Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante.

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

PREFAZIONE.

Per descrivere lo scopo ed i risultati delle presenti ricerche conviene risalire ai teoremi fondamentali, dovuti al sig^r Guichard, dai quali ripetono la loro origine. Questi elegantissimi teoremi, relativi alla teoria della deformazione delle quadriche di rotazione, furono fatti conoscere dall'autore, senza dimostrazione, lo scorso gennaio nei *Comptes Rendus* de l'Académie des Sciences (*); da essi io ho dedotto le nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante, il cui studio forma l'oggetto principale della presente Memoria (**). Si sarebbe potuto pervenire a risultati in intima connessione con questi, e precisamente a superficie aventi le stesse immagini delle linee di curvatura delle nostre superficie a curvatura costante trasformate, proseguendo le anteriori ricerche pubblicate da Guichard stesso nei *Comptes Rendus* del 1898 (***). Su queste ricerche che, per quanto riguarda la trasformazione delle superficie a curvatura costante, furono appena accennate dall'autore, ritorniamo più avanti.

Intendiamo meglio l'importanza dei teoremi di Guichard, collegandoli colla teoria della deformazione delle congruenze rettilinee normali e col celebre teorema di Weingarten, relativo alle evolute di quelle superficie i cui raggi principali sono funzioni l'uno dell'altro (superficie W). Immaginiamo perciò una superficie S_0, flessibile ed inestendibile, dai cui punti M_0 escono

(*) *Sur la déformation des quadriques de révolution* (23 janvier 1899, pag. 232).

(**) Vedi le mie Note nei *Rendiconti* della R. Accademia dei Lincei: sedute del 19 febbraio, 5 marzo, 23 aprile e 21 maggio 1899.

(***) Vedi specialmente la Nota: 6 juin 1898, pag. 1617.

segmenti rettilinei $M_0 M$ normali nei loro estremi M ad una superficie S e deformiamo comunque la superficie di partenza S_0, che seco trasporti i segmenti $M_0 M$, invariabilmente connessi nei loro punti di partenza M_0 agli elementi del piano tangente di S_0. Un noto teorema di Beltrami (*) ci dice: *in tutte le deformazioni di S_0 il luogo S degli estremi M è costantemente una superficie ortogonale ai raggi $M_0 M$.*

Supponiamo ora di più che, in una speciale configurazione della S_0, la superficie S normale ai raggi della congruenza sia una superficie W, cioè abbia i raggi principali di curvatura r_1, r_2 legati da una relazione:

$$f(r_1, r_2) = 0, \tag{α}$$

e proponiamoci il problema fondamentale seguente, che diremo il *problema* [A]:

[A]. *Quando accadrà che in tutte le deformazioni della S_0 i raggi principali di curvatura della superficie S rimangano costantemente legati dalla medesima relazione* (α)?

Il teorema di Weingarten ci fa appunto conoscere una classe assai estesa di siffatte congruenze, dalle quali anzi si ottengono tutte le possibili superficie W (**). Basta infatti che la superficie iniziale S_0 sia applicabile sopra una superficie di rotazione ed i segmenti $M_0 M$ escano *tangenzialmente* alla S_0, secondo le direzioni delle tangenti alle deformate dei meridiani; allora una qualunque delle superficie S, normali ai raggi, risulta una superficie W, i cui raggi principali di curvatura soddisfano sempre ad una medesima equazione (α).

I teoremi di Guichard, riguardati sotto un conveniente punto di vista, ci rivelano l'esistenza di soluzioni essenzialmente nuove del problema [A], ove i raggi della congruenza non escono più, come nel teorema di Weingarten, tangenzialmente alla superficie S_0 di partenza (***). Possiamo infatti enunciare i teoremi fondamentali di Guichard sotto la forma seguente:

Teorema I. *La superficie iniziale S_0 sia un paraboloide di rotazione ed i segmenti $M_0 M$ siano disposti sui raggi focali $M_0 F$, trovandosi gli estremi M,*

(*) Vedi pag. 257 delle mie *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa-Spörri, 1894). Nei frequenti richiami del testo al mio libro lo citerò semplicemente con: *Lezioni*.

(**) *Lezioni*, Cap. IX.

(***) Un altro caso assai ovvio, che conviene però notare fin d'ora, si ottiene assumendo per S_0 una superficie a curvatura costante e considerando la congruenza delle sue normali; in ogni superficie S parallela alla S_0 si ha così evidentemente una soluzione del problema [A].

nella configurazione iniziale, riuniti nel fuoco F. Deformando comunque il paraboloide S_0, il luogo degli estremi M dei segmenti, trasportati da S_0 nelle sue flessioni, sarà sempre una superficie d'area minima ortogonale ai raggi $M_0 M$. Una seconda superficie d'area minima $\overline{S}$ si ottiene, ogni volta, come luogo del punto $\overline{M}$ simmetrico di M rispetto al piano tangente in M_0 alla S_0 e le normali della $\overline{S}$ sono i raggi $M_0 \overline{M}$ riflessi dei primitivi sopra S_0, che costituiscono una seconda congruenza normale legata invariabilmente alla S_0 nelle sue flessioni.

Teorema II. *La superficie S_0 sia un ellissoide allungato di rotazione, ovvero un iperboloide di rotazione a due falde, di asse principale (maggiore o trasverso) di lunghezza $= 2R$ e i raggi $M_0 M$ si dirigano verso l'uno o l'altro dei due fuochi, nel quale si trovino inizialmente riuniti gli estremi M. Deformando comunque la quadrica S_0, il luogo degli estremi M è sempre una superficie a curvatura media costante $= \frac{1}{R}$, ortogonale ai raggi.*

Notiamo che, secondo un noto teorema di Bonnet (*), ogni superficie a curvatura media costante $= \frac{1}{R}$ ne ammette una parallela, alla distanza R, di curvatura costante positiva $= \frac{1}{R^2}$, sicchè ad ogni deformata della quadrica di rotazione si collegano due superficie applicabili sulla sfera di raggio $= R$.

Per meglio ordinare le diverse ricerche contenute nella presente Memoria, ho adottato una divisione per capitoli. Nel Capitolo I, completando le ricerche delle quali nelle mie Note citate dei *Rendiconti* dei Lincei ho dato un rapido riassunto, tratto il problema fondamentale [A] pel caso in cui la superficie S, ortogonale ai raggi della congruenza che si deforma, debba restare sempre ad area minima, ovvero a curvatura costante. Nel caso che S sia una superficie minima, ovvero quando la sua curvatura è costante positiva, dimostro che non esistono altre soluzioni oltre quelle che i teoremi I e II di Guichard ci fanno conoscere, quando naturalmente si faccia astrazione dalle soluzioni che il teorema di Weingarten ci fornisce nelle evolute S_0 delle superficie d'area minima o delle superficie applicabili sulla sfera. Ma se facciamo la medesima ricerca supponendo che la S resti costantemente superficie pseudosferica di dato raggio, troviamo che (trascurando al solito le soluzioni fornite dal teorema di Weingarten nelle superficie non rigate ap-

(*) *Lezioni*, pag. 447.

plicabili sul catenoide) esistono tre casi essenzialmente distinti. La superficie S_0 risulta allora applicabile sopra una superficie di rotazione, la cui curva meridiana può offrire le tre forme seguenti: 1.° la curva logaritmica, 2.° la catenaria accorciata, 3.° la sinusoide iperbolica.

In tutti i casi i raggi della congruenza, che accompagna nelle sue flessioni la superficie S_0, sono normali ai paralleli ed i loro raggi riflessi sopra S_0 soddisfano egualmente alle condizioni imposte, talchè insieme ad una superficie S ad area minima, o a curvatura costante, se ne ottiene sempre una secònda $\overline{S}$ normale ai raggi riflessi, due punti corrispondenti M, $\overline{M}$ di S, $\overline{S}$ giacendo simmetricamente rispetto al piano tangente nel punto corrispondente M_0 della superficie riflettente S_0.

Il Capitolo II tratta delle proprietà della corrispondenza che viene, dalla costruzione stessa, a stabilirsi fra i punti di S_0 e di S ovvero fra quelli di S, $\overline{S}$, proprietà essenziali a conoscersi per venire poi all'argomento principale e più importante, alla teoria delle nuove trasformazioni che ne derivano per le superficie a curvatura costante. Ogni volta la ricerca della proprietà in considerazione viene condotta in guisa da trovare nello stesso tempo tutti gli altri casi in cui essa si verifica, il che conduce a risultati per sè notevoli.

Nel Capitolo III, che stabilisce l'esistenza delle nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante, si parte dall'osservazione, già fatta sopra, che ad ogni deformazione della superficie fondamentale di rotazione S_0 si coordinano *due* superficie a curvatura costante (*) S, $\overline{S}$, l'una normale ai raggi primitivi, l'altra ai loro riflessi, essendo S_0 la superficie riflettente. Importava anzi tutto risolvere la questione seguente, ove si tratta, in certo modo, della *inversione* dei teoremi di Guichard:

Data una superficie S a curvatura costante positiva o negativa, può essa sempre considerarsi come derivata da una superficie S_0 applicabile sopra una delle nostre superficie tipiche di rotazione in guisa che le normali alla S costituiscano una delle due congruenze collegate, secondo i teoremi di Guichard, *alle deformazioni di S_0?*

(*) Qui abbandoniamo affatto il caso del paraboloide di rotazione e delle superficie minime. Del resto anche in questo caso si trovano risultati affatto analoghi e si giunge ad una trasformazione delle superficie d'area minima che si collega alle ricerche esposte dal sig. Thybaut negli *Annales de l'École Normale* (IIIème série, tom. XIV, 1897, pag. 45). Ma l'includere le relative ricerche nel presente lavoro mi avrebbe troppo allontanato dal soggetto principale. Di esse tratterò in una Nota a parte.

Se si pensa che la totalità delle flessioni della superficie fondamentale di rotazione dipende da due funzioni arbitrarie, appunto come la totalità delle superficie di data curvatura costante, facilmente si prevede che alla domanda sarà da rispondersi affermativamente. Ma la ricerca effettiva, constatando la verità della previsione, dimostra di più, ciò che non era affatto prevedibile *a priori*, che ogni data superficie S a curvatura costante deriva *in* ∞^2 *modi diversi* da superficie S_0 applicabili sulla fondamentale di rotazione; per determinare queste ∞^2 configurazioni della S_0 si ha da integrare un sistema di equazioni ai differenziali totali.

D'altronde se per ciascuna delle ∞^2 forme di S_0 immaginiamo che i raggi normali alla S si riflettano sulla S_0, fra le superficie normali ai raggi riflessi ve ne sarà una determinata $\overline{S}$ (simmetrica di S rispetto a S_0) colla medesima curvatura costante di S. Se si osserva poi che già nella forma della superficie fondamentale di rotazione entra *una* costante arbitraria, se ne conclude: *Da ogni superficie nota S a curvatura costante derivano, colla indicata costruzione,* ∞^3 *nuove superficie $\overline{S}$ colla medesima curvatura costante.* Per tal modo si giunge ad una teoria di trasformazioni *sempre reali* delle superficie a curvatura costante *positiva, o negativa.*

Nel Cap. IV, colla introduzione di convenienti funzioni ausiliarie suggerita dalla teoria dei sistemi ciclici, si cangiano le equazioni che definiscono le nostre trasformazioni in un sistema differenziale *lineare ed omogeneo*, sul quale più speditamente si fanno le verifiche relative alla illimitata integrabilità del sistema e tutte le altre che si riferiscono alle superficie a curvatura costante trasformate. Se ne deduce in particolare la notevole proprietà delle nuove trasformazioni di essere permutabili colla trasformazione involutoria di Hazzidakis. Presentate le formole di trasformazione sotto il nuovo aspetto, facilmente si è condotti ad una classe di superficie, che hanno a comune con quelle a curvatura costante l'immagine sferica delle linee di curvatura, e i cui raggi principali di curvatura r_1, r_2 sono legati alla distanza p dell'origine dal piano tangente ed al quadrato $2q$ della distanza dell'origine stessa dal punto di contatto dall'equazione:

$$k r_1 r_2 - p(r_1 + r_2) + 2q = 0, \qquad (k \text{ costante}),$$

che appartiene al tipo di quelle considerate da Weingarten nelle sue ultime ricerche sull'applicabilità. Sono queste le superficie a cui un ulteriore sviluppo delle anteriori ricerche di Guichard, già sopra menzionate, avrebbe condotto

Il Cap. V tratta delle relazioni che intercedono fra le nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante e quelle già prima note nella trasformazione complementare e di Bäcklund (*).

Si comincia dal dimostrare che per le superficie pseudosferiche le trasformazioni che si ottengono, secondo il Cap. III, in relazione colle superficie applicabili sulla logaritmica di rotazione e sul catenoide accorciato si riducono alle antiche, potendosi comporre nel primo caso con due trasformazioni complementari, nel secondo con due successive trasformazioni reali di Bäcklund.

Nel terzo caso, corrispondente alle flessioni del sinusoide iperbolico, possiamo bensì risolvere ancora la nostra trasformazione *reale* in due trasformazioni di Backlund, ma queste componenti elementari sono necessariamente immaginarie (coniugate). Passando poi al caso delle superficie a curvatura costante positiva, caso che offre il maggiore interesse come quello che era rimasto fino a qui inaccessibile alle trasformazioni *reali*, vediamo che ha sempre luogo l'ultima circostanza cioè: *la trasformazione risulta dal comporre due trasformazioni di* Bäcklund *(puramente) immaginarie coniugate e partendo da una superficie a curvatura costante positiva reale si perviene ad una superficie finale reale della medesima specie, passando per una superficie ausiliaria immaginaria.*

Ci è ora relativamente facile il dare le formole effettive per l'anzidetta composizione, con che si perviene in modo più rapido al risultato finale. Non bisogna per altro dimenticare che la nuova via più breve fu ritrovata soltanto dopo che le conseguenze dei teoremi di Guichard ci hanno fatto certi dell'esistenza delle nuove trasformazioni reali e che per essa non riconosciamo, in modo reale, tutte le interessanti circostanze geometriche che accompagnano la trasformazione. Mi piace qui ripetere ciò che ebbi già ad osservare nelle Note preliminari citate (**) e cioè che: *le nuove trasformazioni sono di natura più complicata delle antiche e si risolvono in tali trasformazioni più semplici solo ricorrendo ad opportune componenti immaginarie.* Ed in questa

(*) Quasi contemporaneamente a queste mie ricerche sull'argomento, e dopo che le mie due prime Note sulle nuove trasformazioni erano già pubblicate, comparvero nei *Comptes Rendus* de l'Académie (Séances du 27 mars, 4, 17 et 24 avril 1899) alcune Note del sig. Darboux, ove l'illustre geometra dimostra i teoremi di Guichard ed altri più generali ed, occupandosi delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante, giunge per altra via a risultati equivalenti a quelli del presente Cap. V.

(**) Vedi specialmente la Nota del 23 aprile.

circostanza appunto che le antiche trasformazioni soltanto in certo modo colla duplicazione dànno luogo alle nuove reali è da ricercarsi, come parmi, la ragione per cui queste ultime trasformazioni sono rimaste così a lungo nascoste.

Dalla accennata composizione derivano poi, col sussidio del teorema di permutabilità, le conseguenze medesime che per le superficie pseudosferiche ho ampiamente svolto nel Cap. XVII delle *Lezioni*, in particolare questa principale: *Se di una superficie S a curvatura costante positiva o negativa si sanno determinare tutte le trasformate di* BÄCKLUND, *l'applicazione successiva ed illimitata delle nuove trasformazioni reali alla superficie S ed alle sue successive trasformate richiederà soltanto calcoli algebrici e di derivazione.*

In fine nel Cap. VI dimostro che le nuove trasformazioni possono applicarsi, oltre che a superficie a curvatura costante isolate, anche a serie ∞^1 di tali superficie appartenenti a sistemi tripli ortogonali (sistemi di WEINGARTEN). Da ogni tale sistema si ottengono così ∞^3 nuovi sistemi della medesima specie.

Per tal modo, dopo un lungo periodo di tempo, vengono completate, anche pei sistemi di WEINGARTEN a curvatura positiva, le ricerche contenute nella mia Memoria del 1885 (*).

Chiuderò questo riassunto dei principali risultati stabiliti nella presente Memoria coll'annunziare che teoremi perfettamente simili a quelli di GUICHARD sussistono, insieme a tutte le loro conseguenze, anche nella geometria degli spazî a curvatura costante positiva o negativa. Mi propongo di esporre queste nuove ricerche in una seconda Memoria, che tratterà appunto delle superficie ad area minima e delle superficie a curvatura costante nella geometria ellittica e nella geometria iperbolica.

(*) Questi *Annali*, tom. XIII, serie 2.ª

CAPITOLO I.

Della deformazione delle congruenze.

§ 1.

Notazioni e formole fondamentali.

Consideriamo una congruenza C di raggi ciascuno dei quali emani da un punto M_0 della superficie S_0 di partenza ed immaginiamo la congruenza invariabilmente legata alla S_0, supposta flessibile ed inestendibile. Se flettiamo comunque la S_0, che seco trascini il sistema di raggi, diremo anche talora, per abbreviare, che deformiamo la congruenza C.

A fondamento delle nostre ricerche poniamo le considerazioni e notazioni seguenti. Scegliamo sulla superficie S_0 un sistema curvilineo coordinato (u, v), assumendo a linee $u =$ cost. quelle linee di S_0 che sono normali ai raggi della congruenza C (*), indi a linee $v =$ cost. le loro traiettorie ortogonali. La S_0, in una sua speciale configurazione, sarà perfettamente definita dalle sue due forme quadratiche fondamentali (**), che indicheremo rispettivamente con:

$$d s_0^2 = E_0 \, d u^2 + G_0 \, d v^2$$

$$D_0 \, d u^2 + 2 D'_0 \, d u \, d v + D''_0 \, d v^2.$$

Sappiamo che i coefficienti di queste forme sono legati fra loro unicamente dalla equazione di Gauss:

$$\frac{D_0 D''_0 - D'^2_0}{E_0 G_0} = K_0 , \tag{I}$$

(*) Tali linee cessano di essere determinate nel solo caso, privo d'interesse, che la congruenza C sia quella delle normali di S_0. Valgono del resto anche allora tutti gli sviluppi del testo, ove soltanto resterà arbitrario il sistema coordinato (ortogonale).

(**) *Lezioni*, Cap. IV.

indicando con K_0 la curvatura di S_0, e dalle due equazioni di Codazzi:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}\right)+\frac{1}{\sqrt{E_0 G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D'_0+\frac{1}{G_0}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}D''_0=0\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'_0}{\sqrt{G_0}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)+\frac{1}{\sqrt{E_0 G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}D'_0+\frac{1}{E_0}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D_0=0.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(II)}$$

Indichiamo poi con x_0, y_0, z_0 le coordinate cartesiane ortogonali di un punto $M_0\equiv(u,\ v)$ mobile sopra S_0 e con:

$$\begin{matrix} X_1, & Y_1, & Z_1\\ X_2, & Y_2, & Z_2\\ X_3, & Y_3, & Z_3 \end{matrix}$$

rispettivamente i coseni di direzione della terna ortogonale uscente da M_0 formata: 1.° dalla tangente alla linea $v=\text{cost.}$, 2.° dalla tangente alla linea $u=\text{cost.}$, 3.° dalla normale alla superficie. Avremo allora le formole fondamentali seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x_0}{\partial u}=\sqrt{E_0}\,X_1, \qquad \frac{\partial x_0}{\partial v}=\sqrt{G_0}\,X_2\\
&\frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}X_2+\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}X_3, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}X_2+\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}X_3\\
&\frac{\partial X_2}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}X_1+\frac{D'_0}{\sqrt{G_0}}X_3, \qquad \frac{\partial X_2}{\partial v}=-\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}X_1+\frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}X_3\\
&\frac{\partial X_3}{\partial u}=-\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}X_1-\frac{D'_0}{\sqrt{G_0}}X_2, \qquad \frac{\partial X_3}{\partial v}=-\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}X_1-\frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}X_2,
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

e le analoghe che se ne deducono permutando circolarmente le lettere $(x,\ y,\ z)$ $(X_i,\ Y_i,\ Z_i)$ $i=1,\ 2,\ 3$. Sia ora:

$$\sigma=\sigma(u,\ v),$$

l'angolo d'inclinazione del raggio della congruenza C, emanante dal punto $(u,\ v)$ di S_0, sulla superficie cioè sulla linea $v=\text{cost.}$ Indicando con X, Y, Z i coseni di direzione del raggio, potremo porre:

$$\left.\begin{aligned}
X=\cos\sigma\,X_1+\operatorname{sen}\sigma\,X_3,\quad Y=\cos\sigma\,Y_1+\operatorname{sen}\sigma\,Y_3,\\
Z=\cos\sigma\,Z_1+\operatorname{sen}\sigma\,Z_3.
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Da queste formole derivando, coll'aver riguardo alle (1), deduciamo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial u} &= -\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)X_1-\left(\operatorname{sen}\sigma\frac{D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)X_2+\\
&\quad+\cos\sigma\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)X_3\\
\frac{\partial X}{\partial v} &= -\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)X_1+\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\operatorname{sen}\sigma\frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)X_2+\\
&\quad+\cos\sigma\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)X_3.
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Introduciamo ora per la nostra congruenza C le notazioni di Kummer (*):

$$\left.\begin{aligned}
&E'=\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2,\quad F'=\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v},\quad G'=\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2\\
&e=\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial u},\quad f=\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v},\quad f'=\Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u},\quad g=\Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial v},
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

e troveremo per questi coefficienti fondamentali, dalle (3), le espressioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
E' &= \left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)^2\\
F' &= \left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)-\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)\\
G' &= \left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)^2.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}
e &= -\sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right),\quad f=-\sqrt{G_0}\left(\operatorname{sen}\sigma\frac{D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\\
f' &= -\sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right),\quad g=\sqrt{G_0}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''_0}{\sqrt{G_0}}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(5^*)$$

(*) *Lezioni*, Cap. X.

Per il seguito delle nostre ricerche ci conviene calcolare i valori delle quantità fondamentali:

$$E' G' - F'^2, \quad g E' - (f + f') F' + e G', \quad e g - f f'.$$

Ponendo per abbreviare:

$$\left.\begin{aligned} M = \left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''_0}{\sqrt{G_0}}\right) + \\ + \left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

troviamo:

$$\left.\begin{aligned} E' G' - F'^2 = M^2, \quad e g - f f' = - \operatorname{sen}\sigma \sqrt{E_0 G_0}\,.\, M, \\ g E' - (f + f') F' + e G' = \left\{\sqrt{G_0}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right) - \right. \\ \left. - \operatorname{sen}\sigma \sqrt{E_0}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)\right\} \cdot M. \end{aligned}\right\} \tag{6*}$$

§ 2.

Significato dell'annullarsi del fattore M.

Le tre quantità fondamentali (6*) contengono tutte il fattore M e per semplificare i calcoli dei §§ seguenti, importa anzi tutto che esaminiamo se può darsi il caso che questo fattore M si mantenga costantemente nullo *in tutte le deformazioni della congruenza* C, ossia se può darsi che sia sempre:

$$E' G' - F'^2 = \begin{Vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{Vmatrix}^2 = 0;$$

questa ricerca conduce, come si vedrà, a risultati per sè interessanti.

Nella nostra ipotesi X, Y, Z saranno funzioni l'uno dell'altro, sicchè la questione proposta equivale geometricamente alla seguente: *Può accadere che in tutte le deformazioni della congruenza C uno dei suoi sistemi di sviluppabili consti sempre di superficie cilindriche?*

Dovremo avere per tutte le flessioni di S_0:

$$\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)+$$
$$+\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)=0;$$

se moltiplichiamo questa equazione per D_0 e ne eliminiamo D''_0 ricorrendo alla equazione di Gauss:

$$D_0 D''_0 = D'^2_0 + K_0 E_0 G_0,$$

la convertiamo nella seguente relazione fra D_0, D'_0:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left[\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D_0-\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0+K_0E_0G_0)\right]+\\&+D_0\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Ora noi facciamo qui l'osservazione fondamentale anche per il seguito che: *dovendo questa relazione in termini finiti fra D_0, D'_0 sussistere (per ipotesi) in tutte le flessioni di S_0 sarà necessariamente una identità.* Altrimenti, associandovi l'equazione (I) di Gauss, potremo esprimere p. e. D_0, D''_0 in funzione di D_0, u, v e sostituendo nelle equazioni (II) di Codazzi, se queste risulteranno indipendenti, ne dedurremo $\frac{\partial D_0}{\partial u}$, $\frac{\partial D_0}{\partial v}$ espresse ciascuna per D_0, u, v, ciò che lascerebbe sussistere *al massimo* nelle flessioni di S_0 una costante arbitraria. E, pur supponendo il caso più sfavorevole, avremmo sempre *una* equazione a derivate parziali del 1.° ordine per D_0, risultato assurdo perchè la *totalità* delle flessioni di S_0 dipende invece da un'equazione del 2.° ordine.

Dovendo dunque la (7) risultare *un'identità* in D_0, D_0', osserveremo in primo luogo che se fosse $\sigma=\frac{\pi}{2}$ essa si ridurrebbe a:

$$-\frac{D_0}{\sqrt{E_0 G_0}}(D'^2_0+K_0E_0G_0)+\frac{D_0 D'^2_0}{\sqrt{E_0G_0}}=0,$$

onde $K_0=0$. Ciò dà la soluzione evidente del problema fornita dalla congruenza delle normali di una sviluppabile. Supposto ora $\sigma\neq\frac{\pi}{2}$, ed eguagliando a zero nella (7) i coefficienti di D_0^2, D'^2_0, otteniamo:

$$\frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial u} = 0, \tag{7*}$$

perchè anche per $\sigma = 0$ la seconda di queste equazioni sussiste. Per le (7*) la (7) diventa, sopprimendo il fattore D_0:

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial \sigma}{\partial v} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0 G_0}}\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right) D'_0 + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\frac{\partial \sigma}{\partial v} - K_0 \operatorname{sen}\sigma \sqrt{E_0 G_0} = 0,$$

e si scinde nelle due:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial v} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = 0 \\ \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\frac{\partial \sigma}{\partial v} - K_0 \operatorname{sen}\sigma \sqrt{E_0 G_0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ora suddistinguiamo due casi secondo che l'angolo σ, che è certamente funzione della sola v, è costante o variabile.

1.° caso: σ costante. Allora le (7*), (8) ci dànno:

$$\frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = 0,$$

e cangiando i parametri u, v possiamo fare senz'altro:

$$E_0 = 1, \quad G_0 = 1,$$

onde

$$d s_0^2 = d u^2 + d v^2.$$

La superficie S_0 è in tal caso una sviluppabile e le linee (u, v), distendendo S_0 sul piano, si convertono in un doppio sistema di rette ortogonali. Viceversa se prendiamo una qualunque sviluppabile S_0 e tracciamo su di essa un sistema di geodetiche parallele, indi da ogni punto di S_0 facciamo uscire un raggio normale alla geodetica del sistema che vi passa e inclinato di un angolo costante σ qualsiasi sulla superficie, avremo sempre una soluzione del problema, essendo verificate tutte le equazioni precedenti. È questo del resto geometricamente un caso assai ovvio ed anzi vediamo che i raggi della congruenza uscenti dai punti di una medesima generatrice di S_0 riescono fra loro paralleli. Notiamo che le equazioni differenziali separate delle sviluppabili della congruenza sono nel caso attuale:

$$D_0\, d\, u + D'_0\, d\, v = 0$$

$$D_0\, d\, v - D'_0 \operatorname{sen}^2 \sigma\, d\, u = 0;$$

le prime sviluppabili segano appunto S_0 lungo le generatrici. Osserviamo ancora che risultando qui $f = f'$, la congruenza è normale (*) e le superficie ortogonali ai raggi sono esse stesse sviluppabili. Così abbiamo nello stesso tempo una semplice soluzione del problema [A] della prefazione.

