

# Una estensione del problema della proiettività a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette.

(Di DOMENICO MONTESANO, a Napoli.)

---

In questa Memoria sono risolte le seguenti quistioni:

1.<sup>a</sup> Dati nello spazio  $\mu$  complessi lineari di rette  $K_1, \dots, K_\mu$ , studiare il sistema dei fasci di rette dello spazio nei quali i raggi  $r_1, \dots, r_\mu$  che appartengono rispettivamente ai complessi dati, formano un gruppo proiettivo ad un gruppo dato  $g \equiv e_1 \dots e_\mu$  di una forma fondamentale geometrica di 1.<sup>a</sup> specie; per  $\mu = 4, 5, 6, 7, 8$ .

2.<sup>a</sup> Date in un complesso lineare di rette  $\nu$  congruenze lineari  $Q_1, \dots, Q_\nu$ , studiare il sistema dei fasci di raggi del complesso, nei quali i raggi  $r_1, \dots, r_\nu$  che appartengono rispettivamente alle congruenze date, formano un gruppo proiettivo ad un gruppo dato  $g \equiv e_1, \dots, e_\nu$  di una forma fondamentale geometrica di 1.<sup>a</sup> specie; per  $\nu = 4, 5, 6$ .

3.<sup>a</sup> Dati 5 complessi lineari di rette  $K_1, \dots, K_5$ , studiare la curva luogo di un punto a cui nei complessi dati corrispondono piani formanti un gruppo omografico ad un gruppo assegnato costituito da 5 piani  $\pi_1, \dots, \pi_5$  di una stella, e stabilire le proprietà della congruenza lineare formata dalle curve dello spazio del tipo indicato.

Fra i molteplici risultati ottenuti degni di speciale menzione sono quelli stabiliti pel sistema  $\infty^4$  dei fasci di raggi che si presenta nella prima quistione per  $\mu = 4$ . Questo sistema è collegato ad un complesso di coniche e ad un complesso di coni di 2.<sup>a</sup> classe dello spazio, il cui studio forma la prima parte della presente Memoria (Cap. I e II).

Notevole è anche il fatto che nella prima quistione per  $\mu = 5$  si presenta un sistema  $\infty^3$  di fasci di raggi sì fatti che un punto od un piano

generico dello spazio è sostegno di un unico fascio del sistema, onde ne risulta una *reciprocità birazionale nulla* nello spazio di 7° grado, studiata ampiamente nel Cap. V.

La seconda e la terza quistione ed altre che ad esse si conettono, sono trattate rispettivamente nei Cap. III e IV, e i risultati ottenuti sono stati applicati per stabilire vari notevoli teoremi su la superficie di 3° ordine, che riguardano specialmente i gruppi formati da 5 o da 6 rette della superficie due a due fra loro sghembe.

Infine i sistemi di fasci di raggi che si presentano nella prima quistione per  $\mu = 6$  e per  $\mu = 7$  o 8, sono studiati rispettivamente nei Cap. VI e VII.

Da alcune proposizioni di *Geometria numerativa* ottenute in questa Memoria, possono dedursi vari teoremi già stabiliti da STURM (*Ueber correlative oder reciproche Bündel*. Math. Annalen, Bd. XII) e da SCHUBERT (*Abzählende Geometrie*), supponendo che i complessi lineari, a cui esse proposizioni si riferiscono, fossero tutti singolari. E di ciò nei singoli casi si fa cenno.

## I.

1. *I fasci di rette dello spazio nei quali i raggi appartenenti a 4 complessi lineari di rette  $K_1, \dots, K_4$  dati ad arbitrio formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato  $g \equiv e_1 \dots e_4$ , costituiscono un sistema  $\Sigma$ .*

*In un piano generico dello spazio esistono  $\infty^1$  fasci di raggi del sistema aventi i centri su di una conica.*

*Un punto generico dello spazio è centro di  $\infty^1$  fasci di raggi del sistema situati nei piani di un cono di seconda classe.*

Infatti designando con  $O_1, \dots, O_4$  i poli di un piano  $\omega$  nelle polarità nulle  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$  dovute ai complessi dati, i fasci di raggi del sistema  $\Sigma$  situati in  $\omega$  hanno per centro i punti del piano dai quali proiettando i punti  $O_1, \dots, O_4$  ottengono quaterne proiettive al gruppo dato  $g$ . Essi centri si trovano perciò su di una conica che contiene i punti  $O_1, \dots, O_4$  i quali su di essa costituiscono un gruppo proiettivo a  $g$ .

L'assieme  $\infty^3$  delle coniche dovute nel modo ora indicato ai piani dello spazio (una per ogni piano) costituisce un *complesso di coniche  $\Gamma$* .

L'assieme  $\infty^3$  dei coni di 2ª classe dovuti nel modo anzidetto ai punti dello spazio (uno per ogni punto) costituisce un *complesso di coni  $\Gamma$* .

Le leggi di generazione pei due complessi sono dunque le seguenti:

*Una conica del complesso  $\Gamma$  contiene i poli del suo piano nelle polarità nulle  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$  dovute ai complessi dati, e questi poli formano su di essa un gruppo proiettivo al gruppo dato  $g$ .*

*Un cono di 2<sup>a</sup> classe del complesso  $\Gamma'$  contiene i piani polari del suo vertice nelle polarità nulle  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$  dovute ai complessi dati, e questi piani formano nel cono un gruppo proiettivo al gruppo dato  $g$ .*

Di più fra i due complessi  $\Gamma, \Gamma'$  intercedono le seguenti relazioni:

*Le  $\infty^1$  coniche del complesso  $\Gamma$  che passano per un punto  $O$ , sono nei piani del cono del complesso  $\Gamma'$  che ha il vertice in  $O$ .*

*Gli  $\infty^1$  coni del complesso  $\Gamma'$  che contengono un piano  $\omega$  hanno i vertici sulla conica del complesso  $\Gamma$  che si trova nel piano  $\omega$ .*

2. Siano  $q, q'$  i raggi comuni ai complessi  $K_1, \dots, K_4$ . Essendo  $(O - \omega)$  un fascio arbitrario del sistema  $\Sigma$ , si consideri la congruenza lineare di rette  $Q$  che contiene le  $q, q'$  ed il fascio  $(O - \omega)$ . Essa ammette per direttrici le rette  $d, d'$  appoggiate alle  $q, q'$ , di cui l'una passa per  $O$  e l'altra giace in  $\omega$ .

Il quadrilatero gobbo  $q d q' d'$  che ne risulta, trovasi sulle quadriche sostegni delle schiere rigate  $\rho_1, \dots, \rho_4$  comuni alla  $Q$  ed ai complessi  $K_1, \dots, K_4$ , sicchè tali quadriche formano un fascio-schiera, ed i 4 raggi delle  $\rho_1, \dots, \rho_4$  che si trovano in un qualsiasi fascio della congruenza  $Q$ , formano un gruppo proiettivo al gruppo analogo dovuto ad  $(O - \omega)$ ; epperò tutti i fasci della congruenza  $Q$  al pari di  $(O - \omega)$  appartengono al sistema  $\Sigma$ . Ne segue che

*I fasci di raggi del sistema  $\Sigma$  si distribuiscono in  $\infty^3$  congruenze lineari le cui direttrici si appoggiano ai raggi  $q, q'$  comuni ai complessi dati.*

Diremo che tali congruenze appartengono al sistema  $\Sigma$ .

Una retta  $d$  che incontri le  $q, q'$ , è direttrice di  $\infty^1$  congruenze del sistema.

Le loro seconde direttrici formano una rigata la quale essendo segata da un piano arbitrario  $\omega$  del fascio  $(d)$  secondo la conica del complesso  $\Gamma$  situata in  $\omega$  (e correlativamente essendo proiettata da un punto  $O$  della  $d$  secondo il cono del complesso  $\Gamma'$  che ha il vertice in  $O$ ) risulta di 4<sup>o</sup> grado ed ha per direttrici doppie le  $q, q'$  e per generatrice doppia la  $d$ . Di più essa contiene le rette  $d_1, \dots, d_4$  coniugate alla  $d$  nelle polarità  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$ , e queste rette costituiscono su di essa un gruppo proiettivo a  $g$ ; ciò che la determina completamente.

Dunque: *Se nella congruenza di rette che ha per direttrici i raggi  $q, q'$  comuni ai complessi dati, si riguardano corrispondenti due rette che siano direttrici di una congruenza del sistema  $\Sigma$ , nella corrispondenza involutoria che ne risulta, ad una retta generica  $d$  della congruenza corrisponde una rigata razionale di 4° grado che ha per retta doppia la  $d$ .*

3. Sia  $r$  un raggio comune a tre qualunque dei complessi dati, per esempio ai complessi  $K_2, K_3, K_4$ . Ad un piano  $\omega$  che contenga il raggio  $r$  corrispondono nelle polarità  $\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  tre punti  $O_2, O_3, O_4$  situati sulla  $r$ , sicchè la conica del complesso  $\Gamma$  situata in  $\omega$  si spezza nella retta  $r$  e nella retta  $r'$  che unisce il punto  $O_1$  coniugato ad  $\omega$  nella  $\Pi_1$ , a quel punto  $O'$  della  $r$  che assieme ai punti  $O_2, O_3, O_4$  forma un gruppo  $O' O_2 O_3 O_4$  proiettivo a  $g$ .

In particolare in un piano  $\omega$  che contenga uno dei raggi comuni ai complessi dati la conica del complesso  $\Gamma$  riducesi a tale raggio  $q$  contato due volte.

Soltanto nel caso che i 4 poli  $O_1, \dots, O_4$  del piano  $\omega$  nelle polarità date formino sulla  $q$  un gruppo proiettivo al gruppo dato  $g$ , si ha che ogni fascio di raggi del piano  $\omega$  appartiene al sistema  $\Sigma$ , sicchè allora ogni retta del piano forma con la  $q$  una conica del complesso  $\Gamma$ .

Per determinare il numero di questi piani *singolari* nel fascio ( $q$ ) basta notare che se per ogni piano  $\omega$  del fascio si costruiscono i poli  $O_1, \dots, O_4$  nelle polarità  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$ , e si determina quel punto  $O'$  della  $q$  per cui il gruppo  $O' O_2 O_3 O_4$  è proiettivo al gruppo  $g$ , la corrispondenza che viene ad aversi fra i punti  $O_1$  e  $O'$  della  $q$ , col variare del piano  $\omega$ , è una corrispondenza (1, 3), sicchè ammette 4 coincidenze che sono appunto dovute ai piani *singolari* del fascio. Dunque:

*In un piano dello spazio esiste una sola conica del complesso  $\Gamma$ . Fanno eccezione soltanto 8 piani singolari, 4 del fascio ( $q$ ) e 4 del fascio ( $q'$ ), dei quali ciascuno è sostegno di  $\infty^2$  coniche del complesso formate dalla  $q$  (o dalla  $q'$ ) e dalle singole rette del piano.*

Correlativamente per ogni punto di un raggio  $r$  comune a tre dei complessi dati il cono del complesso  $\Gamma'$  si spezza in due fasci di piani, di cui uno ha per asse la retta  $r$ . Per un punto generico di uno dei raggi  $q, q'$  il cono del complesso si riduce al fascio ( $q$ ) (o al fascio ( $q'$ )) contato due volte; ma su ognuna delle rette  $q, q'$  esistono 4 punti *singolari* dei quali ciascuno ha per corrispondenti nelle polarità  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$  4 piani formanti un gruppo proiettivo a  $g$ , sicchè ognuno di tali punti è centro di  $\infty^2$  fasci di raggi del sistema  $\Sigma$  e corrispondentemente è vertice di  $\infty^2$  coni del complesso  $\Gamma'$ , di cui ciascuno si scinde nel fascio ( $q$ ) (o ( $q'$ )) ed in un fascio arbitrario della stella. Dunque:

Un punto dello spazio è vertice di un solo cono del complesso  $\Gamma'$ . Esistono soltanto 8 punti singolari, 4 sulla retta  $q$  e 4 sulla  $q'$ , dei quali ciascuno è vertice di  $\infty^2$  coni del complesso, costituiti da coppie di fasci di piani aventi per asse la retta  $q$  (o la  $q'$ ) e le singole rette della stella.

Dalle proprietà caratteristiche dei punti e dei piani singolari del sistema  $\Sigma$  segue che:

Un punto singolare  $O$  del sistema si trova sulle  $\infty^2$  coniche del complesso  $\Gamma$ , situate nei singoli piani passanti per  $O$ .

Un piano singolare  $\omega$  del sistema fa parte degli  $\infty^2$  coni del complesso  $\Gamma'$  che hanno per vertici i singoli punti del piano  $\omega$ .

È agevole anche riconoscere che i 4 punti singolari del sistema situati su una delle rette  $q, q'$  appartengono uno ad uno ai 4 piani singolari che passano per l'altra di tali rette.

Infatti se  $\omega$  è un piano singolare del fascio ( $q'$ ) che ammetta per poli nelle polarità  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$  i punti  $O_1, \dots, O_4$  e che incontri in  $O$  la  $q$ , i piani polari di questo punto nelle  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$  hanno in comune la retta  $q$  e passano rispettivamente per le rette  $OO_1, \dots, OO_4$ , onde costituiscono un gruppo proiettivo alla quaterna  $O, \dots, O_4$  e perciò proiettivo al gruppo  $g$ , sicchè il punto  $O$  è singolare pel sistema.

Un punto singolare  $O$  e un piano singolare  $\omega$  che si appartengano, determinano una congruenza lineare di rette degeneri, formata dalla stella di raggi ( $O$ ) e dal sistema piano rigato ( $\omega$ ). Un fascio di raggi di questa congruenza fa parte o della stella ( $O$ ) o del piano ( $\omega$ ). Nell'un caso o nell'altro esso appartiene al sistema  $\Sigma$ , sicchè la congruenza in esame appartiene al sistema. Dunque:

*Nel sistema  $\Sigma$  vi sono 8 congruenze lineari degeneri.*

Si noti in ultimo che per determinare il sistema  $\Sigma$ , dati i complessi  $K_1, \dots, K_4$ , si può assegnare un suo punto singolare o un suo piano singolare che appartengano a un raggio comune ai complessi dati, perchè con ciò in entrambi i casi resta noto il gruppo caratteristico  $g$  del sistema (\*).

Se questo gruppo varia in tutti i modi possibili, il sistema  $\Sigma$  varia descrivendo un assieme  $\infty^1$  che comprende tutti i fasci di raggi dello spazio, in modo che un fascio generico appartiene ad un unico sistema dell'assieme; ec., ec.

(\*) Dai risultati ottenuti segue che dati 4 complessi lineari di rette in posizione affatto arbitraria fra loro che abbiano in comune i raggi  $q, q'$ , se si riguardano corrispondenti un punto  $O$  di  $q$  ed un punto  $O'$  di  $q'$ , ai quali nelle polarità  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$  dovute ai com-

4. I tre complessi  $K_2, K_3, K_4$  abbiano in comune la schiera rigata  $\rho_1$ ; e sia  $\sigma_1$  la schiera incidente alla  $\rho_1$ .

Ad una retta arbitraria  $d$  della  $\sigma_1$  corrispondono nelle polarità  $\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  tre rette  $d_2, d_3, d_4$  situate del pari sulla  $\sigma_1$ . Ora costruita su questa schiera la retta  $d'$  tale che il gruppo  $d' d_2 d_3 d_4$  risulti proiettivo al gruppo  $g$ , si consideri la schiera rigata  $\rho'$  che ha per direttrici la  $d$ , la  $d'$  e la  $d_4$  coniugata alla  $d$  nella  $\Pi_1$ .

In un piano  $\pi$  del fascio ( $d$ ) che contenga i raggi  $r, r'$  delle schiere  $\rho_1, \rho'$ , la conica del complesso  $\Gamma$  si scinde in tali rette  $r, r'$  (§ 3); e correlativamente per ogni punto  $P$  della  $d$  il cono del complesso  $\Gamma'$  si spezza nei due fasci di piani che hanno per assi i raggi delle schiere  $\rho, \rho'$  che passano per  $P$ .

Da ciò segue che la superficie luogo delle seconde direttrici delle congruenze lineari del sistema  $\Sigma$  che hanno per prima direttrice la retta  $d$ , si spezza nelle quadriche sostegni delle  $\rho_1, \rho$  (§ 2).

Di più è agevole riconoscere che col variare della  $d$  sulla  $\sigma_1$ , la schiera  $\rho'$  descrive una congruenza di 4° grado contenuta nel complesso  $K_1$ .

Infatti le rette  $r'$  della congruenza che passano per un punto arbitrario  $O$  dello spazio, si trovano nei piani  $\pi$  comuni al cono del complesso  $\Gamma'$  ed al cono-inviluppo circoscritto alla quadrica sostegno della  $\rho_1$ , che hanno il vertice in  $O$ , sicchè il loro numero è 4.

Variando la retta  $d$  sulla  $\sigma_1$ , quando essa coincide con una delle due rette coniugate fra loro in entrambe le polarità  $\Pi_2, \Pi_3$ , le rette  $d_2, d_3$  e perciò anche la  $d'$  coincidono con l'altra di tali rette, e la corrispondente schiera  $\rho'$  coincide con la schiera  $\rho_4$  comune ai tre complessi  $K_1, K_2, K_3$ ; sicchè la  $\rho_4$  si presenta due volte nella genesi della congruenza in esame, e perciò risulta costituita da raggi doppi di tale congruenza.

plissi dati corrispondano due quaterne di piani fra loro proiettive, la corrispondenza che ne risulta fra le  $q, q'$ , riducesi ad una corrispondenza biunivoca fra i gruppi di due involuzioni di 4° ordine. Ora è degno di nota il fatto che la superficie luogo delle congiungenti i punti di ciascuna quaterna della  $q$  ai punti della corrispondente quaterna della  $q'$ , è costituita dalle rette che nella polarità  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$  hanno per coniugate rette di una stessa schiera rigata; vale a dire che

*Il luogo delle rette a cui in 4 polarità nulle dello spazio fra loro indipendenti corrispondono rette di una stessa schiera rigata, è una superficie gobba di 8° grado che ha per direttrici quadruple i raggi comuni ai 4 complessi lineari determinati dalle polarità date. La superficie contiene le direttrici delle congruenze lineari comuni a questi complessi presi due a due.*

Questa dunque ha le tre schiere di raggi doppi  $\rho_2, \rho_3, \rho_4$ . Inoltre dalla costruzione data per le rette della congruenza che passano per un punto  $O$  dello spazio, assumendo questo punto su una delle rette  $q, q'$ , si deduce che queste rette sono quadruple per la congruenza.

