà $h = 1$) dovrà sodisfare l'equa-

(*) Levi-Civita, *I Gruppi di operazioni funzionali e l'inversione degli integrali definiti.* Rend. del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, 1895.

zione a derivate parziali:

$$\sum_0^n {}_r \left\{ P_r(y_{h+1}) \frac{d^{n-r} x(y_h, y_{h+1})}{d y_{h+1}^{n-r}} - (-1)^{n+r} \frac{d}{d y_h^{n-r}} [x(y_h, y_{h+1}) P_r(y_h)] \right\} = 0. \quad (2)$$

L'integrale generale della (2) contiene n funzioni arbitrarie: esso ha la forma (v. Levi-Civita, loc. cit.):

$$\int_{l_1} X_t^{(1)} Y_t^{(1)} \Psi_1(t)\, dt + \int_{l_2} X_t^{(2)} Y_t^{(2)} \Psi_2(t)\, dt + \cdots \int_{l_n} X_t^{(n)} Y_t^{\prime(n)} \Psi_n(t)\, dt,$$

ove I°: Detto t un parametro $X_t^{(1)} \ldots X_t^{(n)}$ sia un sistema fondamentale di integrali dell'equazione:

$$(\Delta + t)\, u(y_{h+1}) = \sum_0^n {}_r\, P_r(y_{h+1}) \frac{d^{n-r} u(y_{h+1})}{d y_{h+1}^{n-r}} + t\, u(y_{h+1}) = 0, \quad (3)$$

e $Y_t^{(1)} \ldots Y_t^{(n)}$ sia un sistema fondamentale di integrali dell'equazione:

$$(\Delta' + t)\, \nu(y_h) = \sum_0^n {}_r (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2} [P_r(y_h)\, \nu(y_h)]}{d y_h^{n-r}} + t\, \nu(y_h) = 0. \quad (3')$$

(La (3') è, a prescindere dai simboli, l'equazione aggiunta della prima e viceversa.)

II°: $\Psi_1(t) \ldots \Psi_n(t)$ siano n funzioni arbitrarie della variabile in generale complessa t e $l_1, l_2, \ldots, l_n$ siano n linee, pure arbitrarie del piano complesso t. È chiaro che $C X_t^{(i)} Y_t^{(j)}$ $(i, j = 1 \ldots n)$ è un integrale particolare della (2) e che facendo variare comunque t la funzione $C X_t^{(i)} Y_t^{(j)}$ si trasforma (v. Levi-Civita, ibid.) in tanti integrali particolari della (2) stessa.

Le operazioni I che lasciano invariata la (1) costituiscono gruppo: perciò se è A un'operazione I che lascia invariata la (2), altrettanto avverrà delle potenze di A, delle serie di potenze a coefficienti costanti della stessa A e delle operazioni X che si ottengono calcolando le derivate o gli integrali indefiniti di $F(X)$ ove $F(X)$ sia una serie di potenze dell'accennata natura, per $X = A$. Di più (v. Levi-Civita, ibid.) i soli gruppi d'operazioni I sono quelli definiti dalla proprietà che le operazioni I onde sono costituiti lasciano invariata una forma differenziale lineare. Così se X è un'operazione I variabile, e consideriamo un insieme di determinazioni di questa, ciascuna delle quali lascia invariata una certa forma differenziale lineare d'ordine n, potremo considerare ognuna di queste forme differenziali lineari in quanto essa dipende dalla determinazione di X che la lascia invariata. Così se designiamo con Δ una forma differenziale lineare d'ordine n, variabile nella natura dei suoi coefficienti, sarà Δ una funzione di X nell'insieme considerato di determinazioni di quest'operazione. Infatti in base al carattere d'una forma differenziale lineare, di rimanere invariata per una certa operazione I si può stabilire una corrispondenza reciprocamente univoca fra le determinazioni di X comprese nell'insieme in parola e altrettante determinazioni che è suscettibile d'assumere Δ. Il gruppo d'operazioni I che lascia invariata una certa forma differenziale lineare si dirà: « Il gruppo d'operazioni I relativo ad essa. »