2.º caso: σ variabile. Possiamo prendere senza alterare la generalità $\sigma = v$ e la prima delle (8) ci dà allora:

$$\frac{\partial \log \sqrt{E_0}}{\partial v} = - t g\, v;$$

integrando, col disporre convenientemente del parametro u, possiamo porre:

$$\sqrt{E_0} = \cos v.$$

L'ultima delle (8) diventa poi:

$$K_0 = - \frac{1}{G_0};$$

ma essendo G_0 funzione della sola v, per la nota espressione della curvatura si ha:

$$K_0 = \frac{1}{\cos v \sqrt{G_0}} \frac{d}{d\, v} \left[\frac{\operatorname{sen} v}{\sqrt{G_0}} \right],$$

onde la precedente diviene:

$$\frac{d \log \sqrt{G_0}}{d\, v} = \frac{2 \cos v}{\operatorname{sen} v},$$

e integrando:

$$\sqrt{G_0} = k \operatorname{sen}^2 v,$$

essendo k una costante. Sostituendo alla S_0 una superficie simile, possiamo fare $k = 1$ e l'elemento lineare di S_0 diventa:

$$d\, s_0^2 = \cos^2 v\, d\, u^2 + \operatorname{sen}^4 v\, d\, v^2. \tag{9}$$

È questa una ben nota forma di elemento lineare, appartenente a quella classe

(*) Anche geometricamente la cosa è evidente solo che si assuma per configurazione iniziale di S_0 quella di una superficie piana.

di superficie applicabili sopra una medesima superficie di rotazione che fu una delle prime completamente determinate da WEINGARTEN, come evolute di quelle superficie W i cui raggi principali di curvatura sono legati dalla relazione:

$$2(r_2 - r_1) = \text{sen}\,[2(r_2 + r_1)].\ (*)$$

Viceversa dal nostro calcolo risulta: *se per i punti della superficie S_0 di rotazione d'elemento lineare* (9) *si conducono le rette normali ai meridiani ed inclinate sui paralleli dell'angolo* $v = \text{arc}\cos r$, *in qualunque flessione della S_0 i raggi delle congruenze si disporranno in ∞^1 serie di raggi paralleli.* Si aggiunga che, l'equazione differenziale delle sviluppabili cilindriche della congruenza essendo:

$$D_0\,d\,u + (D'_0 - \cos v)\,d\,v = 0,$$

che combina con quella delle assintotiche di un sistema, si ha l'ulteriore proprietà: *in tutte le flessioni di S_0 le linee lungo le quali i raggi della congruenza risultano fra loro paralleli sono le assintotiche di un sistema.*

Dalla nostra analisi risulta ancora che le uniche soluzioni del problema proposto al principio del paragrafo sono offerte dalle superficie sviluppabili e dalle evolute dalle superficie W corrispondenti alla relazione:

$$k(r_2 - r_1) = \text{sen}\,[k(r_2 + r_1)].$$

L'un caso poi si distingue dall'altro per questo che soltanto nel primo la congruenza è normale.

§ 3.

TRATTAZIONE DEL PROBLEMA *[A]* PEL CASO DI UNA SUPERFICIE S D'AREA MINIMA.

Veniamo a trattare il problema *[A]*, supponendo che la congruenza C che si deforma sia una congruenza normale ed una delle superficie S ortogonali ai raggi resti *in tutte le flessioni della superficie di partenza S_0 superficie d'area minima.*

(*) *Lezioni*, pag. 241.

In primo luogo la condizione che la congruenza C sia normale si traduce nella nota relazione (*):

$$f = f',$$

ovvero per le (5*) nell'altra:

$$\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E_0}\cos\sigma) = 0. \tag{10}$$

Le coordinate x, y, z del punto M, ove il raggio uscente dal punto $M_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ di S_0 incontra normalmente la S sono date dalle formole:

$$x = x_0 + TX, \quad y = y_0 + TY, \quad z = z_0 + TZ, \tag{11}$$

ove T indica una *determinata* funzione della sola u che soddisfa la condizione:

$$\frac{dT}{du} = -\sqrt{E_0}\cos\sigma \text{ (**)}. \tag{12}$$

Per la S indichiamo ora colle solite notazioni:

$$E, \quad F, \quad G$$
$$D, \quad D' \quad D'',$$

i coefficienti della prima e seconda forma fondamentale. Poichè dalle (11) derivando segue:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x_0}{\partial u} + T\frac{\partial X}{\partial u} - \sqrt{E_0}\cos\sigma\, X, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x_0}{\partial v} + T\frac{\partial X}{\partial v},$$

colle analoghe per y, z, ne deduciamo le formole:

$$\left.\begin{array}{c} -D = TE' + e, \quad -D' = TF' + f, \quad -D'' = TG' + g \\ E = T^2 E' + 2Te + E_0 \operatorname{sen}^2\sigma \quad F = T^2 F' + 2Tf, \\ G = T^2 G' + 2Tg + G_0. \end{array}\right\} \tag{12*}$$

La somma $r_1 + r_2$ dei raggi principali di curvatura della S è data (***) da:

$$r_1 + r_2 = \frac{2F'D' - E'D'' - G'D}{E'G' - F'^2},$$

(*) *Lezioni,* pag. 256.
(**) *Lezioni,* ibid.
(***) *Lezioni,* pag. 121.

e però la S sarà ad area minima se si avrà:

$$2F'D' - E'D'' - G'D = 2T(E'G' - F'^2) + eG' - 2fF' + gE' = 0. \quad (13)$$

Sostituiamo in questa i valori (6*) e sopprimiamo il fattore M comune ai due termini. Ciò invero è lecito poichè, se fosse $M = 0$ *in tutte le flessioni* della congruenza normale, saremmo nel 1.° caso del paragrafo precedente, ove non si ha una soluzione dell'attuale problema, le superficie ortogonali ai raggi essendo allora sviluppabili. La (13), liberata così dal fattore M, diventa:

$$2T\left\{\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} - \operatorname{sen}\sigma\frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right) + \left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\right\} + \sqrt{G_0}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) - \operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} - \operatorname{sen}\sigma\frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right) = 0.$$

e deve, per ipotesi, sussistere in tutte le flessioni di S_0 (*). Procedendo come al paragrafo precedente, moltiplichiamo questa equazione per D_0 e sostituiamo poi $D'^2_0 + K_0 E_0 G_0$ in luogo di $D_0 D''_0$. Otteniamo per tal modo l'equazione:

$$\left.\begin{aligned}
&2T\left\{\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\cdot\left[\frac{D_0\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0 + K_0 E_0 G_0)\right] + \right.\\
&\left. + D_0\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\right\} + \sqrt{G_0}\, D_0\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) - \\
&- \operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0}\left[\frac{D_0\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0 + K_0 E_0 G_0)\right] = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

che dovrà, per l'osservazione fondamentale § 2, risultare identica in D_0, D'_0. Eguagliando a zero il coefficiente del prodotto $D_0 D'_0$, otteniamo intanto l'equazione:

$$\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0,$$

che associata alla (10):

$$\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} - \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0,$$

(*) Si potrebbe forse pensare alla possibilità che per una parte soltanto delle flessioni fosse verificata l'equazione del testo, annullandosi per l'altra parte il fattore M; ma allora le considerazioni stesse del § 2 dimostrano che l'una o l'altra equazione deve riuscire identica in D_0, D'_0, eliminato che sia D''_0 mediante l'equazione di Gauss.

ci dimostra che si dovrà avere simultaneamente:

$$\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0, \tag{14*}$$

a meno che non sia $\sigma = \frac{\pi}{2}$. Ma quest'ultimo caso si esclude subito perchè allora il coefficiente di D_0^2 nella (14) sarebbe $\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}$, nè potrebbe annullarsi (*). Sussistono dunque le (14*), onde cangiando il parametro u possiamo fare $E_0 = 1$ e adottando la notazione degli accenti per le derivate delle funzioni della sola u, scriveremo la (14) così:

$$2\,T\left\{D_0^2 \cos\sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} + D_0\left(\sigma' \cos\sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} - \operatorname{sen}\sigma\, K_0 \sqrt{G_0}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma' \operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0 + K_0\, G_0)\right\} + \sqrt{G_0}\, D_0^2 + D_0\left(\sigma' \sqrt{G_0} - \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u}\right) +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0 + K_0\, G_0) = 0;$$

questa si scinde nelle tre separate:

$$\left.\begin{aligned}
&2\,T \cos\sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} + \sqrt{G_0} = 0\\
&2\,T\left(\sigma' \cos\sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} - \operatorname{sen}\sigma\, K_0 \sqrt{G_0}\right) + \sigma' \sqrt{G_0} - \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} = 0\\
&2\,T \sigma' \operatorname{sen}\sigma = \operatorname{sen}^2\sigma.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Ora noi qui trascuriamo naturalmente il caso $\sigma = 0$, perchè allora i raggi della congruenza sarebbero tangenti alla S_0 e troveremmo (dalle (15) stesse) la nota soluzione fornita dal teorema di WEINGARTEN nella evoluta del catenoide. Possiamo quindi dividere l'ultima delle (15) per $\operatorname{sen}\sigma$, onde si ha:

$$2\,T\sigma' = \operatorname{sen}\sigma, \tag{16}$$

e le due prime moltiplicate per σ' che è, per la (16) stessa, diverso da zero

(*) Anche geometricamente la cosa è evidente, perchè allora la congruenza sarebbe quella delle normali a S_0 e questa dovrebbe avere in tutte le flessioni i raggi di curvatura legati dalla relazione $r_1 + r_2 = \text{cost.}$, ciò che è assurdo.

diventano:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}+\sigma'\sqrt{G_0}=0 \\ \sigma'^2=K_0\operatorname{sen}^2\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

§ 4.

Il paraboloide di rotazione ed il primo teorema di Guichard.

Integrando la prima delle (17) otteniamo:

$$\sqrt{G_0}=V\cot\sigma,$$

indicando con V una funzione della v e, cangiando il parametro v, potremo fare $V=1$, indi $\sqrt{G_0}=\cot\sigma$. La seconda delle (17) diventa in conseguenza:

$$\sigma'^2\sqrt{G_0}+\frac{d^2\sqrt{G_0}}{d\,u^2}\operatorname{sen}^2\sigma=0,$$

cioè:

$$\sigma''=3\cot\sigma\,.\,\sigma'^2;$$

questa integrata porge:

$$\sigma'=k\operatorname{sen}^3\sigma, \tag{18}$$

denotando k una costante arbitraria e la (16) ci dà quindi per $2\,T$ il valore:

$$2\,T=\frac{1}{k\operatorname{sen}^2\sigma}\,. \tag{19}$$

Così la (14) è identicamente soddisfatta e resterà solo da vedere se col valore (19) per T si soddisfa anche la condizione (12):

$$T'+\cos\sigma=0,$$

ciò che si verifica subito aver luogo a causa della (18).

Dalla nostra ricerca risulta che il problema proposto ammette sempre due soluzioni: l'una ci è fornita dall'assumere a superficie di partenza l'evoluta del catenoide e la congruenza è allora quella delle tangenti ai meridiani: l'altra si ottiene prendendo per superficie S_0 di partenza una superficie d'elemento lineare:

$$d\,s_0^2=\frac{d\,\sigma^2}{k^2\operatorname{sen}^6\sigma}+\cot^2\sigma\,d\,v^2,$$

che appartiene, come si vede, ad una superficie di rotazione. Per conoscere questa superficie scriviamo, cangiando v in $\frac{v}{k}$:

$$d s_0^2 = \frac{1}{k^2}\left(\frac{d\sigma^2}{\operatorname{sen}^4\sigma} + \cot^2\sigma\, d v^2\right),$$

e ponendo:

$$r = \frac{1}{k}\cot\sigma,$$

indi:

$$d r = -\frac{d\sigma}{k \operatorname{sen}^2\sigma},$$

avremo:

$$d s_0^2 = (1 + k^2 r^2)\, d r^2 + r^2 d v^2.$$

Questo è l'elemento lineare del paraboloide di rotazione, la cui parabola meridiana (assumendo per asse z l'asse di rotazione) ha l'equazione:

$$z = \frac{k r^2}{2}.$$

Di più dalla formola:

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{1}{k r} = \frac{d z}{d r}.$$

che combina con quella che dà l'angolo d'inclinazione della tangente alla parabola sull'asse, ovvero sul raggio focale, vediamo che, quando la S_0 è conformata a paraboloide di rotazione, i raggi emanano dal fuoco ovvero sono paralleli all'asse di rotazione. Inoltre la (19) ci dà:

$$T = \frac{1}{2k}(1 + k^2 r^2),$$

ed il secondo membro rappresenta appunto la lunghezza del segmento focale. Così la prima parte del teorema I) di Guichard (prefazione) è completamente dimostrata. Per vedere chiaramente come sussista anche la seconda parte del teorema, facciamo uso delle considerazioni seguenti, che varranno poi anche senza che stiamo a ripeterle, negli altri casi. L'equazione fondamentale (18) resta verificata cangiando σ in $-\sigma$ e, per la (19), il valore di T resta il medesimo. I due sistemi di raggi che corrispondono ai valori opposti di σ sono evidentemente riflessi l'uno dell'altro, la superficie riflettente essendo la S_0; di più le due superficie (minime) S, $\overline{S}$ normali ai due sistemi di raggi date dalle rispettive formole (11):

$$x = x_0 + T(\cos\sigma\, X_1 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3)$$

$$y = y_0 + T(\cos\sigma\, Y_1 + \operatorname{sen}\sigma\, Y_3), \quad z = z_0 + T(\cos\sigma\, Z_1 + \operatorname{sen}\sigma\, Z_3)$$

$$\bar{x} = x_0 + T(\cos\sigma\, X_1 - \operatorname{sen}\sigma\, X_3),$$

$$\bar{y} = y_0 + T(\cos\sigma\, Y_1 - \operatorname{sen}\sigma\, Y_3), \quad \bar{z} = z_0 + T(\cos\sigma\, Z_1 - \operatorname{sen}\sigma\, Z_3),$$

sono appunto tali che due loro punti corrispondenti M, $\overline{M}$ giacciono simmetricamente rispetto al piano tangente nel punto corrispondente M_0 alla superficie riflettente S_0, come è reso evidente dalle formole:

$$x - \bar{x} = 2\,T \operatorname{sen}\sigma\, X_3, \quad y - \bar{y} = 2\,T \operatorname{sen}\sigma\, Y_3, \quad z - \bar{z} = 2\,T \operatorname{sen}\sigma\, Z_3$$

$$\frac{1}{2}(x + \bar{x}) = x_0 + T\cos\sigma\, X_1, \quad \frac{1}{2}(y + \bar{y}) = y_0 + T\cos\sigma\, Y_1,$$

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = z_0 + T\cos\sigma\, Z_1.$$

Per tal modo non solo abbiamo dimostrato completamente il Teorema *I*) di Guichard, ma abbiamo provato di più che: *le uniche soluzioni del problema fondamentale (A) quando la superficie S debba restare costantemente ad area minima, sono fornite dal paraboloide di* Guichard *e dalla evoluta del catenoide come superficie di partenza; inoltre la congruenza deve avere rispetto a questa superficie rispettivamente la giacitura assegnata dal teorema stesso di* Guichard, *ovvero da quello di* Weingarten.

§ 5.

Trattazione del problema *(A)* pel caso di una superficie *S* a curvatura costante.

Ci proponiamo ora di risolvere il problema *(A)* quando la superficie S debba mantenersi a curvatura costante, escludendo per altro il caso della curvatura nulla, che già al § 2 ha ricevuto la sua completa soluzione.

Siccome si ha:

$$r_1 r_2 = \frac{D\,D'' - D'^2}{E'\,G' - F'^2},$$

ovvero, per le (12*):

$$r_1 r_2 = \frac{T^2(E'G'-F'^2)+T[gE'-2fF'+eG']+eg-f^2}{E'G'-F'^2},$$

se indichiamo con A il valore costante del prodotto $r_1 r_2$ (inversa della curvatura), avremo l'equazione:

$$(T^2-A)(E'G'-F'^2)+T(gE'-2fF'+eG')+eg-f^2=0.$$

In questa sostituiamo i valori (6*) § 1 e sopprimiamo il fattore M, ciò che è lecito, avendo escluso il caso del § 2. Otteniamo così l'equazione:

$$\begin{aligned}(T^2-A)\cdot\Big\{&\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)+\\&+\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\Big\}+\\+T\cdot\Big\{\sqrt{G_0}&\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)-\operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)\Big\}-\\&-\operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0G_0}=0.\end{aligned}$$

Moltiplicando al solito per D_0 ed eliminando D''_0, abbiamo:

$$\left.\begin{aligned}(T^2-A)\cdot\Big\{&\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\cdot\left[\frac{\cos\sigma\, D_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0+K_0E_0G_0)\right]+\\&+\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)D_0\Big\}+\\+T\Big\{\sqrt{G_0}&\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)D_0-\operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0}\Big[\frac{\cos\sigma\, D_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\\&-\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0+K_0E_0G_0)\Big]\Big\}-\operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0G_0}\,D_0=0,\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

e questa dovrà essere un'identità in D_0, D'_0. Escludiamo il caso $\sigma=\frac{\pi}{2}$ ove seguirebbe dall'identità (20):

$$T=0,\quad K_0=\frac{1}{A},$$

e ne risulterebbe l'ovvia soluzione, già indicata in nota alla prefazione, che si ottiene assumendo per S_0 una superficie a curvatura costante $= \frac{1}{A}$ e per congruenza la congruenza delle sue normali. Osserveremo che, escluso il caso $\sigma = \frac{\pi}{2}$, non potrà aversi $T^2 - A = 0$, giacchè allora avremmo:

$$\sqrt{E_0} \cos \sigma = -\frac{d\,T}{d\,u} = 0.$$

Dopo ciò, eguagliando a zero nella (20) il coefficiente del prodotto $D_0 D'_0$, ne deduciamo, precisamente come al § 3:

$$\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0,$$

e potremo fare ancora $E_0 = 1$; la (20) diventa allora:

$$(T^2 - A\Big\{D_0^2 \cos \sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} + D_0\left(\sigma' \cos \sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} - K_0 \operatorname{sen} \sigma \sqrt{G_0}\right) -$$

$$- \frac{\sigma' \operatorname{sen} \sigma}{\sqrt{G_0}} (D'^2_0 + K_0\, G_0)\Big\} + T\Big\{D_0^2 \sqrt{G_0} + D_0\left(\sigma' \sqrt{G_0} - \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u}\right) +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{\sqrt{G_0}} (D'^2_0 + K_0\, G_0)\Big\} - \operatorname{sen} \sigma \sqrt{G_0} \,.\, D_0 = 0,$$

e si scinde quindi nelle tre relazioni:

$$\left.\begin{aligned} &(T^2 - A) \cos \sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} + T \sqrt{G_0} = 0 \\ &(T^2 - A)\left(\sigma' \cos \sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} - K_0 \operatorname{sen} \sigma \sqrt{G_0}\right) + \\ &+ T\left(\sigma' \sqrt{G_0} - \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u}\right) - \operatorname{sen} \sigma \sqrt{G_0} = 0 \\ &(T^2 - A)\, \sigma' \operatorname{sen} \sigma = T \operatorname{sen}^2 \sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Escludendo nuovamente il caso $\sigma = 0$, che riconduce alle soluzioni dipendenti dal teorema di Weingarten, avremo dunque:

$$(T^2 - A)\, \sigma' = T \operatorname{sen} \sigma, \qquad (22)$$

e sarà $\sigma' \neq 0$. Moltiplicando la prima delle (21) per σ' ed osservando la (22) deduciamo:

$$\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}+\sigma'\sqrt{G_0}=0, \tag{23}$$

e moltiplicando similmente la seconda delle (21) per σ' troviamo per le (22), (23):

$$T(\sigma'^2-K_0\operatorname{sen}^2\sigma)=\sigma'\operatorname{sen}\sigma. \tag{24}$$

Ora dalla (23), integrando e disponendo convenientemente del parametro v, potremo fare, come al § 4:

$$\sqrt{G_0}=\cot\sigma,$$

onde:

$$K_0=-\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{d^2\sqrt{G_0}}{du^2}=\frac{\sigma''}{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}-\frac{2\sigma'^2}{\operatorname{sen}^2\sigma},$$

e però:

$$\sigma'^2-K_0\operatorname{sen}^2\sigma=3\sigma'^2-\operatorname{tg}\sigma\,.\,\sigma'',$$

dopo di che la (24) diventa:

$$T=\frac{\sigma'\cos\sigma}{3\cot\sigma\,\sigma'^2-\sigma''}. \tag{25}$$

Sostituendo questo valore di T nell'equazione (12) § 3:

$$T'+\cos\sigma=0,$$

otteniamo per σ l'equazione differenziale:

$$\frac{d}{du}\log(3\cot\sigma\,.\,\sigma'^2-\sigma'')=\frac{d}{du}\log(\operatorname{sen}^3\sigma\cos\sigma),$$

da cui integrando abbiamo:

$$3\cot\sigma\,.\,\sigma'^2-\sigma''=c\operatorname{sen}^3\sigma\cos\sigma, \tag{26}$$

indicando c una costante. Per la (26) la (25) si cangia nell'altra:

$$T=\frac{\sigma'}{c\operatorname{sen}^3\sigma}, \tag{27}$$

e rimane solo da soddisfare la (22), cioè l'equazione:

$$\frac{\sigma'^2}{c^2\operatorname{sen}^6\sigma}-\frac{1}{c\operatorname{sen}^2\sigma}=A. \tag{28}$$

Ma poichè questa produce appunto per derivazione la (26), possiamo trascurare quest'ultima e vediamo così che anche questa volta il problema proposto ammette sempre soluzioni. Queste, ove al solito si prescinda dalle soluzioni dipendenti dal teorema di WEINGARTEN, si ottengono nel modo più generale assumendo a superficie di partenza S_0 la superficie di rotazione d'elemento lineare:

$$d s_0^2 = d u^2 + \cot^2 \sigma \, d v^2, \tag{29}$$

e conducendo i raggi della congruenza normalmente ai paralleli ed inclinati sulla superficie dell'angolo σ, essendo σ una funzione della sola u, unicamente assoggettata a soddisfare l'equazione differenziale (28); in fine la lunghezza T dei segmenti da staccarsi sui raggi della congruenza, a partire da S_0, è data dalla (27).

§ 6.

L'ELLISSOIDE E L'IPERBOLOIDE DI ROTAZIONE ED IL SECONDO TEOREMA DI GUICHARD.

Esaminiamo ora quale è la superficie di rotazione che può prendersi come tipo della superficie di partenza della nostra congruenza. Dalla (28) abbiamo:

$$d u^2 = \frac{d \sigma^2}{c \operatorname{sen}^4 \sigma (1 + c A \operatorname{sen}^2 \sigma)},$$

onde l'elemento lineare (29), cangiandovi v in $k v$ (k costante), può scriversi:

$$d s_0^2 = \frac{d \sigma^2}{c \operatorname{sen}^4 \sigma (1 + c A \operatorname{sen}^2 \sigma)} + k^2 \cot^2 \sigma \, d v^2. \tag{29*}$$

Per trovare l'equazione della curva meridiana corrispondente, conviene identificare la (29*) coll'altra:

$$d s_0^2 = \{1 + \psi'^2 (r)\} d r^2 + r^2 d v^2,$$

col porre:

$$r = k \cot \sigma,$$

indi:

$$\{1 + \psi'^2 (r)\} \left(\frac{d r}{d \sigma}\right)^2 = \frac{1}{c \operatorname{sen}^4 \sigma (1 + c A \operatorname{sen}^2 \sigma)}.$$

Se ne ricava:

$$1 + \psi'^2 (r) = \frac{1}{k^2 c} \frac{1 + \frac{r^2}{k^2}}{1 + c A + \frac{r^2}{k^2}},$$

e però:

$$\psi'^2(r) = \frac{(1-k^2c)\left(1+\frac{r^2}{k^2}\right) - k^2c^2A}{k^2c\left(1+cA+\frac{r^2}{k^2}\right)}. \tag{30}$$

Si noti che per la costante k possiamo prendere il valore che più ci piace, il cangiare di k avendo solo per effetto di sostituire alla superficie un'altra superficie egualmente di rotazione, applicabile sovra di essa.

Studiamo nel presente paragrafo il caso della curvatura $\frac{1}{A}$ positiva e poniamo, come è lecito:

$$A = 1,$$

indi:

$$\psi'^2(r) = \frac{1-k^2c(c+1)+\frac{1-k^2c}{k^2}r^2}{k^2\,c(c+1)+cr^2}.$$

Ora intendendo di considerare solo, come sempre faremo, superficie reali, dovrà la costante c, del resto arbitraria, soddisfare la diseguaglianza:

$$c(c+1) > 0,$$

come risulta dalla (28) scritta sotto la forma:

$$\frac{\sigma'^2}{\operatorname{sen}^4\sigma} = c(c+1) - c^2\cos^2\sigma.$$

Possiamo quindi disporre della costante k ponendo:

$$k^2 = \frac{1}{c(c+1)},$$

e otteniamo così:

$$\psi'^1(r) = \frac{cr}{\sqrt{1+cr^2}},$$

da cui integrando:

$$z = \psi(r) = \sqrt{1+cr^2},$$

ovvero:

$$z^2 - cr^2 = 1,$$

come equazione della curva meridiana.

Se c è negativa pongasi:

$$c = -\frac{1}{a^2},$$

e a causa di $c(c+1)>0$ sarà $a<1$; la curva meridiana è dunque l'ellisse:

$$z^2 + \frac{r^2}{a^2} = 1,$$

il cui asse maggiore, di lunghezza $=2$, coincide coll'asse di rotazione, mentre l'asse minore ha una lunghezza arbitraria.

Quando invece c è positiva, pongasi:

$$c = \frac{1}{a^2},$$

e la curva meridiana sarà l'iperbole:

$$z^2 - \frac{r^2}{a^2} = 1,$$

il cui asse trasverso, di lunghezza $=2$, coincide coll'asse di rotazione, rimanendo anche qui arbitraria la lunghezza dell'altro asse (coniugato).

La formola:

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{k}{r} = \frac{1}{r\sqrt{c(c+1)}},$$

confrontata con quella che dà l'inclinazione dei raggi focali sulla curva, dimostra che i raggi della nostra congruenza si dirigono verso l'uno o l'altro dei due fuochi. Di più se dalla (27) calcoliamo il valore di T in funzione di r, osservando la (28), troviamo:

$$T = \sqrt{\frac{c+1}{c} + (c+1)r^2},$$

e quindi il valore di $T+1$ combina con quello che dà la lunghezza del corrispondente raggio focale. Ora se rammentiamo che, pel teorema di Bonnet, le superficie parallele ad una di curvatura positiva $K=+1$, alla distanza ± 1 da questa, sono a curvatura media costante $=1$, vediamo che i risultati ottenuti dimostrano completamente il teorema II) di Guichard, enunciato nella prefazione. Di più troviamo che le superficie applicabili sull'ellissoide allungato e sull'iperboloide a due falde di rotazione, insieme colle evolute delle superficie a curvatura costante positiva, dànno tutte le superficie S_0 soluzioni del problema [A], quando si esiga che una delle superficie normali ai raggi rimanga, in tutte le flessioni di S_0, a curvatura costante positiva.

§ 7.

I tre tipi di superficie S_0 di rotazione corrispondenti al caso di una S_0 pseudosferica.

Veniamo da ultimo al caso della curvatura $\frac{1}{A}$ negativa e poniamo senz'altro $A = -1$. La (30) diventa:

$$\psi'^2(r) = \frac{1 - k^2 c(1-c) + \frac{1-k^2 c}{k^2} r^2}{k^2 c(1-c) + c r^2},$$

e notiamo che, a causa della (28) si ha:

$$\frac{\sigma'^2}{c^2 \operatorname{sen}^4 \sigma} = \frac{1}{c \operatorname{sen}^2 \sigma} - 1,$$

onde, per restare nel campo reale, dovremo supporre la costante c positiva. Se volessimo anche qui annullare nel numeratore di $\psi'^2(r)$ il termine costante col porre:

$$k^2 = \frac{1}{c(c-1)},$$

otterremo ancora, come superficie tipica S_0 di rotazione, una quadrica; questa però, risultando:

$$\psi'^2(r) = -\frac{c^2 r^2}{1 + c r^2},$$

sarebbe immaginaria. Resteremo invece nel campo di superficie reali ponendo:

$$k^2 = \frac{1}{c},$$

e annullando cosi invece il coefficiente di r^2 al detto numeratore. Per porre in evidenza che c è positiva, poniamo:

$$c = \frac{1}{a^2}, \text{ indi } k = a,$$

ed avremo:

$$\psi'(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 1}}.$$

La curva meridiana ha forma diversa secondo che a^2-1 è nulla, negativa o positiva.

1.° caso: $a=1$. Si ha:

$$z=\psi(r)=\log r,$$

e la curva meridiana è l'ordinaria curva logaritmica, l'asse di rotazione essendo l'assintoto. Osservando poi le formole:

$$\operatorname{tg}\sigma=\frac{k}{r}=\frac{1}{r}=\frac{dz}{dr},$$

$$T=\frac{\sigma'}{\operatorname{sen}^3\sigma}=\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma}-1}=r,$$

vediamo che i raggi della congruenza emananti dai punti della S_0, conformata a superficie logaritmica di rotazione, coincidono coi raggi stessi dei paralleli (ovvero coi loro riflessi) e i segmenti T eguagliano in lunghezza appunto i raggi dei paralleli. Troviamo così le seguente notevole proprietà della superficie logaritmica di rotazione: *Sui raggi dei paralleli di questa superficie S_0 si dispongano altrettanti segmenti terminati alla superficie ed al rispettivo centro. Si deformi comunque la S_0 che seco trasporti i detti segmenti, invariabilmente legati alla S_0; il luogo degli estremi liberi dei segmenti (estremi coincidenti inizialmente coi centri dei paralleli) sarà sempre una superficie pseudosferica S normale ai segmenti stessi. Una seconda superficie pseudosferica $\bar{S}$, normale ai raggi riflessi si ottiene prendendo la simmetrica di S rispetto alla S_0* (*).