Infine notando che un punto singolare  $O$  di  $\Sigma$  determina con un raggio arbitrario  $r$  della  $\rho_1$  un piano  $\pi$ , in cui la conica del complesso  $\Gamma$  si spezza nella retta  $r$  e nel raggio  $r'$  del complesso  $K_1$  che appartiene al fascio  $(O-\pi)$ , sicchè variando la  $r$  e tenendo fisso il punto  $O$  tale raggio  $r'$  descrive il fascio del complesso  $K_1$  che ha il centro in  $O$ , si deduce che la congruenza contiene gli 8 fasci di raggi del complesso  $K_1$  che hanno per centri i punti singolari del sistema.

Correlativamente si dimostra che la congruenza contiene gli 8 fasci del complesso  $K_1$  situati nei piani singolari, ed agevolmente si riconosce che i due fasci della congruenza dovuti a un punto singolare  $O$  e ad un piano singolare  $\omega$  che si appartengono, costituiscono la schiera rigata  $\rho'$  dovuta alla retta  $d$  della  $\sigma_1$  situata nel fascio  $(O-\omega)$ , ecc, ecc.

Quel che si è detto per la schiera rigata  $\rho_1$  può ripetersi per le altre schiere  $\rho_2, \rho_3, \rho_4$  comuni ai complessi  $K_1, \dots, K_4$  presi tre a tre; e può affermarsi che

*Le rette che assieme ai raggi delle schiere rigate comuni ai complessi  $K_1, \dots, K_4$  presi tre a tre costituiscono coniche degeneri del complesso  $\Gamma$  (e coni degeneri del complesso  $\Gamma'$ ) appartengono a 4 congruenze di 4° grado  $X_1, \dots, X_4$  contenute rispettivamente nei complessi  $K_1, \dots, K_4$ .*

5. L'assieme  $\infty^3$  dei complessi lineari di rette che passano per i raggi  $q, q'$ , può essere riferito proiettivamente allo spazio ordinario in modo che ai complessi, alle congruenze lineari ed alle schiere rigate che contengono i raggi base  $q, q'$  del sistema, corrispondano rispettivamente i piani, le rette ed i punti dello spazio rappresentativo (\*).

In tale riferimento alle  $\infty^3$  congruenze del sistema  $\Sigma$  corrispondono  $\infty^3$  rette godenti la proprietà di segare il gruppo dei piani  $\omega_1, \dots, \omega_4$  corrispondenti ai complessi  $K_1, \dots, K_4$ , secondo quaterne di punti proiettive al gruppo  $g$ , sicchè le rette in questione appartengono al complesso tetraedrale  $\theta$  che ha per tetraedro fondamentale quello costituito dai piani  $\omega_1, \dots, \omega_4$  e per gruppo caratteristico il gruppo  $g$ .

(\*) Vegg. REYE, *Die Geometrie der Lage*. 3.<sup>a</sup> edizione, II Parte, pag. 328, e la mia Nota, *Su i complessi di rette di secondo grado generati da due fasci proiettivi di complessi lineari*. (Napoli, 1886.)

Le rette  $d$  appoggiate alle  $q, q'$  sono assi dei complessi singolari dell'assieme che si considera. A questi complessi corrispondono nello spazio rappresentativo i piani  $\delta$  di una quadrica-inviluppo  $\chi_{(2)}$  (che viene chiamata *quadrica fondamentale* della rappresentazione) e che risulta riferita con corrispondenza biunivoca alla congruenza lineare di rette  $Q$  che ha per direttrici le  $q, q'$ .

In tale riferimento alla rigata  $\rho_1 \equiv d^2$  della  $Q$  formata dalle seconde direttrici delle congruenze di  $\Sigma$  che hanno per prima direttrice un raggio arbitrario  $d$  della  $Q$ , corrisponde l'inviluppo  $j_{(4)} \equiv \delta^2$  formato dai piani della  $\chi_{(2)}$  condotti per i raggi del complesso  $\theta$  giacenti nel corrispondente piano  $\delta$  della  $\chi_{(2)}$ .

Ora se la retta  $d$  è una direttrice della schiera rigata  $\rho_1 \equiv K_2 K_3 K_4$ , il corrispondente piano  $\delta$  passa per il punto  $O_1 \equiv \omega_2 \omega_3 \omega_4$  e l'inviluppo  $j_{(4)}$  precedentemente indicato si spezza nei due coni della  $\chi_{(2)}$  che hanno i vertici nel punto  $O_1$  ed in quel punto  $O'$  che con  $O_1$  forma la conica-inviluppo del complesso  $\theta$  dovuta al piano  $\delta$ . Perciò questo punto  $O'$  nella rappresentazione stabilita corrisponde alla schiera rigata  $\rho'$ , dovuta alla  $d$ , della congruenza di 4° grado  $X_1$  studiata nel § precedente, vale a dire che tale congruenza  $X_1$  nella rappresentazione stabilita ha per corrispondente la curva  $c_{(4)} \equiv (O_2 O_3 O_4)^2$  del piano  $\omega_1$ , formata dai centri dei fasci del complesso  $\theta$  situati nei piani del cono circoscritto alla  $\chi_{(2)}$  che ha per vertice il punto  $O_1$ , sicchè le ulteriori proprietà della congruenza possono essere stabilite facilmente con metodi da me altrove indicati (\*).

Inoltre, siccome nello spazio rappresentativo i vertici  $O_1, \dots, O_4$  del tetraedro fondamentale vengono proiettati dai raggi del complesso  $\theta$  secondo quaterne proiettive al gruppo  $g$ , perciò si ha che:

*Le schiere rigate  $\rho_1, \dots, \rho_4$  comuni ai complessi  $K_1, \dots, K_4$  presi tre a tre, determinano con ciascuna congruenza del sistema  $\Sigma$  un gruppo di quattro complessi lineari proiettivo al gruppo dato  $g$ .*

In particolare per le otto congruenze degeneri del sistema  $\Sigma$  (le quali corrispondono agli otto raggi del complesso  $\theta$  situati sulla quadrica  $\chi_{(2)}$ ) si ha che:

*Nei singoli fasci di raggi che hanno per sostegni un punto ed un piano singolari del sistema  $\Sigma$  che si appartengano, le direttrici delle schiere rigate  $\rho_1, \dots, \rho_4$  formano un gruppo proiettivo al gruppo dato  $g$ .*

(\*) *Su i complessi di rette di 2.º grado, ecc., Mem. cit. § 6.*



## II.

6. Un complesso di coniche nello spazio presenta vari numeri caratteristici.

Noi assumeremo come *caratteristiche elementari* del complesso: 1.° il numero delle sue coniche che si trovano in un piano generico dello spazio; 2.° la classe del cono formato dai piani sostegni delle coniche del complesso che passano per un punto generico dello spazio.

La superficie luogo delle coniche del complesso situate nei piani di un fascio generico dello spazio, ha per retta multipla secondo  $\beta$  l'asse  $r$  del fascio, se  $\beta$  è il secondo dei due numeri indicati; e la sua sezione variabile con un piano del fascio equivale ad una linea di ordine  $2\alpha$ , se  $\alpha$  è il primo dei predetti numeri, sicchè l'ordine della superficie è  $2\alpha + \beta$ .

Pel complesso  $\Gamma$  definito nel capitolo precedente  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ . Da ciò e dalla genesi del complesso segue che:

1.° *Le coniche del complesso  $\Gamma$  situate nei piani di un fascio arbitrario formano una superficie di 4° ordine che ha per linea doppia l'asse  $r$  del fascio e per linee semplici le rette  $r_1, \dots, r_4$  coniugate alla  $r$  nelle polarità  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$ . La superficie contiene gli otto punti singolari del sistema  $\Sigma$ .*

Se la  $r$  incontra una delle rette  $q, q'$  comuni ai complessi dati  $K_1, \dots, K_4$ , essa retta  $q$  (o  $q'$ ) risulta doppia per la superficie  $\rho_{(4)}$ . Più particolarmente se la  $r$  cade in uno dei piani singolari di  $\Sigma$ , dalla superficie  $\rho_{(4)}$  si stacca tale piano singolare; invece se la  $r$  passa per un punto singolare del sistema, tale punto risulta triplo per la superficie  $\rho_{(4)}$ .

Infine se la retta  $r$  è un raggio comune a tre dei complessi  $K_1, \dots, K_4$  la superficie  $\rho_{(4)}$  risulta rigata, ha la retta  $r$  per direttrice tripla, ed è contenuta in una delle congruenze  $X_1, \dots, X_4$  del § 4.

L'involuppo di piani correlativo alla superficie di 4° ordine presa ora in esame, essendo costituita dagli  $\infty^4$  coni del complesso  $\Gamma'$  (definito nel capitolo precedente) che hanno i vertici su di una retta arbitraria  $s$ , risulta l'assieme dei piani delle coniche del complesso  $\Gamma$  che incontrano la  $s$ . Dunque:

2.° *Le  $\infty^2$  coniche del complesso  $\Gamma$  che si appoggiano ad una retta  $s$ , sono nei piani di un involuppo di 4ª classe, di cui sono doppi i piani del fascio ( $s$ ) e semplici i piani dei fasci che hanno per assi le rette  $s_1, \dots, s_4$  coniugate alla  $s$  nelle polarità  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$ . All'involuppo appartengono gli otto piani singolari del sistema.*

I piani comuni all'involuppo ora indicato e ad un cono arbitrario del complesso  $\Gamma'$  di vertice  $P$ , sono sostegni di coniche del complesso  $\Gamma$  che passano per  $P$  e si appoggiano alla  $s$ ; vale a dire che:

3.° *Le coniche del complesso  $\Gamma$  che incontrano una retta arbitraria  $s$ , formano una congruenza di 8° ordine e di 4ª classe (\*).*

4.° *Le coniche del complesso  $\Gamma$  che passano per un punto generico  $P$  dello spazio, formano una superficie di 8° ordine.*

Questa superficie ha in  $P$  un punto sestuplo. Da ciò segue che:

5.° *Vi sono sei coniche del complesso  $\Gamma$  che risultano tangenti ad un piano  $\pi$  in un punto  $P$  di tale piano.*

Si è ora al caso di determinare gli altri numeri caratteristici del complesso  $\Gamma$ .

Per es. dalla proposizione 1.ª si deduce che il numero delle coniche del complesso tangenti ad una retta arbitraria  $r$  è 4 e che il numero delle coniche del complesso che hanno per corda una retta arbitraria  $r$  e sono tangenti a un piano  $\omega$  non passante per la  $r$  è 6 (numero delle tangenti che da un punto doppio di una curva piana di 4.° ordine e di genere 2 vanno a toccare altrove la curva), mentre nel caso che la  $r$  sia in un piano singolare  $\omega$ , il numero anzidetto, non tenendo conto del piano  $\omega$ , riducesi a 4.

E può affermarsi che:

6.° *Le  $\infty^2$  coniche del complesso  $\Gamma$  tangenti ad un piano arbitrario  $\pi$  dello spazio, sono in piani di un involuppo di 6ª classe, di cui il piano  $\pi$  è doppio e la relativa linea di contatto è la conica del complesso situata in  $\pi$ . Dell'involuppo sono doppi gli 8 piani singolari del sistema  $\Sigma$  e sono semplici gli altri piani dei fasci  $(q)$ ,  $(q')$ .*

I 12 piani che il precedente involuppo ha in comune con un cono del complesso  $\Gamma'$  di vertice  $P$ , nel caso che questo punto appartenga al piano  $\pi$ , coincidono due a due con i piani sostegni delle 6 coniche indicate nella proposizione 4.ª. Invece nel caso generale essi risultano distinti, e sono sostegni di coniche di  $\Gamma$  che passano per il punto  $P$  e toccano il piano  $\omega$ . Ne segue che:

7.° *Le coniche del complesso  $\Gamma$  tangenti ad un piano  $\omega$  formano una congruenza di 12° ordine e di 6ª classe.*

Infine si ha che:

---

(\*) Chiamo *ordine* di una congruenza di coniche il numero delle coniche della congruenza che passano per un punto generico dello spazio, e *classe* il numero delle coniche della congruenza che hanno per corda una retta generica dello spazio.

8.° Le coniche del complesso  $\Gamma$  situate nei piani di una stella arbitraria ( $P$ ) formano una congruenza di 2° ordine e di 1° classe. La superficie focale di questa congruenza (formata dai vertici dei coni del complesso  $\Gamma$  che passano per il punto  $P$ , e perciò correlativa all'involuppo della precedente proposizione) è di 6° ordine, contiene le rette  $q, q'$ ; ha per punti doppi il punto  $P$  e gli 8 punti singolari di  $\Sigma$ ; ha per cono tangente in  $P$  il cono del complesso  $\Gamma'$ , e da ogni conica della congruenza è toccata in 6 punti, ecc., ecc.

7. La superficie di 8° ordine  $\sigma_{(8)}$  luogo delle coniche del complesso  $\Gamma$  che passano per un punto arbitrario  $O$  dello spazio, avendo in  $O$  un punto sestuplo, è segata ulteriormente dal piano di una conica  $c_{(2)}$  secondo una curva di 6° ordine che ha in  $O$  un punto 5-plo. Esistono perciò sulla  $\sigma_{(8)}$  due sistemi  $\infty^1$  di curve piane razionali  $c_{(2)} \equiv O, c_{(6)} \equiv O^5$  situate nei piani del cono  $\chi_{(2)}$  del complesso  $\Gamma'$  di vertice  $O$ .

Due coniche  $c_{(2)}, c'_{(2)}$  della superficie non hanno in generale oltre di  $O$  un secondo punto in comune, sicchè il punto in cui la prima di esse incontra, oltre che in  $O$ , il piano della seconda, si trova sulla curva  $c'_{(6)}$  ulteriore sezione della superficie con tale piano. Da ciò segue che due curve  $c_{(6)}$  della superficie non hanno, oltre di  $O$ , un secondo punto variabile in comune; una  $c_{(2)}$  e una  $c'_{(6)}$  hanno in comune, in generale, un solo punto variabile; e per un punto generico della superficie passa una sola curva di ciascuno dei due sistemi.

Perciò riferiti il sistema delle  $c_{(2)}$  e quello delle  $c_{(6)}$  con corrispondenze proiettive rispettivamente a due fasci di raggi ( $P$ ), ( $Q$ ) di un medesimo piano  $\omega$ , ne risulta una corrispondenza birazionale fra questo piano  $\omega$  e la superficie  $\sigma_{(8)}$ , sì fatta che alle sezioni piane della  $\sigma_{(8)}$  corrispondono in  $\omega$  delle curve di 8° ordine, per le quali il punto  $P$  è 6-plo ed il punto  $Q$  è doppio.

Ogni conica  $c_{(2)}$  della superficie  $\sigma_{(8)}$  contiene i poli del suo piano nelle polarità  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$ . Di conseguenza la superficie  $\sigma_{(8)}$  contiene le quattro coniche che nelle predette polarità corrispondono al cono  $\chi_{(2)}$  già indicato. Esse si trovano nei piani del cono  $\chi_{(2)}$  che corrispondono al punto  $O$  nelle  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$ , ed una qualsiasi  $c_i$  di esse forma una curva  $c_{(6)}$  della  $\sigma_{(8)}$  con i quattro raggi uscenti da  $O$  della congruenza  $X_i$  del § 4.

D'altra parte uno qualsiasi di questi raggi fa parte di una conica  $c_{(2)}$  della  $\sigma_{(8)}$ , perciò nella rappresentazione stabilita della  $\sigma_{(8)}$  sul piano  $\omega$ , al raggio anzidetto corrisponde un punto fondamentale semplice della rappresentazione.

Nè questa ammette altri punti fondamentali; cioè le curve immagini delle sezioni piane della superficie sono delle  $c_{(8)} \equiv P^6 Q^2, 16 R$ , essendo i punti  $R$  su 4 rette del fascio ( $Q$ ), 4 su ogni retta.

Alla curva di sezione della  $\sigma_{(8)}$  con un piano arbitrario della stella ( $O$ ) corrisponde sul piano  $\omega$  una curva che ha un solo punto variabile in comune con ogni retta dei fasci ( $P$ ), ( $Q$ ) e che passa semplicemente per i punti  $P$ ,  $Q$  (immagini di una  $c_{(6)}$  e di una  $c_{(2)}$  rispettivamente), corrisponde cioè una conica  $c_{(2)} \equiv PQ$ ; donde segue che al punto  $O$  della  $\sigma_{(8)}$  corrisponde su  $\omega$  una curva  $c_{(6)} \equiv P^5 Q$ , 16 R.

Dalla rappresentazione data segue anche che il genere di una sezione piana arbitraria della  $\sigma_{(8)}$  è 5, mentre le sezioni prodotte nella superficie dai piani della stella ( $O$ ) sono razionali; e siccome sulla  $\sigma_{(8)}$  oltre di  $O$  non vi può essere alcun punto di molteplicità superiore a 2, perciò la superficie ammette una linea doppia di 16° ordine che ha in  $O$  un punto multiplo secondo 10.

I sei punti variabili di sezione di tale linea  $c_{(16)}$  con un piano  $\tau$  del cono  $\chi_{(2)}$  non potendo essere doppi per l'una o per l'altra delle due curve  $c_{(2)}$ ,  $c_{(6)}$  prodotte dal piano  $\tau$  nella  $\sigma_{(8)}$ , risultano comuni alle due curve; mentre il 7° punto (diverso da  $O$ ) che le due linee hanno in comune, è punto di contatto del piano  $\tau$  con la superficie.

Da ciò segue che le coniche  $c_{(2)}$  e le curve  $c_{(6)}$  si appoggiano ciascuna in 6 punti alla  $c_{(16)}$ ; e analogamente dalla considerazione dei piani polari del punto  $O$  nelle  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$  si deduce che le 16 rette  $r$  della  $\sigma_{(8)}$  che passano pel punto  $O$ , hanno ciascuna un altro punto solo in comune con la  $c_{(16)}$ , sicchè l'immagine di questa curva nel piano  $\omega$  è una  $c_{(12)} \equiv P^6 Q^6$ , 16 R.

La completa sezione della superficie  $\sigma_{(8)}$  con il cono di 6° ordine che dal punto  $O$  proietta la  $c_{(16)}$ , è costituita da questa curva e dalle 16 rette  $r$ , sicchè il cono indicato non ammette alcuna generatrice multipla, perchè altrimenti tale retta appartenerebbe anche alla  $\sigma_{(8)}$ .

Ne segue che la  $c_{(16)}$  è di genere 10.

