Ueber Systeme von Differentialgleichungen, denen die vierfach periodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten.

(Von Martin Krause *in Dresden.)*

Die vierfach periodischen Functionen sind in neuerer Zeit mehrfach zur Integration von Differentialgleichungen gebraucht worden. Gewisse Rotationsprobleme sowie andere physicalische Probleme führten zu Differentialgleichungen, die mit Hülfe der genannten Functionen integrirt werden konnten. Es möge in Bezug hierauf auf Arbeiten von Weber (*), Kowalevski (**) und Koetter (***) hingewiesen werden. Daneben haben Caspary und Jahnke andere Methoden angegeben, mit deren Hülfe Differentialgleichungen der angegebenen Art/aufgestellt werden können. Bei der grossen Einfachheit dieser Betrachtungen mögen sie kurz characterisirt werden. Caspary zeigt einerseits (****), dass die Thetafunctionen mit den sechszehn Coefficienten g_{mn} einer orthogonalen Substitution zusammen hängen, deren Determinante

(*) *Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlichen auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit.* Math. Annalen, Band 14.

(**) *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.* Acta Math., tome 12. *Sur une propriété du système d'équations diff. qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.* Acta Math., 14.

(***) *Sur le cas traité par M.me* Kowalevski *de rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe.* Acta Math., 17. *Ueber die Bewegung einen festes Körpers in einer Flüssigkeit.* Journal für Math., Band 109. *Ueber die Darstellung der Richtungs cosinus etc.* Berichte der Berliner Academie, 1895, Journal für Math. Band 116.

(****) *Journal für Math.*, Band 94, pag. 74-86; *Comptes Rendus*, Tome 104, pagina 490-493.

gleich g^2 ist und andrerseits (*) mit 15 Grössen in Verbindung stehen, die er Elemente eines Orthogonalsystemes nennt. Unter den letzteren sind die neun Coëfficienten a_{mn} einer orthogonalen Substitution von der Determinante 1 verstanden, sowie die sechs aus ihnen gebildeten Grössen:

$$p_h = -(a_{1k}\,d\,a_{1l} + a_{2k}\,d\,a_{2l} + a_{3k}\,d\,a_{3l}), \qquad \left(h,\ k,\ l = \begin{matrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \\ 3, & 1, & 2 \end{matrix}\right),$$
$$v_h = a_{k1}\,d\,a_{l1} + a_{k2}\,d\,a_{l2} + a_{k3}\,d\,a_{l3}.$$

Mit Hülfe dieser Grössen ist es einerseits möglich die algebraischen Relationen abzuleiten, welche zwischen den hyperelliptischen Functionen bestehen, andrerseits (**) aber auch Systeme von Differentialgleichungen herzustellen, welchen jene Functionen Genüge leisten, insbesondere diejenigen, zu denen Weber in der citirten Arbeit kommt. Iahnke (***) hat dann die Untersuchungen von Caspary fortgesetzt, indem er 28 Elemente eines orthogonalen Sechzehnersystemes einführt. Diese 28 Elemente bestehen aus den 16 von Caspary eingeführten Grössen g_{mn} und zwölf weiteren, die definirt sind durch:

$$g\,p_{rs} = -(g_{1i}\,d\,g_{1j} + g_{2i}\,d\,g_{2j} + g_{3i}\,d\,g_{3j} + d_{4i}\,d\,g_{4j}),$$
$$g\,v_{r\,s} = g_{i1}\,d\,g_{j1} + g_{i2}\,d\,g_{j2} + g_{i3}\,d\,g_{j3} + g_{i4}\,d\,g_{j4},$$
$$g = g_{1i}^2 + g_{2i}^2 + g_{3i}^2 + g_{4i}^2,$$

wobei die Indices in bestimmter Weise zu wählen sind. Die Beziehungen, die zwischen diesen Grössen bestehen führen zu einer Reihe von Differentialgleichungen, darunter auch derjenigen, die in der Rotationstheorie eine Rolle spielen und von den schon genannten Autoren behandelt worden sind. Im Folgenden soll nach anderer Richtung hin vorgegangen werden. In der Theorie der doppelt periodischen Functionen haben sich die Functionen 2ter Art auf Grund der ausgezeichneten Arbeiten von Hermite und Picard von besonderer Bedeutung für die Integration von Differentialgleichungen gezeigt. Es soll nun versucht werden, nachzuweisen, dass im Gebiete der

(*) *Comptes Rendus*, 111, pag. 225-237: Liouville, *Journal de Math.* (4) VI, pagina 367-404; *Annales de l'école Normale* (3) X, pag. 253-294.