Del resto questo teorema, come vedremo al Cap. V, non è altro che una conseguenza delle proprietà della trasformazione complementare delle superficie pseudosferiche.

2.° caso: $a<1$. Allora la (31) integrata ci dà:

$$r=\sqrt{1-a^2}\cosh z.$$

Questa curva meridiana dell'attuale superficie di rotazione S_0 deriva dalla catenaria comune: $r=\cosh z$, *accorciando* nel rapporto costante $\sqrt{1-a^2}$ le ordinate normali alla direttrice; la diremo perciò la catenaria accorciata, e la

(*) Si osservi che quando la S_0 è conformata a superficie logaritmica di rotazione la superficie pseudosferica S si riduce all'asse e la simmetrica $\overline{S}$ è l'ordinaria pseudosfera.

superficie, generata dal rotare della curva attorno alla direttrice, il *catenoide accorciato.*

Le formole:

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}\cosh z}, \quad T = \sqrt{1-a^2}\,\operatorname{senh} z,$$

definiscono poi il sistema di raggi che colleghiamo alle deformazioni del catenoide accorciato e la lunghezza T dei segmenti compresi fra S_0 e la superficie pseudosferica S ortogonale ai raggi.

Si osserverà che nel caso limite $a=0$ il catenoide accorciato degenera nell' ordinario catenoide e i due sistemi di raggi (diventando $\sigma=0$) coincidono in quello delle tangenti ai meridiani. Otteniamo così, come caso limite, la soluzione data dal teorema di WEINGARTEN nelle evolute delle superficie pseudosferiche, cioè nelle superficie applicabili sul catenoide.

3.º caso: $a>1$. La curva meridiana sarà allora la seguente:

$$r = \sqrt{a^2-1}\,\operatorname{senh} z;$$

diremo per brevità la corrispondente superficie di rotazione il *sinusoide iperbolico.*

Così adunque abbiamo trovato tre distinti tipi di superficie di rotazione S_0, che dànno tutte le soluzioni del problema [A], quando la superficie S normale ai raggi debba rimanere a curvatura costante negativa.

CAPITOLO II.

La corrispondenza fra i punti della superficie riflettente S_0 e quelli delle superficie S, $\overline{S}$ normali ai raggi della congruenza incidente e della riflessa.

§ 8.

CORRISPONDENZA DELLE LINEE DI CURVATURA SOPRA S, $\overline{S}$.

Nelle ricerche seguenti, per esprimerci con maggiore brevità, indicheremo col nome di *superficie fondamentale di rotazione* una qualunque delle sei superficie di rotazione che abbiamo incontrato nelle ricerche del Cap. I e cioè: il paraboloide, l'ellissoide allungato, l'iperboloide a due falde, la superficie logaritmica, il catenoide accorciato ed il sinusoide iperbolico. A ciascuna superficie fondamentale S_0 (o applicabile sovra di essa) sono collegate, come si è visto due congruenze, perfettamente determinate di raggi, riflesse l'una dell'altra, che in ogni deformazione di S_0 si conservano sempre normali a due superficie minime S, $\bar{S}$ se S_0 è il paraboloide, ovvero a due superficie S, $\bar{S}$ colla medesima curvatura costante negli altri cinque casi. Una qualunque delle due dette congruenze si dirà *la congruenza associata* alla superficie fondamentale che si considera.

Ora osserviamo che, dalla generazione geometrica stessa di S, $\bar{S}$, viene stabilita una corrispondenza fra i punti M_0 della superficie riflettente S_0 e quelli M, $\bar{M}$ della S o $\bar{S}$, ove i due raggi incidente e riflesso, uscenti da M_0, rispettivamente le incontrano. I due punti M, $\bar{M}$ giacciono simmetricamente rispetto al piano tangente in M_0 di S_0; per significare brevemente questo fatto diremo che: *le due superficie S, $\bar{S}$ sono simmetriche l'una dell'altra rispetto alla superficie riflettente S_0.*

Pel seguito del nostro studio è indispensabile conoscere le proprietà di queste corrispondenze e noi ci proponiamo di condurre la ricerca in guisa da riconoscere in pari tempo tutti i casi in cui ha luogo la proprietà in considerazione.

Una prima ed importante proprietà della corrispondenza fra i punti di S, $\bar{S}$ si ha nel teorema:

a) Sulle due superficie S, $\bar{S}$ normali rispettivamente ai raggi incidenti ed ai riflessi si corrispondono le linee di curvatura.

La dimostriamo risolvendo il problema generale seguente:

Una congruenza normale di raggi si deforma flettendo la superficie S_0 di partenza. Quale condizione deve verificarsi affinchè le sviluppabili della congruenza si mantengano per riflessione sulla S_0, in tutte le sue deformazioni?

A tale scopo utilizziamo il noto teorema di Dupin (*), secondo il quale le sviluppabili della congruenza normale si mantengono per riflessione allora soltanto quando le linee da esse tracciate sulla superficie d'incidenza formano un sistema coniugato. Ora l'equazione differenziale delle sviluppabili della

(*) V. Darboux, *Leçons*, T. II, p. 286.

congruenza, nelle notazioni del Cap. I, si scrive (*):

$$(f E' - e F') du^2 + (g E' - e G') du\, dv + (g F' - f G') dv^2 = 0;$$

esse tracciano sopra S_0 un sistema coniugato quando si verifichi la condizione:

$$D_0 (g F' - f G') + D'_0 (e G' - g E') + D''_0 (f E' - e F') = 0. \qquad (1)$$

Nel caso attuale di una congruenza normale $(f = f')$, i tre binomii che moltiplicano nella (1) rispettivamente D_0, D'_0, D''_0, hanno secondo le formole fondamentali del § 1, le espressioni seguenti:

$$g F' - f G' = \sqrt{G_0}\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial v}\right) \cdot M,$$

$$e G' - g E' = -\left\{\sqrt{G_0}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right) + \sqrt{E_0} \operatorname{sen} \sigma \left(\frac{\cos \sigma}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen} \sigma D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)\right\} \cdot M,$$

$$f E' - e F' = -\sqrt{E_0} \operatorname{sen} \sigma \left(\frac{\operatorname{sen} \sigma D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos \sigma}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right) \cdot M.$$

Se le sostituiamo nella (1), dobbiamo osservare che la soppressione del fattore M comune ai tre termini sopprime attualmente un'effettiva soluzione del problema, perchè è facile vedere che nel caso della congruenza normale del § 2 le sviluppabili si mantengono per riflessione sulla superficie sviluppabile S_0 di partenza. E infatti le equazioni differenziali di queste sviluppabili sono (§ 2):

$$D_0\, du + D'_0\, dv = 0$$

$$D_0\, dv - D'_0 \operatorname{sen}^2 \sigma\, du = 0.$$

e per la congruenza riflessa, che si ottiene cangiando σ in $-\sigma$, rimangono le stesse.

Cercando ora le altre soluzioni del problema, scriviamo la (1), liberata fattore M:

$$D_0 \sqrt{G_0}\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\sigma v}\right) - D'_0 \left\{\sqrt{G_0}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{E_0} \operatorname{sen} \sigma \left(\frac{\cos \sigma}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen} \sigma D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)\right\} -$$

$$- \sqrt{E_0} \operatorname{sen} \sigma\, D''_0 \left(\frac{\operatorname{sen} \sigma D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos \sigma}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right) = 0.$$

(*) *Lezioni*, pag. 252 formola *(C)*.

Per esprimere che questa è soddisfatta in tutte le flessioni di S_0, procediamo al solito moltiplicandola per D_0 e sostituendo $D'^2_0 + K_0 E_0 G_0$ a $D_0 D''_0$; otteniamo così:

$$D_0^2 \sqrt{G_0}\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial v}\right) - D_0 D'_0 \sqrt{G_0}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right) -$$

$$- D'_0 \sqrt{E_0} \operatorname{sen} \sigma \left\{\frac{\cos \sigma D_0}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\sqrt{G_0}} (D'^2_0 + K_0 E_0 G_0)\right\} -$$

$$- \sqrt{E_0} \operatorname{sen} \sigma (D'^2_0 + K_0 E_0 G_0)\left(\frac{\operatorname{sen} \sigma D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos \sigma}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right) = 0.$$

Questa, dovendo essere un'identità in D_0, D'_0, si scinde nelle tre:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = 0, \quad \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} + \sigma' \sqrt{G_0} = 0,$$

da cui integrando e disponendo convenientemente dei parametri u, v, abbiamo:

$$\sqrt{E_0} = 1, \quad \sqrt{G_0} = \cot \sigma.$$

La nostra superficie S_0 è dunque necessariamente applicabile sopra una superficie di rotazione d'elemento lineare:

$$d s_0^2 = d u^2 + r^2 d v^2,$$

e si ha evidentemente:

$$r = k \cot \sigma \; (k \text{ costante}).$$

Ed ora se osserviamo che il caso, considerato a parte, della congruenza normale dal § 2 rientra in questo generale, poichè allora r e σ sono costanti, potremo enunciare il risultato:

Affinchè le sviluppabili di una congruenza normale C si conservino per riflessione sulla superficie di partenza S_0, in tutte le flessioni della superficie d'incidenza S_0, è necessario e sufficiente che questa sia applicabile sopra una superficie di rotazione e i raggi di C siano condotti normalmente alle deformate dei paralleli ed inclinati sulla superficie di un angolo σ che soddisfi alla condizione:

$$r \operatorname{tg} \sigma = \text{cost},$$

indicando r il raggio del parallelo.

In tutte le congruenze associate alle sei superficie fondamentali la condizione ora scritta è soddisfatta; ne risulta quindi, come caso particolare, il teorema a) enunciato al principio.

§ 9.

Corrispondenza delle assintotiche sopra S, $\overline{S}$.

Vogliamo ora dimostrare in secondo luogo che sulle due superficie S, $\overline{S}$ ad area minima o a curvatura costante, derivate da una superficie S_0 applicabile sopra una delle sei fondamentali, si corrispondono altresì le linee assintotiche reali od immaginarie (*). Dimostreremo anzi di più che questa (a differenza di quella del paragrafo precedente) è una proprietà *caratteristica* delle congruenze associate alle sei superficie fondamentali, quando si trascuri il caso delle congruenze normali del § 2, che del resto può riguardarsi come contenuto nel generale. Proponiamoci dunque di risolvere in generale il problema seguente:

Una congruenza normale C si deforma flettendo la superficie S_0 di partenza e si considerano due superficie S, $\overline{S}$ ortogonali rispettivamente ai raggi incidenti ed ai riflessi e simmetriche rispetto alla superficie riflettente S_0. Quando accadrà che, in tutte le flessioni della superficie d'incidenza S_0, si corrispondano sopra S, $\overline{S}$ le linee assintotiche (i sistemi coniugati)?

Per compiere la nostra ricerca osserviamo che, ritenendo per la superficie S tutte le notazioni del § 3, avremo le formule corrispondenti per la simmetrica $\overline{S}$ solo che si cangi σ in $-\sigma$, ciò che per la formola:

$$T = C - \int \cos \sigma \, d\, u,$$

non fa cangiare T. Indicando adunque con $\overline{E}'$, $\overline{F}'$, $\overline{G}'$, $\overline{e}$, $\overline{f}$, $\overline{g}$ le quantità che per la $\overline{S}$ sono le analoghe di:

$$E' \; F' \; G', \; e, \; f, \; g,$$

ne dedurremo le espressioni dalle (5), (5*) § 1 cangiandovi σ in $-\sigma$. I coefficienti:

$$\overline{D}, \; \overline{D'}, \; \overline{D''},$$

per la $\overline{S}$ avranno quindi, per le (12*) § 3, le espressioni:

$$-\overline{D} = T\overline{E}' + \overline{e}, \quad -\overline{D'} = T\overline{F}' + \overline{f}, \quad -\overline{D''} = T\overline{G'} + \overline{g}.$$

(*) In quest'ultimo caso (quando cioè S, $\overline{S}$ sono a curvatura costante positiva) per esprimere la proprietà sotto forma reale basterà parlare invece della conservazione dei *sistemi coniugati*.

Per esprimere che sopra S, $\bar{S}$ si corrispondono le linee assintotiche (i sistemi coniugati), abbiamo le proporzioni:

$$\frac{\bar{D}}{D} = \frac{\bar{D}'}{D'} = \frac{\bar{D}''}{D''},$$

ossia le due equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &T^2(E'\bar{F}' - \bar{E}'F') + T(e\bar{F}' - \bar{e}F' + f\bar{E}' - \bar{f}E') + (e\bar{f} - \bar{e}f) = 0 \\ &T^2(E'\bar{G}' - \bar{E}'G') + T(e\bar{G}' - \bar{e}G' + \bar{g}E' - g\bar{E}') + (e\bar{g} - \bar{e}g) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ora se decomponiamo le espressioni di E', F', e, f, g, date dalle (5), (5*) § 1, ciascuna in due parti, l'una pari l'altra dispari rispetto a σ, abbiamo:

$$E' = \left\{ \frac{D_0^2}{E_0} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}\right)^2 + \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma\, D_0'^2}{G_0} + \left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right)^2 \right\} +$$
$$+ 2 \left\{ \frac{D_0}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{D'_0 \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma}{G_0} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} \right\}$$

$$F' = \left\{ \frac{D_0 D'_0}{E_0} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{\operatorname{sen}^2\sigma\, D'_0 D''_0}{G_0} - \frac{\cos^2\sigma}{\sqrt{E_0 G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} \right\} +$$
$$+ \left\{ \frac{D_0}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sigma}{\partial v} + \frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sigma}{\partial u} - \frac{D'_0 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{E_0 G_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} + \frac{D''_0 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{G_0} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} \right\}$$

$$G' = \left\{ \frac{D_0'^2}{E_0} + \left(\frac{\partial \sigma}{\sigma v}\right)^2 + \frac{\operatorname{sen}^2\sigma\, D_0''^2}{G} + \left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u}\right)^2 \right\} +$$
$$+ 2 \left\{ \frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{D''_0 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{E_0 G_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} \right\}$$

$$e = -\sqrt{E_0} \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial u} - D_0 \operatorname{sen}\sigma, \quad f = -\cos\sigma \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} - D'_0 \operatorname{sen}\sigma,$$

$$g = \frac{\cos\sigma \sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} - D''_0 \operatorname{sen}\sigma,$$

e le espressioni di $\bar{E}'$, $\bar{F}'$, $\bar{G}'$, $\bar{e}$, $\bar{f}$, $\bar{g}$ si dedurranno da queste ogni volta cangiando di segno alla parte impari.

Si osservi ora che ogni coefficiente nelle (2) ha la forma:

$$\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta,$$

constando sì α che β d'una parte pari che diciamo rispettivamente α_1, β_1, e di una parte impari α_2, β_2 talchè:

$$\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta=2(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2).$$

Dopo queste osservazioni, calcolando per disteso la prima delle (2) si trova l'equazione seguente:

$$T^2\left\{2\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{D'_0\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{G_0}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\cdot\left(\frac{D_0D'_0}{E_0}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial v}+\right.\right.$$

$$+\frac{\operatorname{sen}^2\sigma D'_0D''_0}{G_0}-\frac{\cos^2\sigma}{\sqrt{E_0G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\Bigg)-\left[\frac{D_0^2}{E_0}+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2+\frac{\operatorname{sen}^2\sigma D'^2_0}{G_0}+\right.$$

$$+\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)^2\Bigg]\cdot\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial v}+\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial u}-\frac{D'_0\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{E_0G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}+\right.$$

$$+\left.\left.\frac{D''_0\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{G_0}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\right\}+T\sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial v}+\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial u}-\right.$$

$$-\frac{D'_0\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{E_0G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}+\frac{D''_0\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{G_0}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\Bigg)-TD_0\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D_0D'_0}{E_0}+\right.$$

$$+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial v}+\frac{\operatorname{sen}^2\sigma D'_0D''_0}{G_0}-\frac{\cos^2\sigma}{\sqrt{E_0G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\Bigg)+TD'_0\operatorname{sen}\sigma\left[\frac{D_0^2}{E_0}+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2+\frac{\operatorname{sen}^2\sigma D'^2_0}{G_0}+\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)^2\Bigg]-2T\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\right.$$

$$+\frac{D'_0\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{G_0}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\Bigg)+D_0\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}-D'_0\sqrt{E_0}\operatorname{sen}^2\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u}=0.$$

Moltiplichiamo la precedente per D_0 e sostituiamo al solito $D'^2_0+K_0E_0G_0$ al prodotto $D_0D''_0$. Basta eguagliare a zero, nell'equazione che risulta e che deve essere un'identità in D_0, D'_0, il coefficiente di D_0^3 per dedurne:

$$\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}=0,$$

indi $\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}=0$ e potremo dunque fare:

$$E_0=1,\qquad \sigma=\sigma(u).$$

Dopo di ciò l'equazione sopra scritta, soppresso il fattore D'_0 comune a tutti i termini, diventa:

$$T^2 \left\{ \left(\sigma' + \frac{\operatorname{sen} \sigma \cos \sigma}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} \right) D_0^2 + \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{G_0} \left(\sigma' + \frac{\operatorname{sen} \sigma \cos \sigma}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} \right) D'^2_0 + \right.$$
$$\left. + 2 \sigma' \operatorname{sen}^2 \sigma K_0 - \sigma'^2 \left(\sigma' - \frac{\operatorname{sen} \sigma \cos \sigma}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} \right) \right\} +$$
$$+ T \left\{ 2 \sigma'^2 \operatorname{sen} \sigma - \frac{\sigma' \operatorname{sen}^2 \sigma \cos \sigma}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} - K_0 \operatorname{sen}^3 \sigma \right\} - \sigma' \operatorname{sen}^2 \sigma = 0.$$

Questa ci dimostra che deve aversi:

$$\sigma' + \frac{\operatorname{sen} \sigma \cos \sigma}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} = 0,$$

onde si conclude al solito, cangiando il parametro v:

$$\sqrt{G_0} = \cot \sigma,$$

indi:

$$d s_0^2 = d u^2 + \cot^2 \sigma \, d v^2;$$

dopo di ciò la precedente diviene:

$$2 \sigma' (\sigma'' - 3 \cot \sigma . \sigma'^2) T^2 + \operatorname{sen} \sigma (5 \cot \sigma . \sigma'^2 - \sigma'') T - \sigma' \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma = 0. \quad (3)$$

D'altronde anche la seconda delle (2) porta, come subito si verifica, a questa medesima equazione (3), che si tratterà dunque di soddisfare insieme all'altra:

$$T' + \cos \sigma = 0. \quad (4)$$

Lasciamo da parte il caso $\sigma' = 0$ ove la (3) è identicamente verificata, ciò che del resto è evidente geometricamente perchè allora siamo nel caso del § 2 e sulle due superficie sviluppabili S, $\overline{S}$ si corrispondono le generatrici fra loro (e a quelle di S_0).

Il discriminante dell'equazione di 2° grado (3) in T è il quadrato di:

$$\sigma'' \operatorname{sen} \sigma - \sigma'^2 \cos \sigma,$$

onde troviamo per T l'uno o l'altro dei due valori:

$$T = \frac{\operatorname{sen} \sigma}{2 \sigma'}, \quad (5)$$

$$T = \frac{\sigma' \cos \sigma}{3 \cot \sigma \, \sigma'^2 - \sigma''}. \quad (6)$$

Nel primo caso la (4) ci dà subito:

$$\sigma'' = 3 \cot \sigma \,.\, \sigma'^2 \ (*),$$

e il calcolo stesso del § 4 ci dimostra che la S_0 è applicabile sul paraboloide di rotazione e la congruenza C è una delle due associate.

Quando si abbia poi la (6), basta ricordare il calcolo eseguito al § 5 sull'identica equazione ivi segnata (25) per dedurne che si avrà:

$$3 \cot \sigma \,.\, \sigma'^2 - \sigma'' = c \operatorname{sen}^3 \sigma \cos \sigma,$$

(con c costante), indi:

$$T = \frac{\sigma'}{c \operatorname{sen}^3 \sigma},$$

e:

$$\frac{\sigma'^2}{c^2 \operatorname{sen}^6 \sigma} - \frac{1}{c \operatorname{sen}^2 \sigma} = A,$$

essendo A una nuova costante. Ne segue che la superficie S_0 è applicabile sopra una delle cinque ultime superficie fondamentali e la congruenza C coincide con una delle congruenze associate.

Abbiamo dunque il teorema:

Se deformando comunque la superficie S_0 di partenza di una congruenza normale C avviene che sopra due certe superficie S, $\overline{S}$ ortogonali rispettivamente ai raggi della congruenza C e della sua riflessa sopra S_0 e simmetriche rispetto a questa, si corrispondano le linee assintotiche, la superficie S_0 sarà applicabile sopra una delle sei fondamentali e le due congruenze saranno quelle associate.

§ 10.

Corrispondenza delle assintotiche sopra S_0, S.

Ricerchiamo ora se può avvenire che, deformando comunque la superficie S_0 di partenza di una congruenza C di raggi normali ad una superficie S, abbia sempre luogo la corrispondenza delle assintotiche sopra S_0, S.

Perchè ciò avvenga dovranno sussistere, in tutte le flessioni di S_0, le proporzioni:

$$\frac{D}{D_0} = \frac{D'}{D'_0} = \frac{D''}{D''_0},$$

(*) Si osservi che in questo caso, ed in questo soltanto, la (3) scende al 1° grado in T.

ovvero, per le (12*) § 3, le due equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} T(E'D'_0 - F'D_0) + eD'_0 - fD_0 = 0, \\ T(G'D'_0 - F'D''_0) + gD'_0 - fD''_0 = 0. \end{array}\right\} \quad (7)$$

La prima di queste, sostituendo i valori effettivi (5), (5*) § 1, diventa:

$$TD'^2_0\left\{\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)^2\right\} -$$

$$- TD_0\left(\frac{D_0}{E_0} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right) +$$

$$+ T\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\cdot\left[\frac{D_0\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} - \left(\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0 + K_0E_0G_0)\right)\right] +$$

$$+ \sqrt{G_0}\,D_0\left(\operatorname{sen}\sigma\frac{D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right) - \sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\, D'_0\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) = 0;$$

questa deve al solito essere identica in D_0, D'_0. Eguagliando a zero il coefficiente di D^2_0, si ha $\frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0$ indi $\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} = 0$ e fatto quindi, come è lecito, $E_0 = 1$ la precedente, divisa per D'_0, si cangia nell'altra:

$$T\left\{\sigma'^2 - K_0\operatorname{sen}^2\sigma + \left(\sigma' + \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right)D_0\right\} = \sigma'\operatorname{sen}\sigma.$$

Dobbiamo dunque avere:

$$\sigma' + \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} = 0,$$

onde risulta che possiamo fare nuovamente:

$$\sqrt{G_0} = \cot\sigma;$$

dopo di che, supposto $\sigma' \neq 0$, avremo:

$$T = \frac{\sigma'\cos\sigma}{3\cot\sigma\,\sigma'^2 - \sigma''}.$$

Anche la seconda delle (7) risulta così soddisfatta e, poichè l'equazione ora ottenuta coincide colla (6) del paragrafo precedente, valgono naturalmente le medesime conclusioni. Quanto al caso escluso $\sigma' = 0$, esso corrisponde al solito alle congruenze normali del § 2 che dànno, come è già stato osservato al paragrafo precedente, una soluzione dell'attuale problema.

Si ha dunque il teorema: *Se deformando comunque la superficie S_0 di partenza di una congruenza C normale ad una superficie S, ha sempre luogo la corrispondenza delle assintotiche fra S_0 e S, dovrà la S_0 essere applicabile sopra una delle cinque ultime* (*) *superficie fondamentali e la congruenza sarà una delle due associate, mentre la S sarà a curvatura costante.* Intendiamo incluso in questo teorema generale il caso del § 2 ove S_0 e S sono sviluppabili e le generatrici si corrispondono.

La proprietà, già dimostrata al paragrafo precedente, che sulle due superficie S, $\overline{S}$ a curvatura costante, simmetriche rispetto alla riflettente S_0, si corrispondono le assintotiche segue così nuovamente. Ma la proposizione attuale ci dimostra di più il teorema:

Gli archi corrispondenti di assintotiche sopra S, $\overline{S}$ hanno eguale lunghezza.

E invero l'elemento lineare della S è dato, per le (12*) § 3, da:

$$ds^2 = (-TD + Te + E_0 \operatorname{sen}^2 \sigma)\, du^2 + $$
$$+ 2(-TD' + Tf)\, du\, dv + (-TD'' + Tg + G_0)\, dv^2,$$

e siccome lungo le assintotiche si ha:

$$D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2 = 0,$$

il quadrato del loro elemento d'arco sarà:

$$ds^2 = T(e\, du^2 + 2f\, du\, dv + g\, dv^2) + E_0 \operatorname{sen}^2 \sigma\, du^2 + G_0\, dv^2.$$

Cangiando σ in $-\sigma$, si avrà l'elemento d'arco $\overline{d}s$ delle assintotiche di $\overline{S}$, onde:

$$\overline{d}s^2 = T(\overline{e}\, du^2 + 2\overline{f}\, du\, dv + \overline{g}\, dv^2) + E_0 \operatorname{sen}^2 \sigma\, du^2 + G_0\, dv^2.$$

Dalle formole (5*) § 1 risulta quindi:

$$\overline{d}s^2 - ds^2 = 2T \operatorname{sen} \sigma\, (D_0\, du^2 + 2D'_0\, du\, dv + D''_0\, dv^2),$$

ciò che per l'attuale proporzionalità di D_0, D'_0, D''_0 a D, D', D'' dimostra il teorema.

(*) Era a priori evidente che il paraboloide di Guichard non poteva dare una soluzione dell'attuale problema, le sue assintotiche essendo immaginarie mentre sulla S, che è ad area minima, sono invece reali.

Si osserverà che questa proprietà della conservazione non solo delle assintotiche sopra S, $\overline{S}$, ma anche dei loro archi corrispondenti, distingue il caso delle superficie a curvatura costante da quello delle superficie minime; poichè dalla equazione precedente, che vale per gli archi di assintotiche, se si suppone:

$$\overline{d}\, s^2 = d\, s^2,$$

ne segue inversamente la proporzione:

$$D_0 : D'_0 : D''_0 = D : D' : D''.$$

Un ultimo corollario del nostro teorema merita di essere rilevato. Suppongasi di conoscere una superficie S_0 applicabile sopra una qualunque delle cinque ultime superficie fondamentali. Con quadrature si troveranno le congruenze associate e le corrispondenti superficie S, $\overline{S}$ e con quadrature altresì si otterranno le loro linee assintotiche (*) quindi quelle di S_0. Dunque: *nota una superficie S_0 applicabile sopra una delle cinque ultime superficie fondamentali di rotazione, l'equazione differenziale delle sue linee assintotiche si integra con quadrature.*

CAPITOLO III.

Le nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante.

§ 11.

Considerazioni preliminari.

Nei teoremi di Guichard, e negli altri stabiliti al Cap. I, si supponeva data la superficie riflettente S_0, applicabile sopra una delle sei superficie fondamentali di rotazione, e se ne deducevano (con soli calcoli di quadrature) le due congruenze associate, indi le due superficie S, $\overline{S}$ simmetriche rispetto alla S_0 e normali rispettivamente ai raggi delle due congruenze incidente e riflessa; queste due superficie S, $\overline{S}$ risultavano ad area minima nel caso del paraboloide, e colla medesima curvatura costante nei rimanenti. Importa ora

(*) *Lezioni*, pag. 235.

procedere, in certo modo, alla *inversione* di questi teoremi e, supponendo data comunque una superficie S ad area minima, o a curvatura costante, domandare se per la congruenza C delle normali di S può sempre scegliersi una tale superficie S_0 di partenza che questa risulti applicabile sopra una delle sei superficie fondamentali e la congruenza C sia una delle due associate a S_0 (Cfr. § 8). Troveremo che la risposta è sempre affermativa ed anzi si vedrà di più (ed è questo per noi un risultato della massima importanza) che, data la superficie S, *la riflettente* S_0 *non ne risulta determinata, ma può scegliersi ad arbitrio in una tripla infinità di superficie.*

Siccome poi, fissata la superficie riflettente S_0, la simmetrica $\overline{S}$ di S rapporto a S_0 viene ad essere come S ad area minima, ovvero ha la medesima curvatura costante di S, così vediamo come: *dai teoremi di* Guichard *scaturisce un metodo* **reale** *di trasformazione per le superficie d'area minima e per quelle a curvatura costante positiva o negativa.* Sviluppare la teoria di queste trasformazioni, studiarne in particolare le relazioni colle trasformazioni già note è lo scopo delle ricerche seguenti. Però, per le ragioni già addotte nella prefazione, lasceremo qui completamente da parte il caso delle superficie S ad area minima. Supponiamo adunque data una superficie S a curvatura costante K positiva o negativa e facciamo per semplicità, secondo il caso, $K = +1$ ovvero $K = -1$. Sulla normale ad S in ogni suo punto M portiamo, a partire dal piede M, un segmento:

$$\overline{MM_0} = T,$$

ove T sarà una conveniente funzione delle coordinate curvilinee (u, v) di M; si tratterà di determinare T in funzione di u, v in guisa che la superficie S_0 luogo dell'estremo M_0 risulti applicabile sopra una delle cinque ultime superficie fondamentali di rotazione e la congruenza C delle normali di S costituisca, per la superficie S_0, una delle due congruenze associate.