Infine è agevole riconoscere che la  $c_{(16)}$  passa semplicemente per gli 8 punti singolari del complesso.

8. Su una quadrica  $\varphi_{(2)}$  che contenga i raggi  $q$ ,  $q'$  si assuma ad arbitrio una generatrice  $d$  di sistema opposto ai predetti raggi, e si consideri la superficie  $\rho_{(4)} \equiv (q q' d)^2$  luogo delle seconde direttrici delle congruenze del sistema  $\Sigma$  che hanno per prima direttrice la  $d$  (§ 2).

Le superficie  $\varphi_{(2)}$ ,  $\rho_{(4)}$  hanno in comune, oltre alle  $q$ ,  $q'$ ,  $d$ , due generatrici  $d'$ ,  $d'_1$  di cui ciascuno determina con la  $d$  una congruenza del sistema  $\Sigma$ . Col variare della  $d$  nella schiera rigata  $\alpha'$  della  $\varphi_{(2)}$  che non contiene le  $q$ ,  $q'$ , variano del pari in tale schiera le  $d'$ ,  $d'_1$  e corrispondono alla  $d$  in una corrispondenza involutoria  $j_{2,2}$ .

Dunque su ogni quadrica  $\varphi_{(2)} \equiv q q'$ , nella schiera incidente a questi raggi, si ha una corrispondenza involutoria  $j_{2,2}$ , nella quale due rette coniugate sono direttrici di una medesima congruenza del sistema  $\Sigma$ .

Ora per un noto teorema se nella  $j_{2,2}$  a due raggi distinti  $d, d_1$  della schiera  $\alpha'$  corrispondono gli stessi due raggi  $d', d'_1$ , fra loro distinti, allora la  $j_{2,2}$  risulta una proiettività involutoria  $j' \equiv \left| \begin{array}{c} d d_1, e e_1, \dots \\ d' d'_1, e' e'_1, \dots \end{array} \right|$  intercedente fra le coppie di un'involuzione ordinaria  $j \equiv (d d_1, d' d'_1, e e_1, e' e'_1, \dots)$  della schiera  $\alpha'$  (\*).

In tale caso due coppie di rette corrispondenti  $d d_1, d' d'_1$  della  $j$  determinano rispettivamente con una generatrice  $g$  della  $\varphi_{(2)}$  dello stesso sistema delle  $q, q'$  una coppia di punti  $P \equiv g d, P' \equiv g d'$  ed una coppia di piani  $\pi \equiv g d_1, \pi' \equiv g d'_1$ , godenti la proprietà che i punti  $P, P'$  si trovano entrambi su le coniche del complesso  $\Gamma$  situate nei piani  $\pi, \pi'$ ; e viceversa questi piani appartengono entrambi ai coni di  $\Gamma'$  che hanno i vertici in  $P, P'$ ; cioè allora nella schiera rigata  $\alpha$  della  $\varphi_{(2)}$  che contiene le  $q, q'$  ogni generatrice  $g$  è sostegno di due involuzioni ordinarie, l'una di punti, l'altra di piani, riferite fra loro proiettivamente in modo che ogni coppia dell'una involuzione appartiene alle due coniche di  $\Gamma$  o ai due coni di  $\Gamma'$  determinati dalla corrispondente coppia dell'altra involuzione.

Inversamente è agevole riconoscere che se una retta  $r$  è incontrata da due coniche del complesso  $\Gamma$  nella stessa coppia di punti  $P, P'$  (nel quale caso i due coni del complesso  $\Gamma'$  dovuti a tali punti, hanno in comune la coppia dei piani  $\pi, \pi'$  sostegni delle suddette coniche) allora nella involuzione  $j_{2,2}$  che viene ad aversi sulla quadrica  $\varphi \equiv q q' r$ , a ciascuna delle rette  $d, d'$  che passano rispettivamente per i punti  $P, P'$ , corrispondono le stesse due rette  $d_1, d'_1$  che giacciono rispettivamente nei piani  $\pi, \pi'$ , sicchè la  $j_{2,2}$  si trova nelle condizioni particolari precedentemente indicate e perciò sulla  $r$  e nel fascio ( $r$ ) esistono infinite altre coppie analoghe alle  $P P', \pi \pi'$ ; ed ogni altra retta della schiera rigata  $\alpha \equiv q q' r$  gode le stesse proprietà della  $r$ .

E tenendo calcolo che le rette di una stella arbitraria ( $O$ ) soddisfacenti alla condizione precedentemente indicata, sono le generatrici del cono di 6° ordine che dal punto  $O$  proietta la curva doppia  $c_{(16)}$  della superficie  $\sigma_{(8)}$  formata dalle coniche del complesso  $\Gamma$  che passano per  $O$ , e correlativamente, si deduce che:

(\*) Il teorema a cui ci riferiamo, equivale alla nota proposizione che « se nel piano due coniche sono tali che esista un quadrilatero semplice iscritto in una di esse e circoscritto all'altra, esistono  $\infty^1$  altri quadrilateri analoghi al precedente ».

*Esiste un complesso di rette di 6° grado  $H_{(6)}$  di cui ogni raggio  $r$  è sostegno di due involuzioni ordinarie, l'una di punti, l'altra di piani, fra loro proiettive e tali che ogni coppia dell'una involuzione appartiene alle coniche di  $\Gamma$  (o ai coni di  $\Gamma'$ ) che hanno per sostegni gli elementi della coppia corrispondente dell'altra involuzione. Questo complesso è costituito da schiere rigate che hanno in comune i raggi  $q, q'$ , i quali perciò sono sestupli per esso.*

Per un punto  $O$  di un raggio  $r$  della schiera  $\rho_4 \equiv K_2 K_3 K_4$  la superficie  $\sigma_{(8)} \equiv O^6$  del complesso  $\Gamma$  si spezza nella superficie rigata  $\rho_{(4)} \equiv r^3$  della congruenza  $X_1$  ed in una superficie  $o_{(1)} \equiv O^3 r r'^2$ , essendo  $r'$  la generatrice della  $\rho_{(4)}$  che passa per  $O$ , sicchè le due superficie nel punto  $O$  che è triplo per entrambe, hanno in comune il piano tangente  $r r'$  e perciò la ulteriore loro sezione è una  $c_{(11)} \equiv O^5$  che da  $O$  viene proiettata secondo un cono di 6° ordine avente per raggio triplo la  $r$ . Questo cono appartiene al complesso di rette  $H_{(6)}$ . Perciò i raggi delle schiere rigate  $\rho_1, \dots, \rho_4$  sono tripli pel complesso  $H_{(6)}$ .

9. Ogni corrispondenza proiettiva dello spazio che trasformi ciascuno dei complessi dati  $K_1, \dots, K_4$  in sè stesso, fa corrispondere ad un fascio di raggi del sistema  $\Sigma$  un fascio di raggi dello stesso sistema, cioè trasforma del pari in sè stesso il sistema  $\Sigma$ , e perciò o fa corrispondere ciascuno dei complessi  $\Gamma, \Gamma'$  a sè stesso, o fa corrispondere uno di tali complessi all'altro, secondo che essa corrispondenza è una omografia o una correlazione.

In particolare se uno dei complessi dati, ad esempio il complesso  $K_1$ , è in involuzione con gli altri tre, allora nella polarità nulla  $\Pi_1$  ciascuno dei complessi dati è coniugato a sè stesso, sicchè in tale polarità al complesso  $\Gamma$  corrisponde il complesso  $\Gamma'$ , cioè allora la conica  $c_{(2)}$  del complesso  $\Gamma$  situata in un piano arbitrario  $\omega$  coincide con la conica  $c_{(2)'}$  che nella  $\Pi_1$  corrisponde al cono del complesso  $\Gamma'$  avente per vertice il punto  $O$  polo del piano  $\omega$  nella  $\Pi_1$ .

Ma queste coniche  $c_{(2)}, c_{(2)'}$  appartengono entrambe alla superficie  $\sigma_{(8)}$  del complesso  $\Gamma$  dovuta al punto  $O$ , perciò nel caso indicato esse coincidono in una conica doppia della superficie  $\sigma_{(8)}$  che staccasi dalla curva  $c_{(16)} \equiv O^{10}$  del caso generale, in modo che il cono che proietta questa curva dal punto  $O$  (cono che appartiene al complesso  $H_{(6)}$  del § precedente) viene a contenere il fascio di raggio  $(O - \omega)$ . Ne segue che:

*Se uno dei complessi  $K_1, \dots, K_4$  è in involuzione con gli altri tre, esso fa parte del complesso  $H_{(6)}$ .*

Perciò dal complesso  $H_{(6)}$  possono staccarsi o uno o due o tutti e quattro i complessi dati. Quest'ultimo fatto si verifica quando ciascuno dei complessi

dati è in involuzione con gli altri tre, nel quale caso la superficie  $\sigma_{(8)} \equiv O^6$  del complesso  $\Gamma$  ha per linee doppie le quattro coniche del complesso situate nei piani polari del punto  $O$  nelle  $\Pi_1, \dots, \Pi_4$ , ed una curva razionale di 8° ordine  $c_{(8)} \equiv O^6$ .

Ai risultati ora ottenuti si giunge anche facendo uso della rappresentazione indicata nel § 5, nella quale al complesso  $H_{(6)}$  corrisponde una superficie di 6° ordine  $\varphi_{(6)} \equiv (O_1, \dots, O_4)^3$  luogo di un punto  $A$  si fatto che il cono circoscritto alla quadrica fondamentale  $\chi_{(2)}$  di vertice  $A$ , e il cono formato dai raggi del complesso tetraedrale  $\theta$  uscenti da  $A$ , godono la proprietà che al primo dei due coni sono circoscritti  $\infty^1$  angoli tetraedri semplici iscritti nel secondo.

10. Un caso particolare degno di nota si presenta pel sistema  $\Sigma$  quando uno dei complessi  $K_1, \dots, K_4$ , ad esempio il complesso  $K_1$ , risulta singolare. Indicandone con  $a$  l'asse, si ha che tutte le coniche del complesso  $\Gamma$  si appoggiano alla  $a$  e tutti i coni del complesso  $\Gamma'$  risultano ad essa tangenti. Inoltre uno dei punti (o piani) singolari appartenente al raggio  $q$  (o al raggio  $q'$ ) è quello che tale raggio determina con la  $a$ .

Infine dal fatto che la  $a$  si trova su tutte le superficie  $\rho_{(4)}$  di  $\Gamma$  e che i piani che passano per essa fanno parte degli involuipi duali di  $\Gamma'$ , segue che la superficie  $\sigma$  del complesso  $\Gamma$  dovuta ad un punto arbitrario  $O$  dello spazio risulta di 7.° ordine. Essa può essere rappresentata su di un piano in modo che le sezioni piane abbiano per immagini curve:

$$c_{(7)} \equiv P^5 Q^2, 4 R_1, 3 R_2, 3 R_3, 3 R_4,$$

essendo i punti  $R_i$  su una retta del fascio ( $Q$ ), la quale per  $i = 1$  è l'immagine della  $a$  che è retta semplice della superficie. Questa ammette per linea doppia una curva  $c_{(11)} \equiv O^6$  che contiene i sei punti singolari del sistema non situati su  $a$ , ecc., ecc.

Analogamente se dei complessi  $K_1, \dots, K_4$  i primi due, o i primi tre o tutti e quattro risultano singolari, la superficie  $\sigma$  del complesso  $\Gamma'$  dovuta ad un punto  $O$ , risulta rispettivamente di 6°, di 5° o di 4° ordine, e può essere rappresentata su di un piano in modo che le sezioni piane abbiano per immagini

$$\begin{array}{l} \text{nel 1.° caso curve } c_{(6)} \equiv P^4 Q^2, 3 R_1, 3 R_2, 2 R_3, 2 R_4; \\ \text{" 2.° " " } c_{(5)} \equiv P^3 Q^2, 2 R_1, 2 R_2, 2 R_3, R_4; \\ \text{" 3.° " " } c_{(4)} \equiv P^2 Q^2, R_1, R_2, R_3, R_4, \end{array}$$

ove i punti  $B_i$  si trovano su una retta del fascio ( $Q$ ) la quale, se il complesso  $K_i$  è singolare con la retta  $a_i$  per asse, è l'immagine di tale retta  $a_i$ .

E nei singoli casi la linea doppia della superficie è una  $c_{(7)} \equiv O^3$  o una  $c_{(4)} \equiv O$  o una conica non passante per  $O$ .

### III.

11. *Date in un complesso lineare di rette,  $K$ , 4 congruenze lineari  $Q_1, \dots, Q_4$  in posizione affatto arbitraria fra loro, i fasci di raggi del complesso  $K$  nei quali le rette appartenenti alle congruenze date formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato  $g \equiv e_1 \dots e_4$  hanno i centri su una superficie di 4° ordine  $\lambda$  e i loro piani appartengono ad un involuppo di 4ª classe  $J$  coniugato alla  $\lambda$  nella polarità nulla  $\Pi$  dovuta al complesso  $K$ .*

Infatti per le congruenze date  $Q_1, \dots, Q_4$  si facciano passare rispettivamente 4 complessi lineari di rette  $K_1, \dots, K_4$  e si consideri il sistema  $\Sigma$  dei fasci di rette nei quali i raggi che appartengono ai predetti complessi formano un gruppo proiettivo al gruppo dato  $g$ .

I fasci di raggi indicati nel teorema sono i fasci comuni al sistema  $\Sigma$  ed al complesso  $K$ ; sicchè fra di essi quelli che trovansi in piani passanti per una retta arbitraria  $r$ , hanno per centri i punti in cui la superficie  $\rho_{(4)}$ , luogo dei centri dei fasci di  $\Sigma$  situati nei piani per  $r$  (§ 6°, 1.ª prop.) è segata dalla retta  $r'$  coniugata alla  $r$  nella polarità  $\Pi$ ; e perciò il numero dei fasci in questione è 4, vale a dire che per la retta  $r$  passano 4 piani dell'involuppo  $J$  su indicato e sulla  $r'$  si trovano 4 punti della superficie  $\lambda$ , donde segue il teorema.

La superficie  $\lambda$  contiene evidentemente le 8 direttrici  $d_i, d'_i$  delle congruenze date  $Q_i$  e le 4 coppie di raggi  $r_i, r'_i$  che queste congruenze prese tre a tre hanno in comune; e correlativamente per l'involuppo  $J$ .

Se per caso le congruenze date avessero in comune un raggio  $q = r_1 = \dots = r_4$ , questo apparterebbe ai 4 complessi  $K_1, \dots, K_4$ , in modo che la superficie  $\rho_{(4)}$  del sistema  $\Sigma$  precedentemente considerato, dovuta ad una retta  $r$  appoggiata alla  $q$ , avrebbe per retta doppia la  $q$  (§ 6, 1.ª prop.) e dei suoi punti di sezione con la retta  $r'$  coniugata alla  $r$  nella  $\Pi$ , due coinciderebbero nel punto  $r'q$ ; cioè allora la retta  $q$  risulterebbe doppia per la superficie  $\lambda$ , e correlativamente nell'involuppo  $J$  risulterebbero doppi i piani del fascio ( $q$ ).

Invece nel caso generale la superficie  $\lambda$  e l'involuppo  $J$  non hanno rispettivamente alcun punto o piano doppio.



In tale caso esiste un'omografia assiale armonica che trasforma ciascuna delle forme  $\lambda$ ,  $J$  in sè stessa.

Si supponga infatti che i complessi  $K_1, \dots, K_4$  oltre a passare rispettivamente per le congruenze  $Q_1, \dots, Q_4$ , soddisfacciano all'altra condizione di essere in involuzione con il complesso dato  $K$  (il che li determina completamente). Allora i raggi  $q$ ,  $q'$  che essi hanno in comune, non appartenendo al complesso  $K$  ed essendo coniugati fra di loro nella polarità  $\Pi$  dovuta a tale complesso (\*), risultano distinti, epperò esiste un'omografia assiale armonica  $\Omega$  che li ha per assi. Questa omografia trasforma in sè stesso ognuno dei complessi  $K$ ,  $K_1, \dots, K_4$  (\*\*), sicchè trasforma in sè stessa ognuna delle congruenze date  $Q_i \equiv K K_1, \dots, Q_4 \equiv K K_4$  (facendo corrispondere l'una all'altra le direttrici  $d_i$ ,  $d'_i$  di tale congruenze), epperò la  $\Omega$  muta in sè stesso il sistema dei fasci di raggi che si considera e quindi anche la superficie  $\lambda$  e l'inviluppo  $J$ .

Gli assi della  $\Omega$  sono coniugati nella polarità  $\Pi$ , sicchè la corrispondenza  $\Pi'$  prodotto delle  $\Omega$ ,  $\Pi$  è anch'essa una polarità nulla, e propriamente è quella dovuta al complesso lineare  $K'$  che è in involuzione con i 5 complessi  $K$ ,  $K_1, \dots, K_4$ . Essa al pari delle corrispondenze  $\Omega$ ,  $\Pi$  trasforma in sè stesso il sistema dei fasci di raggi che si considera, epperò:

*Esiste una seconda polarità nulla  $\Pi'$  nella quale si corrispondono la superficie  $\lambda$  e l'inviluppo  $J$ .*

Le rette  $r_i$ ,  $r'_i$  comuni alle congruenze date  $Q_l$ ,  $Q_m$ ,  $Q_n$  appartenendo ai 4 complessi  $K$ ,  $K_l$ ,  $K_m$ ,  $K_n$  che sono tutti in involuzione col complesso  $K'$ , risultano fra loro coniugate nella polarità  $\Pi'$ , sicchè in questa sono unite le direttrici  $d_i$ ,  $d'_i$  delle congruenze date, per  $i, l, m, n = 1, 2, 3, 4$  in qualsiasi ordine.

12. La superficie  $\lambda$  indicata nel precedente § è del tutto determinata dalle congruenze lineari  $Q_1, \dots, Q_4$  a cui è dovuta, e dal gruppo caratteristico  $g \equiv e_1, \dots, e_4$ . Ora se si tengono fisse le  $Q_1, \dots, Q_4$  e i primi tre elementi di  $g$ , e si fa variare l'ultimo elemento  $e_4$  del gruppo, facendogli descrivere tutta la forma  $f \equiv e_1 e_2 e_3$ , allora la superficie  $\lambda$  descrive un fascio che ha

(\*) DE PAOLIS, *Fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari*. Mem. Acc. Lincei, Serie 4<sup>a</sup>, Vol. I (1885), § IV, 22.