(**) *Comptes Rendus*, 112, pag. 1305-1308.

(***) *Berichte der Berliner Academie*, Jahrgang 1896, pag. 1023-1030. *Journal für Math.*, Band 118, pag. 224-233.

vierfach periodischen Functionen aehnliche Theorien entwickelt werden können, indem zunächst für gewisse Fundamentalfunctionen die Existenz von Differentialgleichungen nachgewiesen und diese Differentialgleichungen für die einfachsten Fälle wirklich aufgestellt werden. Es knüpft diese Betrachtung an eine frühere Arbeit des Verfassers (*) an, deren Resultate weitergeführt werden. Im Uebrigen liegen soweit dem Verfasser bekannt noch einige Arbeiten über dieses Gebiet vor und zwar sind dieses Arbeiten von Picard und Appell (**), welche sich mit gewissen Systemen von partiellen Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung beschäftigen, deren Coefficienten vierfach periodische Functionen sind und für diese eine Anzahl fundamental wichtiger Sätze enthalten.

§ 1.

Definition und Reihenentwickelungen der fundamentalen Functionen.

Unter v_1, v_2 resp. a_1, a_2 wollen wir die Argumente von Thetafunctionen zweier Veränderlichen, unter u_1, u_2 resp. α_1, α_2 die Argumente der entsprechenden hyperelliptischen Functionen verstehen. Dann definiren wir eine Function $\chi_r(u_1, u_2)$ durch die Gleichung:

$$\chi_r(u_1, u_2) = \chi_r(u) = \frac{\vartheta_r(v+a)}{\vartheta_5(a)}\, e^{-\sum \frac{\partial \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_\varepsilon} u_\varepsilon - \frac{1}{2}\omega}, \tag{1}$$

wobei gesetzt ist:

$$\omega = \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v)_0}{\partial u_1^2} u_1^2 + 2\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v)_0}{\partial u_1 \partial u_2} u_1 \cdot u_2 + \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v)_0}{\partial u_2^2} u_2^2 .$$

Differenciren wir logarithmisch nach u_1 und u_2, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \log \chi_r(u)}{\partial u_1} &= \frac{\partial \log \vartheta_r(v+a)}{\partial u_1} - \frac{\partial \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_1} - \left(\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v)_0}{\partial u_1^2} u_1 + \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v)_0}{\partial u_1 \partial u_2} u_2\right), \\
\frac{\partial \log \chi_r(u)}{\partial u_2} &= \frac{\partial \log \vartheta_r(v+a)}{\partial u_2} - \frac{\partial \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_2} - \left(\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v)_0}{\partial u_1 \partial u_2} u_1 + \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v)_0}{\partial u_2^2} u_2\right).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(*) *Journal de Math.*, par Liouville (4), tome III, 1887.
(**) *Comptes Rendus*, tome XC, pag. 296, 731, tome XCII, pag. 692.

Aehnlich ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \log \chi_r(u)}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial \log \vartheta_r(v+a)}{\partial u_1} - \frac{\partial \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_1} - \left(\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_1^2} u_1 + \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} u_2\right), \\ \frac{\partial \log \chi_r(u)}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial \log \vartheta_r(v+a)}{\partial u_2} - \frac{\partial \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_2} - \left(\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} u_1 + \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_2^2} u_2\right).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Durch entsprechende Subtraction erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \chi_r(u)}{\partial u_1} - \frac{\partial \chi_r(u)}{\partial \alpha_1} &= g_1 \cdot u_1 + g_2 \cdot u_2, \\ \frac{\partial \chi_r(u)}{\partial u_2} - \frac{\partial \chi_r(u)}{\partial \alpha_2} &= g_2 \cdot u_1 + g_3 \cdot u_2,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wobei die Grössen g durch die Gleichungen definirt sind:

$$\left.\begin{aligned}g_1 &= \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_1^2} - \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)_0}{\partial \alpha_1^2}, \\ g_2 &= \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)_0}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \\ g_3 &= \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_2^2} - \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)_0}{\partial \alpha_2^2}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wir sind nun berechtigt, den Ansatz zu machen:

$$\chi_r(u) = \sum_0^\infty {}_m \sum_0^\infty {}_n\, c_{m,n} \cdot u_1^m \cdot u_2^n. \tag{6}$$