2. *Formole fondamentali per il passaggio dagli integrali ai coefficienti e reciprocamente dai coefficienti agli integrali d'un'equazione differenziale lineare non omogenea.* Sia l'equazione differenziale lineare non omogenea, d'ordine n:

$$\Delta u = \frac{d u^{(n)}(y_1)}{d y_1^n} + P_1(y_1)\frac{d u^{n-1}(y_1)}{d y_1^{n-1}} + \cdots P_n(y_1)\, u(y_1) = \Psi(y_1) \tag{4}$$

(supporremo per semplicità il coefficiente del I^o termine $=$ all'unità), ove i coefficienti $P_1(y_1) \ldots P_n(y_1)$ e $\Psi(y_1)$ siano funzioni analitiche regolari di y_1 in un certo campo T_i. Sia X un'operazione I variabile che qui supporremo soggetta ad assumere soltanto le determinazioni appartenenti al gruppo d'operazioni I relativo alla forma Δu, suscettibile però d'assumerle tutte. Sia A una qualunque di queste: già sappiamo (v. 1) a quali condizioni dovrà sodisfare. Dato al solito all'indice h il significato, d'indice variabile a norma delle condizioni poste (I^o) si considerino oltre Δu, le forme:

$$A\,\Delta u,\; A\,\Delta^2 u \ldots A\,\Delta^{n-1} u;$$

avremo così il sistema d'equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{d^n u(y_h)}{d y_h^n} + P_1(y_h)\frac{d^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-1}} + \cdots \\
&\qquad \ldots P_n(y_h)\, u(y_h) = \Psi(y_h) \\
A\,\Delta u &= \frac{d^n A\, u(y_{h-1})}{d y_h^n} + P_1(y_h)\frac{d^{n-1} A\, u(y_{h-1})}{d y_h^{n-1}} + \cdots \\
&\qquad \ldots P_n(y_h)\, A\, u(y_{h-1}) = A\,\Psi(y_{h-1}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A^{n-1}\Delta u &= \frac{d A^{n-1} u(y_{h-n+1})}{d y_h^n} + P_1(y_h)\frac{d^{n-1} A^{n-1} u(y_{h-n+1})}{d y_h^{n-1}} + \cdots \\
&\qquad \ldots P_n(y_h)\, A^{n-1} u(y_{h-n+1}) = A^{n-1}\Psi(y_{h-n+1}).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Sia $u(y_h)$ un integrale conosciuto dell'equazione (4): potremo allora, purchè le funzioni $u(y_h) \ldots A^{n-1} u(y_{n-h+1})$ siano indipendenti, riguardando nel sistema (5) i coefficienti $P_1(y_1) \ldots P_n(y_h)$ come incognite, risolverlo rispetto ad esso. Si otterrà allora evidentemente:

$$P_1(y_h) = \frac{\begin{vmatrix} \Psi(y_h) & -\dfrac{d^n u(y_h)}{d y_h^n}, & \dfrac{d^{n-2} u(y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \dfrac{d u(y_h)}{d y_h}, & u(y_h) \\ A\Psi(y_h) & -\dfrac{d^n A u(y_h)}{d y_h^n}, & \dfrac{d^{n-2} A u(y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \dfrac{d A u(y_h)}{d y_h}, & A u(y_h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{n-1}\Psi(y_h) & -\dfrac{d^n A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^n}, & \dfrac{d^{n-2} A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \dfrac{d A^{n-1} u(y_h)}{d y_h}, & A u(y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{d^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-1}}, & \dfrac{d^{n-2} u(y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \dfrac{d u(y_h)}{d y_h}, & u \\ \dfrac{d^{n-1} A u(y_h)}{d y_h^{n-1}}, & \dfrac{d^{n-2} A u(y_h^{n-1})}{d y_h^{n-2}} \cdots \dfrac{d A u(y_h)}{d y_h}, & A u \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d^{n-1} A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-1}}, & \dfrac{d^{n-2} A^{n\ 1} u(y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \dfrac{d A^{n-1} u(y_h)}{d y_h}, & A^{n-1} u \end{vmatrix}}$$

e in generale:

$$P_i(y_h) = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{d^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-1}}, & \dfrac{d^{n-2}(u y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \dfrac{d^{i+1} u(y_h)}{d y_h^{i+1}}, & \Psi(y_h) - \dfrac{d^n u(y_h)}{d y_h^n}, & \dfrac{d^{i-1} u(y_h)}{d y_h^{i-1}} \cdots u(y_h) \\ \dfrac{d^{n-1} A u(y_h)}{d y_h^{n-1}}, & \dfrac{d^{n-2} A u(y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \dfrac{d^{i+1} A u(y_h)}{d y_h^{i+1}}, & A\Psi(y_h) - \dfrac{d^n A u(y_h)}{d y_h^n}, & \dfrac{d^{i-1} A u(y_h)}{d y_h^{i-1}} \cdots A u(y_h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d^{n-1} A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-1}}, & \dfrac{d^{n-2} A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \dfrac{d^{i+1} A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{i+1}}, & A^{n-1}\Psi(y_h) - \dfrac{d^n A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^n} & \cdots A^{n-1} u. \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{d^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-1}} & \cdots & u \\ \dfrac{d^{n-1} A u(y_h)}{d y_h^{n-1}} & \cdots & A u \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d^{n-1} A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-1}} & \cdots & A^{n-1} u \end{vmatrix}}$$

$(i = 2, 3 \dots n)$. Così si designi brevemente con $D(u, A u \dots A^{n-1} u)$ il determinante funzionale di $u, A u \dots A^{n-1} u$ che è il denominatore comune in queste frazioni, si designi con $D_i(u, A u \dots A^{n-1} u)$ ciò che esso diviene quando ai termini della sua $n - i^{esima}$ colonna $(i = 1 \dots n)$ si sostituisca rispettivamente:

$$\Psi(y_h) - \frac{d^n u}{d y_h^n}, \; A\Psi(y_h) - \frac{d^n u}{d y_h^{n-1}} \dots A^{n-1}\Psi - \frac{d^n A^{n-1} u}{d y_h^n},$$

con $D_{i,l}(u \dots A^{n-1} u)$ il coefficiente (a prescindere dal segno) dell' l^{esima} $(l = 1 \dots n)$ termine della i^{esima} colonna nello sviluppo di $D_i(u, A u \dots A^{n-1} u)$. Si avrà così, sviluppando ciascuno dei determinanti $D_i(u, A u \dots A^{n-1} u)$ rispetto ai termini dell'i^{esima} colonna:

$$\left.\begin{aligned} P_i = & \frac{(-1)^{l-1} D_{i,1}(u \dots A^{n-1} u)\left\{\Psi - \frac{d^n u}{d y_h^n}\right\} + \dots (-1)^{i-n} D_{i,n}(u, A u \dots A^{n-1} u)\left\{A^{n-1}\Psi - \frac{d^n A^{n-1} u}{d y_h^n}\right\}}{D(u, A u \dots A^{n-1} u)} = \\ & = \chi_{i,1} A^{n-1}\Psi + \chi_{i,2} A^{n-2}\Psi + \dots \chi_{i,n}\Psi + \chi_{i,n+1}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ove si ponga:

$$\chi_{i,1} = \frac{(-1)^{i-n} D_{i,n}(u \dots A^{n-1} u)}{D(u \dots A^{n-1} u)} \dots \chi_{i,n} = (-1)^{i-1} \frac{D_{i,1}(u \dots A^{n-1} u)}{D(u \dots A^{n-1} u)},$$

$$\chi_{i,n+1} = \frac{(-1)^i \mathsf{D}(u \dots A^{n-1} u)}{D(u \dots A^{n-1} u)};$$

designando con $\mathsf{D}(u \dots A^{n-1} u)$ il determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^n u}{d y_h^n}, & \frac{d^{n-1} u}{d y_h^{n-1}} & \dots & u \\ \frac{d^n A u}{d y_h^n}, & \frac{d^{n-1} A u}{d y_h^{n-1}} & \dots & A u \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^n A^{n-1} u}{d y_h^{n-1}}, & \frac{d^{n-1} A^{n-1} u}{d y_h^{n-1}} & \dots & A^{n-1} u \end{vmatrix}.$$