Basterà al nostro scopo tradurre in calcolo le due proprietà seguenti che le ricerche dei precedenti Capitoli ci hanno dimostrato dover aver luogo:

1.° Il segmento T di normale della S compreso fra S e S_0 deve essere legato all'angolo σ d'inclinazione del segmento sopra S_0 dalla formola:

$$T^2 = \pm 1 + \frac{1}{c \operatorname{sen}^2 \sigma}, \qquad (\alpha)$$

che risulta dal paragonare le due (27), (28) § 5, il segno superiore valendo con $K = +1$, l'inferiore con $K = -1$.

2.° Alle linee di curvatura di S deve corrispondere sopra S_0 un sistema coniugato.

Troveremo così per la nostra funzione incognita $T(u, v)$ un sistema di due equazioni simultanee alle derivate parziali l'una del 1.°, l'altra del 2.° ordine le quali esprimono, come si vedrà, tutte le condizioni necessarie e sufficienti a cui T deve soddisfare, ove si eccettui un caso semplice e privo di interesse. D'altronde si riscontrerà che il detto sistema è *illimitatamente integrabile* di guisa che la soluzione più generale T conterrà, oltre c, due nuove costanti arbitrarie di integrazione. Per tal modo si troveranno le formole per la nostra trasformazione e si dimostrerà di più che *della superficie trasformata $\overline{S}$ si può fissare ad arbitrio un punto $\overline{M}$ corrispondente ad un dato punto M di S ed il piano tangente in $\overline{M}$, purchè le due normali in M, $\overline{M}$ ai due piani tangenti di S, $\overline{S}$ si incontrino in un punto M_0 equidistante da M, $\overline{M}$; con ciò la $\overline{S}$ sarà perfettamente determinata.*

Descritto il metodo generale che terremo nei paragrafi seguenti, passiamo ai calcoli effettivi, cominciando dal caso di una superficie S a curvatura positiva $K = +1$.

§ 12.

Caso di una superficie S a curvatura positiva $K = +1$.

Riferendo la S alle sue linee di curvatura (u, v), potremo dare all'elemento lineare di S la forma (*):

$$d s^2 = \operatorname{senh}^2 \theta \, d u^2 + \cosh^2 \theta \, d v^2, \tag{1}$$

dove θ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh} \theta \cosh \theta = 0, \tag{2}$$

e i raggi principali di curvatura r_1, r_2 di S saranno:

$$r_1 = \coth \theta, \qquad r_2 = \operatorname{tgh} \theta. \tag{3}$$

(*) *Lezioni*, pag. 446.

Ritenendo le solite notazioni del § 1, avremo le formole fondamentali:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\operatorname{senh}\theta\, X_1 && \frac{\partial x}{\partial v}=\cosh\theta\, X_2 && \\
&\frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{\partial \theta}{\partial v}X_2-\cosh\theta\, X_3, && \frac{\partial X_2}{\partial u}=\frac{\partial \theta}{\partial v}X_1, && \frac{\partial X_3}{\partial u}=\cosh\theta\, X_1 \\
&\frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{\partial \theta}{\partial u}X_2, && \frac{\partial X_2}{\partial v}=-\frac{\partial \theta}{\partial u}X_1-\operatorname{senh}\theta\, X_3, && \frac{\partial X_3}{\partial v}=\operatorname{senh}\theta\, X_2.
\end{aligned}\right\} \quad (4)
$$

Staccando sopra ogni normale di S, a partire da $M\equiv(x, y, z)$ il segmento:

$$\overline{MM_0}=T,$$

le coordinate x_0, y_0, z_0 dell'estremo M_0 saranno:

$$x_0=x+T X_3, \quad y_0=y+T Y_3, \quad z_0=z+T Z_3,$$

e derivando otterremo, per le (4):

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x_0}{\partial u}&=(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)\, X_1+\frac{\partial T}{\partial u}X_3 \\
\frac{\partial x_0}{\partial v}&=(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)\, X_2+\frac{\partial T}{\partial v}X_3,
\end{aligned}\right\} \quad (5)
$$

colle analoghe per y_0, z_0. Indicando con X_0, Y_0, Z_0 i coseni di direzione della normale alla S_0 e ponendo per brevità:

$$\rho^2=(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)^2\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)^2\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+$$
$$+(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)^2(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)^2,$$

avremo dalle (5):

$$\rho X_0=(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)\, X_3-$$
$$-(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)\frac{\partial T}{\partial u}X_1-(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)\frac{\partial T}{\partial v}X_2,$$

e analoghe per Y_0, Z_0. Di qui, essendo σ l'angolo d'inclinazione del segmento MM_0 sopra S_0, si trova:

$$\operatorname{sen}\sigma=X_0X_3+Y_0Y_3+Z_0Z_3=\frac{(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)}{\rho},$$

e poichè, per le (α) § 11, dobbiamo avere:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma}=c\,(T^2-1),$$

ne risulta intanto che T dovrà soddisfare l'equazione a derivate parziali del 1.° ordine:

$$\frac{1}{(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+1=c\,(T^2-1). \quad \text{(I)}$$

Si noti che la costante c può avere un valore arbitrario, purchè sia $c\,(c+1)>0$ (Cf. § 6); dalla (I) si vede che per $c>0$ sarà $T^2>1$ e invece per $c<0$ avremo $T^2<1$.

Esprimiamo ora inoltre, secondo quanto abbiamo detto al § 11, che sulla S_0 il sistema (u, v) deve essere un sistema coniugato; dovrà perciò annullarsi il determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y_0}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z_0}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial x_0}{\partial u} & \frac{\partial y_0}{\partial u} & \frac{\partial z_0}{\partial u} \\ \frac{\partial x_0}{\partial v} & \frac{\partial y_0}{\partial v} & \frac{\partial z_0}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Ma dalle (5), avendo riguardo alle (4), si trae:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial v}=\left\{(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)\frac{\partial\theta}{\partial v}+\cosh\theta\frac{\partial T}{\partial v}\right\}X_1+$$
$$+\left\{(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)\frac{\partial\theta}{\partial u}+\operatorname{senh}\theta\frac{\partial T}{\partial u}\right\}X_2+\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}X_3;$$

per ciò la detta condizione si traduce nell'annullarsi del determinante:

$$\begin{vmatrix} (\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)\frac{\partial\theta}{\partial v}+\cosh\theta\frac{\partial T}{\partial v} & (\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)\frac{\partial\theta}{\partial u}+\operatorname{senh}\theta\frac{\partial T}{\partial u} & \frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v} \\ \operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta & 0 & \frac{\partial T}{\partial u} \\ 0 & \cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta & \frac{\partial T}{\partial v} \end{vmatrix},$$

ossia nella equazione del 2.° ordine (*):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}&=\left(\frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}+\frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\right)\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v}+\\ &+\frac{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v}.\end{aligned}\right\}\quad \text{(II)}$$

(*) Si noti che non può essere nullo alcuno dei binomii $\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta$, $\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta$ chè allora la S_0 sarebbe una delle falde dell'evoluta di S (caso escluso).

Queste due equazioni (I), (II), cui T deve soddisfare, formano appunto il sistema di cui è parola al § 11. Esso, come ora dimostreremo, è illimitatamente integrabile (*), sicchè la soluzione T più generale contiene, oltre c, due costanti arbitrarie.

§ 13.

Illimitata integrabilità del sistema (I), (II).

Per dimostrare le asserite proprietà del sistema simultaneo (I), (II) cominciamo dal derivare la (I) una volta rispetto ad u, una seconda rapporto a v e sostituendovi per $\frac{\partial^2 T}{\partial u \, \partial v}$ il valore dato dalla (II), ne trarremo anche le due derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial v^2},$$

espresse per le derivate prime e per T.

Riunendovi anche la (II) stessa, otterremo il sistema seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&= \frac{\cosh\theta + T \operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta} \frac{\partial\theta}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial\theta}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial v} + \\
&+ \frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 - \frac{\cosh\theta(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)}{(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + c\,T(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2 \\
v &= \left(\frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta} + \frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\right)\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial u} + \\
&+ \frac{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} \\
&= - \frac{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial v} - \\
&- \frac{\operatorname{senh}\theta(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)}{(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + c\,T(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2.
\end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

(*) È ben noto che due equazioni simultanee alle derivate parziali con due variabili indipendenti ed una funzione incognita, l'una del 1.° l'altra del 2.° ordine, possono avere *al massimo* una soluzione comune contenente due costanti arbitrarie e allora il sistema dicesi illimitatamente integrabile. Naturalmente qui si esclude il caso che la seconda equazione sia una conseguenza della prima, chè allora tutte le soluzioni della prima lo sono anche della seconda.

Queste equazioni (III), pel modo con cui le abbiamo dedotte, sono dunque conseguenze delle (I), (II). Siccome però nello stabilire p. e. la prima delle (III) abbiamo derivato la (I) rapporto ad u e *diviso poi per* $\frac{\partial T}{\partial u}$, così abbiamo tacitamente supposto che non sia:

$$\frac{\partial T}{\partial u}=0, \quad \text{nè} \quad \frac{\partial T}{\partial v}=0.$$

Ora questi casi possono darsi effettivamente; ma la loro trattazione diretta è così ovvia che non importa tenerne conto. E invero se si suppone per es. $\frac{\partial T}{\partial v}=0$, dovrà succedere, per la (II), che si abbia o $\frac{\partial T}{\partial u}=0$ o $\frac{\partial \theta}{\partial v}=0$. La prima cosa può darsi solo per T costante ed eguale, per la (I), a $\sqrt{1+\frac{1}{c}}$; ma non vi corrisponde alcuna soluzione del nostro problema perchè nelle relazioni studiate fra la superficie S_0, applicabile sopra una delle cinque fondamentali, e le superficie a curvatura costante S, $\overline{S}$ mai non avviene che T sia costante. L'altro caso $\frac{\partial \theta}{\partial v}=0$ porta che θ e T siano funzioni della sola u e perciò tanto S quanto S_0 hanno la forma di superficie di rotazione. Si ottengono tutte le soluzioni corrispondenti assumendo per S_0 una superficie di rotazione fra le ∞^1 deformate dell'ellissoide e dell'iperboloide e applicando la costruzione dei teoremi di Guichard.

Ora, se abbiamo riguardo alle (III), (I), troviamo che le condizioni d'integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}\right)=0,$$

risultano, in forza delle equazioni stesse, identicamente verificate. Queste verifiche si faranno più rapidamente, scrivendo le (III) sotto la forma equivalente seguente, che ci tornerà utile anche più tardi:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)=-\frac{\partial\theta}{\partial v}\cdot\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}-\\
&\qquad-\cosh\theta\left(\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+c\,T(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta),\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)=\operatorname{senh}\theta\cdot\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}+\\
&\qquad+\frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v},\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right)=\cosh\theta\cdot\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}+\\
&\qquad+\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u},\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right)=-\frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}-\\
&\qquad-\operatorname{senh}\theta\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+c\,T(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta);
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{III}^*)
$$

basterà allora derivare la 1.ª e 2.ª delle (III*), e così la 3.ª e la 4.ª, rispettivamente rapporto a v e ad u e sottrarre, avendo riguardo alle (III*) stesse, alla (I) ed alla (2), cui soddisfa θ, e si troveranno due identità.

Ne risulta che il nostro sistema è illimitatamente integrabile e, per definire nel modo più generale una soluzione T delle nostre equazioni, potremo dare ad arbitrio, per una coppia iniziale $(u_0 v_0)$ di valori delle variabili, i valori di:

$$T,\quad \frac{\partial T}{\partial u},\quad \frac{\partial T}{\partial v},$$

purchè legati fra loro dalle (I). È chiaro poi che, se non fissiamo a priori il valore della costante c, potremo prendere affatto ad arbitrio i valori iniziali di T e delle sue derivate prime.

§ 14.

Verifiche relative alla superficie riflettente S_0.

Immaginiamo scelta per T una determinata soluzione del sistema differenziale (I), (III), e considerando la superficie S_0 luogo degli estremi dei segmenti T, staccati sulla normale di S, andiamo a verificare che la S_0 sarà applicabile sull'ellissoide allungato o sull'iperboloide di rotazione a due falde di semi-asse principale $= 1$ e che la congruenza delle normali di S sarà una delle due associate a S_0, secondo il teorema di Guichard.

Giova nelle nostre verifiche tener presente l'equazione seguente, che è una immediata conseguenza delle fondamentali (I), (III*):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{c(T^2-1)-1}\cdot\frac{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right\}+&\\ +\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{c(T^2-1)-1}\cdot\frac{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right\}=0.&\end{aligned}\right\}\qquad(\beta)$$

Dalle formole (5) troviamo intanto pei coefficienti dell'elemento lineare di S_0:

$$d s_0^2 = E_0\, d u^2 + 2 F_0\, d u\, d v + G_0\, d v^2,$$

le formole:

$$\left.\begin{aligned}E_0 &= (\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2, \qquad F_0 = \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v},\\ G_0 &= (\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2,\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

indi per la (I):

$$E_0 G_0 - F_0^2 = c\,(T^2-1)\,.\,(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2\,.\,(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2. \qquad (6^*)$$

Calcoliamo ora la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_T}$ che hanno sulla S_0 le linee $T =$ cost. mediante la formola di Bonnet (*):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_T} = \frac{1}{\sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}}\Bigg\{&\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F_0\frac{\partial T}{\partial v} - G_0\frac{\partial T}{\partial u}}{\sqrt{E_0\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 - 2F_0\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} + G_0\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2}}\right]+\\ &+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{F_0\frac{\partial T}{\partial u} - E_0\frac{\partial T}{\partial v}}{\sqrt{E_0\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 - 2F_0\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} + G_0\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2}}\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

(*) *Lezioni* pag. 145.

Siccome dalle (6) abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} E_0 \frac{\partial T}{\partial v} - F_0 \frac{\partial T}{\partial u} &= (\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial v} \\ G_0 \frac{\partial T}{\partial u} - F_0 \frac{\partial T}{\partial v} &= (\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial u}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$E_0 \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 - 2F_0 \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} + G_0 \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 = \tag{8}$$

$$= [c\,T^2 - (c+1)] \cdot (\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2 (\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2,$$

ne deduciamo per la (β):

$$\frac{1}{\rho_T} = \frac{-c\,T}{\sqrt{c\,(T^2-1)\,[c\,T^2 - (c+1)]}}. \tag{9}$$

Ciò dimostra intanto che sulla S_0 le linee $T = \text{cost.}$ hanno curvatura geodetica costante. Dimostriamo ora di più che queste linee sono altresì geodeticamente parallele fra loro e così sarà provato che la S_0 è applicabile sopra una superficie di rotazione. Invero l'equazione differenziale delle traiettorie ortogonali delle $T = \text{cost.}$ è data (*) da:

$$\left(E_0 \frac{\partial T}{\partial v} - F_0 \frac{\partial T}{\partial u}\right) du + \left(F_0 \frac{\partial T}{\partial v} - G_0 \frac{\partial T}{\partial u}\right) dv = 0,$$

ossia per le (7), da:

$$(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2 \frac{\partial T}{\partial v}\, du - (\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2 \frac{\partial T}{\partial u}\, dv = 0.$$

Applicando l'altra formola di Bonnet a pag. 146 delle *Lezioni*, per la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho g}$ di queste linee troviamo:

$$\frac{1}{\rho g} = \frac{1}{\sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v}\left[\sqrt{\frac{c\,(T^2-1)}{c\,T^2 - (c+1)}}\,\frac{\partial T}{\partial u}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial u}\left[\sqrt{\frac{c\,(T^2-1)}{c\,T^2 - (c+1)}}\,\frac{\partial T}{\partial v}\right] \right\} = 0,$$

ciò che dimostra l'asserto.

Per trovare ora l'elemento lineare della superficie di rotazione su cui S_0 è applicabile, basterà calcolare, secondo la formola pag. 163 delle *Lezioni*,

(*) *Lezioni*, pag. 65.

l'arco w delle geodetiche ortogonali alle linee $T = \text{cost.}$, il che dà:

$$w = \int \sqrt{\frac{c(T^2 - 1)}{c\,T^2 - (c+1)}}\, d\,T.$$

L'elemento lineare di S_0 prenderà dunque la forma:

$$d\,s_0^2 = \frac{c(T^2 - 1)}{c\,T^2 - (c+1)}\, d\,T^2 + \varphi^2(T)\, d\,v_1^2,$$

essendo $\varphi(T)$ una funzione della sola T, e a causa delle (9) dovremo avere:

$$\sqrt{\frac{c\,T^2 - (c+1)}{c(T^2 - 1)}}\, \frac{1}{\varphi}\, \frac{d\,\varphi}{d\,T} = \frac{c\,T}{\sqrt{[c\,T^2 - (c+1)]\, c(T^2 - 1)}},$$

cioè:

$$\frac{d \log \varphi}{d\,T} = \frac{1}{2}\, \frac{d}{d\,T} \log \sqrt{c\,T^2 - (c+1)}.$$

Possiamo dunque scrivere:

$$d\,s_0^2 = \frac{c(T^2 - 1)}{c\,T^2 - (c+1)}\, d\,T^2 + [c\,T^2 - (c+1)]\, d\,v_1^2,$$

ovvero, introducendo l'angolo σ colla formola (α) § 11:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = c(T^2 - 1),$$

$$d\,s_0^2 = \frac{d\,\sigma^2}{c \operatorname{sen}^4 \sigma\, (1 + c \operatorname{sen}^2 \sigma)} + \cot^2 \sigma\, d\,v_1^2.$$

Si ha poi:

$$\left(\frac{d\,\sigma}{d\,w}\right)^2 = c \operatorname{sen}^4 \sigma\, (1 + c \operatorname{sen}^2 \sigma),$$

e il confronto di queste formole con quelle del § 6, congiunto coll'osservazione che i segmenti T, essendo costanti lungo le linee $T = \text{cost.}$ ed ortogonali alla S risultano altresì ortogonali a queste linee sulla S_0, basta per dedurne:

1.° che la superficie S_0 è applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione di semi-asse maggiore $= 1$ o sull'iperboloide di rotazione a due falde di semi-asse traverso $= 1$, secondo che $c < 0$ ovvero $c > 0$;

2.° che la congruenza delle normali alla S è una delle due associate a S_0.

E questo è appunto quanto volevamo dimostrare.

§ 15.

Le superficie $\overline{S}$ a curvatura costante positiva trasformate.

Ci occuperemo più tardi della effettiva integrazione del sistema di equazioni differenziali (I), (III). Supposto per ora di conoscerne una soluzione particolare T, ne dedurremo colle formole:

$$x_0 = x + T X_3, \quad y_0 = y + T Y_3, \quad z_0 = z + T Z_3,$$

la corrispondente superficie S_0 applicabile, come si è visto, sull'ellissoide o sull'iperboloide di rotazione. D'altronde, per le osservazioni fondamentali del § 11, se costruiamo la superficie $\overline{S}$ simmetrica di S rispetto alla S_0, riguardata come superficie riflettente delle normali di S, abbiamo nella $\overline{S}$ una seconda superficie di curvatura $K = +1$. Si tratta ora di scrivere le formole effettive che dànno le coordinate del punto $\overline{M}$ mobile sopra $\overline{S}$, corrispondente ad un punto $M \equiv (x, y, z)$ di S.

Per ciò osserviamo che, denotando con x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto medio M_1 del segmento $M\overline{M}$, il quale ha la direzione della normale (X_0, Y_0, Z_0) alla S_0 e ponendo $\overline{MM_1} = \Lambda$, avremo:

$$x_1 = x + \Lambda X_0, \quad y_1 = y + \Lambda Y_0, \quad z_1 = z + \Lambda Z_0.$$

Ma si ha (§ 12):

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{c(T^2-1)}} \left\{ X_3 - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta} \frac{\partial T}{\partial u} X_1 - \frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial T}{\partial v} X_2 \right\},$$

colle analoghe per Y_0, Z_0 e poichè deve essere:

$$(x_1 - x_0) X_0 + (y_1 - y_0) Y_0 + (z_1 - z_0) Z_0 = 0,$$

ne deduciamo:

$$\Lambda = \frac{T}{\sqrt{c(T^2-1)}}.$$

Dalle formole:

$$\frac{x + \overline{x}}{2} = x_1, \quad \frac{y + \overline{y}}{2} = y_1, \quad \frac{z + \overline{z}}{2} = z_1,$$

deduciamo perciò le formole cercate:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x} &= x + \frac{2T}{c(T^2-1)}\left\{X_3 - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}X_1 -\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}X_2\right\} \\
\bar{y} &= y + \frac{2T}{c(T^2-1)}\left\{Y_3 - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}Y_1 -\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}Y_2\right\} \\
\bar{z} &= z + \frac{2T}{c(T^2-1)}\left\{Z_3 - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}Z_1 -\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}Z_2\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Queste ci definiscono la superficie $\bar{S}$ a curvatura $K = +1$ trasformata della primitiva S. Indicando con $\bar{X}_3$, $\bar{Y}_3$, $\bar{Z}_3$ i coseni di direzione della normale alla $\bar{S}$, questi saranno proporzionali alle differenze:

$$\bar{x} - x_0, \quad \bar{y} - y_0, \quad \bar{z} - z_0,$$

e si avrà per ciò:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{X}_3 &= \frac{2}{c(T^2-1)}\left\{\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}X_1 +\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}X_2 + \frac{cT^2 - (c+2)}{2}X_3\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

e le analoghe per $\bar{Y}_3$, $\bar{Z}_3$. Servendosi delle (10), (11), non è difficile verificare che la $\bar{S}$ ha effettivamente la curvatura $K = +1$ e che le sue linee di curvatura sono le u, v. Differiremo queste verifiche, del resto non necessarie, al prossimo § 21.

Siamo così giunti al risultato: *Da ogni superficie S nota a curvatura costante positiva, integrando il sistema delle equazioni differenziali (I), (III) §§ 12, 13, deduciamo, mediante le (10), una tripla infinità di tali nuove superficie $\bar{S}$ ed ancora una tripla infinità di superficie applicabili sopra ellissoidi allungati ed iperboloidi di rotazione a due falde.*

Se vogliamo poi conoscere il significato geometrico delle tre costanti arbitrarie, vediamo subito che, per fissare completamente i valori iniziali di:

$$T, \quad \frac{\partial T}{\partial u}, \quad \frac{\partial T}{\partial v},$$

e quindi la trasformata $\bar{S}$ di S, basta conoscere il punto $\bar{M}$ di $\bar{S}$ che deve corrispondere ad un assegnato punto M di S ed in esso punto $\bar{M}$ il piano tangente di $\bar{S}$. Questi elementi possono, come è chiaro, assumersi ad arbitrio purchè le due normali in M, $\bar{M}$ si incontrino in un punto M_0 equidistante da M, $\bar{M}$. Si può anche dire che è lecito scegliere ad arbitrio, sulla normale in M, il punto M_0 corrispondente di S_0 e fissare inoltre arbitrariamente il piano tangente in M_0 alla S_0.

§ 16.

Le superficie d'Enneper derivate dalla soluzione $\theta = 0$.

Per dimostrare in un semplice esempio l'utilità delle conseguite trasformazioni, partiamo dalla soluzione evidente $\theta = 0$ (*) dell'equazione fondamentale (2):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh} \theta \cosh \theta = 0.$$

S'intende che tutte le nostre formole dei §§ 12-15 conserveranno la loro validità purchè scegliamo:

$$(x, y, z), \quad (X_i, Y_i, Z_i), \quad (i = 1, 2, 3),$$

in guisa che le (4) § 12 risultino soddisfatte. A tale scopo basterà assumere:

$$\left.\begin{array}{lll} x = 0 & y = 0 & z = v \\ X_1 = -\operatorname{sen} u & Y_1 = \cos u & Z_1 = 0 \\ X_2 = 0 & Y_2 = 0 & Z_2 = 1 \\ X_3 = \cos u & Y_3 = \operatorname{sen} u & Z_3 = 0, \end{array}\right\} \qquad (12)$$

le quali formole ci mostrano che la superficie S si riduce in tal caso all'asse delle z e le sue normali alle normali di questa retta.

(*) Cfr. *Lezioni*, pag. 440.

Le due equazioni fondamentali (I), (II) § 12 diventano nel caso attuale:

$$\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2=c\,T^2-(c+1),$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v}.$$

La seconda di esse, integrata, porge:

$$T=U.V,$$

dove U indica una funzione della sola u, V della sola v, coll'avvertenza però che nessuna delle due si riduca ad una costante (v. § 13). Sostituendo nella prima e indicando con accenti le derivate, abbiamo:

$$\frac{U'^2}{U^2}+U^2(V'^2-c\,V^2)+c+1=0,$$

onde segue:

$$\left.\begin{aligned} V'^2-c\,V^2&=b\\ \frac{U'^2}{U^2}+b\,U^2+c+1&=0,\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

indicando con b una nuova costante. Osserviamo che se si moltiplica U per un fattore costante e contemporaneamente si divide V pel medesimo fattore, ciò che non altera T, veniamo ad alterare la costante b per un fattore quadrato qualsiasi. L'integrazione del sistema (13) introduce quindi due nuove costanti arbitrarie, ciò che è conforme alle nostre osservazioni generali; queste però, essendo qui additive in u, v, non hanno evidentemente influenza sulla forma delle superficie derivate.

Distinguiamo due casi a seconda del segno di c:

1.° caso $c<0$. — Poniamo:

$$c=-\frac{1}{a^2},\quad b=\frac{1}{a^2},$$

e potremo assumere:

$$V=\operatorname{sen}\left(\frac{v}{a}\right),\quad U=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\cosh\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)}.$$

Per le (4), otterremo la corrispondente superficie applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione di semi-asse maggiore $=1$, di semi asse-minore $=a$, colle formole seguenti:

$$x_0 = \frac{\sqrt{1-a^2}\cos u}{\cosh\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{v}{a}\right),\quad y_0 = \frac{\sqrt{1-a^2}\,\mathrm{sen}\,u}{\cosh\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{v}{a}\right),\quad z_0 = v.$$

In coordinate cilindriche:

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\quad \theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right),\quad z,$$

l'equazione di questa superficie si scrive evidentemente:

$$r\cosh\left(\frac{\theta\sqrt{1-a^2}}{a}\right) = \sqrt{1-a^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{z}{a}\right); \tag{14}$$

le linee $r=$ cost., cioè le intersezioni della S_0 coi cilindri di rotazione attorno all'asse delle z, sono le deformate dei paralleli dell'ellissoide.