(\*\*) MONTESANO, *Su certi gruppi di superficie di secondo grado*. Annali di Matematica, Serie II, tomo XIV.

per base le 8 direttrici  $d_i, d'_i$  delle congruenze date e gli 8 raggi  $r_i, r'_i$  che queste congruenze prese tre a tre hanno in comune.

Tale fascio risulta riferito proiettivamente alla forma  $f$  descritta dall'elemento  $e_4$ , in modo che agli elementi  $e_1, e_2, e_3$  della  $f$  corrispondono nel fascio le superficie degeneri  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  formate rispettivamente:

la  $\lambda_1$  dalle quadriche  $\rho_{(2)} \equiv d_1 d'_1 d_4 d'_4 r_2 r'_2 r_3 r'_3, \rho'_{(2)} \equiv d_2 d'_2 d_3 d'_3 r_1 r'_1 r_4 r'_4,$   
 la  $\lambda_2$  " "  $\sigma_{(2)} \equiv d_2 d'_2 d_4 d'_4 r_3 r'_3 r_1 r'_1, \sigma'_{(2)} \equiv d_3 d'_3 d_1 d'_1 r_2 r'_2 r_4 r'_4,$   
 la  $\lambda_3$  " "  $\tau_{(2)} \equiv d_3 d'_3 d_4 d'_4 r_1 r'_1 r_2 r'_2, \tau'_{(2)} \equiv d_1 d'_1 d_2 d'_2 r_3 r'_3 r_4 r'_4.$

Ora tutto ciò che si è detto per le congruenze  $Q_1, \dots, Q_4$ , si ripeta per le congruenze lineari  $R_1, \dots, R_4$  che hanno rispettivamente per direttrici le coppie di rette  $r_1 r'_1, \dots, r_4 r'_4$ , le quali congruenze appartengono al complesso lineare  $K'$  indicato nel precedente §.

Siccome le  $R_1, \dots, R_4$  a tre a tre hanno in comune le rette  $d_i, d'_i$ , perciò esse danno origine allo stesso fascio  $\varphi$  di superficie  $\lambda'$  e stabiliscono fra questo fascio e la forma  $f$  la stessa proiettività che le  $Q_1, \dots, Q_4$  (proiettività ben determinata dalle terne corrispondenti  $e_1 e_2 e_3, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ ); vale a dire che la superficie  $\lambda$  dovuta alla congruenza  $Q_1, \dots, Q_4$  ed al gruppo caratteristico  $g$  coincide con la superficie  $\lambda'$  dovuta alle congruenze  $R_1, \dots, R_4$  ed allo stesso gruppo caratteristico  $g$ .

In altre parole i due gruppi di raggi delle congruenze  $Q_1, \dots, Q_4; R_1, \dots, R_4$  che passano per un medesimo punto dello spazio (o che giacciono, correlativamente, in un medesimo piano dello spazio) risultano sempre proiettivi fra di loro.

Se si chiamano *involute* due congruenze lineari di rette non degeneri, di cui ciascuna abbia per raggi le direttrici dell'altra, può affermarsi che

*Due gruppi di congruenze lineari di rette formati ciascuno da 4 congruenze con le direttrici distinte a due a due sghembe, e riferiti fra di loro in modo che ogni congruenza dell'un gruppo risulti in involuzione con le tre congruenze non omologhe (e con queste soltanto) dell'altro gruppo, godono le seguenti proprietà:*

1.° *Le congruenze di uno stesso gruppo appartengono ad un medesimo complesso lineare.*

2.° *Le due quaterne di raggi delle congruenze dei due gruppi che appartengono ad un medesimo punto (o piano) dello spazio, sono proiettive fra di loro.*

3.° I punti (o i piani) dello spazio per i quali le predette quaterne sono proiettive ad un gruppo dato  $g \equiv e_1 \dots e_4$ , appartengono ad una superficie di 4° ordine (o involuppano una superficie di 4° classe), la quale col variare del gruppo  $g$  descrive un fascio (o una schiera), che ha per base le 16 direttrici delle congruenze dei due gruppi.

13. Date in un complesso lineare di rette  $K$  5 congruenze lineari  $Q_1, \dots, Q_5$  in posizione affatto arbitraria fra di loro, esistono  $\infty^1$  fasci di raggi del complesso  $K$  nei quali i raggi appartenenti alle date congruenze formano un gruppo proiettivo ad un gruppo dato  $g \equiv e_1 \dots e_5$ . I centri di questi fasci si trovano su una curva gobba di 8° ordine e di genere 5, e i loro piani involuppano la forma duale alla precedente.

Si consideri infatti la superficie di 4° ordine  $\lambda_i$  luogo dei punti per i quali i raggi delle 4 congruenze date  $Q_l, Q_m, Q_n, Q_p$  formano un gruppo proiettivo al gruppo  $g_i \equiv e_l e_m e_n e_p$ , per  $i, l, m, n, p = 1, \dots, 5$  in qualsiasi ordine.

La completa sezione di due di queste 5 superficie, per esempio delle  $\lambda_1, \lambda_2$ , è costituita dalla curva  $c$  indicata nel teorema, dalle rette  $d_3, d'_3, d_4, d'_4, d_5, d'_5$  direttrici delle congruenze  $Q_3, Q_4, Q_5$ , e dai raggi  $q_{12}, q'_{12}$  comuni a queste congruenze; sicchè la  $c$  è di 8° ordine.

D'altra parte il numero dei raggi di una stella arbitraria che incontrano in due punti distinti due delle 8 rette  $d_3, d'_3, d_4, d'_4, d_5, d'_5, q_{12}, q'_{12}$ , è 16, sicchè il numero dei punti doppii apparenti della  $c$  è anche 16, cioè la  $c$  risulta di genere 5 (\*), come si era affermato.

Ogni direttrice  $d_i$  di una qualsiasi delle congruenze date ha in comune con la curva  $c$  4 punti (che sono le sezioni della  $d_i$  con la superficie  $\lambda_i$ ), mentre ogni raggio comune a tre delle congruenze date non ha alcun punto sulla  $c$ . Ora inversamente si ha che :

*Ogni curva di 8° ordine che abbia per quadriseganti le direttrici delle 5 congruenze date, è una curva del tipo che si studia, cioè i gruppi di raggi appartenenti alle date congruenze che passano per i singoli punti della curva sono tutti proiettivi fra di loro.*

Si consideri infatti il fascio delle superficie di 4° ordine  $\lambda_i$  di cui ogni superficie è formata da punti per i quali i gruppi dei raggi appartenenti alle congruenze date  $Q_l, Q_m, Q_n, Q_p$  sono fra loro proiettivi. Una curva

(\*) NOETHER, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*. Abhandlungen der k. Ak. der Wissenschaften zu Berlin, 1887, pag. 95,  $a_5$ ).

$c_{(8)} \equiv (d_i d'_i)^4$  non è segata in punti variabili dalle  $\lambda_i$ , sicchè giace per intero su una superficie del fascio, e ne segue il teorema.

Per un punto dello spazio che non sia sulle  $d_i, d'_i$ , passa una sola curva  $c_{(8)}$  del tipo che si considera. Può dunque affermarsi che:

*Cinque coppie di rette  $d_i, d'_i$  coniugate in una medesima polarità nulla dello spazio determinano una congruenza lineare di curve di 8° ordine e di genere 5 soddisfacenti alla sola condizione di appoggiarsi a ciascuna delle rette  $d_i, d'_i$  in 4 punti (\*). Due punti situati su una medesima curva della congruenza godono la proprietà che le rette uscenti rispettivamente da essi ed appoggiate alle  $d_i, d'_i$  formano due quintuple proiettive fra loro. La congruenza ammette 5 fasci generatori di superficie di 4° ordine (\*\*), di cui ciascuno ha per base 4 coppie di rette  $d_i, d'_i$  e gli 8 raggi appoggiati alle predette coppie prese tre a tre.*

Le basi di due fasci generatori della congruenza hanno tre coppie di rette  $d d'$  in comune, distribuite su tre quadriche di cui ciascuna fa parte tanto di una superficie degenerare dell'un fascio, come di una superficie degenerare dell'altro fascio, diversa dalla precedente.

Da ciò riesce agevole dedurre che:

*Il numero delle curve della congruenza che hanno per corda una retta generica dello spazio, è  $(4 - 1)^2 - 3 = 6$ .*

Reggono considerazioni correlative alle precedenti.

14. *Date in un complesso lineare di rette 6 congruenze lineari  $Q_1, \dots, Q_6$  in posizione affatto arbitraria, esistono 8 fasci di rette del complesso nei quali il gruppo dei raggi appartenenti alle date congruenze, è proiettivo ad un gruppo dato  $g \equiv e_1 \dots e_6$ .*

Si considerino infatti la curva  $c_{(8)}$ , determinata dalle 5 congruenze  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$  e dal gruppo caratteristico  $g_6 \equiv e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$  e la superficie di 4° ordine  $\lambda_{(4)}$  determinata dalle 4 congruenze  $Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  e dal gruppo caratteristico  $g_{1,2} \equiv e_3 e_4 e_5 e_6$ . I punti comuni alle  $c_{(8)}, \lambda_{(4)}$  non situati sulle direttrici delle congruenze  $Q_3, Q_4, Q_5$  sono i centri dei fasci di raggi indicati nel teorema, sicchè il loro numero è  $4 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 8$ .

(\*) Le curve della congruenza non hanno altre quadriseganti, perchè il numero di tali rette per una curva gobba di 8° ordine e di genere 5 è appunto 10. (BERZOLARI, *Su le secanti multiple di una curva algebrica*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo IX, pag. 191.)

(\*\*) Un fascio generatore di una congruenza di linee nello spazio è un fascio formato da superficie di cui ciascuna contiene  $\infty^1$  linee della congruenza.

Dal precedente teorema segue l'altro che:

*Assunte ad arbitrio 6 congruenze lineari di rette in un medesimo complesso lineare, i punti dello spazio si aggruppano 8 ad 8 in modo che i raggi delle congruenze date che passano per due punti di uno stesso gruppo formano due sestuple proiettive fra di loro. E correlativamente.*

L'involuzione  $I$  determinata nello spazio dagli anzidetti gruppi di punti  $P_1 \dots P_8, \dots, Q_1 \dots Q_8, \dots$ , ammette 15 fasci di superficie unite  $\lambda_{(4)}$  e 6 congruenze lineari di curve unite  $c_{(8)}$ . Facendo uso di questi sistemi di superficie e di curve unite, riuscirebbe agevole stabilire le proprietà fondamentali della involuzione  $I$ , ma tale studio ci porterebbe troppo lontano dai limiti proposti, nè perciò insisteremo su di esso.

15. Le proposizioni stabilite sino ad ora in questo Capitolo valgono per gruppi di congruenze lineari  $Q_1, \dots, Q_\nu$ , la cui scambievole posizione nel complesso lineare  $K$  a cui appartengono, sia affatto arbitraria. Subiscono invece delle modificazioni quando le congruenze  $Q$  siano in posizione speciale fra loro.

Fra i molteplici casi particolari possibili sono degni di menzione i seguenti:

1.° Per  $\nu = 4$ , le congruenze date  $Q_1, \dots, Q_4$  possono avere due raggi  $r, r'$  in comune. Allora esistono nel complesso  $K \infty^4$  congruenze lineari contenenti i raggi  $r, r'$ , sì fatte che le 4 schiere rigate che ciascuna di esse ha in comune con le  $Q_1, \dots, Q_4$ , trovansi su quadriche che nel fascio-schiera a cui appartengono, costituiscono un gruppo proiettivo al gruppo caratteristico  $g \equiv e_1 \dots e_4$  del sistema. Le direttrici di queste congruenze, riguardate come locali di punti o come involuppi di piani, costituiscono la superficie  $\lambda_{(4)}$  e l'inviluppo  $J_{(4)}$  del § 11. I raggi  $r, r'$  ne sono direttrici doppie.

2.° Per  $\nu = 4$ , tre delle congruenze date: le  $Q_1, Q_2, Q_3$  possono avere un fascio di raggi  $(O - \omega)$  in comune. Allora la superficie  $\lambda_{(4)}$  del caso generale si spezza nel piano  $\omega \equiv d'_1 d'_2 d'_3$  ed in una superficie di 3° ordine  $\lambda_{(3)} \equiv C^2 d_1 d_2 d_3 d_4 d'_4 r r_1 r_2 r_3$ , ove le  $r, r_1, r_2, r_3$  sono i raggi della quarta congruenza data  $Q_4$  situati rispettivamente nei piani  $\omega, \omega_1 \equiv d_2 d_3, \omega_2 \equiv d_3 d_1, \omega_3 \equiv d_1 d_2$ .

Più particolarmente se anche le  $Q_2, Q_3, Q_4$  hanno un fascio di raggi  $(O_1 - \omega_1)$  in comune, allora la superficie  $\lambda_{(3)}$  ora indicata si spezza a sua volta nel piano  $\omega_1 \equiv d_2 d_3 d_4 r r_1$  ed in una quadrica  $\lambda_{(2)} \equiv d_1 d'_1 r_2 r_3$ .

E correlativamente per l'inviluppo  $J_{(4)}$ .

3.° Per  $\nu = 5$ , quattro delle congruenze date: le  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  possono avere un raggio comune  $r_5$ . Allora la curva  $c_{(8)}$  del caso generale (§ 13)

si spezza nella retta  $r_5$  ed in una curva gobba  $c_{(7)}$  di genere 4, che ha per trisecanti le  $d_1, d'_1, \dots, d_4, d'_4$ , per quadrisecanti le  $d_5, d'_5$  e per corda la  $r_5$ , come è agevole riconoscere rappresentando su di un piano la superficie di 4° ordine  $\lambda_5 \equiv r_5^2 d_1 d'_1 \dots d_4 d'_4$  che contiene la  $c_{(7)}$ .

In generale se esistono  $x$  raggi  $r_1, \dots, r_x$  (per  $x \leq 5$ ) che appartengano alle congruenze date prese a quattro a quattro, in modo che il raggio  $r_i$  appartenga alle  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  (per  $i = 1, \dots, x$ ), allora la curva  $c_{(8)}$  si spezza nelle rette  $r_1, \dots, r_x$  ed in una curva di ordine  $8 - x$  e di genere  $5 - x$ , che ha in comune 2 punti con ciascuna delle rette  $r_1, \dots, r_x$  e  $4 - y_i$  punti con le rette  $d_i, d'_i$ , se  $y_i$  dei raggi  $r_1, \dots, r_x$  appartengono alla congruenza  $Q_i$ .

Col variare del gruppo caratteristico la curva  $c_{(8-x)}$  descrive nello spazio una congruenza lineare, senza soddisfare ad altre condizioni oltre a quelle degli appoggi alle rette  $d, r$ .

4.° Per  $\nu = 6$ , le direttrici  $d_1, \dots, d_6, d'_1, \dots, d'_6$  delle congruenze date possono essere gli spigoli di due tetraedri  $\theta, \theta'$  coniugati fra loro nella polarità nulla  $\Pi$  dovuta al complesso dato  $K$ . Se questo fatto si verifica, supponendo opposti su  $\theta$  gli spigoli  $d_1, d_4; d_2, d_5; d_3, d_6$ , e di conseguenza su  $\theta'$  gli spigoli  $d'_1, d'_4; d'_2, d'_5; d'_3, d'_6$ , due casi potranno darsi: o nel gruppo caratteristico  $g$  del sistema le tre coppie  $e_1 e_4, e_2 e_5, e_3 e_6$  appartengono ad una medesima involuzione, o ciò non succede.

Nel secondo caso i fasci di rette del complesso  $K$  nei quali i raggi appartenenti alle congruenze date formano un gruppo proiettivo al gruppo dato  $g$ , sono gli 8 fasci che hanno per sostegni i vertici e le facce dei tetraedri  $\theta, \theta'$ .

Invece nel primo caso, per una nota proprietà del quadrilatero piano completo, i fasci di raggi soddisfacenti alla condizione indicata sono  $\infty^4$ , e i loro centri si trovano sopra una curva gobba di 4° ordine e di 1° specie intersezione di due quadriche  $\lambda_{(2)}$  del tipo indicato alla fine del n.° prec. Tale curva  $c_{(4)}$  passa per gli 8 vertici dei due tetraedri  $\theta, \theta'$  e col variare del gruppo caratteristico  $g \equiv e_1 \dots e_6$  (formato da tre coppie di elementi in involuzione), essa descrive nello spazio una congruenza lineare avente per rete generatrice la rete di quadriche che ha per base gli 8 vertici dei due tetraedri. Ne segue il teorema che:

*I vertici di due tetraedri che si corrispondano in una polarità nulla  $\Pi$  dello spazio, sono base di una rete di quadriche. La congruenza formata dalle curve basi dei fasci di questa rete gode la proprietà che in due fasci*

di rette aventi rispettivamente per centri due punti situati su una medesima curva della congruenza e per piani quelli che corrispondono ai due centri nella  $\Pi$ , i raggi appoggiati alle coppie di spigoli omologhi dei due tetraedri formano due sestuple proiettive. E correlativamente.

16. Veniamo ora ad estendere i risultati ottenuti nei § precedenti al caso particolare in cui il complesso che contiene le congruenze  $Q_1, \dots, Q_v$ , sia singolare.

Ragionando come nel caso generale, riesce agevole dimostrare che:

1.° I fasci di raggi situati in piani passanti per una retta data  $k$  (o aventi i centri sulla  $k$ ) nei quali i raggi appoggiati a 4 rette date  $d_1, \dots, d_4$  formano un gruppo proiettivo ad un gruppo dato  $g$ , hanno i centri su una superficie di 4° ordine  $\lambda = k^2 d_i r_i r'_i$  (\*) (o si trovano negli  $\infty^2$  piani di un inviluppo di 4ª classe  $J \equiv k^2 d_i r_i r'_i$ ), essendo  $r_i, r'_i$  le rette appoggiate alla  $k$  ed alle  $d$  prese tre a tre (\*\*).

La superficie  $\lambda$  e l'inviluppo  $J$  dovute alle stesse rette ed al medesimo gruppo  $g$ , si corrispondono nella polarità nulla determinata dal complesso lineare  $K' \equiv k d_1 \dots d_4$ . In ogni fascio di tale complesso che abbia per sostegni un punto della  $\lambda$  ed il corrispondente piano dell'inviluppo  $J$ , le rette appoggiate alle coppie  $r_i, r'_i$  formano una quaterna proiettiva al gruppo  $g$ .