Mit Hülfe der soeben angestellten Entwickelungen ergeben sich dann die Recursionsformeln:

$$\left.\begin{aligned}(m+1)\, c_{m+1,n} - \frac{\partial c_{mn}}{\partial \alpha_1} &= g_1 \cdot c_{m-1,n} + g_2 \cdot c_{m,n-1}, \\ (m+1)\, c_{m,n+1} - \frac{\partial c_{mn}}{\partial \alpha_2} &= g_2 \cdot c_{m-1,n} + g_3 \cdot c_{m,n-1}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die Grösse $c_{0,0}$ ist bekannt und zwar gleich:

$$\frac{\vartheta_r(a)}{\vartheta_5(a)} = c \cdot a\, l_r(\alpha),$$

dann sind die übrigen Constanten aus den obigen Gleichungen bestimmt und wir erhalten als einfachste Werthe:

$$\left.\begin{aligned} c_{10} &= c\,\frac{\partial\, a\, l_r(\alpha)}{\partial \alpha_1}, \quad c_{20} = c\,\frac{\partial\, a\, l_r(\alpha)}{\partial \alpha_2}, \\ 2\,c_{20} &= c\,\frac{\partial^2 a\, l_r(\alpha)}{\partial \alpha_1^2} + c \cdot a\, l_r(\alpha)\, g_1, \\ 2\,c_{11} &= c\,\frac{\partial^2 a\, l_r(\alpha)}{\partial \alpha_1\, \partial \alpha_2} + c \cdot a\, l_r(\alpha)\, g_2, \\ 2\,c_{02} &= c\,\frac{\partial^2 a\, l_r(a)}{\partial \alpha_2^2} + c \cdot a\, l_r(\alpha)\, g_3. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ferner kann bekanntlich die Function:

$$\frac{\vartheta_5}{\vartheta_5(v)}\, e^{\frac{1}{2}\omega},$$

nach Potenzen von u_1 und u_2 entwickelt werden, so zwar, dass die Coefficienten sich ganz und rational durch k^2, λ^2, μ^2 darstellen lassen. Unter solchen Umständen finden wir den:

Lehrsatz: Die Function:

$$\psi_r(u) = \frac{\vartheta_5 \cdot \vartheta_r(v + a)}{\vartheta_5(a)\, \vartheta_5(v)}\, e^{-\Sigma \frac{\partial \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_\varepsilon} u_\varepsilon}, \quad \varepsilon: 1,\ 2,$$

kann nach Potenzen von u_1 und u_2 entwickelt werden. Von dem gemeinsamen Factor c abgesehen können die Coefficienten als ganze rationale Functionen der hyperelliptischen Functionen mit den Argumenten α entwickelt werden. Als Constanten treten die Grössen k^2, λ^2, μ^2 ganz und rational auf.

Die sechs ersten Coefficienten haben dabei die vorhin angegebenen Werthe c_{00}, c_{01}, c_{10}, c_{20}, c_{11}, c_{02}.

Die Functionen $\psi_r(u)$ sind dann vierfach periodische Functionen 2ter Ordnung und zwar wollen wir sie als *fundamentale* ansehen. Als Nenner ist die Grösse $\vartheta_5(v)$ gewählt worden. Es ist das geschehen, weil der Nenner der hyperelliptischen Functionen auch $\vartheta_5(v)$ ist Andrerseits könnte eine jede andere ϑ — Function als Nenner genommen werden. Wählen wir die Function $\vartheta_0(v)$ und modificiren demgemäss die anderen Factoren, so kommen wir zu einer Function:

$$\varphi_r(u) = \frac{\vartheta_0 \cdot \vartheta_r(v + a)}{\vartheta_0(u)\, \vartheta_0(v)}\, e^{-\Sigma \frac{\partial \log \vartheta_0(a)}{\partial u_\varepsilon} u_\varepsilon}, \tag{10}$$

welche das unmittelbare Analogon zu derjenigen Function im Gebiete der doppeltperiodischen Functionen ist, welche für die Theorie der entsprechenden Differentialgleichungen als fundamentale gewaehlt worden ist (*). Offenbar ist es im wesentlichen gleichgültig, welche der Functionen wir zu Grunde legen, zumal die lineare Transformation, sowie die Substitution halber Perioden die Mittel an die Hand giebt, um aus der einen Categorie die andere abzuleiten. Wir wollen die Function $\psi_r(u)$ zunaechst beibehalten.