Le (10) ci dànno poi per la superficie $\overline{S}$ applicabile sulla sfera di raggio $=1$ le formole:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{2a\sqrt{1-a^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{v}{a}\right)}{\cosh^2\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)-(1-a^2)\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{v}{a}\right)}\left\{a\cosh\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)\cos u-\right.\\
&\qquad\left.-\sqrt{1-a^2}\,\mathrm{senh}\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)\mathrm{sen}\,u\right\}\\
\overline{y} &= \frac{2a\sqrt{1-a^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{v}{a}\right)}{\cosh^2\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)-(1-a^2)\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{v}{a}\right)}\left\{a\cosh\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)\mathrm{sen}\,u+\right.\\
&\qquad\left.+\sqrt{1-a^2}\,\mathrm{senh}\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)\cos u\right\}\\
\overline{z} &= v-\frac{2a(1-a^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{v}{a}\right)\cos\left(\frac{v}{a}\right)}{\cosh^2\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)-(1-a^2)\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{v}{a}\right)}.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

2.° caso $c>0$. — Poniamo:

$$c = \frac{1}{a^2},\quad b = -\frac{1}{a^2}\ (*),$$

(*) Si noti che per la 2.ª delle (13) deve essere $b<0$.

e le (13) integrate dànno:

$$V = \cosh\left(\frac{v}{a}\right), \quad U = \frac{\sqrt{a^2+1}}{\operatorname{sen}\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)}.$$

Per la superficie S_0 applicabile sull'iperboloide di rotazione a due falde si ha quindi:

$$x_0 = \frac{\sqrt{a^2+1}\,.\cos u}{\operatorname{sen}\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)}\cosh\left(\frac{v}{a}\right), \quad y_0 = \frac{\sqrt{a^2+1}\,.\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen}\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)}\cosh\left(\frac{v}{a}\right), \quad z_0 = v,$$

ovvero in coordinate cilindriche:

$$r \operatorname{sen}\left(\frac{\theta\sqrt{a^2+1}}{a}\right) = \sqrt{a^2+1}\cosh\left(\frac{z}{a}\right). \tag{14*}$$

La superficie $\overline{S}$ applicabile sulla sfera è poi data dalle formole:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{2a\sqrt{a^2+1}\cosh\left(\frac{v}{a}\right)}{(a^2+1)\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)}\left\{ a \operatorname{sen}\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)\cos u - \right.\\
&\qquad\left. - \sqrt{a^2+1}\cos\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)\operatorname{sen} u \right\}\\
\overline{y} &= \frac{2a\sqrt{a^2+1}\cosh\left(\frac{v}{a}\right)}{(a^2+1)\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)}\left\{ a \operatorname{sen}\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)\operatorname{sen} u + \right.\\
&\qquad\left. + \sqrt{a^2+1}\cos\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)\cos u \right\}\\
\overline{z} &= v - \frac{2a(a^2+1)\operatorname{senh}\left(\frac{v}{a}\right)\cosh\left(\frac{v}{a}\right)}{(a^2+1)\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)}.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Tanto nella superficie (15) quanto nella (16) le linee di curvatura $u = \text{cost.}$ sono evidentemente tracciate in piani per l'asse z e in conseguenza le altre linee di curvatura $v = \text{cost.}$ sono sopra sfere ortogonali alla superficie col centro sull'asse. Le superficie (15), (16) appartengono dunque alla classe di

ENNEPER e precisamente a quel caso limite che, sfuggito ad ENNEPER, fu avvertito da KUEN (*). Osserviamo da ultimo che: *se nella superficie (16) si dà alla costante* $\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$ *un valore commensurabile, le linee di curvatura sferiche* $v = cost.$ *risultano curve algebriche razionali.*

§ 17.

CASO DI UNA SUPERFICIE S PSEUDOSFERICA.

Passiamo ora a considerare il caso di una superficie S a curvatura costante negativa $K = -1$. La nostra ricerca procederà, secondo le osservazioni generali del § 11, in modo del tutto analogo a quello del § 12, per cui potremo qui limitarci a indicarla sommariamente.

Riferita la superficie pseudosferica S alle sue linee di curvatura u, v, il suo elemento lineare assumerà la forma:

$$d s^2 = \cos^2\theta\, d u^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d v^2, \tag{17}$$

dove θ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta \cos\theta, \tag{18}$$

e i suoi raggi principali di curvatura saranno dati dalle formole:

$$r_1 = -\operatorname{tg}\theta, \quad r_2 = \cot\theta.$$

Colle solite notazioni, avremo qui le formole fondamentali:

$$\left.\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial x}{\partial u} = \cos\theta\, X_1 & \dfrac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta\, X_2 & \\[2ex]
\dfrac{\partial X_1}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - \operatorname{sen}\theta\, X_3, & \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v} X_1 & \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \operatorname{sen}\theta\, X_1 \\[2ex]
\dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u} X_2 & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial u} X_1 + \cos\theta\, X_3, & \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -\cos\theta\, X_2.
\end{array}\right\} \tag{19}$$

Staccando sulla normale in ogni punto M di S un segmento $M M_0 = T$, per

(*) *Sitzungsberichte der Akademie zu München*, 1884. Heft II.

le coordinate x_0, y_0, z_0 dell'estremo M_0 avremo:

$$x_0 = x + T X_3, \quad y_0 = y + T Y_3, \quad z_0 = z + T Z_3,$$

da cui derivando:

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = (\cos\theta + T \operatorname{sen}\theta) X_1 + \frac{\partial T}{\partial u} X_3$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial v} = (\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta) X_2 + \frac{\partial T}{\partial v} X_3,$$

indi pei coseni di direzione X_0, Y_0, Z_0 della normale alla superficie S_0 luogo di M_0:

$$\rho X_0 = (\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)\frac{\partial T}{\partial u} X_1 + (\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial T}{\partial v} X_2 -$$
$$- (\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta) . (\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta) X_3,$$

e le analoghe per Y_0, Z_0, avendo posto:

$$\rho^2 = (\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)^2\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + (\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)^2\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 +$$
$$+ (\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)^2 (\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)^2.$$

Indicando con σ l'angolo d'inclinazione del segmento MM_0 sulla S_0 avremo dunque:

$$\operatorname{sen}\sigma = X_0 X_3 + Y_0 Y_3 + Z_0 Z_3 = \frac{(\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)(\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)}{\rho}.$$

D'altronde la formola (α) § 11, valendo qui il segno inferiore, ci dà:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma} = c(T^2 + 1),$$

dove porremo, come al § 7, per la costante c positiva $c = \frac{1}{a^2}$; otteniamo dunque per T l'equazione a derivate parziali del 1.° ordine:

$$\frac{1}{(\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + 1 = \frac{1}{a^2}(T^2 + 1). \tag{20}$$

Esprimiamo ora che il sistema (u, v) deve essere sulla S_0 un sistema coniugato e, procedendo come al § 12, troveremo per T l'ulteriore equazione a derivate parziali del 2.° ordine:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta} - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta}\right)\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} - \\ - \frac{\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta}{\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Il sistema delle (20), (21) costituisce un sistema illimitatamente integrabile e la soluzione più generale T contiene quindi, oltre a, due nuove costanti arbitrarie. La dimostrazione si fa, come al § 13, scrivendo insieme alla (21) le altre due che seguono derivando la (20) $\left(\right.$ esclusi anche qui i casi ovvii $\left.\frac{\partial T}{\partial u}=0 \text{ o } \frac{\partial T}{\partial v}=0\right)$; si ha così il sistema seguente:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)=\frac{\partial\theta}{\partial v}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}-\\
&\qquad-\operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+\frac{T}{a^2}(\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta)\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)=-\cos\theta\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}+\\
&\qquad+\frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right)=\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}-\\
&\qquad-\frac{\partial\theta}{\partial v}\cdot\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right)=-\frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}+\\
&\qquad+\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+\frac{T}{a^2}(\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta).
\end{aligned}\right\}\quad(22)
$$

È bene osservare che in forza di queste equazioni si ha identicamente:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{T^2+1-a^2}\frac{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right\}+\\
&+\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{T^2+1-a^2}\frac{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right\}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(22^*)
$$

§ 18.

Verifiche relative alla superficie riflettente S_0.

Supposta scelta una soluzione T delle nostre equazioni di trasformazione (20), (22), verifichiamo ora che la superficie S_0 luogo degli estremi M_0 dei segmenti T ha l'elemento lineare dato dalla formola (29*) § 6:

$$d s_0^2 = \frac{a^2 \, d\sigma^2}{\operatorname{sen}^4 \sigma \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{a^2}\right)} + \cot^2 \sigma \, d v_1^2. \tag{23}$$

Calcolando in primo luogo i coefficienti E_0, F_0, G_0 dell'elemento lineare di S_0, troviamo:

$$E_0 = (\cos\theta + T \operatorname{sen}\theta)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2, \quad F_0 = \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial v},$$

$$G_0 = (\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2,$$

$$E_0 G_0 - F_0^2 = \frac{T^2 + 1}{a^2} (\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)^2 (\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)^2.$$

Se calcoliamo nuovamente, colla formola di Bonnet, la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_T}$ delle linee $T = \text{cost.}$ sulla S_0, troviamo per le precedenti e per la (22*):

$$\frac{1}{\rho_T} = \frac{-T}{\sqrt{(T^2+1)(T^2+1-a^2)}}.$$

Medesimamente si verifica che le loro traiettorie ortogonali sono linee geodetiche e l'arco w di queste geodetiche, contato da una curva fissa $T = \text{cost.}$, è dato da:

$$w = \int \frac{\sqrt{T^2+1}}{\sqrt{T^2+1-a^2}} \, d T.$$

In conseguenza l'elemento lineare di S_0 assume la forma:

$$d s_0^2 = \frac{T^2+1}{T^2+1-a^2} \, d T^2 + \frac{T^2+1-a^2}{a^2} \, d v_1^2;$$

questa colla sostituzione:

$$T^2+1=\frac{a^2}{\operatorname{sen}^2\sigma},$$

si cangia appunto nella (23). Paragonando le formole superiori con quelle del § 7 vediamo che la superficie S_0 è applicabile sopra una delle tre ultime superficie fondamentali di rotazione e la congruenza delle normali della superficie pseudosferica S è una delle due associate alla S_0.

Ne segue che la superficie $\overline{S}$ normale alla congruenza riflessa e simmetrica di S rispetto alla superficie riflettente S_0 è essa stessa pseudosferica di raggio $=1$. Per le coordinate $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ di un punto $\overline{M}$ mobile sopra $\overline{S}$ troviamo le formole (cf. § 15):

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x}&=x+\frac{2a^2T}{T^2+1}\left\{X_3-\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}X_1-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}X_2\right\}\\
\bar{y}&=y+\frac{2a^2T}{T^2+1}\left\{Y_3-\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}Y_1-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}Y_2\right\}\\
\bar{z}&=z+\frac{2a^2T}{T^2+1}\left\{Z_3-\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}Z_1-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}Z_2\right\}.
\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

§ 19.

Le superficie pseudosferiche d'Enneper derivate dalla soluzione $\theta=0$.

Applicheremo anche qui le nostre trasformazioni al caso particolare in cui si parta dalla soluzione $\theta=0$ della (18). Le formole del paragrafo precedente conserveranno la loro validità, ove si faccia:

$$\begin{array}{lll}
x=0 & y=0 & z=u\\
X_1=0 & Y_1=0 & Z_1=1\\
X_2=\operatorname{sen} v, & Y_2=\cos v, & Z_2=0\\
X_3=\cos v, & Y_3=-\operatorname{sen} v & Z_3=0.
\end{array}$$

Le equazioni (20), (21 , la cui integrazione conduce alle superficie pseudosferiche $\overline{S}$ trasformate, diventano:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + 1 = \frac{T^2+1}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial T}{\partial u}\,\frac{\partial T}{\partial v}.$$

Se ne trae $T = U V$ con U funzione della sola u, V della sola v soddisfacenti alle condizioni:

$$U'^2 - \frac{U^2}{a^2} = b,$$

$$\frac{V'^2}{V^2} + b\,V^2 = \frac{1}{a^2} - 1,$$

dove b è una nuova costante.

Lasciamo da parte i casi $a = 1$ ed $a < 1$ i quali dànno, come si vedrà nel Cap. V, superficie pseudosferiche alle quali si perviene egualmente dalla soluzione $\theta = 0$ componendo due successive trasformazioni complementari o di Bäcklund (reali). Supponendo adunque $a > 1$, dovendo b essere manifestamente negativa, potremo fare $b = -1$ e integrando avremo:

$$U = a \cosh\left(\frac{u}{a}\right), \quad V = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a \operatorname{sen}\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)}$$

Per la superficie S_0 applicabile sul sinusoide iperbolico troviamo allora:

$$x_0 = \frac{\sqrt{a^2-1}\cosh\left(\frac{u}{a}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)}, \quad y_0 = \frac{\sqrt{a^2-1}\cosh\left(\frac{u}{a}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)}, \quad z_0 = u\,;$$

in coordinate cilindriche l'equazione di questa superficie è evidentemente:

$$r \operatorname{sen}\left(\frac{\theta\sqrt{a^2-1}}{a}\right) = \sqrt{a^2-1}\cosh\left(\frac{z}{a}\right). \tag{25}$$

La superficie pseudosferica $\overline{S}_0$ normale ai raggi riflessi si trova poi data dalle formole:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{2\,a\sqrt{a^2+1}\cosh\left(\frac{u}{a}\right)}{(a^2-1)\cosh^2\left(\frac{u}{a}\right)+a^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)}\left\{a\,\mathrm{sen}\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)\cos v-\right.\\
&\qquad\left.-\sqrt{a^2-1}\cos\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)\mathrm{sen}\,v\right\}\\
\bar{y} &= \frac{2\,a\sqrt{a^2-1}\cosh\left(\frac{u}{a}\right)}{(a^2-1)\cosh^2\left(\frac{u}{a}\right)+a^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)}\left\{a\,\mathrm{sen}\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)\mathrm{sen}\,v+\right.\\
&\qquad\left.+\sqrt{a^2-1}\cos\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)\cos v\right\}\\
\bar{z} &= u-\frac{2\,a\,(a^2-1)\,\mathrm{senh}\left(\frac{u}{a}\right)\cosh\left(\frac{u}{a}\right)}{(a^2-1)\cosh^2\left(\frac{u}{a}\right)+a^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

Le linee di curvatura $v=\text{cost.}$ della $\overline{S}$ seno in piani per l'asse z e le $u=\text{cost.}$ sono quindi tracciate sopra sfere ortogonali alla superficie coi centri sull'asse. Si osservi anche qui che, ove la costante $\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ sia commensurabile, queste ultime linee di curvatura sono curve algebriche razionali.

CAPITOLO IV.

Le equazioni di trasformazione cangiate in un sistema lineare ed omogeneo. — Sua interpretazione geometrica.

§ 20.

Le equazioni di trasformazione (I), (III) dei §§ 12, 13 cangiate in un sistema lineare.

Al sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali per la funzione $T(u,v)$, che definisce le nostre trasformazioni, si può dare una notevole forma *lineare ed emogenea*, di cui ci andiamo ora ad occupare (*).

(*) Procediamo nel testo per via puramente analitica. Ma non è fuor di luogo il far notare come a questa trasformazione delle equazioni fondamentali si è condotti da con-

Cominciando dal caso in cui la S sia a curvatura positiva $K = +1$, partiamo dal sistema differenziale (I), (III*) §§ 12, 13 che definisce le nostre trasformazioni. In virtù delle (III*) ibid., vediamo subito che l'espressione:

$$\frac{\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\,\frac{1}{T}\,\frac{\partial T}{\partial u}\,d\,u + \frac{\cosh\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\,\frac{1}{T}\,\frac{\partial T}{\partial v}\,d\,v\,,$$

è un differenziale esatto. Possiamo quindi determinare una conveniente funzione Φ di u, v, che soddisfi le due equazioni:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \frac{\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\,\frac{\Phi}{T}\,\frac{\partial T}{\partial u}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} = \frac{\cosh\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\,\frac{\Phi}{T}\,\frac{\partial T}{\partial v}\,,$$

e formando di qui le derivate seconde di Φ, coll'osservare le dette (III*) § 13, troveremo le formole:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} = \coth\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \operatorname{tgh}\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial v}\,\frac{\partial\Phi}{\partial v} +$$
$$+ c\operatorname{senh}^2\theta\,.\,\Phi + (c+1)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\,\frac{\Phi}{T}\,,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} = \coth\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial v}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \operatorname{tgh}\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\,\frac{\partial\Phi}{\partial v}\,,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = -\coth\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \operatorname{tgh}\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial v}\,\frac{\partial\Phi}{\partial v} +$$
$$+ c\cosh^2\theta\,\Phi + (c+1)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\,\frac{\Phi}{T}\,.$$

Introduciamo ora una seconda funzione incognita W, ponendo:

$$W = \frac{\Phi}{T}\,.$$

siderazioni geometriche tratte dalla teoria dei sistemi ciclici. Se consideriamo due superficie S, $\overline{S}$ a curvatura costante (positiva o negativa) trasformate l'una dell'altra secondo una delle nostre trasformazioni, le normali in due loro punti corrispondenti M, $\overline{M}$ si incontrano in un punto M_0, equidistante da M, $\overline{M}$. Possiamo quindi descrivere un circolo c che incontra ortogonalmente S, $\overline{S}$ in M, $\overline{M}$ rispettivamente e poichè sopra S, $\overline{S}$ si corrispondono le linee di curvatura, il sistema ∞^2 di circoli c è un sistema ciclico. Applicando le formole generali relative a questi sistemi (*Lezioni*, Cap. XIII) si arriva precisamente alla trasformazione di formole data nel testo.

ed avremo per le funzioni incognite Φ, W il sistema *lineare ed omogeneo*:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} &= \coth\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \\
&\quad + c\,\operatorname{senh}^2\theta\,\Phi + (c+1)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\,W, \\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} &= \coth\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}, \\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} &= -\coth\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \\
&\quad + c\cosh^2\theta\,\Phi + (c+1)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\,W.
\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial u} &= -\coth\theta\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \\
\frac{\partial W}{\partial v} &= -\operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\Phi}{\partial v}
\end{aligned}\right\}\quad (B)$$

È ben facile vedere che il sistema (A), (B), in forza dell'equazione:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0,$$

cui soddisfa θ, è *illimitatamente integrabile.* Per determinare, nel modo più generale, una coppia di soluzioni (Φ, W) si possono assegnare ad arbitrio, per un sistema iniziale di valori $u_0\,v_0$ delle variabili u, v, i valori di:

$$W,\ \Phi,\ \frac{\partial\Phi}{\partial u},\ \frac{\partial\Phi}{\partial v}.$$

Come dalle (III) o (III*) § 13 abbiamo dedotto le attuali (A), (B), così inversamente, se Φ, W soddisfano le (A), (B), la funzione:

$$T = \frac{\Phi}{W},$$

soddisferà le indicate equazioni di trasformazione (III). Ma ricordiamo che T deve inoltre soddisfare l'equazione del 1.° ordine (I) § 12; questa, sostituendo a T il quoziente $\frac{\Phi}{W}$, diventa:

$$\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2 - c\,\Phi^2 + (c+1)\,W^2 = 0. \quad (C)$$

Ora se, per una coppia qualsiasi Φ, W di soluzioni del sistema (A), (B), indichiamo per un momento con Δ il primo membro della (C), troviamo subito che, in forza delle (A), (B) stesse, si ha:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial v} = 0,$$

cioè $\Delta =$ cost. Basta dunque scegliere i valori iniziali di:

$$W, \ \Phi, \ \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \ \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

in guisa da soddisfare *inizialmente* la (C) e questa sarà verificata per tutti i valori di u, v. È chiaro poi che le tre costanti arbitrarie (oltre c) che restano nel sistema integrale si riducono pel quoziente $T = \frac{\Phi}{W}$, a causa della omogeneità del sistema (A), (B), (C), a due soltanto. Così troviamo nuovamente tutti i risultati già stabiliti al § 13.

Scritte le equazioni di trasformazione sotto la forma (A), (B), (C), facilmente possiamo generalizzarle a coordinate curvilinee qualunque u, v, a cui la superficie S di curvatura $K = +1$ si supponga riferita. Se, adoperando le consuete notazioni, indichiamo con:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

le due forme quadratiche fondamentali che definiscono S, le accennate equazioni generali si scrivono:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + c\,E\,\Phi - (c+1)\,D\,W \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial v} &= \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + c\,F\,\Phi - (c+1)\,D'\,W \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + c\,G\,\Phi - (c+1)\,D''\,W. \end{aligned}\right\} \qquad (A^*)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u} &= \frac{G\,D - F\,D'}{E\,G - F^2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{E\,D' - F\,D}{E\,G - F^2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \frac{\partial W}{\partial v} &= \frac{G\,D' - F\,D''}{E\,G - F^2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{E\,D'' - F\,D'}{E\,G - F^2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \qquad (B^*)$$

$$\Delta_1 \Phi = c\,\Phi^2 - (c+1)\,W^2, \qquad (C^*)$$

i simboli di Christoffel $\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}$ ed il parametro differenziale primo $\Delta_1 \Phi$ essendo calcolati rispetto alla prima forma quadratica fondamentale.

Si verifica agevolmente l'asserita proprietà osservando che le equazioni scritte (A*), (B*), (C*) hanno *carattere invariantivo* e d'altronde nel caso particolare in cui le u, v siano le linee di curvatura si riducono appunto alle (A), (B), (C). Non lasceremo di osservare che ove si facesse la costante $c = -1$ (valore che nelle nostre attuali ricerche è per altro escluso) il sistema (A*) verrebbe appunto a coincidere con quello che si presenta nella teoria dei sistemi di WEINGARTEN (*) e si integra completamente appena si conoscono sopra S le linee geodetiche.

§ 21.

FORMOLE PER LE SUPERFICIE $\overline{S}$ TRASFORMATE E RELATIVE VERIFICHE.

Se facciamo uso delle nuove notazioni e trasformiamo le (10) § 15, che definiscono le superficie $\overline{S}$ trasformate, troviamo:

$$\overline{x} = x + \frac{2\Phi}{c(\Phi^2 - W^2)}\left\{ W X_3 - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u} X_1 - \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v} X_2 \right\}, \tag{1}$$

colle formole analoghe per $\overline{y}$, $\overline{z}$. Similmente le (11) § 15 ci dànno pei coseni di direzione $\overline{X}_3$, $\overline{Y}_3$, $\overline{Z}_3$ della normale alla $\overline{S}$ la formola:

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}_3 = {} & \frac{2W}{c(\Phi^2 - W^2)}\cdot\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u} X_1 + \\ & + \frac{2W}{c(\Phi^2 - W^2)}\cdot\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v} X_2 + \frac{c\Phi^2 - (c+2)W^2}{c(\Phi^2 - W^2)} X_3, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

e le analoghe. Se deriviamo le (1), (2), ponendo mente alle (A), (B), nonchè alle formole fondamentali (4) § 12, ne deduciamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\overline{x}}{\partial u} = {} & \frac{(\Phi^2 + W^2)\operatorname{senh}\theta + 2\Phi W\cosh\theta}{\Phi^2 - W^2}\left\{\left[\frac{2}{c(\Phi^2 - W^2)}\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2 - 1\right] X_1 + \right. \\ & \left. + \frac{2}{c(\Phi^2 - W^2)}\cdot\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v} X_2 - \frac{2W}{c(\Phi^2 - W^2)}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u} X_3\right\} \\ \frac{\partial\overline{x}}{\partial v} = {} & \frac{(\Phi^2 + W^2)\cosh\theta + 2\Phi W\operatorname{senh}\theta}{\Phi^2 - W^2}\left\{\frac{2}{c(\Phi^2 - W^2)}\cdot\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v} X_1 + \right. \\ & \left. + \left[\frac{2}{c(\Phi^2 - W^2)}\frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2 - 1\right] X_2 - \frac{2W}{c(\Phi^2 - W^2)}\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v} X_3\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(*) Vedi *Lezioni*, pag. 525, formole (D).

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} &= -\frac{(\Phi^2+W^2)\cosh\theta+2\Phi W \operatorname{senh}\theta}{(\Phi^2+W^2)\operatorname{senh}\theta+2\Phi W\cosh\theta}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}\\ \frac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} &= -\frac{(\Phi^2+W^2)\operatorname{senh}\theta+2\Phi W \cosh\theta}{(\Phi^2+W^2)\cosh\theta+2\Phi W\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ora se poniamo:

$$\left.\begin{aligned}\cosh\overline{\theta} &= \pm\frac{(\Phi^2+W^2)\cosh\theta+2\Phi W\operatorname{senh}\theta}{\Phi^2+W^2}\\ \operatorname{senh}\overline{\theta} &= \pm\frac{(\Phi^2+W^2)\operatorname{senh}\theta+2\Phi W\cosh\theta}{\Phi^2+W^2},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

adottando la determinazione superiore od inferiore di segno secondochè $\Phi^2 > W^2$ ovvero $\Phi^2 < W^2$ ne risulterà determinata $\overline{\theta}$, la differenza dei quadrati dei secondi membri nella (5) essendo l'unità e il secondo membro della prima risultando inoltre positivo. Dopo di ciò, dalle (3) deduciamo per l'elemento lineare della $\overline{S}$:

$$d\overline{s}^2 = d\overline{x}^2 + d\overline{y}^2 + d\overline{z}^2 = \operatorname{senh}^2\overline{\theta}\, du^2 + \cosh^2\overline{\theta}\, dv^2,$$

mentre dalle (4) abbiamo:

$$\frac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} = -\coth\overline{\theta}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} = -\operatorname{tgh}\overline{\theta}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}.$$

Queste formole ci dimostrano che sulle $\overline{S}$ le linee u, v sono quelle di curvatura e poichè per i suoi raggi principali di curvatura $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$ abbiamo:

$$\overline{r}_1 = -\coth\overline{\theta}, \quad \overline{r}_2 = -\operatorname{tgh}\overline{\theta},$$

troviamo confermato che la $\overline{S}$ è a curvatura $K = +1$.

Osserviamo poi che dalle (5) segue:

$$\cosh(\overline{\theta}-\theta) = \pm\frac{\Phi^2+W^2}{\Phi^2-W^2},$$

e però, se valgono i segni superiori, vale a dire, se $\Phi^2 > W^2$, avremo:

$$\cosh(\overline{\theta}-\theta)+1 = \frac{2\Phi^2}{\Phi^2-W^2}$$

$$\cosh(\overline{\theta}-\theta)-1 = \frac{2W^2}{\Phi^2-W^2},$$

indi dividendo:

$$T^2 = \frac{\Phi^2}{W^2} = \coth^2\left(\frac{\bar\theta - \theta}{2}\right),$$

cioè:

$$T = \pm \frac{\coth(\bar\theta - \theta)}{2}. \tag{6}$$

Che se invece valgono i segni inferiori sarà:

$$T = \pm \operatorname{tgh}\left(\frac{\bar\theta - \theta}{2}\right). \tag{7}$$

§ 22.

Permutabilità delle nuove trasformazioni colla trasformazione di Hazzidakis.

Ad una medesima soluzione θ della equazione fondamentale:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta \cosh\theta = 0,$$

corrispondono propriamente, com'è noto, due diverse superficie S, S' applicabili sulla sfera, l'una S di elemento lineare (riferito alle linee di curvatura):

$$d s^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, d u^2 + \cosh^2\theta\, d v^2,$$

l'altra S' d'elemento lineare:

$$d s'^2 = \cosh^2\theta\, d u^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, d v^2.$$

Le due superficie S, S' sono trasformate l'una dell'altra secondo la trasformazione *involutoria* di Hazzidakis (*); le diciamo superficie *coniugate*. Esse si corrispondono per linee di curvatura e sistemi coniugati e alle geodetiche dell'una corrispondono sopra l'altra le linee d'ombra.

Ora sembra notevole che, integrato per una di esse, p. e. per la S, il sistema di equazioni simultanee che definisce le nuove trasformazioni, il sistema analogo per la coniugata S' risulta senz'altro integrato anch'esso. Sus-

(*) *Lezioni*, pag. 446.

siste infatti il seguente teorema: *Se dalla superficie S si ottiene, secondo la nostra costruzione, una superficie S_0 applicabile sull'ellissoide od iperboloide di rotazione, come luogo degli estremi dei segmenti $= T$ riportati sulle normali di S, basterà sulle corrispondenti normali della coniugata S riportare un segmento di lunghezza inversa $= \frac{1}{T}$ e nel luogo S'_0 degli estremi dei nuovi segmenti si avrà una superficie applicabile rispettivamente sull'iperboloide o sull'ellissoide di rotazione.*

Per dimostrarlo, osserviamo che dalle (A) § 20 seguono le equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} &= \operatorname{tgh}\theta \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial u} - \coth\theta \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial v} - \\
&\qquad - (c+1)\cosh^2\theta\, W - c \operatorname{senh}\theta \cosh\theta\, \Phi, \\
\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} &= \operatorname{tgh}\theta \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u} + \coth\theta \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v}, \\
\frac{\partial^2 W}{\partial v^2} &= -\operatorname{tgh}\theta \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial u} + \coth\theta \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial v} - \\
&\qquad - (c+1)\operatorname{senh}^2\theta\, W - c \operatorname{senh}\theta \cosh\theta\, \Phi,
\end{aligned}\right\} \quad (A')$$

e le (B), (C) possono scriversi:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial u} &= -\operatorname{tgh}\theta \frac{\partial W}{\partial u}, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial v} &= -\coth\theta \frac{\partial W}{\partial v}.
\end{aligned}\right\} \quad (B')$$

$$\frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 - c\,\Phi^2 + (c+1) W^2 = 0. \quad (C')$$

Ora questo sistema (A'), (B'), (C') si deduce dal sistema (A), (B), (C) § 20 permutando u con v, Φ con W e cangiando c in $-(c+1)$ (indi $c+1$ in $-c$), onde si vede che il sistema (A'), (B'), (C') definisce le nuove trasformazioni per la superficie coniugata S'. D'altronde lo scambio di Φ con W muta T in $\frac{1}{T}$, ciò che dimostra il teorema. Si osservi poi che delle due superficie S_0, S'_0 l'una è applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione, l'altra sull'iperboloide a due falde e se indichiamo con a il semiasse minore dell'ellissoide, con b quello immaginario dell'iperboloide si ha:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1.$$

Proseguendo la nostra ricerca, consideriamo ora le due superficie $\overline{S}$, $\overline{S}'$ applicabili sulla sfera e simmetriche rispettivamente di S, S' rispetto alle due superficie riflettenti S_0, S'_0 e dimostriamo il teorema: *La coppia* ($\overline{S}$, $\overline{S}'$) *è ancora costituita da due superficie coniugate di* Hazzidakis.