Da questo teorema segue che le proposizioni stabilite nel § 12 per due quaterne di congruenze lineari riferite fra loro in modo che ciascuna congruenza dell'un gruppo sia in involuzione con le tre congruenze non omologhe dell'altro gruppo, valgono anche nel caso che le congruenze dell'una quaterna appartengano ad un complesso singolare  $K$ , nel qual caso le congruenze dell'altra quaterna hanno un raggio comune (che è l'asse del complesso  $K$ ), o viceversa.

Fra i molteplici casi particolari che si presentano per la speciale posizione delle rette  $k, d_1, \dots, d_4$ ; degno di nota è quello che si ha quando le 5 rette

(\*) STURM, Ueber correlative oder reciproke Bündel. Math. Annalen. Bd. XII, § 38, teor. 2.°

(\*\*) La superficie  $\lambda$  può essere rappresentata su di un piano in modo che le sue sezioni piane abbiano per immagini delle curve  $c_4 \equiv O^2 1 \dots 8$  essendo il punto 1 inf.º vicino ad  $O$ , e trovandosi le terne di punti 238, 458, 678 su tre rette immagini delle  $d_2, d_3, d_4$ , mentre il punto 1 è l'immagine della  $d_1$ . Le rette  $r_1, r'_1, r_2, r'_2, r_3, r'_3, r_4, r'_4$  sono rappresentate rispettivamente dal punto 8 e dalle rette  $O1, O2, O3, O4, O5, O6, O7$ .

hanno una secante comune  $r = r'_1 \dots = r'_4$ . In tal caso la retta  $r$  risulta doppia per la superficie  $\lambda_{(4)}$ , e questa, oltre che alle rette  $k, d_1 \dots d_4$  ed al gruppo caratteristico  $g$ , può immaginarsi dovuta in modo analogo alle rette  $r, r_1 \dots r_4$  ed allo stesso gruppo  $g$ ; vale a dire che sulle coniche sezioni della superficie con i piani dei fasci  $(k), (r)$  i gruppi di sezione con le rette  $r_1, \dots, r_4$ , se sono in piani per  $k$ , o con le  $d_1, \dots, d_4$  se sono in piani per  $r$ , risultano proiettivi fra di loro (\*).

Proprietà correlative reggono per l'involuppo  $J_{(4)}$ , senza però che esista alcuna polarità che muti una delle forme  $\lambda, J$  nell'altra, perchè nel caso in esame il complesso lineare  $K' \equiv k d_1 \dots d_4$  risulta singolare.

Sempre nell'ipotesi che la retta  $k$  si appoggi ad una secante comune  $r$  delle  $d_1, \dots, d_4$ , può ulteriormente succedere che il gruppo  $g$  sia proiettivo al gruppo di punti  $r(d_1 \dots d_4)$ . In tale caso la superficie  $\lambda_{(4)}$  si scinde nel piano  $\lambda \equiv kr$  e nella superficie di 3° ordine  $\lambda_{(3)} \equiv kr d_1 \dots d_4 r_1 \dots r_4$ , la quale può immaginarsi dovuta in modo analogo alle rette  $r, r_1 \dots r_4$  ed allo stesso gruppo  $g$ .

2.° *I fasci di raggi situati in piani passanti per una retta data  $k$ , nei quali i raggi appoggiati a 5 rette date  $d_1, \dots, d_5$  formano un gruppo proiettivo ad un gruppo dato, hanno i centri su una curva gobba di 7° ordine e di genere zero, che incontra in 6 punti la  $k$  e in quattro punti ciascuna delle rette  $d_1, \dots, d_5$  (\*\*). E correlativamente.*

*Inversamente date nello spazio 6 rette  $k, d_1, \dots, d_5$  in posizione affatto arbitraria fra loro, ogni curva gobba di 7° ordine che incontri in 6 punti la  $k$  e in 4 punti ciascuna delle  $d_1, \dots, d_5$  è del tipo ora studiato, sicchè le curve in quistione costituiscono una congruenza lineare. Questa ammette 5 fasci generatori di superficie di 4° ordine aventi tutte per rette doppia la  $k$ . Una retta dello spazio è corda di 6 curve del sistema. E correlativamente.*

Ogni conica  $c_{(2)}$  situata in un piano  $\omega$  del fascio  $(k)$  e che contenga il gruppo di punti  $\omega(d_1 \dots d_5)$ , fa parte di una curva della congruenza, costituita dalla  $c_{(2)}$  e da una curva gobba razionale  $c_{(5)} \equiv k^4(d_1 \dots d_5)^3 c_{(2)}$ . Più par-

(\*) La superficie  $\lambda_{(4)}$  può essere rappresentata su di un piano in modo che le sue sezioni piane abbiano per immagini delle  $c_{(3)} \equiv 1 \dots 5$ , la  $k$  e la  $r$  siano rappresentate da una  $c_{(1)} \equiv 1$  e da una  $c_{(2)} \equiv 2345$ , e le rette  $d_1, d_2, d_3, r_1, r_2, r_3, d_4, r_4$  abbiano rispettivamente per immagini le rette 12, 13, 14, 25, 35, 45 ed i punti 5, 1. Allora il gruppo caratteristico  $g$  della superficie è quello delle rette 5 (2, 3, 4, 1).

(\*\*) STURM, Mem. cit., § 54, teor. 3.°



ticolarmente se il piano  $\omega$  è sì fatto che nel fascio ( $k$ ) esista un secondo piano  $\omega'$  tale che le due quintuple di punti  $\omega(d_1..d_5)$ ,  $\omega'(d_1..d_5)$  siano proiettive fra loro sulle coniche  $c_{(2)}$ ,  $c'_{(2)}$  a cui appartengono (ed a ciò è necessario e sufficiente che i piani  $\omega$ ,  $\omega'$  siano tangenti ad una medesima sviluppabile di 3<sup>a</sup> classe  $\sigma_{(3)}$  che abbia per assi le rette  $k, d_1, .. d_5$ ), allora esiste una curva  $c_{(7)}$ , della congruenza, che spezzasi nelle  $c_{(2)}$ ,  $c'_{(2)}$  ed in una cubica gobba  $c_{(3)}$  che ha per corde le  $k, d_1, .. d_5$  e si appoggia semplicemente alle  $c_{(2)}$ ,  $c'_{(2)}$ .

Viceversa ogni cubica gobba  $c_{(3)}$  che abbia per corde le  $k, d_1, .. d_5$ , fa parte di una curva degenera  $c_{(7)}$  del tipo indicato, il cui gruppo caratteristico è proiettivo al gruppo delle 5 quadriche  $k c_3 d_1, .., k c_{(3)} d_5$ , onde esiste una sviluppabile di 3<sup>a</sup> classe avente per assi le  $k, d_1, .. d_5$  e sì fatta che su ogni suo piano tangente le tracce delle  $d_1, .. d_5$  formano sulla conica che passa per esse, un gruppo proiettivo a quello delle 5 quadriche indicate.

Ne deriva una notevole relazione intercedente fra le 6 cubiche gobbe e le 6 sviluppabili di 3<sup>a</sup> classe che hanno rispettivamente per corde e per assi le stesse 6 rette dello spazio.

Di un solo caso particolare faremo cenno: del caso in cui le rette  $k, d_1, .. d_5$  abbiano una trasversale comune  $r$ . Allora la curva  $c$  essendo la sezione di due superficie di 4<sup>o</sup> ordine che hanno ulteriormente in comune le rette doppie  $k, r$  e le rette semplici  $d_m, d_n, d_p, r_i$ , risulta di 4<sup>o</sup> ordine.

Reggono le proposizioni correlative.

3.<sup>o</sup> *Esistono 4 fasci di raggi situati in piani passanti per una retta data  $k$ , nei quali i raggi appoggiati a 6 rette date  $d_1, .. d_6$  formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato; e correlativamente (\*).*

Soltanto nel caso che le rette  $d_1$  e  $d_4$ ,  $d_2$  e  $d_5$ ,  $d_3$  e  $d_6$  siano spigoli opposti di un tetraedro  $\theta$  e che le coppie di elementi  $e_1 e_4$ ,  $e_2 e_5$ ,  $e_3 e_6$  del gruppo caratteristico appartengano ad una medesima involuzione, esistono  $\infty^1$  fasci di raggi soddisfacenti alle condizioni indicate nel teorema. Essi hanno i centri su di una cubica gobba che ha per corda la  $k$  e passa per i vertici del tetraedro  $\theta$ . E correlativamente.

(\*) SCUBERT, *Abzählende Geometrie*, pag. 206 ( $p^3 e^2 p'^2 Z'^6 = 1$ ).

## IV.

17. *Dati nello spazio, 5 complessi lineari di rette  $K_1, \dots, K_5$  in posizione affatto arbitraria fra loro, dovuti rispettivamente alle polarità nulle  $\Pi_1, \dots, \Pi_5$ , le 5 coppie di rette  $q_1 q'_1, \dots, q_5 q'_5$  che i complessi dati presi 4 a 4 hanno in comune, segano un piano generico  $\omega$  dello spazio in 5 coppie di punti situate su raggi che appartengono ad un medesimo fascio e costituiscono un gruppo proiettivo a quello che i poli  $O_1, \dots, O_5$  del piano  $\omega$  nelle polarità  $\Pi_1, \dots, \Pi_5$  formano sulla conica  $c_{(2)} \equiv O_1 \dots O_5$  che passa per essi.*

Infatti le rette  $q_1, q'_1; \dots, q_5, q'_5$  sono coniugate fra loro nella polarità nulla  $\Pi$  dovuta al complesso  $H$  che è in involuzione con i complessi dati, sicchè i raggi  $r_1, \dots, r_5$  del piano  $\omega$  che si appoggiano alle predette coppie di rette, appartengono a tale complesso  $H$  e perciò concorrono in un medesimo punto  $O$ .

Di più indicando con  $Q_{lm}$  la congruenza lineare comune ai complessi dati  $K_l, K_m$  e con  $S_l$  la congruenza lineare che ha per direttrici i raggi  $q_l, q'_l$ , si ha che i due gruppi di congruenze  $Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{15}; S_2, S_3, S_4, S_5$  sono riferiti fra di loro in modo che ogni congruenza dell'un gruppo è in involuzione con le 3 congruenze non omologhe dell'altro gruppo, sicchè nel piano  $\omega$  le due quaterne di raggi  $O_1(O_2 O_3 O_4 O_5), r_2 r_3 r_4 r_5$  che appartengono alle predette congruenze, sono proiettive fra di loro (§ 12); vale a dire che la quaterna dei punti  $O_2 O_3 O_4 O_5$  della conica  $c_{(2)} \equiv O_1 \dots O_5$  è proiettiva a quella dei raggi  $r_2 r_3 r_4 r_5$ .

Analogamente il gruppo di punti  $O_1 O_2 O_4 O_5$  della  $c_{(2)}$  è proiettivo al gruppo  $r_1 r_3 r_4 r_5$ , onde per la  $c_{(2)}$  ed il fascio  $(O - \omega)$  si ha:

$$(O_1 \dots O_5)_2 \pi r_1 \dots r_5 (*); \quad c. v. d.$$

Correlativamente può affermarsi che

*Dati 5 complessi lineari di rette, i piani polari di un punto  $O$  nelle corrispondenti polarità nulle costituiscono sul cono di 2<sup>a</sup> classe che li contiene, un gruppo proiettivo a quello formato dai raggi uscenti da  $O$  ed appoggiati alle coppie di rette  $q_1 q'_1, \dots, q_5 q'_5$  che i complessi dati presi 4 a 4 hanno in comune.*

(\*) Con i simboli  $(O_1 \dots O_5)_2, (\omega_1 \dots \omega_5)_2$  ora ed in seguito designeremo il gruppo costituito su una conica (o in un cono di 2<sup>a</sup> classe) da cinque punti  $O_1, \dots, O_5$  della curva (o da cinque piani  $\omega_1, \dots, \omega_5$  del cono).

Da questo teorema e dai risultati ottenuti nel § 13 segue che :

*Date 5 polarità nulle  $\Pi_1, \dots, \Pi_5$  nello spazio ed assegnati in una stella 5 piani  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$  di cui tre non appartengano ad uno stesso fascio, i punti dello spazio a cui nelle polarità date corrispondono piani formanti un gruppo omografico a quello dei piani  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$ , si trovano su di una curva gobba di 8° ordine e di genere 5, che ha per quadriseganti i raggi comuni ai complessi lineari determinati dalle polarità date, presi 4 a 4. E correlativamente.*

Variando il gruppo caratteristico ( $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_5$ ), l'anzidetta curva  $c_{(8)}$  descrive una congruenza di 1° ordine del tipo indicato nel § 13, che ha per direttrici le 5 coppie di rette  $q_i q'_i$  e per fasci generatori i fasci  $\varphi_i$  costituiti da superficie:

$$\Lambda_{(4)} \equiv q_l q'_l q_m q'_m q_n q'_n q_p q'_p d_{il} d'_{il} d_{im} d'_{im} d_{in} d'_{in} d_{ip} d'_{ip},$$

per  $i, l, m, n, p = 1, 2, 3, 4, 5$  in qualsiasi ordine; avendo indicato con  $d_{il}, d'_{il}$  le rette coniugate fra loro in entrambe le polarità  $\Pi_l, \Pi_l$ .

Una retta arbitraria  $r$  dello spazio è corda di 6 curve della congruenza (§ 13). Le coppie dei punti di appoggio di queste curve con la  $r$  coincidono con quelle dovute alle cubiche gobbe che hanno per corde la  $r$  e le sue coniugate nelle polarità  $\Pi_1, \dots, \Pi_5$ .

Il teorema stabilito al principio di questo § vale anche nel caso che i 5 complessi dati abbiano un raggio comune  $r = q'_1 \dots = q'_5$  (§ 16, 1°) (\*). In tale caso la curva  $c_{(8)}$  si spezza nella retta  $r$  ed in una curva razionale  $c_{(7)} \equiv r^6 (q_1 \dots q_5)^4$ , la quale col variare del gruppo caratteristico descrive una congruenza lineare del tipo indicato nel § 16, 2°.

E così se fra i complessi dati ve ne sono  $x$  singolari, allora i loro assi  $k_1, \dots, k_x$  si staccano dalla curva  $c$  e resta una curva  $c'$  di ordine  $8 - x$  e di genere  $5 - x$  (§ 15, 3°) o di ordine  $7 - x$  e di genere zero, secondo che non esiste o esiste un raggio comune ai 5 complessi.

Nel primo caso la  $c'$  ha per corde le  $k_1, \dots, k_x$  e si appoggia ad ogni retta  $q$  comune a 4 dei complessi dati in  $4 - y$  punti, se  $y$  dei 4 complessi

(\*) Invece nel caso che i complessi dati abbiano due raggi in comune, la proiettività indicata nel teorema, risulta degenerare. Se  $q, q'$  sono i raggi comuni ai 5 complessi, la curva  $c$  e l'inviluppo  $j$  si spezzano nelle  $q, q'$  ed in 6 rette  $t$  appoggiate alle precedenti. Ciò può riconoscersi ricorrendo alla rappresentazione stabilita nel § 5, nella quale ai complessi lineari che hanno per assi le rette  $t$ , corrispondono piani della quadrica inviluppo fondamentale che segano i piani corrispondenti ai complessi dati secondo rette formanti un gruppo omografico al gruppo dato.

sono singolari; nel secondo caso invece essa ha  $6 - x$  punti sulla  $r$ , si appoggia semplicemente alle  $k_1, \dots, k_x$  ed incontra ogni retta  $q$  comune a 4 dei complessi dati, in  $4 - y$  punti, se  $y$  dei 4 complessi sono singolari.

In particolare se tutti i 5 complessi dati sono singolari con gli assi  $k_1, \dots, k_5$  in posizione affatto arbitraria, la  $c'$  è di 3° ordine e col variare del gruppo caratteristico essa descrive tutto il sistema delle cubiche gobbe che hanno per corde le  $k_1, \dots, k_5$  (\*). Onde può affermarsi inversamente che:

*Cinque corde arbitrarie  $k_1, \dots, k_5$  di una cubica gobba, prese 4 a 4, determinano 5 congruenze lineari di rette  $Q_1, \dots, Q_5$ . I raggi di queste congruenze che passano per un punto della cubica, costituiscono una quintupla di un fascio, la quale, col variare del punto sulla curva, varia restando sempre proiettiva al gruppo che i 5 piani proiettanti le  $k_1, \dots, k_5$  da un punto generico della curva formano sul cono di 2ª classe a cui essi piani appartengono.*

18. Se i complessi dati sono tutti singolari ed hanno un raggio comune, senza presentare ulteriori particolarità, allora i loro assi  $k_1, \dots, k_5$  appartengono ad una superficie di 3° ordine  $\sigma_{(3)}$  del tipo più generale, ed esiste su questa superficie un sistema doppiamente infinito di cubiche gobbe aventi per corde le  $k_1, \dots, k_5$  e tali che per due punti della superficie passa una cubica del sistema. Ne segue che tutti i gruppi di piani che proiettano le  $k_1, \dots, k_5$  dai singoli punti della superficie  $\sigma_{(3)}$  sono fra loro omografici.

Uno qualsiasi di essi o ogni gruppo di piani  $g \equiv \varepsilon_1 \dots \varepsilon_5$  che gli sia omografico, sarà da noi detto *gruppo fondamentale* della quintupla  $k_1 \dots k_5$ .

Ora innanzi tutto si ha inversamente che ogni punto dal quale le rette  $k_1, \dots, k_5$  vengono proiettate secondo una quintupla omografica al gruppo fondamentale indicato, appartiene alla superficie  $\sigma_{(3)}$ , giacchè per esso e per un punto della  $\sigma_{(3)}$  passa una cubica che ha per corde le  $k_1, \dots, k_5$  e che perciò giace per intero sulla  $\sigma_{(3)}$  con la quale ha in comune 11 punti.

Dunque il gruppo fondamentale della quintupla  $k_1 \dots k_5$  presenta questo di notevole che il luogo dei punti dai quali le  $k_1, \dots, k_5$  vengono proiettate secondo quintuple omografiche ad esso gruppo fondamentale, non è una curva (come nel caso generale) ma una superficie, e propriamente è la  $\sigma_{(3)}$  che passa per le  $k_1, \dots, k_5$ .

Su di essa designando con  $k_6$  l'altra retta della sestupla che contiene le  $k_1, \dots, k_5$  e con  $q_1, \dots, q_6$  le rette della sestupla associata, sicchè la  $q_6$  è il

(\*) STURM. Loc. cit. § 51, 7.

raggio comune ai complessi dati e le  $q_1, \dots, q_5$  sono i raggi che questi complessi hanno ulteriormente in comune presi 4 a 4, per un punto generico  $O$  della superficie si ha che i 5 piani  $Ok_1, \dots, Ok_5$  formano sul cono di 2<sup>a</sup> classe che li contiene, un gruppo  $O(k_1 \dots k_5)_2$  proiettivo a quello costituito dai raggi che passano per  $O$ , giacciono nel piano  $\omega \equiv Oq_6$  e si appoggiano rispettivamente alle  $q_1, \dots, q_5$ , e ciò in virtù del teorema stabilito al principio del Capitolo.