Presa ora in esame, in particolare ad es., l'equazione:

$$P_1 = \chi_{i,1} A^{n-1}\Psi + \chi_{i,2} A^{n-2}\Psi \dots + \chi_{i,n}\Psi + \chi_{i,n+1}, \tag{6'}$$

vediamo come da questa si possa ricavare Ψ espresso mediante una funzione dell'operazione X, calcolata per $X = A$, applicata a P_1. Ci varremo in ciò del metodo dei coefficienti indèterminati (I^o). Riguardando cioè il secondo membro della (6′) come il risultato d'un'operazione funzionale applicata a Ψ, operazione che designeremo brevemente con $F(A)$ (onde porre in evidenza che si tratta d'una funzione dell'operazione I variabile X calcolata per $X = A$), ci proponiamo di determinare l'operazione inversa a $F(A)$, che designeremo con $\{F(A)\}^{-1}$. Quest'operazione $\{F(A)\}$ si rappresenterà con una serie di potenze di A: si ponga cioè:

$$\Psi = \{F(A)\}^{-1} P_1 = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A^\nu z_{\nu_1} P_1, \tag{7}$$

ove siano $z_{0,1}$, $z_{1,1}, \dots$ altrettante funzioni d'una variabile da designarsi con un simbolo che si stabilirà in base alle convenzioni poste (I^o), le quali si dovranno determinare in modo che si abbia:

$$P_1 = F(A) \left\{ \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A^\nu z_{\nu_1} P_1 \right\}.$$

Sostituendo pertanto nella (6′) a Ψ l'ultimo membro della (7), avremo il seguente sistema di relazioni:

$$\left.\begin{array}{c}
\chi_{i,n} z_{0,1} P_1 + \chi_{i,n+1} = P_1, \\
\chi_{i,n-1} A z_{0,1} P_1 + \chi_{i,n} A z_{1,1} P_1 = 0, \ \chi_{i,n-2} A^2 z_{0,1} P_1 + \chi_{i,n-1} A^2 z_{1,1} P_1 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\chi_{i,1} A^{n-1} z_{0,1} P_1 + \chi_{i,2} A^{n-1} z_{1,1} P_1 \dots + \chi_{i,n} A^{n-1} z_{n-1,1} P_1 = 0, \\
\chi_{i,n} A^\mu z_{\mu \ n+1,1} P_1 + \chi_{i,n-1} A^\mu z_{n-\mu,1} P_1 + \dots \chi_{i,n} A^\mu z_{\mu,1} P_1 = 0, \\
(\mu = 1, 2, \dots, \infty).
\end{array}\right\} \tag{8}$$

Con ciò, dopo avere determinato $z_{0,1}$ mediante la prima delle (8), la determinazione successiva di ciascuna delle altre funzioni $z_{1,1}$, $z_{2,1}$, $z_{3,1}, \dots$ è ricondotta all'inversione d'un integrale definito, trattandosi ogni volta di determinare la funzione $z_{\nu_1} = P_1 z_{\nu_1}$ $(\nu = 1, 2, \dots)$, tale che:

$$A^\nu z_{\nu_1} = \varphi_\nu,$$

φ_ν essendo una funzione cognita, perchè quando si giunge alla ricerca di z_{ν_1}, sono già note le precedenti funzioni z sino a $z_{\nu-1,1}$. Così, purchè si presentino casi in cui l'inversione di integrali definiti (I^o) sia possibile, giungeremo alla seguente relazione:

$$\Psi = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A^\nu z_{\nu_1} P_1, \tag{9}$$

ove le z_{ν_1} sono funzioni cognite. Ripetendo questo procedimento per ciascuno degli altri coefficienti P_i $(i = 1 \dots n)$, perverremo ad altrettante relazioni della forma:

$$\Psi = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A^{\nu} z_{\nu_i} P_i , \tag{9'}$$

ove con z_{ν_2} si designino le funzioni che hanno nell'espressione di Ψ mediante P_2 lo stesso ufficio che hanno le z_{ν_1} nell'espressione di Ψ mediante P_1, ecc., ecc.

Ora il prof. PINCHERLE (loc. cit.) (v. introduzione) diede il modo di rappresentare la soluzione della (4) mediante una serie procedente secondo le derivate successive di Ψ, serie della quale dimostrò potersi determinare un campo di convergenza. Poniamo brevemente $u = D(\Psi)$, intendendo di rappresentare col secondo membro di quest'uguaglianza l'accennata serie procedente secondo le derivate successive di Ψ. Avremo allora, in virtù della (9'):

$$u = D \left\{ \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A^{\nu} z_{\nu_i} P_i \right\} \tag{10}$$

$(i = 1, 2 \ldots n)$, cioè u espresso in funzione di ciascuna delle P_i.

Così la formola (6) e la (10) possono riguardarsi come formole inverse nel senso che:

« La (6) dà il passaggio dalla soluzione della (4) ai coefficienti della soluzione stessa: la (10) dà il passaggio inverso dai coefficienti della (4) alla sua soluzione ».