E invero il calcolo fatto al paragrafo precedente ci ha dato per l'elemento lineare di $\overline{S}$:

$$\overline{d s}^2 = \operatorname{senh}^2 \overline{\theta}\, d u^2 + \cosh^2 \overline{\theta}\, d v^2,$$

avendo $\cosh \overline{\theta}$, $\operatorname{senh} \overline{\theta}$ i valori (5). Le osservazioni fatte sopra dimostrano che il medesimo calcolo, permutato u con v, e Φ con W, vale ancora per l'elemento lineare $\overline{d s}'$ di $\overline{S}'$ e, siccome lo scambio di Φ con W non muta i secondi membri delle (5), abbiamo:

$$\overline{d s}'^2 = \cosh^2 \overline{\theta}\, d u^2 + \operatorname{senh}^2 \overline{\theta}\, d v^2,$$

ciò che dimostra il teorema.

Osserviamo ora che dalla S si può passare alla $\overline{S}'$ sia eseguendo prima la trasformazione che cangia S in $\overline{S}$, poi quella di Hazzidakis che porta $\overline{S}$ in $\overline{S}'$; ovvero possiamo eseguire prima la trasformazione di Hazzidakis sulla S e cangiarla in S' poi su S' la nostra trasformazione, che la porta ancora in $\overline{S}'$. Possiamo quindi enunciare brevemente il risultato conseguito così: *Le nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante positiva sono permutabili colla trasformazione involutoria di* Hazzidakis.

Un'ultima conseguenza delle proprietà stabilite nel presente paragrafo merita di essere notata. Se partiamo da una coppia iniziale nota (S, S') di superficie coniugate applicabili sulla sfera, trasformandole colle nostre trasformazioni otteniamo le nuove superficie a curvatura costante sempre a coppie ($\overline{S}$, $\overline{S}'$) di superficie coniugate. E poichè le geodetiche dell'una corrispondono alle linee d'ombra dell'altra e queste, come corrispondenti ai circoli massimi della sfera rappresentativa, si hanno sempre in termini finiti, ne deduciamo:

Sulle superficie a curvatura costante positiva trasformate della iniziale si conosceranno, senza alcun calcolo di integrazione, le linee geodetiche.

§ 23.

Ricerche analoghe per le superficie pseudosferiche.

Supponiamo ora che la superficie S sia pseudosferica (di raggio $= 1$) e cerchiamo di cangiare alla loro volta le formole di trasformazione del § 17 in un sistema lineare ed omogeneo. Procedendo per ciò affatto analogamente come al § 20, osserviamo che per le (22) § 17 si ha:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\cos\theta}{\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta}\,\frac{1}{T}\,\frac{\partial T}{\partial u}\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta}\,\frac{1}{T}\,\frac{\partial T}{\partial v}\right] = 0,$$

onde potremo determinare una conveniente funzione Φ di u, v dalle equazioni:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\Phi}{T}\,\frac{\partial T}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta}\,\frac{\Phi}{T}\,\frac{\partial T}{\partial v}.$$

Ponendo inoltre:

$$\frac{\Phi}{T} = W,$$

dalle (22) § 17 avremo le formole:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} &= -\operatorname{tg}\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \cot\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial v}\,\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \\
&\qquad + \frac{\cos^2\theta}{a^2}\,\Phi - \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,W,\\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} &= -\operatorname{tg}\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial v}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \cot\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\,\frac{\partial\Phi}{\partial v},\\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} &= -\operatorname{tg}\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \cot\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial v}\,\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \\
&\qquad + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{a^2}\,\Phi^2 + \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,W.
\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial u} &= -\operatorname{tg}\theta\,\frac{\partial\Phi}{\partial u},\\
\frac{\partial W}{\partial v} &= \cot\theta\,\frac{\partial\Phi}{\partial v}.
\end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

A causa della equazione:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta ,$$

cui soddisfa θ, si vede che il sistema (a) (b) è illimitatamente integrabile, sicchè possiamo assumere ad arbitrio i valori iniziali di:

$$W, \ \Phi, \ \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \ \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Secondo la (20) § 17, occorre inoltre che sia soddisfatta l'equazione del 1.° ordine:

$$\frac{1}{\cos^2 \theta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 + W^2 = \frac{1}{a^2}(\Phi^2 + W^2). \qquad (c)$$

Considerazioni analoghe a quelle del § 20 dimostrano che basterà soddisfare alla (c) coi valori iniziali perchè risulti sempre soddisfatta.

Ed ora dalle (24) § 18, per definire la superficie pseudosferica $\overline{S}$ trasformata, avremo la formola:

$$\overline{x} = x + \frac{2a^2 \Phi}{\Phi^2 + W^2}\left\{ W X_3 - \frac{1}{\cos \theta}\frac{\partial \Phi}{\partial u} X_1 - \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}\frac{\partial \Phi}{\partial v} X_2 \right\}, \qquad (8)$$

colle analoghe per $\overline{y}$, $\overline{z}$ e i coseni di direzione $\overline{X}_3$, $\overline{Y}_3$, $\overline{Z}_3$ della normale alla $\overline{S}$ saranno dati dalla formola:

$$\overline{X}_3 = \frac{2a^2 W}{\Phi^2 + W^2}\left\{ \frac{1}{\cos \theta}\frac{\partial \Phi}{\partial u} X_1 + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}\frac{\partial \Phi}{\partial v} X_2 \right\} + \frac{\Phi^2 + (1 - 2a^2) W^2}{\Phi^2 + W^2} X_3, \qquad (9)$$

e dalle analoghe.

Derivando rispetto ad u, v, coll'aver riguardo alle formole precedenti, troviamo:

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = \frac{(W^2 - \Phi^2)\cos \theta + 2\Phi W \operatorname{sen} \theta}{\Phi^2 + W^2} \cdot \left\{ \left[1 - \frac{2a^2}{\Phi^2 + W^2}\frac{1}{\cos^2 \theta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 \right] X_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{2a^2}{\Phi^2 + W^2}\frac{1}{\cos \theta}\frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}\frac{\partial \Phi}{\partial v} X_2 + \frac{2a^2 W}{\Phi^2 + W^2}\frac{1}{\cos \theta}\frac{\partial \Phi}{\partial u} X_3 \right\},$$

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = \frac{(W^2 - \Phi^2)\operatorname{sen} \theta - 2\Phi W \cos \theta}{\Phi^2 + W^2} \cdot \left\{ - \frac{2a^2}{\Phi^2 + W^2}\frac{1}{\cos \theta}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{1}{\operatorname{sen} \theta}\frac{\partial \Phi}{\partial v} X_1 + \right.$$

$$\left. + \left[1 - \frac{2a^2}{\Phi^2 + W^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 \right] X_2 + \frac{2a^2 W}{\Phi^2 + W^2}\frac{1}{\operatorname{sen} \theta}\frac{\partial \Phi}{\partial v} X_3 \right\},$$

$$\frac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} = - \frac{(W^2 - \Phi^2)\operatorname{sen} \theta - 2\Phi W \cos \theta}{(W^2 - \Phi^2)\cos \theta + 2\Phi W \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} = \frac{(W^2 - \Phi^2)\cos \theta + 2\Phi W \operatorname{sen} \theta}{(W^2 - \Phi^2)\operatorname{sen} \theta - 2\Phi W \cos \theta}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}.$$

Se poniamo, indicando con $\overline{\theta}$ un angolo conveniente:

$$\left.\begin{aligned}\cos\overline{\theta} &= \frac{(W^2-\Phi^2)\cos\theta+2\,\Phi\,W\,\mathrm{sen}\,\theta}{\Phi^2+W^2},\\ \mathrm{sen}\,\overline{\theta} &= \frac{(W^2-\Phi^2)\,\mathrm{sen}\,\theta-2\,\Phi\,W\cos\theta}{\Phi^2+W^2},\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

come è lecito per essere la somma dei quadrati dei secondi membri $= 1$, ne deduciamo per l'elemento lineare di $\overline{S}$:

$$\overline{d\,s^2} = \cos^2\overline{\theta}\,d\,u^2 + \mathrm{sen}^2\,\overline{\theta}\,d\,v^2,$$

e inoltre:

$$\frac{\partial \overline{X_3}}{\partial u} = -\mathrm{tg}\,\overline{\theta}\,\frac{\partial\overline{x}}{\partial u},\quad \frac{\partial\overline{X_3}}{\partial v} = \cot\overline{\theta}\,\frac{\partial\overline{x}}{\partial v}.$$

Queste formole confermano che la $\overline{S}$ ha la curvatura $K = -1$ e le linee u, v sono le sue linee di curvatura.

Dalle (10) deduciamo inoltre:

$$\cos(\overline{\theta}-\theta) = \frac{W^2-\Phi^2}{\Phi^2+W^2},$$

indi:

$$\frac{\Phi^2}{W^2} = \mathrm{tg}^2\left(\frac{\overline{\theta}-\theta}{2}\right),$$

cioè:

$$T = \pm\,\mathrm{tg}\left(\frac{\overline{\theta}-\theta}{2}\right). \tag{11}$$

§ 24.

Le superficie integrali della equazione d'Ampère: $k\,r_1\,r_2 - p\,(r_1+r_2) + 2\,q = 0$.

Alla forma lineare data alle equazioni di trasformazione per le superficie a curvatura costante si collega una classe di superficie che hanno con queste a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura e soddisfano ad un'equazione d'Ampère della forma considerata da Weingarten nelle ultime sue ricerche nell'applicabilità (*).

Consideriamo dapprima il caso di una superficie S a curvatura costante positiva e riprendiamo le equazioni (A'), (B'), (C') § 22. Il sistema (A') può scriversi più brevemente così:

$$\left.\begin{aligned} W_{11} &= -(c+1)\cosh^2\theta\, W - c \operatorname{senh}\theta \cosh\theta\, \Phi \\ W_{12} &= 0 \\ W_{22} &= -(c+1)\operatorname{senh}^2\theta\, W - c\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\,\Phi, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

le derivate seconde covarianti $W_{r,s}$ della W essendo calcolate rispetto alla forma quadratica:

$$d s'^2 = \cosh^2\theta\, d u^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, d v^2,$$

che dà il quadrato dell'elemento lineare sferico rappresentativo della S. Si consideri ora la superficie Σ inviluppo del piano:

$$\xi X_3 + \eta Y_3 + \zeta Z_3 = W,$$

(indicando ξ, η, ζ le coordinate correnti di punto) condotto parallelamente al piano tangente di S alla distanza W dall'origine. A causa della intermedia delle (12) la Σ avrà a comune colla S l'immagine sferica delle linee di curvatura; le coordinate ξ, η, ζ del punto di contatto del suo piano tangente saranno date secondo le note formole di Weingarten (**) da:

$$\xi = W X_3 + \frac{1}{\cosh^2\theta}\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial X_3}{\partial u} + \frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial X_3}{\partial v},$$

ovvero da:

$$\xi = W X_3 + \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial W}{\partial u} X_1 + \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial W}{\partial v} X_2, \tag{13}$$

colle analoghe per η, ζ.

Derivando le (13), si trova:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -c(W\cosh\theta + \Phi\operatorname{senh}\theta) X_1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = -c(W\operatorname{senh}\theta + \Phi\cosh\theta) X_2,$$

(*) *Sur la déformation des surfaces* (Mémoire couronné par l'Académie de Paris). — *Acta Mathem.*, tom. 20. Vedi anche Darboux, *Leçons IV*, pag. 308 e segg.

(**) *Lezioni*, pag. 137, formule (34).

le quali per l'elemento lineare $d\sigma$ della Σ ci dànno:

$$d\sigma^2 = c^2 \left\{ (W \cosh\theta + \Phi \operatorname{senh}\theta)^2 du^2 + (W \operatorname{senh}\theta + \Phi \cosh\theta)^2 dv^2 \right\}, \tag{13*}$$

e paragonate colle altre:

$$\frac{\partial X_3}{\partial u} = \cosh\theta\, X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \operatorname{senh}\theta\, X_2,$$

confermano che le u, v sono sulla Σ le linee di curvatura e di più i suoi raggi principali di curvatura ρ_1, ρ_2 sono dati dalle formole:

$$\rho_1 = -c(W + \Phi \coth\theta),$$
$$\rho_2 = -c(W + \Phi \operatorname{tgh}\theta).$$

Se ne trae (*):

$$\rho_1 + \rho_2 = -2cW - c(\operatorname{tgh}\theta + \coth\theta)\Phi,$$
$$\rho_1 \rho_2 = c^2 \left\{ W^2 + (\operatorname{tgh}\theta + \coth\theta)\Phi W + \Phi^2 \right\}.$$

e però:

$$\rho_1\rho_2 + cW(\rho_1 + \rho_2) = c^2(\Phi^2 - W^2). \tag{14}$$

Ora introduciamo le notazioni di Weingarten e indichiamo con $p = W$ la distanza dell'origine del piano tangente di Σ e con:

$$2q = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

il quadrato della distanza dell'origine stessa dal punto di contatto. Dalle (13) abbiamo:

$$2q = c(\Phi^2 - W^2), \tag{15}$$

e la (14) diventa per ciò:

$$\rho_1\rho_2 + cp(\rho_1 + \rho_2) - 2cq = 0. \tag{16}$$

Siccome dalla (15) abbiamo:

$$\Phi = \sqrt{\frac{2q}{c} + p^2}, \tag{17}$$

(*) Queste medesime formole si possono stabilire direttamente dalle (12) facendo uso delle formole in coordinate tangenziali:

$$\rho_1 + \rho_2 = \Delta_2 W + 2W$$
$$\rho_1\rho_2 = \Delta_{22} W + W\Delta_2 W + W^2,$$

date a pag. 137-138 dalle *Lezioni*.

potremo scrivere la (16) sotto la forma:

$$\rho_1 \rho_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} + (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} = 0, \tag{16*}$$

che è appunto la forma delle equazioni d'AMPÈRE che si presentano nelle accennate ricerche di WEINGARTEN. Così adunque le superficie Σ, definite dalle formole (13) hanno a comune colle superficie S applicabili sulla sfera l'immagine sferica delle linee di curvatura e soddisfano l'equazione (16) o (16*) di WEINGARTEN. Non lascieremo di osservare che le formule (1) per le superficie $\overline{S}$ trasformate si possono scrivere:

$$\bar{x} = x + \frac{2\Phi}{c(\Phi^2 - W^2)}\xi, \quad \bar{y} = y + \frac{2\Phi}{c(\Phi^2 - W^2)}\eta, \quad \bar{z} = z + \frac{2\Phi}{c(\Phi^2 - W^2)}\zeta.$$

Per le osservazioni fatte al § 22, ove si voglia considerare in luogo della superficie S primitiva la sua coniugata di HAZZIDAKIS S', basterà scambiare u con v e Φ con W. La superficie Σ' dedotta da S' come Σ da S, soddisferà ad un'equazione della forma (16) ove però c sia cangiata in $-(c+1)$. D'altronde il suo elemento lineare dedotto dalla (13*) col detto scambio coincide con quello stesso della Σ; dunque:

Le due superficie Σ, Σ' sono applicabili l'una sull'altra con corrispondenza delle linee di curvatura.

È noto che le superficie aventi a comune con quelle applicabili sulla sfera l'immagine sferica delle linee di curvatura e *queste soltanto* (astrazione fatta dalle superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica) ammettono una flessione che conserva le linee di curvatura. Questo viene confermato nel caso attuale delle superficie Σ integrali della (16); ma ciò che vi si aggiunge di notevole è questo che anche dopo la flessione la superficie appartiene alla medesima classe (16) cangiatovi però c in $-(c+1)$. In fine osserviamo che due punti corrispondenti delle due superficie coniugate Σ, Σ' hanno costante ed $= \sqrt{\frac{c+1}{c}}$ il rapporto delle loro distanze dall'origine.

§ 25.

Caso delle superficie pseudosferiche.

Sia ora S una superficie pseudosferica di raggio $=1$. Dalle formole del § 23 deduciamo che W soddisfa alle equazioni seguenti:

$$W_{11}=\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\operatorname{sen}^2\theta\, W-\frac{1}{a^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\Phi,$$
$$W_{12}=0,$$
$$W_{22}=\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\cos^2\theta\, W+\frac{1}{a^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\Phi,$$

le derivate seconde covarianti di W essendo calcolate rispetto all'elemento lineare sferico rappresentativo:

$$d s_1^2=\operatorname{sen}^2\theta\, d u^2+\cos^2\theta\, d v^2,$$

della nostra superficie S. Ne segue che la superficie Σ inviluppo del piano:

$$\xi X_3+\eta Y_3+\zeta Z_3=W,$$

avrà le stesse immagini delle linee di curvatura della pseudosferica S. Per le coordinate ξ, η, ζ del punto di contatto del detto piano con Σ troviamo:

$$\xi=W X_3+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial W}{\partial u}X_1-\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial W}{\partial v}X_2, \tag{18}$$

e analogamente per η, ζ. Derivando rapporto ad u, v ne deduciamo:

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}=\frac{W\operatorname{sen}\theta-\Phi\cos\theta}{a^2}X_1,$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial v}=-\frac{W\cos\theta+\Phi\operatorname{sen}\theta}{a^2}X_2.$$

Ne risulta confermato che le linee u, v sono sulla Σ linee di curvatura. Di più, indicando con ρ_1, ρ_2 i raggi principali di curvatura di Σ, dal confronto delle precedenti colle altre:

$$\frac{\partial X_3}{\partial u}=\operatorname{sen}\theta\, X_1,\quad \frac{\partial X_3}{\partial v}=-\cos\theta\, X_2,$$

si trae:

$$\rho_1 = \frac{1}{a^2}(W + \Phi \operatorname{tg} \theta)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{a^2}(W - \Phi \cot \theta),$$

e quindi:

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{1}{a^2}\left\{ 2W + \Phi(\operatorname{tg}\theta - \cot\theta) \right\}$$

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{1}{a^4}\left\{ W^2 + \Phi W(\operatorname{tg}\theta - \cot\theta) - \Phi^2 \right\}.$$

Ne deduciamo:

$$\rho_1 \rho_2 - \frac{1}{a^2} W(\rho_1 + \rho_2) = -\frac{1}{a^4}(W^2 + \Phi^2),$$

e se poniamo, come al § 24:

$$p = W, \quad 2q = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{a^2}(W^2 + \Phi^2),$$

vediamo che le attuali superficie Σ soddisfano l'equazione d'Ampère:

$$a^2 \rho_1 \rho_2 - p(\rho_1 + \rho_2) + 2q = 0, \tag{19}$$

che è evidentemente la (16) stessa posto $c = -\frac{1}{a^2}$ colla differenza però che qui $\frac{2q}{c} + p^2$ è negativo. Ponendo:

$$\Phi = \sqrt{a^2 . 2q - p^2},$$

la (19) si scriverà nuovamente sotto la forma di Weingarten:

$$\rho_1 \rho_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} + (\rho_1 + \rho_2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \, \partial q} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} = 0. \tag{19*}$$

Nel caso $a = 1$ la (19) esprime che per le corrispondenti superficie Σ il segmento di ogni normale compreso fra i centri principali di curvatura è visto dall'origine sotto angolo retto. Sono queste le superficie considerate incidentalmente da Darboux nel Vol. IV delle *Leçons* (pag. 321) e da me più particolarmente studiate nel Vol. 24, Serie 2.ª di questi *Annali* (1896) sotto il nome di superficie Σ *paraboliche*.

Molte questioni rimarrebbero da trattare in generale per le superficie Σ integrali dell'equazione d'Ampère:

$$k r_1 r_2 - p(r_1 + r_2) + 2q = 0,$$

che abbiamo così visto collegarsi alla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante; ma riserbandone l'esame più accurato ad altra occasione per non deviare troppo dal soggetto principale contentiamoci qui di indicare le principali:

1.ª Le congruenze delle normali a queste superficie Σ sono cicliche e nelle superficie normali ai circoli abbiamo superficie della classe medesima.

2.ª L'inversione per raggi vettori reciproci rispetto all'origine cangia ogni superficie Σ della nostra classe in un' altra della medesima classe. La superficie Σ trasformata ha la medesima immagine delle linee di curvatura della superficie $\overline{S}$ a curvatura costante trasformata della primitiva S.

3.ª Dalle superficie Σ si ottengono, secondo il metodo di WEINGARTEN, con quadrature classi di superficie applicabili sopra una medesima superficie di rotazione. Le relazioni fra queste e le superficie fondamentali (ellissoide, iperboloide, ecc.) sono da studiarsi.

CAPITOLO V.

Composizione delle nuove trasformazioni mediante due successive trasformazioni complementari o di Bäcklund (reali od immaginarie).

§ 26.

LA TRASFORMAZIONE BICOMPLEMENTARE.

Come abbiamo avvertito nella prefazione, le trasformazioni delle superficie a curvatura costante, cui siamo stati condotti dai teoremi di GUICHARD, solo in parte possono dirsi *nuove*. Dimostreremo invero che nel caso delle superficie pseudosferiche, se la costante indicata con a al § 17 ha il valore 1, la trasformazione per passare dalla S alla $\overline{S}$ si compone di due successive trasformazioni complementari (*) e quando $a < 1$ risulta dal comporre due successive trasformazioni (reali) di BÄCKLUND. Quando invece siamo nel caso delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche con $a > 1$, ovvero quando

(*) Questa proprietà fu già avvertita da me nella mia prima Nota (*Rendiconti Lincei*) del 19 febbraio, le seguenti nella Nota del 23 aprile.

si tratti di superficie a curvatura costante *positiva* possiamo bensì scindere ancora la trasformazione in due elementari di Bäcklund, ma queste componenti sono sempre *necessariamente* immaginarie. Anche in questo caso ove, dal punto di vista reale, abbiamo da fare con trasformazioni nuove, l'esame delle effettive formole di composizione è sommamente interessante specialmente perchè ci dimostra come alle nuove trasformazioni siano applicabili le considerazioni stesse e tutte le conseguenze che ho dedotto dal *teorema di permutabilità* per la teoria delle trasformazioni reali di Bäcklund (*).

Volendo procedere alle attuali ricerche, potremmo cominciare dallo stabilire che, prese due superficie S, $\overline{S}$ colla medesima curvatura costante e trasformate l'una dell'altra secondo una trasformazione del Cap. III, esistono sempre ∞^1 superficie Σ ciascuna delle quali tanto con S quanto con $\overline{S}$ forma le due falde focali di una congruenza W (corrispondendosi cioè sulle due falde focali le assintotiche) e che tra queste ∞^1 superficie Σ ve ne sono sempre due reali od immaginarie, e coincidenti nel solo caso delle superficie pseudosferiche quando sia $a = 1$, le quali hanno la medesima curvatura costante di S, $\overline{S}$, sicchè le corrispondenti congruenze W sono pseudosferiche. Preferiamo un'altra via, meno completa ma più rapida, che ci conduce alla verifica delle proprietà essenziali da stabilirsi utilizzando il teorema di permutabilità.

Cominciamo nel presente paragrafo dallo stabilire che se si applica ad una superficie pseudosferica S una prima trasformazione complementare, indi alla nuova superficie pseudosferica ottenuta S' una nuova trasformazione complementare, che la cangi nella $\overline{S}$, questa superficie pseudosferica finale $\overline{S}$ deriverà dalla iniziale S precisamente con una trasformazione del § 18 quando si supponga $a = 1$. Per questa ragione la trasformazione che porta da S ad $\overline{S}$ si potrà dire *bicomplementare*.

Siano dunque S, $\overline{S}$ complementari di una medesima superficie pseudosferica S' e siano M, M, M' tre loro punti corrispondenti. I raggi delle congruenze pseudosferiche $M' M$, $M' \overline{M}$ sono rispettivamente tangenti a due sistemi di geodetiche parallele sopra S'. Ora consideriamo sopra S' quella geodetica g, perfettamente individuata, che è parallela in un senso alle geo-

(*) Il teorema in questione fu da me trovato nel 1892 (*Rendiconti dei Lincei*, Serie 5.ª, Vol. I, 2.° sem.) e trovasi ampiamente discusso nei §§ 257-260 delle *Lezioni*.

detiche del primo sistema, nell'altro senso a quelle del secondo. Se con u indichiamo la distanza geodetica sopra S' del punto variabile M' dalla detta geodetica, potremo dare all'elemento lineare di S' la nota forma iperbolica:

$$d s'^2 = d u^2 + \cosh^2 u \, d v^2, \tag{1}$$

e per l'angolo α di parallelismo, relativo al punto M' ed alla geodetica g, avremo (*):

$$\cos \alpha = \operatorname{tgh} u.$$

Se nel piano $M M' \overline{M}$ tiriamo in M, $\overline{M}$ le normali ai raggi $M' M$, $M' \overline{M}$, queste saranno le normali rispettivamente di S, $\overline{S}$ e si incontreranno in un punto M_0 tale che sarà:

$$M' M_0 = \frac{1}{\cos \alpha} = \coth u.$$

D'altra parte, se per la forma (1) dell'elemento lineare calcoliamo la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_u}$ dei circoli (a centro ideale) $u = \text{cost.}$, troviamo:

$$\frac{1}{\rho_u} = -\coth u,$$

onde risulta che M_0 è il centro di curvatura geodetica in M' della linea $u = \text{cost.}$ che vi passa e per ciò: *Il luogo del punto M_0 è la superficie S_0 complementare della S' rispetto alle geodetiche normali alla g.* Questa superficie S_0 è applicabile sulla logaritmica di rotazione (**) e poichè la sua normale in M_0 è la perpendicolare a $M' M_0$ nel piano $M M' \overline{M}$ vediamo che M, $\overline{M}$ giacciono simmetricamente rispetto al piano tangente in M_0 alla S_0. Di più il raggio r del parallelo della superficie logaritmica essendo dato (vedi Nota precedente) da:

$$r = \frac{1}{\operatorname{senh} u} = \operatorname{tg} \alpha,$$

(*) *Lezioni*, pag. 406.

(**) Il suo elemento lineare è infatti (*Lezioni*, pag. 243):

$$d s_0^2 = \coth^4 u \, d u^2 + \frac{d v^2}{\operatorname{senh}^2 u},$$

che, posto $r = \frac{1}{\operatorname{senh} u}$, può scriversi:

$$d s_0^2 = \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) d r^2 + r^2 d v^2.$$

se confrontiamo le attuali formole con quelle del § 7 vediamo che le due superficie pseudosferiche S, $\overline{S}$ derivano appunto, nel modo ivi assegnato, dalla S_0, l'angolo σ avendo qui evidentemente il valore complementare ad α.

Così abbiamo propriamente dimostrato che due successive trasformazioni complementari si compongono in una trasformazione del § 18 con $a = 1$. Che inversamente *ogni* tale trasformazione si componga di due successive complementari si vede subito, sia invertendo le considerazioni geometriche superiori, sia ricordando (§ 15) che la superficie $\overline{S}$ trasformata della S è pienamente determinata quando di un dato punto M di S si conosca il corrispondente $\overline{M}$ sopra $\overline{S}$ ed in $\overline{M}$ il piano tangente della trasformata.

§ 27.

Composizione di due trasformazioni reali opposte di Bäcklund.

Per procedere all'esame dei casi ulteriori conviene che ricordiamo brevemente le formole date dal teorema di permutabilità.

Sia S una superficie pseudosferica di elemento lineare (riferito alle linee di curvatura):

$$d s^2 = \cos^2 \theta \, d u^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d v^2,$$

ove θ è una soluzione dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \tag{α}$$

e siano S_1, S_2 due trasformate pseudosferiche di S dedotte da questa mediante due trasformazioni di Bäcklund B_{σ_1}, B_{σ_2} a costanti σ_1, σ_2 diverse e coi rispettivi elementi lineari:

$$d s_1^2 = \cos^2 \theta_1 \, d u^2 + \operatorname{sen}^2 \theta_1 \, d v^2$$
$$d s_2^2 = \cos^2 \theta_2 \, d u^2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2 \, d v^2.$$

Le funzioni θ_1, θ_2, soluzioni della (α), sono legate alla primitiva θ dalle formole:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta + \operatorname{sen} \sigma_1 \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta}{\cos \sigma_1} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\frac{\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \sigma_1 \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta}{\cos \sigma_1}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \theta_2}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial v}&=\frac{\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta+\operatorname{sen}\sigma_2\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta}{\cos\sigma_2}\\ \frac{\partial \theta_2}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u}&=-\frac{\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\sigma_2\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta}{\cos\sigma_2}.\end{aligned}\right\}\qquad(2^*)$$

Il teorema di permutabilità stabilisce che esiste una quarta superficie pseudosferica S_3, d'elemento lineare:

$$d\,s_3^2=\cos^2\theta_3\,d\,u^2+\operatorname{sen}^2\theta_3\,d\,v^2,$$

determinabile in termini finiti dalla formola:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)}\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right),\qquad(3)$$

che è legata alla S_1 da una trasformazione B'_{σ_2} di BÄCKLUND a costante σ_2 e alla S_2 da una trasformazione di BÄCKLUND B'_{σ_1} a costante σ_1. Quattro punti corrispondenti qualsiasi M, M_1, M_2, M_3 delle quattro superficie pseudosferiche S, S_1, S_2, S_3 segnano i vertici di un quadrilatero sghembo di cui due lati opposti $M\,M_1$, $M_2\,M_3$ serbano la lunghezza costante $=\cos\sigma_1$ e gli altri due la lunghezza $\cos\sigma_2$; i due lati concorrenti in ogni vertice giacciono nel piano tangente della corrispondente superficie pseudosferica.