D'altra parte il gruppo di raggi indicato è proiettivo al gruppo di punti  $\omega(q_1 \dots q_5)_2$  che ha per sostegno la conica  $c_{(2)}$  sezione del piano  $\omega \equiv Oq_6$  con la  $\sigma_3$ ; a sua volta la quintupla  $\omega(q_1 \dots q_5)_2$  proiettata dalla retta  $k_6$ , che si appoggia alla  $c_2$ , dà il gruppo di piani  $k_6(q_1 \dots q_5)$  proiettivo ad essa e prospettivo al gruppo di punti  $q_6(c_{16} \dots c_{56})$ , avendo indicato con  $c_{i1}$  la retta della superficie sezione dei piani  $k_i q_1, k_1 q_i$ , ed infine il gruppo di punti ottenuto  $q_6(c_{16} \dots c_{56})$  è coniugato al gruppo di punti  $q_6(k_1 \dots k_5)$  nell'involuzione determinata sulla retta  $q_6$  dalle coniche della superficie che l'hanno per corda, onde può affermarsi che :

*I piani del gruppo fondamentale della quintupla  $k_1 \dots k_5$  formano sul cono di 2<sup>a</sup> classe, che li contiene, un gruppo proiettivo a quello costituito dai punti di sezione delle  $k_1, \dots, k_5$  con la secante comune  $q_6$ .*

Proiettando questi punti  $q_6(k_1, \dots, k_5)$  dal punto  $O$  della  $\sigma_3$ , le rette che ottengono, sono le sezioni del piano  $\omega \equiv Oq_6$  con i piani  $Ok_1, \dots, Ok_5$ . Ma esse formano una quintupla proiettiva al gruppo  $O(k_1 \dots k_5)_2$ , onde il piano  $\omega$  appartiene al cono di 2<sup>a</sup> classe che contiene i piani  $Ok_1, \dots, Ok_5$ .

Viceversa se un punto  $O$  determina con le 6 rette  $k_1, \dots, k_5, q_6$  6 piani appartenenti ad un medesimo cono di 2<sup>a</sup> classe, allora il gruppo  $O(k_1 \dots k_5)_2$  è proiettivo al gruppo di punti  $q_6(k_1 \dots k_5)$  e perciò anche alla quintupla di piani  $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_5)_2$  dovuta al gruppo fondamentale  $g_6 \equiv \varepsilon_1 \dots \varepsilon_5$  della quintupla data. Perciò i due gruppi  $O(k_1 \dots k_5)$ ,  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_5$  risultano omografici, ed il punto  $O$ , per proprietà già dimostrata, appartiene alla superficie  $\sigma_{(3)} \equiv k_1 \dots k_5$ . Ne deriva il teorema che :

*Date nello spazio 6 rette di cui una incontri le altre cinque a due a due fra loro sghembe, il luogo dei punti dai quali le rette date vengono proiettate secondo piani appartenenti ad un medesimo cono di 2<sup>a</sup> classe, è la superficie di 3<sup>o</sup> ordine che contiene le rette date (\*).*

(\*) Ofr. KOHN: Ueber die Sechstupel von geraden Linien, welche von sämtlichen Punkten einer cubischen Fläche als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden. Monatsh. f. Mathematik u. Physik. II Jahrg. 1891.

In un piano arbitrario  $\tau$  che non passi per alcuna delle 6 rette date, il gruppo di punti  $\tau(k_1 \dots k_5)_2$  non è mai proiettivo al gruppo di punti  $q_6(k_1 \dots k_5)$ , giacchè se lo fosse, esisterebbe una rigata di 3° o di 2° grado contenente le  $k_1 \dots k_5$ , e queste avrebbero almeno un'altra secante comune, il che è contrario alle ipotesi fatte.

Perciò nel piano  $\tau$  esiste un unico punto  $T$  dal quale il gruppo di punti  $\tau(k_1 \dots k_5)$  viene proiettato secondo una quintupla di raggi proiettiva al gruppo di punti  $q_6(k_1 \dots k_5)$  (\*).

Ora nella stella ( $T$ ) si considerino i 7 piani  $Tk_1, \dots, Tk_5, \tau, \tau' \equiv Tq_6$ .

I primi cinque sono segati dagli ultimi due secondo quintuple di rette fra loro proiettive, onde i 7 piani appartengono ad un medesimo cono di 2ª classe  $\chi_2$ , epperò  $T$  è un punto della superficie  $\sigma_{2,3}$ , ed il cono  $\chi_2$  fa parte dell'assieme che si considera. Dunque:

*Gli  $\infty^2$  coni indicati nel precedente teorema godono la proprietà che un piano dello spazio, che non passi per alcuna delle 6 rette date, appartiene ad uno e ad uno solo di essi.*

19. Assegnato ad arbitrio in una stella di piani un gruppo  $g \equiv \varepsilon_1 \dots \varepsilon_5$  che non sia omografico al gruppo fondamentale  $g_6$  della quintupla di rette  $k_1 \dots k_5$ , la cubica gobba luogo dei punti dai quali le rette date vengono proiettate secondo piani formanti un gruppo omografico al gruppo dato  $g$ , si spezza nella retta  $q_6$  ed in una conica  $c_{1,2}$ , che si appoggia semplicemente alle  $k_1, \dots, k_5, q_6$  (§ 15).

Col variare del gruppo  $g$ , la conica  $c_{1,2}$  descrive nello spazio una congruenza lineare che è la forma correlativa all'insieme dei coni studiato in fine del prec. §; cioè le coniche in quistione sono nei singoli piani dell'involuppo di 3ª classe  $J_{(3)} \equiv k_1 \dots k_6$  (\*\*), e su ciascuna di esse i punti di appoggio con le  $k_1, \dots, k_5$  formano un gruppo proiettivo alla quintupla di piani  $q_6(k_1 \dots k_5)$  (\*\*\*)).

(\*) STAUDT: *Geometrie der Lage*, n.º 233.

(\*\*) Di questa congruenza di coniche si fa cenno nel n. 5 della mia Memoria: *Su i vari tipi di congruenze lineari di coniche nello spazio*. Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli. Aprile 1895.

(\*\*\*) Quattro qualunque delle rette  $k_1, \dots, k_5$  determinano con la  $q_6$  due gruppi, l'uno di punti, l'altro di piani, che non sono proiettivi fra loro, non essendovi alcuna retta infinitamente vicina alla  $q_6$  che si appoggi alle 4 rette  $k$ .

Come invarianti della superficie  $\sigma_{2,3}$ , potrebbero assumersi i rapporti anarmonici delle quaterne di punti  $q_6(k_1 k_2 k_3 k_4)$ ,  $q_6(k_1 k_2 k_3 k_5)$  e delle quaterne di piani  $q_6(k_1 k_2 k_3 k_4)$ ,

Un legame più intimo intercede fra l'assieme dei conici indicati nel § prec. e la congruenza di coniche presa in esame. Esso è conseguenza immediata di un teorema di SCHUR (\*), di cui vogliamo dare ora una dimostrazione diretta assai semplice.

Il teorema in quistione è il seguente: *Due sestuple di rette associate  $k_1 \dots k_6, q_1 \dots q_6$  di una superficie generale di 3° ordine  $\sigma_3$  si corrispondono in una polarità ordinaria dello spazio.*

Designando con  $c_{il}$  la retta della  $\sigma_3$  sezione dei piani  $k_i q_l, k_l q_i$ , si considerino i punti  $R_1 \equiv k_6 q_1, \dots, R_5 \equiv k_6 q_5$  e i piani  $\rho_1 \equiv q_6 k_1, \dots, \rho_5 \equiv q_6 k_5$ . Questi segano la  $k_6$  nei punti  $R'_1 \equiv k_6 c_{16}, \dots, R'_5 \equiv k_6 c_{56}$  coniugati ad  $R_1, \dots, R_5$  nell'involuzione determinata sulla  $k_6$  dalle coniche della superficie che l'hanno per corda. Perciò le due quintuple  $R_1 \dots R_5, \rho_1 \dots \rho_5$  sono fra loro involutorie.

Analogamente il gruppo dei piani  $\tau_1 \equiv k_6 q_1, \dots, \tau_5 \equiv k_6 q_5$  ed il gruppo dei punti  $T_1 \equiv q_6 k_1, \dots, T_5 \equiv q_6 k_5$  sono in involuzione, epperò esistono  $\infty^1$  polarità ordinarie dello spazio nelle quali alla  $k_6$  è coniugata la  $q_6$  e ai punti  $R_1, \dots, R_5, T_1, \dots, T_5$  corrispondono rispettivamente i piani  $\rho_1, \dots, \rho_5, \tau_1, \dots, \tau_5$ . Per individuare una di queste polarità basta della retta  $k_1$  che passa per  $T_1$  e giace in  $\rho_1$ , assegnare la retta corrispondente che deve trovarsi nel piano  $\tau_1$  e passare pel punto  $R_1$ . Sia essa la  $q_1$ , che soddisfa alle condizioni indicate. Allora la polarità è ben determinata, ed in essa alla retta  $k_2$  che passa per  $T_2$ , giace in  $\rho_2$  e si appoggia alla  $q_1$ , è coniugata la retta  $q_2$ , che giace in  $\tau_2$ , passa per  $R_2$  e si appoggia alla  $k_1$ ; e così di seguito; donde il teorema.

Da questo segue che: *L'assieme dei conici studiato nel § prec. e la congruenza di coniche presa in esame in questo § si corrispondono in una polarità ordinaria dello spazio ben determinata.*

20. Due sestuple di rette associate di una superficie di 3° ordine sono assi di 12 complessi singolari di rette, distribuiti in due gruppi in modo che ogni complesso dell'un gruppo è in involuzione con i 5 complessi non omologhi dell'altro gruppo.

Ora in generale è possibile costruire due sestuple di complessi lineari di rette, formate ciascuna da complessi non appartenenti ad uno stesso sistema lineare  $\infty^4$  e riferite fra di loro in modo che ogni complesso di una di esse sia in involuzione con i complessi non omologhi dell'altra.

$q_6 (k_1 k_2 k_3 k_5)$ . Ciò appunto fa il BOBEK nella sua Nota: *Ueber die Invarianten der Flächen dritter Ordnung*. Monatsh. f. Mathematik u. Physik. VIII Jahrg. 1897.

(\*) *Math. Annalen*, Bd. XVIII, § 5.

Due sestuple siffatte saranno da noi dette *associate* (\*). Data una di esse ad arbitrio, l'altra è perfettamente determinata.

Nelle polarità nulle dovute ai complessi  $H_1, \dots, H_6$ ;  $H'_1, \dots, H'_6$  di due sestuple associate ad un piano arbitrario  $\omega$  dello spazio corrispondono due sestuple di punti  $O_1, \dots, O_6$ ;  $O'_1, \dots, O'_6$  fra le quali intercede una notevole relazione proiettiva.

Per ottenere questa relazione basta notare che i 5 complessi  $H_1, \dots, H_5$  della prima sestupla presi 4 a 4 hanno in comune 5 coppie di rette  $q_{16}, q'_{16}; \dots, q_{56}, q'_{56}$  le quali sono rispettivamente le direttrici delle congruenze lineari comuni alle coppie di complessi  $H'_1, H'_6, \dots, H'_5, H'_6$ , sicchè i raggi del piano  $\omega$  appoggiati alle anzidette coppie di rette sono i raggi  $O'_1, O'_6, \dots, O'_5, O'_6$ ; e perciò pel 1.º teorema del § precedente è:

$$O'_6 (O'_1 \dots O'_5) \pi (O_1 \dots O_5)_2. \quad (a)$$

Scambiando fra loro le due sestuple si riconosce che è anche:

$$O_6 (O_1 \dots O_5) \pi (O'_1 \dots O'_5)_2, \quad (a')$$

e si deduce che i punti  $O, O'$  formano due gruppi *linearmente associati* (*linearabhängige Punktsysteme* secondo la designazione di ROSANES (\*\*)), vale a dire che per ogni punto  $P$  del piano  $\omega$  esiste in tale piano un punto  $P'$  tale che:

$$P(O_1 \dots O_6) \pi P'(O'_1 \dots O'_6).$$

Dunque *i poli di un medesimo piano (o i piani coniugati ad un medesimo punto) nelle polarità nulle dovute ai complessi lineari di due sestuple associate, costituiscono due gruppi associati linearmente.*

Ed in particolare, per l'osservazione fatta al principio del §, si ha che:

*Seguendo due sestuple di rette associate di una superficie di 3º ordine con un piano (o proiettandole da un centro arbitrario) si ottengono due gruppi di punti (o di piani) associati linearmente (\*\*).*

Siano  $K_1, \dots, K_6, Q_1, \dots, Q_6$  due di siffatti gruppi di punti dovuti alle sestuple  $k_1, \dots, k_6, q_1, \dots, q_6$  della superficie  $\sigma_{(3)}$  e ad un piano arbitrario  $\tau$ . Questo seghi la  $\sigma_{(3)}$  secondo la curva  $c_{(3)} \equiv K_1 \dots K_6 Q_1 \dots Q_6$ .

(\*) Esse furono assunte da DE PAOLIS come sestuple fondamentali di riferimento nello stabilire il sistema più generale di coordinate dei complessi lineari di rette. (Mem. cit., cap. XII.)

(\*\*) ROSANES, *Ueber linearabhängige Punktsysteme*. Giornale di Crelle, vol. 88. 1880.

(\*\*\*) Di questo teorema trovasi un cenno alquanto vago nella Memoria di KANTOR: *Ueber die allgemeinsten linearen Systeme linearer transformationen*, § IV, 3 a). (Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. 46.)



Riguardando corrispondenti due punti  $P, P'$  del piano  $\tau$ , per i quali sia:

$$P(K_1 \dots K_6) \pi P'(Q_1 \dots Q_6),$$

ne risulta una corrispondenza cremoniana di 5° ordine ben nota, la quale ammette per punti fondamentali (doppi) nell'un sistema i punti  $K$  e nell'altro i punti  $Q$ .

Si supponga che in essa al punto  $K_6$  riguardato appartenente al secondo sistema corrisponda nel primo il punto  $T_6$ . Sarà:

$$T_6(K_1 \dots K_5) \pi K_6(Q_1 \dots Q_5) \pi k_6(q_1 \dots q_5) \pi q_6(k_1 \dots k_5),$$

ove delle ultime due quintuple la prima è costituita da piani e la seconda da punti. Ne deriva che il punto  $T_6$  coincide col vertice del cono di 2ª classe tangente al piano  $\tau$  ed alle rette  $k_1, \dots, k_5, q_6$ , epperò appartiene alla curva  $c_{3,1}$  (§ 18).

Quel che si è detto per il punto  $K_6$ , può ripetersi per i punti  $K_5, \dots, K_1$  per dedurne che la curva  $c_{3,1}$  è unita nella corrispondenza cremoniana indicata, ecc., ecc.

21. Un'altra proposizione che deriva dal teorema generale dimostrato nel prec. §, è la seguente:

*La superficie involuppo di un piano a cui in 6 polarità nulle  $\Pi_1, \dots, \Pi_6$  assegnate ad arbitrio corrispondono punti di una medesima conica, coincide con la superficie involuppo dovuta in modo analogo alle polarità nulle  $\Pi_1, \dots, \Pi_6$  formanti sestupla associata a quella delle  $\Pi_1, \dots, \Pi_6$ .*

Infatti nel caso che i punti  $O_1, \dots, O_6$  siano su di una conica, si ha che:

$$(O_1 \dots O_5)_2 \pi O_6(O_1 \dots O_5),$$

onde per le relazioni  $a), a')$  del § prec. è anche:

$$O'_6(O'_1 \dots O'_5) \pi (O'_1 \dots O'_5)_2;$$

cioè anche i punti  $O'_1, \dots, O'_6$  si trovano su di una conica, diversa in generale dalla precedente.

E può notarsi che la superficie involuppo indicata nel precedente teorema è di 8ª classe.

Infatti assunta ad arbitrio una retta  $r$  a cui nelle polarità  $\Pi_1, \dots, \Pi_6$  corrispondano rispettivamente le  $r_1, \dots, r_6$ , i piani che passano per la  $r$  e che appartengono all'involuppo che si considera, sono quelli che segano le  $r_1, \dots, r_6$  in punti di una medesima conica, onde il loro numero è 8 (\*).

(\*) Vegg. fra gli altri SCHUBERT, *Abzählende Geometrie*, pag. 95 ( $\mu^2 \nu^6 = 8$ ).

Se due delle rette  $r_1, \dots, r_6$  coincidono fra loro, ogni piano passante per la  $r$  sega le  $r_1, \dots, r_6$  in punti di una conica e perciò appartiene all'involuppo che si considera. Questo perciò contiene 60 fasci di piani, che hanno per assi i raggi comuni ai complessi della prima (o della seconda) sestupla presi quattro a quattro. Reggono considerazioni correlative riguardanti una superficie di 8° ordine:

$$\sigma_{(8)} \equiv q_{12} q'_{12} \dots q_{56} q'_{56} d_{12} d'_{12} \dots d_{56} d'_{56},$$

completamente determinata da due sestuple associate di complessi lineari  $(H_1 \dots H_6), (H'_1 \dots H'_6)$ , ecc., ecc.

Se una di queste sestuple è costituita da complessi singolari aventi per assi 6 rette  $k_1, \dots, k_6$  in posizione affatto arbitraria fra loro, allora ognuna delle rette  $k$  coincide con 5 rette  $d$  e risulta doppia per la corrispondente superficie  $\sigma_{(8)}$ ; si presenta cioè in tale caso la nota superficie di 8° ordine  $\sigma_{(8)} \equiv (k_1 \dots k_6)^2 q_{12} q'_{12} \dots q_{56} q'_{56}$ , luogo dei vertici dei coni di 2° grado tangenti a 6 rette arbitrarie dello spazio (\*).

Più particolarmente se le rette  $k_1, \dots, k_6$  formano una sestupla su di una superficie di 3° ordine, allora anche le rette  $q$  coincidono a 5 a 5 con le rette  $q_1, \dots, q_6$  della sestupla associata alla precedente, sicchè le  $q_1, \dots, q_6$  risultano anche esse doppie per la corrispondente superficie  $\sigma_{(8)}$ .