Quanto alla validità dell'espressione data per Ψ dalla (9') e quindi per u dalla (10) è chiaro che il campo di convergenza di queste serie sarà dato dal campo, in cui la serie di potenze di y_h che rappresenta lo sviluppo di Ψ è convergente assolutamente ed in ugual grado.

Un'altra osservazione da farsi è questa. L'espressione di u data dalla (10) fu determinata, fissando una determinazione speciale di X; ora, pongasi la convenzione di poter far assumere a X tutte e sole le determinazioni appartenenti al gruppo d'operazioni I relativo a Δu, e si designino con z_{ν_i} $(\nu = 0, 1, \ldots, i = 1, 2 \ldots n)$, anzichè le funzioni determinate dalle (8) in base a un'operazione I assegnata, i simboli di funzioni variabili che si determinano mediante le equazioni analoghe alle (8) relative alle varie determinazioni che può assumere X. Si potrà scrivere:

$$u = D \left\{ \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} X^{\nu} z_{\nu_i} P_i \right\}.$$

S'è detto che se A appartiene al gruppo d'operazioni I relativo a Δu, altrettanto sarebbe di $F(A)$ ove $F(A)$ designasse una serie di potenze a coefficienti costanti di A, e apparterrebbero pure al gruppo in parola le derivate successive e gli integrali indefiniti di $F(X)$ calcolati per $X = A$. Pertanto consideriamo le relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{d^n u}{d y_h^n} + P'_1 \frac{d^{n-1} u}{d y_h^{n-1}} + \cdots + P_n u = \Psi \\
F(A) \Delta u &= \frac{d^n F(A) u}{d y_h^n} + P_1 \frac{d^{n-1} F(A) u}{d y_h^{n-1}} + \cdots \\
&\qquad \cdots + P_n F(A) u = F(A) \Psi \\
F'(A) \Delta u &= \frac{d^n F'(A) u}{d y_h^n} + P_1 \frac{d^{n-1} F'(A) u}{d y_h^{n-1}} + \cdots \\
&\qquad \cdots + P_n F'(A) u = F'(A) \Psi \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F^{(n-1)}(A) \Delta u &= \frac{d^n F^{(n-1)}(A) u}{d y_h^n} + P_1 \frac{d^{n-1} F^{(n-1)}(A) u}{d y_h^{n-1}} + \cdots \\
&\qquad \cdots + P_n F^{(n-1)}(A) u = F^{(n-1)}(A) \Psi.
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Da queste si ricava:

$$P_i = \xi_{i,1} F^{(n-1)}(A) \Psi + \xi_{i,2} F^{(n-2)}(A) \Psi + \cdots \xi_{i,n} \Psi + \xi_{i,n+1}, \qquad (11')$$

ove sia $\xi_{i,h} (-1)^{i+1} (h = 1 \ldots n)$ il quoziente di due determinanti costruiti con u, $F(A) u \ldots F^{(n-1)}(A) u$ le loro successive derivate, rispettivamente nello stesso modo con cui sono costruiti:

$$D_{i,h}(u, A u \ldots A^{n-1} u), \quad \text{e} \quad D(u \ldots A^{n-1} u),$$

con $u \ldots A^{n-1} u$, le loro successive derivate, mentre sia $\xi_{i,n+1} (-1)^i$ il quoziente del determinante costruito con $u, \ldots F^{(n-2)}(A) u$ come $D(u \ldots A^{n-1} u)$ con $u \ldots A^{n-1} u$ per lo stesso determinante che figura al denominatore delle $\xi_{i,h}$.

La (11') è così un'equazione lineare alle derivate di $F(X)$ rispetto a X, calcolate per $X = A$, i cui coefficienti sono funzioni nel senso ordinario. Questa relazione si può invertire come si fece colla (6'); valendosi cioè anche qui del metodo dei coefficienti indeterminati si ponno dare per Ψ espressioni della forma:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} F^{(\nu)}(A) \eta_{\nu,i} P_i + \vartheta P_i. \qquad (12)$$