Supponiamo ora in particolare che si abbia $\sigma_2=-\sigma_1$, cioè che le due trasformazioni di BÄCKLUND siano opposte. Il quadrilatero sghembo $M\,M_1\,M_2\,M_3$ diventa allora una losanga e, a causa della sua simmetria, le normali in due vertici opposti, per es., M, M_3 alle superficie S, S_3 si incontrano in un punto M_0, equidistante da M, M_3. Ponendo:

$$M\,M_0=M_3\,M_0=T,$$

dalle formole effettive che dànno le coordinate dei vertici (*Lezioni*, l. c.) si trova facilmente:

$$T=\cot\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)\overset{(*)}{=}\operatorname{sen}\sigma_1\cot\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right).\qquad(4)$$

Del resto questa formola, prescindendo dalla precisa determinazione dei segni, si può stabilire anche con considerazioni elementari trigonometriche,

(*) Per far coincidere questa formola colla (11) § 23 basta cangiare θ_3 in $\overline{\theta}+\pi$.

osservando che i quattro lati della losanga sono di lunghezza $=\cos\sigma_1$ e l'angolo in M_0 o M_3 è dato da $\theta_3-\theta$, quello in M_1 o M_2 da $\theta_1-\theta_2$.

Dimostreremo che la S_3 si deduce da S precisamente colla trasformazione del § 18, ove si dia alla costante a il valore $a=\cos\sigma$, provando che la funzione T data dalla (4) soddisfa le equazioni fondamentali (20) (21) § 17. E infatti dalla (4) derivando ed osservando le (2), (2*), deduciamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}&=\frac{-\operatorname{tg}\sigma\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} \\ \frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}&=\frac{\operatorname{tg}\sigma\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

da cui quadrando e sommando:

$$\frac{1}{(\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{(\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\sigma}(T^2+1),$$

che è precisamente la (20) § 17 fattovi $a=\cos\sigma$. Per verificare similmente la (21) del detto paragrafo, conviene scriverla per es. sotto la forma della seconda delle (22) (ibid.) ed osservare che essa coincide con quella ottenuta derivando la prima delle (5) rapporto a v. Ne concludiamo quindi: *La superficie pseudosferica S_3, che si ottiene da S con due trasformazioni di* Bäcklund *successive ed opposte B_σ, $B_{-\sigma}$, deriva direttamente da S applicando una trasformazione del § 18 con $a=\cos\sigma$.*

Viceversa si vede subito che *tutte* le trasformazioni del § 18 con $a<1$ si ottengono componendo due trasformazioni opposte di Bäcklund.

Segue che la superficie S_0 descritta dal punto M_0 d'incontro di due normali corrispondenti a S, S_3 è applicabile sul catenoide accorciato, avente la curva meridiana:

$$r=\operatorname{sen}\sigma_1\cosh z;$$

di più il piano tangente in M_0 alla S_0 è il piano di simmetria $M_1 M_0 M_2$ della losanga. Per la medesima ragione, anche le normali in M_1, M_2 alle due superficie pseudosferiche S_1, S_2 si incontrano in un punto M'_0, che descrive una seconda superficie S'_0 applicabile sul medesimo catenoide accorciato. D'altronde il piano tangente in M'_0 alla S'_0 è l'altro piano di simmetria $M M'_0 M_3$ della losanga; dunque la retta $M_0 M'_0$ che segna la perpendicolare comune alle due diagonali della losanga descrive una congruenza W normale (i due piani focali essendo ortogonali) colle superficie focali S_0, S'_0. Arriviamo evidentemente al teorema: *Una superficie S_0 applicabile sul catenoide accorciato ha per complementare S' (rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani) una superficie applicabile sul medesimo catenoide.*

È facile del resto dare di questo teorema una dimostrazione diretta, ciò che conduce per altra via ai risultati ora stabiliti.

§ 28.

Composizione di due trasformazioni puramente immaginarie opposte di Bäcklund.

I risultati analitici, concernenti le soluzioni dell'equazione (α):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \tag{α}$$

forniti dal teorema di permutabilità, sono naturalmente indipendenti dall'essere queste soluzioni e le costanti σ_1, σ_2 reali o complesse.

Suppongasi ora che, essendo sempre la θ una soluzione *reale* della (α), si dia a σ_1 un valore complesso qualsiasi; la funzione θ_1 integrale del sistema (2) sarà naturalmente complessa. Se indichiamo con $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\theta}_1$ le quantità coniugate di σ_1, θ_1, vediamo subito che le (2*) saranno soddisfatte ponendo:

$$\sigma_2 = \bar{\sigma}_1, \quad \theta_2 = \bar{\theta}_1,$$

mentre la formula (3), che diventa:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \frac{\cos \frac{1}{2}(\sigma_1 + \bar{\sigma}_1)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\sigma_1 - \bar{\sigma}_1)} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right), \tag{6}$$

essendo evidentemente reale il secondo membro, ci dimostra che *la quarta soluzione θ_3 risulta nuovamente reale* e reale sarà quindi pure la superficie pseudosferica S_3 corrispondente.

Ora dimostreremo che ove si prenda σ_1 puramente immaginario, diciamo:

$$\sigma_1 = i\sigma \quad (\sigma \text{ reale}),$$

la S_3 si dedurrà dalla S precisamente con una delle nuove trasformazioni § 18 ove si faccia $a = \cosh\sigma$ $(a > 1)$; verremo così a stabilire il teorema:

Le nuove trasformazioni delle superficie pseudosferiche del § 18, corrispondenti ad un valore > 1 della costante a, si compongono di due successive trasformazioni di Bäcklund *puramente immaginarie e coniugate $B_{i\sigma}$, $B_{-i\sigma}$.*

Scindendo in θ_1 il reale dell'immaginario, poniamo:

$$\theta_1 = \omega + i\,\varphi,$$

indi $\theta_2 = \omega + i\,\varphi$ e la (6) si scriverà, sotto forma reale:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{tgh}\varphi}{\operatorname{senh}\sigma}. \tag{6*}$$

D'altronde, separando nelle (2) il reale dall'immaginario, presenteremo queste formole sotto l'aspetto seguente reale:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \frac{\cos\theta\cosh\varphi + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{senh}\varphi}{\cosh\sigma}\operatorname{sen}\omega\\
\frac{\partial\omega}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} &= \frac{-\operatorname{sen}\theta\cosh\varphi + \operatorname{senh}\sigma\cos\theta\operatorname{senh}\varphi}{\cosh\sigma}\cos\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial u} &= \frac{\cos\theta\cosh\varphi + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{senh}\varphi}{\cosh\sigma}\cos\omega\\
\frac{\partial\varphi}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{senh}\varphi - \operatorname{senh}\sigma\cos\theta\cosh\varphi}{\cosh\sigma}\operatorname{sen}\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Questo è un sistema di equazioni ai differenziali totali per le due funzioni reali ω, φ di u, v; esso è illimitatamente integrabile come è chiaro a priori, pel modo con cui fu dedotto dal sistema (2) e come si verifica del resto direttamente, osservando la (α).

Sarà dimostrato il nostro teorema quando si provi che assumendo:

$$T = \cot\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{senh}\sigma\coth\varphi,$$

saranno soddisfatte le (20) (21) § 17 ove si faccia $a = \cosh\sigma$; e infatti gli sviluppi del § 23 provano allora che la superficie pseudosferica trasformata ha precisamente l'elemento lineare:

$$\overline{d\,s}^2 = \cos^2\theta_3\,d\,u^2 + \operatorname{sen}^2\theta_3\,d\,v^2,$$

e coincide quindi con S_3.

Ora dalla precedente, derivando, si trova per le (II):

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\cos\theta + T \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u} &= -\frac{\operatorname{tgh}\sigma\cos\omega}{\operatorname{senh}\varphi} \\ \frac{1}{\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v} &= -\frac{\operatorname{tgh}\sigma\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{senh}\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

onde:

$$\frac{1}{(\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cosh^2\sigma}(T^2+1);$$

così la 20) § 17 è verificata. Similmente, derivando la 1.ª delle (7) rapporto a v coll'osservare le (I), (II), si verificherà la 2.ª delle (22) § 17, ossia la (21).

Per arrivare alle trasformazioni del § 18 con $a > 1$ abbiamo composto due trasformazioni di Bäcklund $B_{i\sigma}$, $B_{i-\sigma}$ *puramente* immaginarie coniugate. Ma, come abbiamo avvertito al principio del paragrafo, otteniamo egualmente trasformazioni *reali* componendo più in generale due trasformazioni di Bäcklund complesse coniugate. In quale relazione stanno queste più generali trasformazioni colle speciali da noi studiate? Se ponendo $\sigma_1 = \sigma + i\sigma'$, $\theta_1 = \omega + i\varphi$, si separa nuovamente nelle (2) il reale dall'immaginario, si trova per le ω, φ un sistema di equazioni più generali delle (I), (II), ma che a queste si riducono con un mutamento lineare delle variabili u, v. Adoperando l'identico processo che al § 256 delle *Lezioni* ci ha servito per dimostrare come una trasformazione di Bäcklund si compone di una complementare e di due trasformazioni di Lie, si arriva ad un risultato perfettamente analogo e cioè al teorema:

Le trasformazioni più generali di cui si tratta si compongono di una nostra particolare preceduta e seguita da due trasformazioni di Lie *inverse l'una dell'altra.*

Se analiticamente le trasformazioni più generali si riducono così alle particolari e a trasformazioni di Lie, non se ne deduca che l'esame diretto della loro natura geometrica debba essere considerato come superfluo; anzi è facile prevedere che condurrà a risultati interessanti, occupando le dette trasformazioni, di fronte alle particolari di cui qui ci occupiamo, il medesimo posto come la trasformazione di Bäcklund di fronte alla trasformazione complementare.

§ 29.

Il teorema di permutabilità per l'equazione: $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}+\operatorname{senh}\theta\cosh\theta=0$.

I risultati conseguiti nei paragrafi precedenti per la composizione delle nuove trasformazioni delle superficie pseudosferiche mediante trasformazioni di Bäcklund sussistono ancora, come ci proponiamo di dimostrare, per le superficie a curvatura costante positiva; soltanto qui le trasformazioni elementari componenti sono sempre necessariamente immaginarie.

L'equazione fondamentale:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}+\operatorname{senh}\theta\cosh\theta=0, \tag{β}$$

da cui dipende la ricerca delle superficie a curvatura costante $K=+1$, si riduce subito, introducendo gli immaginarii, alla forma:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2}=\operatorname{sen}\omega\cos\omega,$$

e dal punto di vista analitico valgono quindi ancora tutti gli sviluppi relativi al teorema di permutabilità. Presentiamo qui le formole sotto la forma che meglio si presta ai confronti colle nostre precedenti.

Sia θ una soluzione qualsiasi (reale o complessa) della (β) e indichi σ_1 una costante pure qualsiasi (reale o complessa). Denotando con θ_1 una conveniente funzione di u, v, si consideri il seguente sistema di equazioni simultanee:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \theta_1}{\partial u}+i\frac{\partial \theta}{\partial v}&=\operatorname{senh}\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1+\cosh\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1\\ i\frac{\partial \theta_1}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u}&=-\operatorname{senh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1-\cosh\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$(i=\sqrt{-1});$$

queste costituiscono, a causa della (β) cui soddisfa θ, un sistema illimitatamente integrabile di equazioni ai differenziali totali per la funzione incognita θ_1. Di più, eliminando per derivazione θ dai primi membri delle (8), si vede che ogni soluzione θ_1 delle (8) è una nuova soluzione della (β): diremo che la soluzione θ_1 è ottenuta dalla θ mediante la trasformazione B_{σ_1}.

Prendasi ora per la costante un altro valore σ_2 e si determini similmente una terza soluzione θ_2 della (β) dalle equazioni simultanee:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_2}{\partial u}+i\frac{\partial \theta}{\partial v} &= \operatorname{senh}\sigma_2\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2+\cosh\sigma_2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2 \\ i\frac{\partial \theta_2}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\operatorname{senh}\sigma_2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2-\cosh\sigma_2\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2 . \end{aligned}\right\} \quad (8^*)$$

Note che siano θ_1, θ_2, dimostriamo che si può dedurre, in termini finiti, una quarta soluzione θ_3 della (β) che sia legata a θ_1, θ_2 rispettivamente dalle trasformazioni B_{σ_2}, B_{σ_1} colle costanti σ invertite. Dovranno dunque sussistere insieme le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial u}+i\frac{\partial \theta_3}{\partial v} &= \operatorname{senh}\sigma_2\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_1+\cosh\sigma_2\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_1 \\ i\frac{\partial \theta_1}{\partial v}+\frac{\partial \theta_3}{\partial u} &= -\operatorname{senh}\sigma_2\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_1-\cosh\sigma_2\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_1 . \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_2}{\partial u}+i\frac{\partial \theta_3}{\partial v} &= \operatorname{senh}\sigma_1\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_2+\cosh\sigma_1\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_2 \\ i\frac{\partial \theta_2}{\partial v}+\frac{\partial \theta_3}{\partial u} &= -\operatorname{senh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_2-\cosh\sigma_1\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_2 . \end{aligned}\right\} \quad (9^*)$$

Sottraendo le (9), (9*) corrispondenti e confrontando coi risultati ottenuti similmente dalle (8), (8*), facilmente si traggono le due equazioni:

$$\cosh(\theta_3-\theta)=\frac{\cosh(\sigma_1-\sigma_2)\cosh(\theta_1-\theta_2)-1}{\cosh(\theta_1-\theta_2)-\cosh(\sigma_1-\sigma_2)}$$

$$\operatorname{senh}(\theta_3-\theta)=\frac{\operatorname{senh}(\sigma_1-\sigma_2)\operatorname{senh}(\theta_1-\theta_2)}{\cosh(\theta_1-\theta_2)-\cosh(\sigma_1-\sigma_2)},$$

le quali sono concordanti, essendo $=1$ la differenza dei quadrati dei secondi membri. Esse possono sostituirsi coll'unica formola ben semplice:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\coth\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right), \quad (10)$$

e su questa facilmente si verifica che la funzione θ_3, così definita, soddisfa effettivamente le (9), (9*).

Il risultato così conseguito per le soluzioni della equazione (β) indicheremo nuovamente col nome di *teorema di permutabilità*.

§ 30.

Composizione delle nuove trasformazioni per le superficie a curvatura costante positiva.

Suppongasi ora che la soluzione iniziale θ sia *reale* e la costante σ_1 sia complessa qualunque. Indicando, come al § 28 con $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\theta}_1$ le quantità coniugate di σ_1, θ_1 si vedrà subito che le (8*) risultano soddisfatte se si pone:

$$\sigma_2 = -\bar{\sigma}_1, \quad \theta_2 = \pi i - \bar{\theta}_1;$$

allora la formola (10) diventa:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1 + \bar{\sigma}_1}{2}\right) \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_1 + \bar{\theta}_1}{2}\right). \tag{11}$$

Essendo il secondo membro reale e minore, in valore assoluto, dell'unità vediamo che *la quarta soluzione θ_3 risulta nuovamente reale.* Vi corrisponde quindi una superficie reale S_3 di curvatura $K = +1$ e d'elemento lineare:

$$d s_3^2 = \operatorname{senh}^2 \theta_3 \, d u^2 + \cosh^2 \theta_3 \, d v^2;$$

essa dipenderà da quattro costanti arbitrarie due rappresentate dalla parte reale e dal coefficiente dell'immaginario in σ_1 le altre due provenienti dai valori iniziali della parte reale e della complessa in θ_1.

Allo scopo però di arrivare alle trasformazioni delle superficie a curvatura costante positiva studiate al Cap. III, conviene particolarizzare il valore della costante σ_1 supponendola senz'altro reale $= \sigma$ (*). Scindendo nuovamente θ_1 nella sua parte e complessa col porre:

$$\theta_1 = \omega + i \varphi,$$

le (9) ci dànno per le funzioni incognite reali ω, φ il sistema simultaneo illimitatamente integrabile:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial u} &= (\operatorname{senh} \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \omega + \cosh \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \omega) \cos \varphi \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} &= -(\operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} \omega + \cosh \sigma \cosh \theta \cosh \omega) \operatorname{sen} \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(*) Anche qui, come nel caso delle superficie pseudosferiche, è da osservarsi che la più generale trasformazione ottenuta col supporre σ_1 complessa qualunque si compone di una nostra particolare preceduta e seguita da due trasformazioni di Lie-Bonnet inversa l'una dell'altra. (Cf. le osservazioni in fondo al § 28.)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}&=(\operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\cosh\omega+\cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\omega)\operatorname{sen}\varphi\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\theta}{\partial u}&=(\operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\omega+\cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\omega)\cos\varphi,\end{aligned}\right\}\quad(12^*)$$

e la (11) diventa:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\operatorname{tgh}\sigma\operatorname{tgh}\omega. \qquad (13)$$

Andiamo a verificare che la superficie S_3, applicabile sulla sfera, corrispondente alla soluzione θ_3 dell'equazione fondamentale (β) definita dalla (13), si deduce dalla S appunto colla costruzione del § 15, ove si riporti sopra ogni normale di S il segmento:

$$T=\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\operatorname{tgh}\sigma\operatorname{tgh}\omega. \qquad (14)$$

Derivando ed osservando le (12), troviamo infatti:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}&=\frac{\operatorname{senh}\sigma\cos\varphi}{\cosh\omega}\\ \frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}&=-\frac{\operatorname{senh}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\cosh\omega},\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

da cui quadrando e sommando abbiamo:

$$\frac{1}{(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+1=\frac{\operatorname{senh}^2\sigma}{\cosh^2\omega}+1=$$
$$=-\cosh^2\sigma\,(T^2-1).$$

Dunque T soddisfa all'equazione fondamentale (I) § 12, ove alla costante c si dia il valore negativo:

$$c=-\cosh^2\sigma.$$

Resta solo a dimostrarsi che T soddisfa anche l'altra equazione (II) § 12 o, ciò che è lo stesso, la seconda delle (III*):

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)=$$
$$=\operatorname{senh}\theta\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\;\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}+$$
$$+\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}.$$

La verifica è immediata, ove si derivi rispetto a v la prima delle (15) e si abbia riguardo alle (12), (12*) ed alle (15) stesse.

Da quanto abbiamo dimostrato risulta che il luogo S_0 degli estremi dei segmenti T staccati sulle normali di S, è applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione di semi-asse maggiore $= 1$, di semi-asse minore $= \frac{1}{\cosh \sigma}$ e, confrontando le formole attuali con quelle del § 21, chiaramente vediamo che la superficie $\overline{S}$ simmetrica di S rispetto a S_0 ha precisamente l'elemento lineare:

$$\overline{d s^2} = \operatorname{senh}^2 \theta_3 \, d u^2 + \cosh^2 \theta_3 \, d v^2,$$

e coincide quindi colla nostra S_3.

Così mediante due successive trasformazioni immaginarie di Bäcklund abbiamo composto la trasformazione reale delle superficie a curvatura costante positiva del Cap. III, corrispondente ad un valore *negativo* della costante c. Per considerare anche il caso della c positiva basta (come risulta anche a priori dalle osservazioni del § 22) scambiare in tutte le nostre formole precedenti, in particolare nelle (12), (12*), u con v. Assumendo allora:

$$T = \coth \sigma \coth \omega,$$

si vedrà subito che ne risultano soddisfatte le equazioni di trasformazione (I), (II) § 12 ove si ponga:

$$c = \operatorname{senh}^2 \sigma.$$

In tal caso riportando sulle normali alla superficie iniziale S segmenti $= T$, il luogo S_0 degli estremi sarà applicabile sull'iperboloide di rotazione a due falde colle lunghezze:

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{\operatorname{senh} \sigma},$$

dei semi-assi trasverso e coniugato.

§ 31.

Le conseguenze del teorema di permutabilità.

Gli sviluppi analitici dei paragrafi precedenti relativi alle nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante non hanno soltanto il vantaggio di risolverle in trasformazioni più semplici (immaginarie): essi conducono, come ora si vedrà, a dimostrare l'importante teorema:

Se per una superficie a curvatura costante si sanno completamente integrare le equazioni di trasformazione per tutti i valori della costante che vi figura (*), *l'applicazione successiva ed illimitata delle nostre trasformazioni alle nuove superficie a curvatura costante via via ottenute richiederà soltanto calcoli algebrici e di derivazione.*

Procediamo infatti come al § 259 delle *Lezioni*, utilizzando il teorema di permutabilità. Poniamo per es. che la superficie iniziale S sia a curvatura costante positiva $K = +1$ e corrisponda alla soluzione θ della (β). Per la nostra ipotesi, sapremo integrare completamente, per ogni valore della costante reale σ (incluso $\sigma = 0$), il sistema:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial u} + i\frac{\partial \theta}{\partial v} = \operatorname{senh} \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1 + \cosh \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_1$$

$$i\frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = -\operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_1 - \cosh \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1,$$

e la soluzione più generale θ_1 conterrà, oltre σ, una costante arbitraria complessa C, sicchè potremo scrivere:

$$\theta_1 = \theta_1(u, v, \sigma, C).$$

Si consideri ora una soluzione speciale θ'_1 del sistema corrispondente al valore σ' di σ ed al valore C_1 di C, sia dunque:

$$\theta'_1 = \theta_1(u, v, \sigma_1, C_1).$$

Basterà dimostrare che della θ'_1 possiamo determinare, senza calcoli di integrazione, tutte le soluzioni trasformate mediante una qualunque B_σ. In-

(*) Intendiamo che non siano nemmeno esclusi i valori $c = -1$, $a = 1$ delle costanti che figurano nelle equazioni di trasformazione (I), (III) § 12 e (20), (22) § 17, ciò che significa (Cf. § 20 in fondo) che della superficie iniziale S si suppongono note le linee geodetiche.

tanto se $\sigma \neq \sigma'$, la formola del teorema di permutabilità:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\Theta - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma - \sigma'}{2}\right) \coth\left(\frac{\theta_1 - \theta'_1}{2}\right),$$

ci farà conoscere in termini finiti la trasformata Θ di θ mediante la B_σ. Se poi $\sigma = \sigma'$ basterà, come al § 259 delle *Lezioni*, dedurre dalla precedente con passaggio al limite la formola:

$$\coth\left(\frac{\Theta_1 - \theta}{2}\right) = \left[\frac{\partial \theta_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial \theta_1}{\partial C} C'\right]_{\sigma=\sigma'},$$

dove dopo la derivazione si farà $\sigma = \sigma'$, $C = C_1$ e con C' è indicata una nuova costante arbitraria; questa ci definisce la trasformata della θ'_1 mediante la $B_{\sigma'}$.

Come immediata conseguenza del teorema, noteremo ancora che: *Sulle successive superficie a curvatura costante trasformate si otterrà in termini finiti l'equazione delle linee geodetiche.* Ciò risulta subito dall'osservazione in nota al teorema. Direttamente lo dimostriamo osservando che per ciascuna delle trasformate, che torneremo a indicare con S, sapremo integrare completamente il sistema (12), (12*) anche per $\sigma = 0$ vale a dare il sistema:

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = \cosh\omega \operatorname{senh}\theta \cos\varphi, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial v} = -\cosh\omega \cosh\theta \operatorname{sen}\varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = \operatorname{senh}\omega \operatorname{senh}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial u} = \operatorname{senh}\omega \cosh\theta \cos\varphi.$$

Le prime due ci dimostrano che l'espressione:

$$\operatorname{senh}\theta \cos\varphi\, du - \cosh\theta \operatorname{sen}\varphi\, dv = \frac{d\omega}{\cosh\omega} \text{ (*)},$$

(*) Si osservi che anche l'espressione:

$$\cosh\omega\,(\operatorname{senh}\theta \operatorname{sen}\varphi\, du + \cosh\theta \cos\varphi\, dv),$$

è il differenziale esatto di una funzione τ; dalle due formole:

$$\operatorname{senh}\theta \cos\varphi\, du - \cosh\theta \operatorname{sen}\varphi\, dv = \frac{d\omega}{\cosh\omega},$$

$$\operatorname{senh}\theta \operatorname{sen}\varphi\, du + \cosh\theta \cos\varphi\, dv = \frac{d\tau}{\cosh\omega},$$

quadrando e sommando si ha:

$$\operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2 = \frac{d\omega^2 + d\tau^2}{\cosh^2\omega},$$

e l'elemento lineare di S è così ridotto a forma geodetica isoterma.

è il differenziale esatto della funzione:

$$\psi = 2 \operatorname{arc\,tg}(e^{\omega}),$$

e poichè:

$$\Delta_1 \psi = \frac{1}{\operatorname{senh}^2 \theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\cosh^2 \theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 = 1,$$

si ha una soluzion ψ dell'equazione $\Delta_1 \psi = 1$ con due costanti arbitrarie, ciò che dà elementi sovrabbondanti per la determinazione in termini finiti delle linee geodetiche (*).

Con queste ultime ricerche abbiamo evidentemente portato la teoria delle nuove trasformazioni per le superficie a curvatura costante positiva al punto medesimo di sviluppo che la teoria delle trasformazioni di Bäcklund per le superficie pseudosferiche nuove, col teorema di permutabilità, ha da tempo raggiunto. Così, se ritorniamo ai risultati conseguiti al § 16 e 19 partendo dalla soluzione $\theta = 0$, vediamo che alla superficie d'Enneper trovate e alle loro successive trasformate sapremo illimitatamente applicare le nostre trasformazioni, con soli calcoli algebrici e di derivazione.

CAPITOLO VI.

Le nuove trasformazioni applicate ai sistemi tripli ortogonali contenenti una serie di superficie a curvatura costante.

§ 32.

Richiamo delle formole relative ai sistemi di Weingarten a curvatura positiva.

Ci volgiamo ora alle ultime ricerche della presente Memoria, considerando non più superficie a curvatura costante isolate, ma serie ∞^1 di tali superficie, appartenenti ad un sistema triplo ortogonale. La curvatura delle superficie della detta serie può avere il medesimo valore costante per tutte, ovvero essere più in generale variabile dall'una all'altra. Limitandoci a dare nei due ultimi paragrafi le formole relative al caso generale, restringeremo,

(*) *Lezioni*, pag. 165.

per ragioni di brevità, la trattazione dettagliata, al caso cioè di quei sistemi tripli ortogonali che ho chiamato *sistemi di* WEINGARTEN (*).

È noto come pei sistemi tripli ortogonali pseudosferici (contenenti cioè una serie di superficie pseudosferiche) possedevamo, nella trasformazione di BÄCKLUND, un mezzo per dedurre da un sistema noto infiniti nuovi sistemi della medesima specie. Ci proponiamo di far vedere come le nuove trasformazioni permettono di raggiungere il medesimo scopo per tutti i sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie a curvatura costante positiva o negativa. Ciò è facile a prevedersi analiticamente, dopo i risultati conseguiti al Cap. V; ma la conferma diretta mediante formole definitive, libere affatto da immaginarii, presenta un effettivo interesse, specialmente nel caso che le superficie di una serie siano a curvatura costante *positiva*, poichè le nostre cognizioni su questi sistemi si limitavano fin qui ai teoremi d'esistenza, come seguono dalla teoria generale delle equazioni a derivate parziali.

Cominciamo dal riprendere le formole fondamentali relative ai sistemi di WEINGARTEN di curvatura positiva $K=+1$. Al quadrato dell'elemento lineare dello spazio riferito ad un tale sistema triplo ortogonale (u, v, w), le $w=$ cost. essendo le superficie di curvatura $K=+1$, possiamo dare la forma (**):

$$d s^2 = \operatorname{senh}^2 \theta \, d u^2 + \cosh^2 \theta \, d v^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 d w^2, \tag{1}$$

dove θ è una funzione delle tre variabili u, v, w, che soddisfa le equazioni caratteristiche:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh} \theta \cosh \theta = 0, \\ \frac{1}{\operatorname{senh}^2 \theta}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w}\right)^2 + \frac{1}{\cosh^2 \theta}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 = 1 \, ; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

viceversa ogni soluzione θ del sistema (2) definisce un corrispondente sistema di WEINGARTEN. Oltre a queste equazioni di 2.° ordine, cui soddisfa θ, conviene tener conto pei calcoli seguenti anche delle equazioni del 3.° or-

(*) Vedi la mia Memoria nel Tom. XIII, serie 2.ª di questi *Annali*, ovvero *Lezioni*, Cap. XX.