## V.

22. *Dati cinque complessi lineari di rette  $K_1, \dots, K_5$  in posizione affatto arbitraria fra di loro, i fasci di rette dello spazio nei quali i raggi appartenenti ai complessi dati formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato  $g \equiv e_1 \dots e_5$ , costituiscono un sistema  $\infty^3: \Sigma'$ .*

<i>In un piano generico dello spazio esiste un unico fascio di rette del sistema.</i>	<i>Un punto generico dello spazio è centro di un unico fascio di rette del sistema.</i>
---	---

Infatti designando con  $O_1, \dots, O_5$  i poli di un piano  $\omega$  nelle polarità nulle  $\Pi_1, \dots, \Pi_5$  dovute ai complessi dati, il fascio di raggi del sistema  $\Sigma'$  situato

---

(\*) Vegg. CAYLEY, *Memoir on Quartic surfaces*. Proc. Lond. Math. Soc. Vol. III; *On a surface of the eight order*. Math. Annalen. Bd. VI; HIRTHOLZER, *Ueber Kegelschnitte im Raume*. Math. Annalen. Bd. II.

in  $\omega$ , è quello che ha per centro il punto  $O$  di  $\omega$  da cui i punti  $O_1, \dots, O_5$  vengono proiettati secondo un gruppo di rette proiettivo al dato.

Dai precedenti teoremi deriva che:

*Un punto e un piano dello spazio che siano sostegni di un fascio di raggi del sistema  $\Sigma'$ , si corrispondono in una reciprocità birazionale nulla.*

I punti che corrispondono in questa reciprocità ai piani passanti per una retta arbitraria  $k$ , sono i centri dei fasci situati nei piani per  $k$ , nei quali i raggi appoggiati alle rette  $k_1, \dots, k_5$ , coniugate alla  $k$  nelle  $\Pi_1, \dots, \Pi_5$ , formano un gruppo proiettivo al dato. Perciò i punti indicati si trovano su di una curva di 7° ordine che ha per secante sestupla la  $k$  e per quadriseganti le  $k_1, \dots, k_5$  (§ 16, 2°).

Dunque:

*La reciprocità birazionale  $\Theta$  indicata nel teorema è di 7° grado.*

Se i piani polari di un punto  $O$  nelle  $\Pi_1, \dots, \Pi_5$  formano nel cono di 2ª classe che li contiene, un gruppo proiettivo al gruppo dato  $g$ , allora ogni piano di questo cono corrisponde nella reciprocità  $\Theta$  al punto  $O$ , il quale perciò risulta doppio per tutte le superficie  $\varphi_{(7)}$  che corrispondono nella  $\Theta$  alle stelle di piani dello spazio.

Il luogo dei punti  $O$  ora indicati è una curva gobba di 8° ordine e di genere 5 che ha per quadriseganti le 10 rette  $q_i, q'_i$  comuni ai complessi dati presi 4 a 4 (§ 17).

Anche queste rette sono fondamentali per la  $\Theta$ , perchè ad un punto  $O$  di una di esse corrispondono tutti i piani del fascio di cui essa retta è asse. Nè la corrispondenza  $\Theta$  ammette altri punti eccezionali, sicchè le superficie che in essa corrispondono alle stelle di piani dello spazio sono delle  $\varphi_{(7)} \equiv c_{(8)}^2, 10 q$ .

Correlativamente ad un piano punteggiato corrisponde nella  $\Theta$  un involuppo di  $\infty^2$  piani  $I_{(7)} \equiv j_{(8)}^2, 10 q$ , avendo l'involuppo fondamentale  $j_{(8)}$  genesi correlativa a quella della curva  $c_{(8)}$ .

La Iacobiana del sistema delle superficie  $\varphi$  è una superficie  $\sigma_{(24)} \equiv c_{(8)}^7, 10 q^4$  che corrisponde nella  $\Theta$  all'involuppo  $j_{(8)}$ ; e correlativamente ecc.

Un'altra osservazione è da farsi sulla reciprocità  $\Theta$ , ed è la seguente:

In un fascio di raggi ( $O - \omega$ ) che appartenga a due dei complessi dati, per esempio a  $K_1$  e a  $K_2$ , si considerino i raggi  $r_3, r_4, r_5$  che si trovano nei complessi  $K_3, K_4, K_5$  ed i raggi  $r_1, r_2$  pei quali si ha:

$$r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 \pi g \equiv e_1 e_2 e_3 e_4 e_5.$$

Le rette  $r_1, r_2$  appartenendo ai complessi  $K_1, K_2$ , ne deriva che il fascio

( $O - \omega$ ) fa parte del sistema  $\Sigma'$ , sicchè il punto  $O$  e il piano  $\omega$  si corrispondono nella  $\Theta$ .

Da ciò segue che due rette che siano coniugate fra loro in due delle polarità date, si corrispondono anche nella reciprocità  $\Theta$ , nel senso che ai piani che passano per una di tali rette, corrispondono nella  $\Theta$  i punti dell'altra.

23. La polarità nulla  $\Pi$  dello spazio, determinata dal complesso lineare  $K$  che è in involuzione con i complessi dati  $K_1, \dots, K_5$ , facendo corrispondere ciascuno di questi complessi a sè stesso, trasforma del pari in sè stesso il sistema dei fasci di rette  $\Sigma'$  del § precedente, facendo corrispondere alla curva fondamentale  $c_{(8)}$  l'involuppo fondamentale  $j_{(8)}$  del sistema.

Ed i centri di due fasci del sistema  $\Sigma'$  che si corrispondano nella  $\Pi$ , sono coniugati fra loro in una corrispondenza birazionale involutoria  $J$  dello spazio (prodotto delle reciprocità commutabili  $\Theta$  e  $\Pi$ ), la quale ha lo stesso grado e le stesse linee fondamentali della  $\Theta$ ; cioè in essa ai piani dello spazio corrispondono le superficie  $\varphi_{(7)} \equiv c^2_{(8)}$ ,  $10 q$  già indicate nel § precedente; ad ogni punto di una delle rette  $q_i, q'_i$  corrisponde per intero l'altra di tali rette; mentre ad un punto della  $c_{(8)}$  corrisponde una conica il cui assieme costituisce la superficie  $\sigma_{(24)} \equiv c^7_{(8)}$ ,  $10 q^4$  già indicata nel precedente §, che è la Iacobiana del sistema delle superficie  $\varphi_{(7)}$  (\*).

La conica  $o_{(2)}$  che corrisponde ad un punto generico  $O$  della  $c_{(8)}$  nell'involuzione  $J$  ora definita, è coniugata nella  $\Pi$  al cono di 2<sup>a</sup> classe  $\chi_{(2)} \equiv \omega_1 \dots \omega_5$  che corrisponde allo stesso punto  $O$  nella reciprocità  $\Theta$ ; essa perciò si trova sul piano  $\omega$  polare di  $O$  nella  $\Pi$  (piano che appartiene all'involuppo  $j_{(8)}$ ) e contiene i punti  $O_1, \dots, O_5$ , poli di  $\omega$  nelle  $\Pi_1, \dots, \Pi_5$ , i quali formano su di essa un gruppo proiettivo al gruppo caratteristico del sistema. Inoltre la conica  $o_{(2)}$

(\*) Nella corrispondenza birazionale che l'involuzione  $J$  stabilisce fra un piano  $\tau$  e la corrispondente superficie  $\varphi_{(7)}$ , alle sezioni piane della  $\varphi_{(7)}$  corrispondono curve:

$$c_{(7)} \equiv 8 D^2, 10 Q,$$

e ai singoli punti della curva doppia  $c_{(8)}$  corrispondono coppie di punti di una curva:

$$c_{(24)} \equiv 8 D^7, 10 Q^4,$$

di genere 25, situate su rette di un involuppo di 8<sup>a</sup> classe, sezione del piano  $\tau$  con l'involuppo  $j_{(8)}$ ; sicchè il numero di tali coppie formate da punti coincidenti è 32. E facendo uso della *formola di ZEUTHEN* (*Math. Annalen*. Bd. III) per la corrispondenza (1, 2) che intercede fra le  $c_{(8)}$ ,  $c_{(24)}$ , può riconoscersi che il genere della  $c_{(8)}$  è 5, ciò che per altra via abbiamo già stabilito.

non avendo punti variabili di sezione con le superficie  $\varphi_{(7)}$ , e non incontrando le  $q_i, q'_i$  che sono linee fondamentali di 2.<sup>a</sup> specie dell'involuzione  $J$ , si appoggia necessariamente in 7 punti alla  $c_{(8)}$ : donde segue che:

*Una curva  $c_{(8)}$  del tipo indicato nei § 12 e 17, le cui quadriseganti si corrispondano 2 a 2 nella polarità nulla  $\Pi$ , è segata dal piano polare di un suo punto  $O$  nella  $\Pi$ , oltre che in  $O$ , in 7 punti di una medesima conica.*

Due punti coniugati nella involuzione  $J$  sono su di un raggio del complesso  $K$ ; nè la  $J$  ammette superficie punteggiata unita, ma soltanto una curva punteggiata unita  $u_{(8)}$ , luogo dei punti per i quali i raggi appartenenti alle congruenze lineari  $(K K_1), \dots (K K_5)$  formano un gruppo proiettivo al gruppo caratteristico del sistema. Perciò un raggio generico del complesso  $K$  contiene tre coppie di punti coniugati nella  $J$ .

La curva unita  $u_{(8)}$  ora indicata ha soltanto 8 punti variabili in comune con le superficie  $\varphi_{(7)}$  coniugate nella  $J$  ai piani dello spazio, nè incontra le rette  $q_i, q'_i$ ; sicchè si appoggia alla curva  $c_{(8)}$  in 24 punti; vale a dire che sulla  $c_{(8)}$  esistono 24 punti di cui ciascuno si trova sulla conica che gli corrisponde nella  $J$ .

È opportuno anche notare che le rette  $d_{il}, d'_{il}$  che si corrispondono in entrambe le polarità date  $\Pi_i, \Pi_l$ , corrispondono l'una all'altra nella  $J$  con proiettività non degenera.

Se si tengono fissi i complessi  $K_1, \dots K_5$ , e si fa variare in tutti i modi possibili il gruppo  $g$ , si presentano  $\infty^2$  sistemi  $\Sigma'$  di fasci di raggi ed altrettante involuzioni  $J$  del tipo ora studiato. Queste danno tutte origine al complesso di rette  $K$  contato tre volte, e presentano ulteriormente le seguenti proprietà:

1.<sup>o</sup> Esiste una sola involuzione del sistema nella quale si corrispondono due punti assegnati posti su di un medesimo raggio del complesso  $K$ .

2.<sup>o</sup> Le curve fondamentali  $c_{(8)}$  delle involuzioni del sistema costituiscono una congruenza di 1.<sup>o</sup> ordine che ha per direttrici le rette  $q_i, q'_i$ .

3.<sup>o</sup> Le curve punteggiate  $u_{(8)}$  delle involuzioni del sistema costituiscono una congruenza di 1.<sup>o</sup> ordine dello stesso tipo della precedente, che ha per direttrici le rette  $d_i, d'_i$  coniugate fra loro nella polarità  $\Pi$  e nelle singole polarità date  $\Pi_i$ .

Se ai complessi  $K_1, \dots K_5$  si sostituiscono i complessi  $K'_1, \dots K'_5$  che con  $K$  formano la sestupla associata a quella costituita da  $K_1, \dots K_5, K$ , si presenta un secondo sistema di involuzioni  $J$  riferito al precedente in modo che di due involuzioni corrispondenti, aventi lo stesso gruppo caratteristico,

l'una ha per curva fondamentale la curva punteggiata unita dell'altra; ecc., ecc.

24. Può succedere che uno dei complessi dati, ad esempio il complesso  $K_5$ , sia singolare con la retta  $k$  per asse. In tale caso designando con  $k_1, \dots, k_4$  le rette conjugate alla  $k$  nelle polarità dovute agli altri 4 complessi dati, si ha che ad un piano  $\omega$  che passi per la  $k$ , corrispondono nella reciprocità  $\Theta$  definita nel prec. §, tutti i punti di una conica  $c_{(2)}$  appoggiata alle  $k_1, \dots, k_4$  in punti che sulla  $c_{(2)}$  formano un gruppo proiettivo al gruppo  $g_5 \equiv e_1 \dots e_4$ . Ne segue che il fascio  $(k)$  fa parte dell'involuppo fondamentale  $j_{(5)}$  della  $\Theta$  e la superficie corrispondente è una  $\sigma_{(4)} \equiv k^2 k_1 \dots k_4$  di tipo noto (§ 6, 1.<sup>o</sup>). E correlativamente per la  $k$  riguardata come forma di punti.

Può succedere in secondo luogo che i complessi dati abbiano un raggio comune  $r = q'_1 = \dots = q'_5$ . In tal caso il complesso  $K$  che è in involuzione con essi, è singolare; onde la corrispondente polarità  $\Pi$  e l'involuzione  $J \equiv \Theta \Pi$  risultano degeneri.

Di più nel caso in esame le forme fondamentali  $c_{(8)}, j_{(8)}$  della corrispondenza  $\Theta$  vengono a contenere rispettivamente la retta  $r$  ed il fascio  $(r)$  (§ 17); e siccome ad un fascio di piani (o ad una punteggiata) che abbia per sostegno una retta appoggiata alla  $r$ , corrisponde nella  $\Theta$  una curva  $c$  di 4.<sup>o</sup> ordine (o un involuppo  $j$  di 4.<sup>a</sup> classe) (§ 16, 2.<sup>o</sup>), perciò le superficie  $\varphi$  che corrispondono nella  $\Theta$  alle stelle di piani, sono delle  $\varphi_{(7)} \equiv r^3, c^2_{(7)}, 5q$ ; e correlativamente ai piani punteggiati corrispondono involuppi  $I_{(7)} \equiv r^3, j^2_{(7)}, 5q$ .

In sostanza la  $r$  corrisponde per intero *contata tre volte* ad ogni suo piano, epperò risulta multipla secondo 12 per la superficie iacobiana delle  $\varphi_{(7)}$ ; e correlativamente ecc.

Se tutti i complessi dati sono singolari con le rette  $k_1, \dots, k_5$  per assi e col raggio comune  $q_6$ , allora le superficie  $\varphi$  sono delle  $\varphi_{(7)} \equiv q_6^3, (k_1 \dots k_5 c_{(2)})^2, 5q$ ; e gli involuppi  $I$  sono degli  $I_7 \equiv q_6^3, (k_1 \dots k_5 j_{(2)})^2, 5q$ , ove la conica fondamentale  $c_{(2)}$  ed il cono involuppo  $j_{(2)}$  sono del tipo indicato nei § 19 e 18; cioè la  $c_{(2)}$  si trova in un piano  $\omega$  dell'involuppo  $J_{(2)} \equiv k_1 \dots k_5 q_1 \dots q_6$  e il cono  $j_{(2)}$  ha il suo vertice  $O$  sulla superficie  $\sigma_{(3)} \equiv k_1 \dots k_5 q_1 \dots q_6$ .

Ai fasci di piani che hanno per assi le  $k_1, \dots, k_5$ , corrispondono nella  $\Theta$  le superficie di 4.<sup>o</sup> ordine :

$$\sigma_4 \equiv k_1^2 q_6^2 k_2 \dots k_5 c_{(2)} q_2 \dots q_5, \dots, \sigma_5 \equiv k_5^2 q_6^2 k_1 \dots k_4 c_{(2)} q_1 \dots q_4;$$

onde al cono  $j_{(2)}$  è coniugata la superficie di 4.<sup>o</sup> ordine  $\sigma \equiv k_1 \dots k_5 q_6^2 c_{(2)}^2$ , ed

non avendo punti variabili di sezione con le superficie  $\varphi_{(7)}$ , e non incontrando le  $q_i, q'_i$  che sono linee fondamentali di 2.<sup>a</sup> specie dell'involuzione  $J$ , si appoggia necessariamente in 7 punti alla  $c_{(8)}$ : donde segue che:

*Una curva  $c_{(8)}$  del tipo indicato nei § 12 e 17, le cui quadriseganti si corrispondano 2 a 2 nella polarità nulla  $\Pi$ , è segata dal piano polare di un suo punto  $O$  nella  $\Pi$ , oltre che in  $O$ , in 7 punti di una medesima conica.*

Due punti coniugati nella involuzione  $J$  sono su di un raggio del complesso  $K$ ; nè la  $J$  ammette superficie punteggiata unita, ma soltanto una curva punteggiata unita  $u_{(8)}$ , luogo dei punti per i quali i raggi appartenenti alle congruenze lineari  $(K K_1), \dots (K K_5)$  formano un gruppo proiettivo al gruppo caratteristico del sistema. Perciò un raggio generico del complesso  $K$  contiene tre coppie di punti coniugati nella  $J$ .

La curva unita  $u_{(8)}$  ora indicata ha soltanto 8 punti variabili in comune con le superficie  $\varphi_{(7)}$  coniugate nella  $J$  ai piani dello spazio, nè incontra le rette  $q_i, q'_i$ ; sicchè si appoggia alla curva  $c_{(8)}$  in 24 punti; vale a dire che sulla  $c_{(8)}$  esistono 24 punti di cui ciascuno si trova sulla conica che gli corrisponde nella  $J$ .

È opportuno anche notare che le rette  $d_{ii}, d'_{ii}$  che si corrispondono in entrambe le polarità date  $\Pi_i, \Pi'_i$ , corrispondono l'una all'altra nella  $J$  con proiettività non degenera.

Se si tengono fissi i complessi  $K_1, \dots K_5$ , e si fa variare in tutti i modi possibili il gruppo  $g$ , si presentano  $\infty^2$  sistemi  $\Sigma'$  di fasci di raggi ed altrettante involuzioni  $J$  del tipo ora studiato. Queste danno tutte origine al complesso di rette  $K$  contato tre volte, e presentano ulteriormente le seguenti proprietà:

1.<sup>o</sup> Esiste una sola involuzione del sistema nella quale si corrispondono due punti assegnati posti su di un medesimo raggio del complesso  $K$ .

2.<sup>o</sup> Le curve fondamentali  $c_{(8)}$  delle involuzioni del sistema costituiscono una congruenza di 1.<sup>o</sup> ordine che ha per direttrici le rette  $q_i, q'_i$ .