Si avrà infatti per la determinazione delle funzioni $\eta_{\nu,i}$, e per ogni valore di i compreso nella successione $1, 2 \ldots n$ il seguente sistema di relazioni (ove sostituita a P_i nella (11) l'espressione (12) si uguagliano i termini contenenti derivate d'ugual indice di $F(X)$ per $X = A$):

$$\xi_{i,n}\,\vartheta\,P_i + \xi_{i,n+1} = P_i,$$
$$\xi_{i,n-1}\,F(A)\,\vartheta\,P_i + \xi_{i,n}\,F(A)\,\eta_{0,i}\,P_i = 0,$$
$$\xi_{i,n-2}\,F'(A)\,\vartheta\,P_i + \xi_{i,n-1}\,F'(A)\,\eta_{1,i}\,P_i = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Per ciascuna di queste equazioni, dopo risoluta la prima, la risoluzione è ricondotta all'inversione d'un integrale definito (*). Così, dette $\overline{\eta}_{\nu,i}$ le funzioni aventi rispetto alle $\eta_{\nu,i}$ significato analogo a quello che hanno le $z_{\nu,i}$ rispetto alle $z_{i,i}$, si avranno le n equazioni (1 per ciascun valore di i):

$$u = D\left\{\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} F^{(\nu)}(X)\,\overline{\eta}_{\nu,i}\,P_i\right\} + D\,\vartheta\,P_i. \tag{13}$$

Ora, considerando le equazioni analoghe alle (11) che si ottengono quando a $F(X)$ si sostituisca $F'(X)$, e dette $\overline{\eta}^{(1)}_{\nu,i}$, $(i = 0 \ldots n,\ \nu = 1, 2 \ldots)$ le funzioni (di y_h) che hanno rispetto a $F'(X)$ significato analogo a quello che hanno rispettivamente le $\overline{\eta}_{\nu,i}$, $\eta_{0,i}$ per $F(X)$, si potrà porre u sotto l'altra forma:

$$D\left\{\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{d\,F^{(\nu)}(X)}{d\,X}\,\overline{\eta}^{(1)}_{\nu,i}\,P_i\right\} + D\,\vartheta\,P_i. \tag{12'}$$

Così, confrontando le due forme (13), (12') sotto le quali si è posto u (ossia Ψ) si avrà, per ciascun valore dell'indice i, l'equazione seguente:

$$\left.\begin{aligned}\eta_{0,i}\,P_i + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} F^{(\nu)}(X)\,\overline{\eta}_{\nu,i}\,P_i &= \vartheta\,P_i + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{d\,F^{(\nu)}(X)}{d\,X}\,\eta_{\nu,i}\,P_i = \\ &= \frac{d\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} F^{(\nu)}(X)\,\overline{\eta}^{(1)}_{\nu,i}\,P_i}{d\,X} + \vartheta\,P_i,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

che è un'equazione funzionale nella funzione $F(X)$ dell'operazione I variabile X, i cui coefficienti sono funzioni (variabili nella loro forma da una all'altra determinazione di X). In ultima analisi la (14) si potrebbe riguardare anche come un'equazione differenziale di grado infinito (trascendente) in X.

Le considerazioni fatte per $F(X)$, si possono ripetere per le derivate di qualunque ordine di questa funzione, e pure per i suoi integrali indefiniti ri-

(*) Come si vede dunque la ϑ si determina da una semplice equazione lineare ed è soltanto per determinare le $\eta_{0,i}$ $\eta_{1,i}$ $\eta_{2,i}$ ecc. che si richiedono inversioni di integrali definiti.

spetto a X; e si ottengono così fra due espressioni di Ψ ricavate sostituendo a $F(X)$ una delle sue derivate o de' suoi integrali, relazioni della forma (14) che permettono di passare direttamente dall'una all'altra.

Nota. Siano n funzioni, $F_1(X)\ldots F_n(X)$ dell'operazione I variabile X; diremo che: « per una determinazione generica di questa che diremo ancora X, queste n funzioni sono linearmente indipendenti, quando non sia mai possibile trovare n fattori $h_1, h_2,\ldots, h_n$ tali che sussista identicamente e in via assoluta una relazione della forma:

$$h_1 F_1(X)+h_2 F_2(X)+\cdots+h_n F_n(X)=0. \text{ »} \qquad (\alpha)$$

Una tale relazione equivale, sostituendo a ciascuna delle $F_i(X)$ $(i=1, 2\ldots n)$ il suo sviluppo in serie di potenze di X, ad altrettante relazioni della forma:

$$h_1 c_h^{(1)}+h_2 c_h^{(2)}+\cdots+h_n c_h^{(n)}=0 \quad (h=0,\ 1\ldots\infty), \qquad (\alpha')$$

fra i coefficienti d'una stessa potenza di X. (Ciò in base alla teoria dei coefficienti indeterminati, v. I^o.) Ora, se può sussistere fra $F_1(X)\ldots F_n(X)$ una relazione della forma (α) si avrà anche:

$$h_1 F_1^{(k)}(X)+h_2 F_2^{(k)}(X)+\cdots+h_n F_n^{(k)}(X)=0 \quad (k=1,\ 2\ldots n-1). \quad (\beta)$$

Le (β) si scindono esse pure in relazioni della forma (α'). Se dalle (α) e (β) ricaviamo n equazioni, potranno sussistere le equazioni così ottenute in cui si riguardino le h_i come incognite $(i=1\ldots n)$ solo a patto che sia nullo il determinante dei coefficienti in parola, e viceversa, come si sa dall'algebra l'annullarsi di detto determinante è condizione sufficiente, a che sussistano tali equazioni. Così pure potendosi raggruppare a n, a n le equazioni della forma (α') che s'ottengono dalle (α), (β), la possibilità che sussistesse la α porterebbe con sè la possibilità che sussistessero fra i coefficienti degli sviluppi delle $F_1(X)\ldots F_n(X)$ altri sistemi della forma (β'), e che quindi quelli costituiti d'equazioni distinte avessero il determinante dei coefficienti nullo.

Ora, converremo di designare col nome di « determinante di n^2 funzioni: $F_{1,1}(X)\ldots F_{1,n}(X)$, $F_{2,1}(X)\ldots F_{n,n}(X)$ dell'equazione X e di designare col simbolo:

$$\begin{vmatrix} F_{1,1}(X)\ldots F_{1,n}(X) \\ F_{2,1}(X)\ldots F_{2,n}(X) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n,1}(X)\ldots F_{n,n}(X) \end{vmatrix},$$

la funzione della stessa operazione X che s'ottiene combinando, mediante moltiplicazioni e addizioni simboliche queste n^2 funzioni, nello stesso modo con cui si combinano con moltiplicazioni e addizioni n^2 quantità allorchè si voglia lo sviluppo del loro determinante ».

Inoltre diremo determinante funzionale delle n funzioni di X:

$$F_1(X)\dots F_n(X),$$

il determinante simbolico:

$$\begin{vmatrix} F_1(X, & F_2(X) & \dots F_n(X) \\ F'_1(X), & F'_2(X) & \dots F'_n(X) \\ \dots & \dots & \dots \\ F_1^{(n-1)}(X), & F_2^{(n-1)}(X) & \dots F_n^{(n-1)}(X) \end{vmatrix} . \qquad (\gamma)$$

Ora considerando lo sviluppo di questo determinante, il quale risulta una serie di potenze di X, i cui coefficienti sono determinanti, ottenuti combinando in modi diversi i coefficienti che figurano negli sviluppi di $F_1(X)\dots F_n(X)$ e delle loro derivate di primo $\dots n - 1^{\text{esimo}}$ ordine, è chiaro, in base a precedenti considerazioni, che il determinante simbolico (γ) sarà nullo identicamente, in via assoluta, sempre e soltanto quando siano soddisfatte le condizioni onde sussistano i suaccennati sistemi d'equazioni della forma (α'), vale a dire quando fra $F_1(X)\dots F_n(X)$ passi una relazione della forma (α). Segue da ciò la proposizione seguente analoga a quella che si ha per le funzioni studiate nel calcolo ordinario:

« Condizione necessaria e sufficiente affinchè fra n funzioni:

$$F_1(X)\dots F_n(X),$$

dell'operazione I variabile X non sussista una relazione lineare sodisfatta identicamente e in via assoluta è che il loro determinante funzionale (nel senso, in cui fu testè definito) non sia nullo identicamente e in via assoluta. »

Così si dirà che n integrali d'un'equazione differenziale lineare d'ordine n in una funzione d'un'operazione I variabile costituiscono un sistema fondamentale di quest'equazione quando essi siano linearmente indipendenti, vale a dire quando sia diverso da 0 il loro determinante funzionale (simbolico).

FINE DEL TOMO III (SERIE III).