(**) *Lezioni*, pag. 530.

dine che ne seguono:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)=-\operatorname{senh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}-\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)=\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)=\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)=-\cosh\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}-\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}.
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Indichiamo poi con x, y, z le coordinate di un punto mobile dello spazio espresse pei parametri u, v, w del sistema triplo ortogonale e con:

$$\begin{gathered}(X_1,\ Y_1,\ Z_1)\\(X_2,\ Y_2,\ Z_2)\\(X_3,\ Y_3,\ Z_3),\end{gathered}$$

i rispettivi coseni di direzione delle tangenti alle linee coordinate (u), (v), (w); avremo le formole:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\operatorname{senh}\theta\,X_1, && \frac{\partial x}{\partial v}=\cosh\theta\,X_2, && \frac{\partial x}{\partial w}=\frac{\partial\theta}{\partial w}X_3,\\
&\frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{\partial\theta}{\partial v}X_2-\cosh\theta\,X_3, && \frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial u}X_2, && \frac{\partial X_1}{\partial w}=\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}X_3,\\
&\frac{\partial X_2}{\partial u}=\frac{\partial\theta}{\partial v}X_1, && \frac{\partial X_2}{\partial v}=-\frac{\partial\theta}{\partial u}X_1-\operatorname{senh}\theta\,X_3, && \frac{\partial X_2}{\partial w}=\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}X_3,\\
&\frac{\partial X_3}{\partial u}=\cosh\theta\,X_1, && \frac{\partial X_3}{\partial v}=\operatorname{senh}\theta\,X_2, && \frac{\partial X_3}{\partial w}=-\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}X_1-\\
&&&&& \quad-\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}X_2.
\end{aligned}$$

e le analoghe per y, z; Y_i, Z_i $(i=1,\ 2,\ 3)$.

§ 33.

Le trasformazioni dei sistemi di Weingarten a curvatura positiva.

Richiamate le formole fondamentali che servono al nostro scopo, andiamo ora a trattare il problema della trasformazione. Di ciascuna superficie S a curvatura costante $K = +1$ del sistema w prendiamo *una* trasformata $\overline{S}$ secondo la trasformazione del § 15 definita dalle formole (10) ibid.:

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} = x + \frac{2T}{c(T^2-1)}\Big\{ X_3 - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u} X_1 - \\ - \frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v} X_2 \Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

dove c indica una costante assoluta e T sarà attualmente funzione di u, v e di w, la quale dovrà intanto soddisfare le equazioni fondamentali (I) (II) § 12:

$$\frac{1}{(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + 1 = c(T^2-1). \quad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right) = \\ = \operatorname{senh}\theta \frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v} + \\ + \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

Ora noi vogliamo esaminare se è possibile determinare ulteriormente T in guisa che le ∞^1 superficie $\overline{S}$, a curvatura $K = +1$, facciano parte esse stesse di un nuovo sistema di Weingarten. Siccome sulle superficie $\overline{S}$ le linee di curvatura u, v si corrispondono, il teorema di Darboux-Dupin dimostra che ciò avrà luogo se nel sistema $(u.\ v,\ w)$ definito dalle (5) le linee coordinate (w) saranno ortogonali alle superficie $\overline{S}$, ciò che richiede la proporzionalità delle derivate:

$$\frac{\partial\overline{x}}{\partial w},\quad \frac{\partial\overline{y}}{\partial w},\quad \frac{\partial\overline{z}}{\partial w},$$

ai coseni di direzione:

$$\overline{X}_3,\ \overline{Y}_3,\ \overline{Z}_3,$$

della normale alla $\overline{S}$. Ora per le (11) § 5 abbiamo:

$$\overline{X}_3 = \frac{2}{c(T^2-1)}\left\{\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}X_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}X_2 + \frac{cT^2-(c+2)}{2}X_3\right\},$$

e d'altronde, derivando le (5) rapporto a w, otteniamo:

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial w} = A\,X_1 + B\,X_2 + C\,X_3,$$

ove si ponga per brevità:

$$A = -\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{2T}{c(T^2-1)}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right) - \frac{2T}{c(T^2-1)}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}$$

$$B = -\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{2T}{c(T^2-1)}\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right) - \frac{2T}{c(T^2-1)}\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}$$

$$C = \frac{\partial\theta}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{2T}{c(T^2-1)}\right) - \frac{2T}{c(T^2-1)}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u} -$$

$$- \frac{2T}{c(T^2-1)}\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}.$$

Per esprimere le dette condizioni avremo dunque le proporzioni:

$$\frac{A}{\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\dfrac{\partial T}{\partial u}} = \frac{B}{\dfrac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial T}{\partial v}} = \frac{C}{\dfrac{cT^2-(c+2)}{2}}, \tag{6}$$

L'eguaglianza dei due primi termini porge l'equazione:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right) - \\ &- \frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right) = \\ &= \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u} - \\ &- \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

e se a questa associamo la seguente che risulta dal derivare la (α) rapporto a w:

$$\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)+$$
$$+\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right)=c\,T\frac{\partial T}{\partial w},$$

possiamo risolvere queste due rapporto alle due derivate:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right),\quad \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right),$$

e introducendo questi valori nella rimanente equazione (6), troviamo l'ulteriore equazione del 1.° ordine per T:

$$\left.\begin{aligned}(c+1)\left(\frac{\partial T}{\partial w}+\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)=c\,T^2\frac{\partial\theta}{\partial w}-\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{T}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}-\\-\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{T}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}.\end{aligned}\right\}\quad(\gamma)$$

D'altronde dalla (γ) derivando segue la (7) che possiamo dunque trascurare; resta solo da determinare T in guisa da soddisfare le equazioni simultanee (α), (β), (γ). Se prendiamo:

$$T,\quad \frac{\partial T}{\partial u},\quad \frac{\partial T}{\partial v},$$

come funzioni incognite, le quali però debbono essere legate fra loro dalla equazione (α) in termini finiti, facilmente vediamo che dalle (α), (β), (γ) derivando si ottengono le tre derivate rapporto ad u, v, w di ciascuna di queste tre funzioni, espresse per le funzioni medesime; abbiamo cioè per le nostre tre funzioni un sistema di equazioni ai differenziali totali. Si può verificare che questo sistema, in forza delle (2) (3) cui soddisfa θ, è illimitatamente integrabile. Differiamo la verifica ai paragrafi seguenti dove si potrà fare in modo molto più semplice. Ne segue che non soltanto possiamo soddisfare al sistema (α), (β), (γ), ma di più sono in nostro arbitrio i valori iniziali di T e di una delle due derivate $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$ per un sistema iniziale $u_0\,v_0\,w_0$ di valori delle variabili. Geometricamente ciò equivale al teorema:

Ogni sistema di Weingarten *a curvatura positiva ammette* ∞^3 *sistemi della stessa specie trasformati secondo le nuove trasformazioni; per individuare il sistema trasformato basta fissare (ad arbitrio) di una delle superficie a curvatura costante del sistema primitivo la superficie trasformata.*

§ 34.

Il teorema di permutabilità pel sistema (2).

Vediamo ora come anche le nostre trasformazioni *reali* dei sistemi di Weingarten a curvatura positiva si compongano con due trasformazioni immaginarie successive di Bäcklund, nella qual cosa procederemo, come già al § 29 per le superficie isolate, per via puramente analitica.

Sia θ una soluzione qualsiasi, reale o complessa, del sistema (2) e indicando con σ_1 una costante arbitraria (reale o complessa) si consideri il seguente sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali di 1.° ordine per una funzione incognita θ_1 di u, v, w:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta_1}{\partial u}+i\frac{\partial\theta}{\partial v}=\operatorname{senh}\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1+\cosh\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1\\
&i\frac{\partial\theta_1}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}=-\operatorname{senh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1-\cosh\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1\\
&\operatorname{senh}\sigma_1\frac{\partial\theta_1}{\partial w}=\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\operatorname{senh}\theta_1+\\
&\qquad\qquad+\frac{i}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\cosh\theta_1-\cosh\sigma_1\frac{\partial\theta}{\partial w},
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

delle quali le prime due sono le equazioni stesse già considerate al § 29. Si verifica subito che, in forza delle equazioni (2), (3) cui soddisfa θ, il sistema (8) è illimitatamente integrabile, sicchè possiamo assegnare ad arbitrio per una terna iniziale $(u_0\, v_0\, w_0)$ di valori delle variabili il valore di θ_1. Inoltre la θ_1 soddisferà essa stessa al sistema (2), cioè si avrà:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial v^2}+\operatorname{senh}\theta_1\cosh\theta_1=0\\
&\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta_1}\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\cosh^2\theta_1}\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial v\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial w}\right)^2=1.
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Quanto alla prima abbiamo già fatto la verifica al § 29 eliminando per derivazione θ dalle due prime (8). Per verificare anche la seconda delle (9) traggansi dalle (8) derivando le due formole:

$$\frac{1}{\operatorname{senh}\theta_1}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\,\partial w}=\cosh\sigma_1\operatorname{senh}\theta\frac{\partial\theta_1}{\partial w}+\operatorname{senh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}+$$

$$+\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\cosh\theta\cosh\theta_1+\frac{i}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1$$

$$\frac{1}{\cosh\theta_1}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\,\partial w}=i\cosh\sigma_1\cosh\theta\frac{\partial\theta_1}{\partial w}+i\operatorname{senh}\sigma_1\cosh\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}+$$

$$+\frac{i}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1-\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\theta_1,$$

le quali quadrate e sommate, con riguardo alla terza delle (8), dànno appunto la seconda delle (9).

Diamo ora alla costante σ_1 un altro valore σ_2 e come la θ_1 dal sistema (8) così determinisi ora una terza soluzione θ_2 del sistema (2) dalle equazioni analoghe:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta_2}{\partial u}+i\frac{\partial\theta}{\partial v}=\operatorname{senh}\sigma_2\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2+\cosh\sigma_2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2\\
&i\frac{\partial\theta_2}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}=-\operatorname{senh}\sigma_2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2-\cosh\sigma_2\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2\\
&\operatorname{senh}\sigma_2\frac{\partial\theta_2}{\partial w}=\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\operatorname{senh}\theta_2+\\
&\qquad\qquad+\frac{i}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\cosh\theta_2-\cosh\sigma_2\frac{\partial\theta}{\partial w},
\end{aligned}\right\}\quad(8^*)$$

Sussiste ancora qui il teorema di permutabilità, cioè esiste una quarta soluzione θ_3 del sistema (2) deducibile in termini finiti dall'equazione solita:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\coth\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right);\qquad(9)$$

la θ_3 è legata a θ_1 dalle equazioni stesse (8), ove per θ si ponga θ_3 e per σ_1 si ponga σ_2 e similmente a θ_2 dalle (8*) cangiato θ in θ_3 e σ_2 in σ_1. L'agevole verifica lasciamo al lettore.

§ 35.

Le formole di composizione nel caso $c < 0$.

Si supponga ora che la primitiva soluzione del sistema (2) sia reale. Essendo σ_1 complessa o reale, sarà naturalmente θ_1 complessa; allora osserviamo come al § 30 che si soddisfano le (8*) assumendo:

$$\sigma_2 = -\bar{\sigma}_1, \quad \theta_2 = \pi i - \bar{\theta}_1,$$

indicando come al solito $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\theta}_1$ le coniugate di σ_1, θ_1. La soluzione θ_3 del sistema (2) definita dalla (9) che diventa:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1 + \bar{\sigma}_1}{2}\right) \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_1 + \bar{\theta}_1}{2}\right). \tag{9*}$$

è evidentemente reale. Vi corrisponderà quindi un nuovo sistema triplo ortogonale di Weingarten, a curvatura positiva, che darà all'elemento lineare dello spazio la forma:

$$d s_3^2 = \operatorname{senh}^2 \theta_3 \, d u^2 + \cosh^2 \theta_3 \, d v^2 + \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial w}\right)^2 d w^2. \tag{10}$$

Particolarizziamo ancora supponendo di assumere σ_1 reale $= \sigma$ e dimostriamo che allora il sistema di Weingarten corrispondente alla (13) non è altro che il trasformato del primitivo secondo una delle trasformazioni del § 33. Così dimostreremo come le trasformazioni reali ivi studiate si compongano di due successive immaginarie coniugate di Bäcklund. Scindendo, come al § 30, in θ_1 il reale dall'immaginario ponendo:

$$\theta_1 = \omega + i \varphi,$$

e separando nelle (8) il reale dall'immaginario otterremo le formole:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial u} &= (\operatorname{senh} \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \omega + \cosh \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \omega) \cos \varphi \\
\frac{\partial \omega}{\partial v} &= -(\operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} \omega + \cosh \sigma \cosh \theta \cosh \omega) \operatorname{sen} \varphi \\
\operatorname{senh} \sigma \frac{\partial \omega}{\partial w} &= \frac{1}{\operatorname{senh} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \operatorname{senh} \omega \cos \varphi - \\
&\quad - \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \operatorname{senh} \omega \operatorname{sen} \varphi - \cosh \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial v}=(\operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\cosh\omega+\cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\omega)\operatorname{sen}\varphi\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \theta}{\partial u}=(\operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\omega+\cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\omega)\cos\varphi\\
&\operatorname{senh}\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial w}=\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\cosh\omega\operatorname{sen}\varphi+\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\cosh\omega\cos\varphi.
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Questo sistema di equazioni simultanee per le due funzioni reali incognite ω, φ è illimitatamente integrabile e possono assumersi ad arbitrio i valori iniziali di ω, φ. Pongasi ora:

$$T=\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\operatorname{tgh}\sigma\operatorname{tgh}\omega,\qquad(13)$$

e facilmente si verificherà che con questo valore di T, ove si ponga:

$$c=-\cosh^2\sigma,$$

si soddisferanno le equazioni di trasformazione (α), (β), (γ) § 33. Per le prime due equazioni (α) (β) abbiamo già fatta la verifica al § 30. Per verificare anche la (γ) che qui si scrive:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{senh}^2\sigma\left(\frac{\partial T}{\partial w}+\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2-\cosh^2\sigma\,T^2\frac{\partial\theta}{\partial w}-\\
&-\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\cdot\frac{T}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}-\\
&-\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{T}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial v}=0,
\end{aligned}$$

basta osservare le formole (§ 30):

$$T=\operatorname{tgh}\sigma\operatorname{tgh}\omega,\quad\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}=\frac{\operatorname{senh}\sigma\cos\varphi}{\cosh\omega}$$

$$\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}=-\frac{\operatorname{senh}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\cosh\omega},$$

e la precedente si muterà nella terza delle (11), che è soddisfatta.

Il sistema triplo di Weingarten che si deduce secondo le formole (5) § 33 dal primitivo assumendo:

$$T=\operatorname{tgh}\sigma\operatorname{tgh}\omega,$$

corrisponderà dunque appunto alla forma (10) dell'elemento lineare dello spazio.

§ 36.

Le formole di composizione pel caso $c > 0$.

Ci resta da vedere come anche nel caso $c > 0$ la trasformazione del § 33 dei sistemi tripli di Weingarten a curvatura positiva si componga con due immaginarie successive di Bäcklund. A tale scopo, in luogo del sistema (8) del § 34, considereremo il seguente:

$$\left.\begin{aligned}
& i\frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = -\operatorname{senh}\sigma_1 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 - \cosh\sigma_1 \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 \\
& \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + i\frac{\partial \theta}{\partial u} = \operatorname{senh}\sigma_1 \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma_1 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 \\
& \cosh\sigma_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial w} = -\frac{i}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial w}\operatorname{senh}\theta_1 - \\
& \qquad - \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial v\,\partial w}\cosh\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma_1 \frac{\partial \theta}{\partial w},
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

ove σ_1 indica una costante arbitraria e θ_1 una funzione incognita di u, v, w. Il sistema (14), a causa delle (2) (3), è illimitatamente integrabile ed un suo integrale θ_1 è una nuova soluzione del sistema (2). Cangiando σ_1 in σ_2 e θ_1 in θ_2 varrà ancora il teorema di permutabilità e avremo in termini finiti dalla solita formola (9) una quarta soluzione θ_3 del sistema (2). Facciamo nuovamente l'ipotesi del paragrafo precedente supponendo σ_1 reale $= \sigma$ ed assumendo:

$$\theta_1 = \omega + i\varphi, \quad \theta_2 = \pi i - \overline{\theta}_1,$$

con che θ_2 viene a soddisfare alle equazioni analoghe alle (14). Separando nelle (14) il reale dall'immaginario, troviamo per ω, φ il seguente sistema (illimitatamente integrabile):

$$\left.\begin{aligned}
& \frac{\partial \omega}{\partial u} = -(\operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\omega + \cosh\sigma \cosh\theta \cosh\omega)\operatorname{sen}\varphi \\
& \frac{\partial \omega}{\partial v} = (\operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\omega + \cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\omega)\cos\varphi \\
& \cosh\sigma \frac{\partial \omega}{\partial w} = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial w}\cosh\omega \operatorname{sen}\varphi - \\
& \qquad - \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial v\,\partial w}\cosh\omega\cos\varphi - \operatorname{senh}\sigma\frac{\partial \theta}{\partial w}.
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial u}-\frac{\partial \theta}{\partial v}=(\operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\omega+\cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\omega)\cos\varphi\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u}=(\operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\cosh\omega+\cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\omega)\operatorname{sen}\varphi\\
&\cosh\sigma\frac{\partial \varphi}{\partial v}=-\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\operatorname{senh}\omega\cos\varphi-\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\operatorname{senh}\omega\operatorname{sen}\varphi.
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

La formola:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\operatorname{tgh}\sigma\operatorname{tgh}\omega,$$

ci definirà ancora un nuovo sistema reale di Weingarten, a curvatura positiva, corrispondente all'elemento lineare dello spazio:

$$d s_3^2=\operatorname{senh}^2\theta_3\,d u^2+\cosh^2\theta_3\,d v^2+\left(\frac{\partial\theta_3}{\partial w}\right)^2 d w^2.$$

Verificheremo che esso deriva dal primitivo colla trasformazione del § 33 ove si assuma per T il valore:

$$T=\coth\sigma\coth\omega,$$

e per la costante:

$$c=\operatorname{senh}^2\sigma.$$

Qui si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}&=\frac{\cosh\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{senh}\omega}\\
\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}&=-\frac{\cosh\sigma\cos\varphi}{\operatorname{senh}\omega},
\end{aligned}$$

e con questi valori, tenendo conto delle formole precedenti, facilmente si verifica che le equazioni di trasformazione (α), (β), (γ) § 33 sono identicamente soddisfatte.

§ 37.

Le trasformazioni nel caso generale della curvatura positiva variabile con w.

Occupiamoci da ultimo dei sistemi tripli ortogonali (u, v, w) più generali, contenenti una serie di superficie $w=$ cost. a curvatura costante, ma variabile però dall'una all'altra superficie nella serie, e dimostriamo anche qui come possano applicarsi le nostre trasformazioni. Ci limiteremo per altro a dare le formole analitiche per le trasformazioni, le verifiche per la effettiva costruzione essendo del tutto analoghe a quelle che superiormente abbiamo sviluppato pel caso particolare dei sistemi di WEINGARTEN.

Nel sistema triplo ortogonale (u, v, w) abbiano dapprima le superficie $w = \text{cost.}$ la curvatura K positiva $= \frac{1}{R^2}$, dove attualmente R, anzichè una costante, sarà una funzione di w. L'elemento lineare dello spazio, riferito ad un tale sistema, prenderà la forma caratteristica:

$$d s^2 = \operatorname{senh}^2 \theta \, d u^2 + \cosh^2 \theta \, d v^2 + R^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 d w^2, \tag{17}$$

dove la funzione $\theta(u, v, w)$ sarà legata alla $R(w)$ dalle equazioni fondamentali (equazioni di LAMÉ):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \frac{\operatorname{senh}\theta \cosh\theta}{R^2} = 0. \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}\right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\cosh\theta}{R}\right) - \frac{1}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial v} \\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}\right) = \frac{1}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial u} \\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}\right) = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial v} \\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}\right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\operatorname{senh}\theta}{R}\right) - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial u}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Indicando con k_1 una costante arbitraria, si determini la funzione σ_1 di w dall'equazione:

$$\cosh \sigma_1 = k_1 R,$$

e si consideri per una funzione incognita θ_1 di u, v, w il seguente sistema di equazioni simultanee (generalizzato dalle (8) § 34):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \theta_1}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\operatorname{senh}\sigma_1 \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma_1 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1}{R} \\
&i \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = -\frac{\operatorname{senh}\sigma_1 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 + \cosh\sigma_1 \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1}{R} \\
&\operatorname{senh}\sigma_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial w} = \frac{R}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \operatorname{senh}\theta_1 + \\
&\qquad + \frac{i R}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \cosh\theta_1 - \cosh\sigma_1 \frac{\partial \theta}{\partial w}.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Questo sistema, a causa delle (18), (19), è illimitatamente integrabile, ed ogni sua soluzione θ_1 soddisfa alle equazioni stesse (18), (19). Diremo che θ_1 è derivata da θ mediante la trasformazione B_{σ_1}. Si cangi ora k_1 in k_2 e prendasi σ_2 in guisa che sia $\cosh\sigma_2 = k_2 R$, indi si trasformi la medesima θ nell'altra soluzione θ_2, mediante la B_{σ_2}. Sussisterà sempre allora il teorema di permutabilità e la soluzione θ_3, che deriva da θ_1 mediante una B_{σ_2}, da θ_2 mediante una B_{σ_1}, si calcolerà sempre dalla formola:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\coth\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right).$$

Suppongasi ora di partire da una soluzione θ reale del sistema (18), (19) e si assuma k_1 reale $= k$, in guisa che risulti pure reale la funzione σ di w, calcolata da:

$$\cosh\sigma = k\,R,$$

e si faccia:

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = -\sigma.$$

Essendo $\theta_1 = \omega + i\,\varphi$ una soluzione delle (20), sarà:

$$\theta_2 = \pi\,i - \overline{\theta}_1,$$

soluzione delle equazioni ottenute dalle (20) col cangiarvi θ_1 in θ_2 e σ_1 in $-\sigma$; la formola:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\sigma\operatorname{tgh}\omega,$$

darà quindi una nuova soluzione *reale* θ_3 delle equazioni (18), (19), alla quale corrisponderà un nuovo sistema triplo ortogonale della medesima specie, che darà all'elemento lineare dello spazio la forma:

$$d\,s_3^2 = \operatorname{senh}^2\theta_3\,d\,u^2 + \cosh^2\theta_3\,d\,v^2 + R^2\left(\frac{\partial\,\theta_3}{\partial\,w}\right)d\,w^2.$$

Con verifiche analoghe come al § 35, si proverà che ciascuna superficie a curvatura costante del sistema trasformato deriva dalla corrispondente del primitivo con una delle nostre trasformazioni § 15, dando al segmento T da riportarsi sulla normale il valore:

$$T = R\operatorname{tgh}\sigma\operatorname{tgh}\omega.$$

In fine notiamo che, separando nelle (20) il reale dall'immaginario, potremo porre ancora le equazioni di trasformazioni sotto forma reale. Queste formole si otterranno dalle (11), (12) § 35 modificando in ciascuno dei due gruppi i secondi membri delle due prime formole dividendoli per R e la terza di ciascun gruppo moltiplicandone per R i due primi termini.

§ 38.

Trasformazioni dei sistemi tripli ortogonali pseudosferici.

Veniamo infine a trattare delle nuove trasformazioni di quei sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie pseudosferiche di raggio variabile o costante. Tralasciando di occuparci del caso in cui la trasformazione si risolve in due trasformazioni *reali* di Bäcklund, considereremo unicamente il caso veramente nuovo in cui la nostra trasformazione reale si decompone soltanto in due trasformazioni di Bäcklund (puramente) immaginarie coniugate.

Assumendo un sistema triplo ortogonale pseudosferico (u, v, w) a sistema coordinato, l'elemento lineare dello spazio prende la forma caratteristica:

$$d s^2 = \cos^2 \theta \, d u^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d v^2 + R^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 d w^2, \tag{21}$$

dove R, che è funzione della sola w, indica il raggio variabile della superficie pseudosferica $w = \text{cost.}$ La funzione θ di u, v, w è legata alla $R(w)$ dalle equazioni fondamentali (*):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{R^2}. \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w}\right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{R}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial v} \\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial u} \\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w}\right) = -\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial v} \\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w}\right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\cos \theta}{R}\right) - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial u}.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

(*) *Lezioni*, pag. 500.

Viceversa ogni qualvolta θ soddisfa le (22), (23) esiste un sistema triplo ortogonale pseudosferico corrispondente alla forma (21) dell'elemento lineare dello spazio.

Essendo ora k_1 una costante, determinisi l'angolo σ_1 (reale o complessò) in guisa che sia:

$$\cos\sigma_1 = \frac{k_1}{R},$$

e si consideri per una funzione incognita θ_1 di u, v, w il seguente sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali del 1.° ordine:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta_1}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta + \operatorname{sen}\sigma_1\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta}{k_1}\\
&\frac{\partial\theta_1}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} = -\frac{\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta}{k_1}\\
&\operatorname{sen}\sigma_1\frac{\partial\theta_1}{\partial w} = -\frac{k_1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\cos\theta_1 - \frac{k_1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\operatorname{sen}\theta_1 - \frac{\partial\theta}{\partial w}.
\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

Questo sistema, a causa delle (22), (23) cui soddisfa θ, è illimitatamente integrabile ed ogni sua soluzione θ_1 soddisfa essa stessa alle (22), (23) (*). Vale ancor qui il teorema di permutabilità e se procediamo quindi come al § 28 per le superficie pseudosferiche isolate, troviamo i risultati seguenti. Prendasi σ_1 puramente immaginario sia $\sigma_1 = i\sigma$, in guisa naturalmente che sia $R\cosh\sigma = k$ (k costante) e pongasi:

$$\theta_1 = \omega + i\varphi:$$

la formola (6*) § 28:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{tgh}\varphi}{\operatorname{senh}\sigma},$$

ci definirà una nuova soluzione reale delle equazioni (22), (23) e quindi un nuovo sistema triplo ortogonale pseudosferico (21). Separando nelle (24) il reale dall'immaginario, troviamo per le funzioni reali ω, φ di u, v, w il seguente sistema di equazioni di trasformazione:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{1}{k}(\cosh\varphi\cos\theta + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\varphi\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\omega\\
&\frac{\partial\omega}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{1}{k}(-\cosh\varphi\operatorname{sen}\theta + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\varphi\cos\theta)\cos\omega\\
&\operatorname{senh}\sigma\frac{\partial\omega}{\partial w} = \frac{k}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\operatorname{senh}\varphi\operatorname{sen}\omega - \frac{k}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\operatorname{senh}\varphi\cos\omega.
\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

(*) Cf. *Lezioni*, pag. 504 s. s.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \frac{1}{k}(\operatorname{senh} \varphi \cos \theta + \operatorname{senh} \sigma \cosh \varphi \operatorname{sen} \theta) \cos \omega \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \frac{1}{k}(\operatorname{senh} \varphi \operatorname{sen} \theta - \operatorname{senh} \sigma \cosh \varphi \cos \theta) \operatorname{sen} \omega \\ \operatorname{senh} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial w} &= \frac{k}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w} \cosh \varphi \cos \omega + \frac{k}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w} \cosh \varphi \operatorname{sen} \omega + \frac{\partial \theta}{\partial w}. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Se ci fermiamo a considerare il caso in cui R è costante e facciamo $R = 1$, il nostro sistema diventerà un sistema pseudosferico di Weingarten ed alle equazioni del 3.° ordine (23) potremo sostituire l'unica di 2.° ordine:

$$\frac{1}{\cos^2 \theta}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w}\right)^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 = h.$$

essendo h una costante (*). Si vede allora che le soluzioni trasformate θ_1, θ_2, θ_3 soddisfano a questa medesima equazione rimanendo h la stessa. Valgono quindi le considerazioni stesse svolte a pag. 516 s. s. delle *Lezioni*, in particolare si vedrà che:

Le nostre trasformazioni cangiano i sistemi di Weingarten *a flessione costante in sistemi della medesima specie.*

Similmente si dimostrerà che: *I sistemi ciclici si trasformano in sistemi ciclici.*

Terminiamo con un'osservazione generale, che vale per le considerate trasformazioni di tutti i sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie a curvatura costante e cioè notiamo che le conseguenze dedotte al § 31 dal teorema di permutabilità per le superficie isolate sussistono qui inalterate e per conseguenza: *Se per uno dei nostri sistemi tripli ortogonali si sanno completamente integrare le equazioni di trasformazione, l'applicazione successiva ed illimitata delle trasformazioni ai nuovi sistemi tripli ottenuti richiederà soltanto calcoli algebrici e di derivazione.*

Cascio, Luglio 1899.

(*) *Lezioni*, pag. 510.

INDICE