3.<sup>o</sup> Le curve punteggiate  $u_{(8)}$  delle involuzioni del sistema costituiscono una congruenza di 1.<sup>o</sup> ordine dello stesso tipo della precedente, che ha per direttrici le rette  $d_i, d'_i$  coniugate fra loro nella polarità  $\Pi$  e nelle singole polarità date  $\Pi_i$ .

Se ai complessi  $K_1, \dots K_5$  si sostituiscono i complessi  $K'_1, \dots K'_5$  che con  $K$  formano la sestupla associata a quella costituita da  $K_1, \dots K_5, K$ , si presenta un secondo sistema di involuzioni  $J$  riferito al precedente in modo che di due involuzioni corrispondenti, aventi lo stesso gruppo caratteristico,

l'una ha per curva fondamentale la curva punteggiata unita dell'altra; ecc., ecc.

24. Può succedere che uno dei complessi dati, ad esempio il complesso  $K_5$ , sia singolare con la retta  $k$  per asse. In tale caso designando con  $k_1, \dots, k_4$  le rette conjugate alla  $k$  nelle polarità dovute agli altri 4 complessi dati, si ha che ad un piano  $\omega$  che passi per la  $k$ , corrispondono nella reciprocità  $\Theta$  definita nel prec. §, tutti i punti di una conica  $c_{(2)}$ , appoggiata alle  $k_1, \dots, k_4$  in punti che sulla  $c_{(2)}$ , formano un gruppo proiettivo al gruppo  $g_5 \equiv e_1 \dots e_4$ . Ne segue che il fascio ( $k$ ) fa parte dell'involuppo fondamentale  $j_{(8)}$  della  $\Theta$  e la superficie corrispondente è una  $\sigma_{(4)} \equiv k^2 k_1 \dots k_4$  di tipo noto (§ 6, 1.<sup>o</sup>). E correlativamente per la  $k$  riguardata come forma di punti.

Può succedere in secondo luogo che i complessi dati abbiano un raggio comune  $r = q'_1 = \dots = q'_5$ . In tal caso il complesso  $K$  che è in involuzione con essi, è singolare; onde la corrispondente polarità  $\Pi$  e l'involuzione  $J \equiv \Theta \Pi$  risultano degeneri.

Di più nel caso in esame le forme fondamentali  $c_{(8)}, j_{(8)}$  della corrispondenza  $\Theta$  vengono a contenere rispettivamente la retta  $r$  ed il fascio ( $r$ ) (§ 17); e siccome ad un fascio di piani (o ad una punteggiata) che abbia per sostegno una retta appoggiata alla  $r$ , corrisponde nella  $\Theta$  una curva  $c$  di 4.<sup>o</sup> ordine (o un involuppo  $j$  di 4.<sup>a</sup> classe) (§ 16, 2.<sup>o</sup>), perciò le superficie  $\varphi$  che corrispondono nella  $\Theta$  alle stelle di piani, sono delle  $\varphi_{(7)} \equiv r^3, c^2_{(7)}, 5q$ ; e correlativamente ai piani punteggiati corrispondono involuppi  $I_{(7)} \equiv r^3, j^2_{(7)}, 5q$ .

In sostanza la  $r$  corrisponde per intero *contata tre volte* ad ogni suo piano, epperò risulta multipla secondo 12 per la superficie iacobiana delle  $\varphi_{(7)}$ ; e correlativamente ecc.

Se tutti i complessi dati sono singolari con le rette  $k_1, \dots, k_5$  per assi e col raggio comune  $q_6$ , allora le superficie  $\varphi$  sono delle  $\varphi_{(7)} \equiv q_6^3, (k_1 \dots k_5 c_{(2)})^2, 5q$ ; e gli involuppi  $I$  sono degli  $I_7 \equiv q_6^3, (k_1 \dots k_5 j_{(2)})^2, 5q$ , ove la conica fondamentale  $c_{(2)}$  ed il cono involuppo  $j_{(2)}$  sono del tipo indicato nei § 19 e 18; cioè la  $c_{(2)}$  si trova in un piano  $\omega$  dell'involuppo  $J_{(2)} \equiv k_1 \dots k_5 q_1 \dots q_6$  e il cono  $j_{(2)}$  ha il suo vertice  $O$  sulla superficie  $\sigma_{(3)} \equiv k_1 \dots k_5 q_1 \dots q_6$ .

Ai fasci di piani che hanno per assi le  $k_1, \dots, k_5$ , corrispondono nella  $\Theta$  le superficie di 4.<sup>o</sup> ordine:

$$\sigma_1 \equiv k_1^2 q_6^2 k_2 \dots k_5 c_{(2)} q_2 \dots q_5, \dots, \sigma_5 \equiv k_5^2 q_6^2 k_1 \dots k_4 c_{(2)} q_1 \dots q_4;$$

onde al cono  $j_{(2)}$  è coniugata la superficie di 4.<sup>o</sup> ordine  $\sigma \equiv k_1 \dots k_5 q_6^2 c_{(2)}^2$ , ed



Infatti su un altro piano arbitrario  $\omega'$  si costruisca il punto  $O'$  che corrisponde al punto  $O$  nell'omografia individuata fra i piani  $\omega, \omega'$  dalle quaterne di rette corrispondenti  $o_1.. o_4, o'_1.. o'_4$  tracce sù i due piani delle facce del tetraedro  $T$ . Sarà:

$$O' (o'_1 o'_2, \dots o'_4 o'_4) \pi O (o_1 o_2, \dots o_4 o_4) \pi g,$$

onde  $O'$  è il corrispondente di  $\omega'$  nella  $\theta$ , e ne segue il teorema per i gruppi  $\omega (\omega_1.. \omega_4), O; \omega' (\omega'_1.. \omega'_4), O'$ . E analogamente per gli altri casi (\*).

## VII.

27. Dati nello spazio 7 complessi lineari di rette  $K_1, \dots K_7$  in posizione arbitraria, ed assegnati in una forma fondamentale di 1<sup>a</sup> specie 7 elementi  $e_1, \dots e_7$  in determinato ordine, si considerino i sistemi di fasci di raggi  $\Sigma''_1, \Sigma''_2$  del tipo studiato nel § prec., determinati rispettivamente l'uno dai complessi  $K_2, K_3, \dots K_7$  e dal gruppo caratteristico  $g_1 \equiv e_2 e_3 \dots e_7$ , l'altro dai complessi  $K_1, K_3, \dots K_7$  e dal gruppo caratteristico  $g_2 \equiv e_1 e_3 \dots e_7$ .

Le due superficie di 4<sup>o</sup> ordine  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  determinate dai due sistemi passano entrambe per la curva fondamentale  $c_{(8)}$  della reciprocità  $\Theta_{12}$  dovuta ai complessi  $K_3, \dots K_7$  ed al gruppo caratteristico  $g_{12} \equiv e_3 \dots e_7$ , onde si segano ulteriormente secondo una curva  $x$  di 8<sup>o</sup> ordine e di genere 5 che ha 24 punti in comune con la  $c_{(8)}$  (\*\*).

Un punto generico  $O$  di questa curva è centro di due fasci di rette  $(O - \omega_1), (O - \omega_2)$ , nel primo dei quali i raggi che appartengono ai complessi

(\*) Il teorema su dimostrato mette in evidenza l'analogia esistente fra la corrispondenza  $\Theta$  e l'unico tipo di reciprocità birazionale nulla che si ha nel piano.

(\*\*) SALMON FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*. II Theil, n.º 108.

In generale se due superficie degli ordini  $n_1, n_2$  si segano secondo due curve semplici degli ordini  $\mu, \mu'$  aventi rispettivamente  $h$  e  $h'$  punti doppi apparenti, si ha che:

$$2(h - h') = (\mu - \mu')(n_1 - 1)(n_2 - 1);$$

e se  $i$  è il numero dei punti comuni alle due curve, è:

$$2i = (\mu + \mu')(n_1 + n_2 - 1) - (\mu^2 + \mu'^2) + 2(h + h').$$

$K_2, \dots, K_7$  formano un gruppo proiettivo a  $g_1$ , mentre nel secondo i raggi che appartengono ai complessi  $K_1, K_3, \dots, K_7$  formano un gruppo proiettivo a  $g_2$ .

I piani  $\omega_1$  e  $\omega_2$  di questi fasci corrispondono entrambi al punto  $O$  nella reciprocità nulla  $\Theta_{12}$ , senza che il punto  $O$  risulti singolare per tale corrispondenza; onde i due piani coincidono in un unico, e il punto  $O$  risulta centro di un fascio di rette nel quale i raggi che appartengono ai complessi dati  $K_1, \dots, K_7$ , formano un gruppo proiettivo al gruppo  $g \equiv e_1 \dots e_7$ .

Viceversa se in un fascio ( $O - \omega$ ) i raggi che appartengono ai complessi dati, formano un gruppo proiettivo a  $g$ , il centro  $O$  del fascio deve trovarsi sulle superficie  $\sigma_1, \sigma_2$  anzidette, senza appartenere, in generale, alla curva fondamentale  $c_{(8)}$  della  $\Theta_{12}$ , e correlativamente. Ne segue che:

*I fasci di rette nei quali i raggi che appartengono a 7 complessi lineari dati, formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato, hanno i centri su una linea gobba  $x$  di 8° ordine e di genere 5, e i loro piani inviluppano la forma duale  $y_{(8)}$ . Essi perciò costituiscono una congruenza di rette di 8° ordine e di 8ª classe.*

Le due forme  $x, y$  si corrispondono in ogni reciprocità nulla  $\Theta_{il}$  determinata da 5 qualunque dei complessi dati e dal gruppo formato con gli elementi omologhi di  $g$ ; e ciò porge una conferma della proprietà già dimostrata di esservi 24 punti comuni alla  $x_{(8)}$  ed alla curva fondamentale della  $\Theta_{il}$ . E correlativamente per l'inviluppo  $y_{(8)}$ .

I risultati ora ottenuti non subiscono alcuna modificazione nel caso particolare in cui alcuni dei complessi dati siano singolari con gli assi  $k_1, \dots, k_x$  in posizione affatto arbitraria fra loro. Queste rette risultano quadriseganti per la curva  $x_{(8)}$ , cioè questa contiene i punti in cui la retta  $k_i$  incontra la superficie  $\sigma$  dovuta agli altri 6 complessi dati ed al gruppo caratteristico formato con gli elementi omologhi del gruppo  $g$ . E correlativamente per l'inviluppo  $y_{(8)}$  (\*).

28. *Dati nello spazio 8 complessi lineari di rette  $K_1, \dots, K_8$  in posizione arbitraria fra di loro, esistono 8 fasci di rette nei quali i raggi che appartengono ai complessi dati, formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato  $g \equiv e_1 \dots e_8$ .*

Si considerino infatti la superficie di 4° ordine  $\sigma_{12}$  determinata dai complessi  $K_3, \dots, K_8$  e dal gruppo caratteristico  $g_{12} \equiv e_3 \dots e_8$  (§ 25), e la curva di 8° ordine  $x_{(8)}$  determinata dai complessi  $K_1, K_2, K_4, \dots, K_8$  e dal gruppo

(\*) Se tutti i complessi dati sono singolari, cfr. STURM, Mem. cit., § 54, 6).

Infatti su un altro piano arbitrario  $\omega'$  si costruisca il punto  $O'$  che corrisponde al punto  $O$  nell'omografia individuata fra i piani  $\omega, \omega'$  dalle quaterne di rette corrispondenti  $o_1..o_4, o'_1..o'_4$  tracce sù i due piani delle facce del tetraedro  $T$ . Sarà:

$$O'(o'_1 o'_2, \dots o'_1 o'_4) \pi O(o_1 o_2, \dots o_1 o_4) \pi g,$$

onde  $O'$  è il corrispondente di  $\omega'$  nella  $\theta$ , e ne segue il teorema per i gruppi  $\omega(\omega_1.. \omega_4), O; \omega'(\omega'_1.. \omega'_4), O'$ . E analogamente per gli altri casi (\*).

## VII.

27. Dati nello spazio 7 complessi lineari di rette  $K_1, \dots K_7$  in posizione arbitraria, ed assegnati in una forma fondamentale di 1<sup>a</sup> specie 7 elementi  $e_1, \dots e_7$  in determinato ordine, si considerino i sistemi di fasci di raggi  $\Sigma''_1, \Sigma''_2$  del tipo studiato nel § prec., determinati rispettivamente l'uno dai complessi  $K_2, K_3, \dots K_7$  e dal gruppo caratteristico  $g_1 \equiv e_2 e_3 \dots e_7$ , l'altro dai complessi  $K_1, K_3, \dots K_7$  e dal gruppo caratteristico  $g_2 \equiv e_1 e_3 \dots e_7$ .

Le due superficie di 4<sup>o</sup> ordine  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  determinate dai due sistemi passano entrambe per la curva fondamentale  $c_{(8)}$  della reciprocità  $\Theta_{12}$  dovuta ai complessi  $K_3, \dots K_7$  ed al gruppo caratteristico  $g_{12} \equiv e_3 \dots e_7$ , onde si segano ulteriormente secondo una curva  $x$  di 8<sup>o</sup> ordine e di genere 5 che ha 24 punti in comune con la  $c_{(8)}$  (\*\*).

Un punto generico  $O$  di questa curva è centro di due fasci di rette  $(O - \omega_1), (O - \omega_2)$ , nel primo dei quali i raggi che appartengono ai complessi

(\*) Il teorema su dimostrato mette in evidenza l'analogia esistente fra la corrispondenza  $\Theta$  e l'unico tipo di reciprocità birazionale nulla che si ha nel piano.

(\*\*) SALMON FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*. II Theil, n.º 108.

In generale se due superficie degli ordini  $n_1, n_2$  si segano secondo due curve semplici degli ordini  $\mu, \mu'$  aventi rispettivamente  $h$  e  $h'$  punti doppi apparenti, si ha che:

$$2(h - h') = (\mu - \mu')(n_1 - 1)(n_2 - 1);$$

e se  $i$  è il numero dei punti comuni alle due curve, è:

$$2i = (\mu + \mu')(n_1 + n_2 - 1) - (\mu^2 + \mu'^2) + 2(h + h').$$

$K_3, \dots, K_7$  formano un gruppo proiettivo a  $g_1$ , mentre nel secondo i raggi che appartengono ai complessi  $K_1, K_3, \dots, K_7$  formano un gruppo proiettivo a  $g_2$ .

I piani  $\omega_1$  e  $\omega_2$  di questi fasci corrispondono entrambi al punto  $O$  nella reciprocità nulla  $\Theta_{12}$ , senza che il punto  $O$  risulti singolare per tale corrispondenza; onde i due piani coincidono in un unico, e il punto  $O$  risulta centro di un fascio di rette nel quale i raggi che appartengono ai complessi dati  $K_1, \dots, K_7$ , formano un gruppo proiettivo al gruppo  $g \equiv e_1 \dots e_7$ .

Viceversa se in un fascio ( $O - \omega$ ) i raggi che appartengono ai complessi dati, formano un gruppo proiettivo a  $g$ , il centro  $O$  del fascio deve trovarsi sulle superficie  $\sigma_1, \sigma_2$  anzidette, senza appartenere, in generale, alla curva fondamentale  $c_{(8)}$  della  $\Theta_{12}$ , e correlativamente. Ne segue che:

*I fasci di rette nei quali i raggi che appartengono a 7 complessi lineari dati, formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato, hanno i centri su una linea gobba  $x$  di 8° ordine e di genere 5, e i loro piani inviluppano la forma duale  $y_{(8)}$ . Essi perciò costituiscono una congruenza di rette di 8° ordine e di 8ª classe.*

Le due forme  $x, y$  si corrispondono in ogni reciprocità nulla  $\Theta_{il}$  determinata da 5 qualunque dei complessi dati e dal gruppo formato con gli elementi omologhi di  $g$ ; e ciò porge una conferma della proprietà già dimostrata di esservi 24 punti comuni alla  $x_{(8)}$  ed alla curva fondamentale della  $\Theta_{il}$ . E correlativamente per l'inviluppo  $y_{(8)}$ .

I risultati ora ottenuti non subiscono alcuna modificazione nel caso particolare in cui alcuni dei complessi dati siano singolari con gli assi  $k_1, \dots, k_x$  in posizione affatto arbitraria fra loro. Queste rette risultano quadriseganti per la curva  $x_{(8)}$ , cioè questa contiene i punti in cui la retta  $k_i$  incontra la superficie  $\sigma$  dovuta agli altri 6 complessi dati ed al gruppo caratteristico formato con gli elementi omologhi del gruppo  $g$ . E correlativamente per l'inviluppo  $y_{(8)}$  (\*).

28. *Dati nello spazio 8 complessi lineari di rette  $K_1, \dots, K_8$  in posizione arbitraria fra di loro, esistono 8 fasci di rette nei quali i raggi che appartengono ai complessi dati, formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato  $g \equiv e_1 \dots e_8$ .*

Si considerino infatti la superficie di 4° ordine  $\sigma_{12}$  determinata dai complessi  $K_3, \dots, K_8$  e dal gruppo caratteristico  $g_{12} \equiv e_3 \dots e_8$  (§ 25), e la curva di 8° ordine  $x_{(8)}$  determinata dai complessi  $K_1, K_2, K_4, \dots, K_8$  e dal gruppo

(\*) Se tutti i complessi dati sono singolari, cfr. STURM, Mem. cit., § 54, 6).

caratteristico  $g_3 \equiv e_1 e_2 e_4 \dots e_8$  (§ prec.). Dei 32 punti comuni alla  $\sigma_{12}$  ed alla  $x_{(8)}$ , 24 si trovano sulla curva fondamentale della reciprocità nulla  $\theta_{123}$  determinata dai complessi  $K_1, \dots, K_8$  e dal gruppo caratteristico  $g_{123} \equiv e_4 \dots e_8$ , e i restanti sono i centri dei fasci indicati nel teorema, il cui numero perciò è 8.

Questo numero non varia se tutti o alcuni dei complessi dati risultano singolari. Nel primo caso si presenta il teorema (\*) che:

*Esistono nello spazio 8 fasci di rette nei quali i raggi che si appoggiano ad 8 rette date formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato (\*\*).*

Potenza, Aprile 1898.

(\*) Cfr. STURM, Mem. cit. § 65, 5 (ove bisogna leggere 8 invece di 6) e SCHUBERT, Op. cit. pag. 207 ( $p^3 e^2 z^3 = 8$ ).

(\*\*) La proposizione stabilita alla fine del § 19 come corollario del teorema di SCHUR regge evidentemente nel caso che le due quintuple di rette che determinano l'assieme dei conì e la congruenza delle coniche ivi indicate, appartengano alla stessa superficie di 3° ordine e siano fra loro associate.