§ 2.

Existenz von Systemen von Differentialgleichungen, denen die Functionen $\psi_r(u)$ Genüge leisten.

Es ist nicht schwer, nachzuweisen, dass die Functionen $\psi_r(u)$ unendlich vielen Differentialgleichungen Genüge leisten, deren Coefficienten vierfach periodische Functionen sind. Wir nehmen dazu zunächst die Ausdrücke:

$$\vartheta_5^m(v)\frac{\partial^\mu \psi_r(u)}{\partial v_1^{\mu_1}\cdot\partial v_2^{\mu_2}}, \quad \mu_1+\mu_2=\mu, \quad m \geqq \mu+1. \tag{1}$$

Dieselben sind ganze transcendente vierfach periodische Functionen dritter Art von der Ordnungszahl m, die einen gewissen Multiplicator besitzen. Etwas aehnliches findet für die Functionen Statt:

$$\vartheta_5^m(v)\,\Pi\,\vartheta_s^{m_s}(v)\frac{\partial^\mu \psi_r(u)}{\partial v_1^{\mu_1}\cdot\partial v_2^{\mu_2}}. \tag{2}$$

wobei m, μ, μ_1, μ_2 denselben Bedingungen wie vorhin Genüge leisten. Das Product ist über alle Thetafunctionen zu erstrecken, m_s sind beliebige ganze positive Zahlen oder Null. Auch diese Grössen sind ganze transcendante vierfach periodische Functionen 3[ter] Art und zwar von der Ordnungszahl:

$$n = m + \sum m_s,$$

denen ein ganz bestimmter Multiplicator zu kommt. Halten wir n, ferner die Grössen a und der Multiplicator fest, lassen dagegen die Grössen m, m_s,

(*) Siehe das Werk des Verfassers: *Theorie der doppelt periodischen Functionen einer veränderlichen Grösse,* II[ter] Band, Leipzig, 1897.

r, μ, μ_1, μ_2 innerhalb der angegebenen Grenzen varüren, so ergeben sich Functionen *von der Eigenschaft, dass zwischen je* n^2+1 *derselben mindestens eine lineare Relation besteht.* Derartige Relationen sind dann entweder lineare Beziehungen oder Differentialgleichungen, denen die Functionen $\psi_r(u)$ Genüge leisten. Die Coefficienten sind in beiden Fällen gewöhnliche vierfach periodische Functionen. Unter den Differentialbeziehungen werden zwei Categorien von besonderer Bedeutung sein. Erstens sind es diejenigen, denen ein Quadrupel von Functionen $\psi_r(u)$ Genüge leistet. Wir wollen uns im Folgendem auf *ein* solches beschränken und zwar das Quadrupel $\psi_5(u)$, $\psi_1(u)$, $\psi_3(u)$, $\psi_{13}(u)$. Für dasselbe werden im Allgemeinen vier zusammengehörende Gleichungen aufgestellt werden können. Dann aber wird zweitens besonderes Gewicht auf diejenigen Differentialgleichungen zu legen sein, denen eine der Functionen $\psi_r(u)$ allein — und zwar wählen wir $\psi_1(u)$ — Genüge leistet. Es sollen für die einfachsten Werthe von n eine Reihe von Gleichungen der beiden genannten Categorien aufgestellt werden, daneben sollen auch einige der wichtigsten Beziehungen hinzugezogen werden, die zwischen den Grössen $\psi_r(u)$ selbst bestehen.

Es möge bemerkt werden, das die Betrachtungen, die wir angestellt haben, nach mehrfachen Richtung hin verallgemeinert werden können. Erstens können an Stelle der Functionen $\psi_r(u)$ allgemeinere Functionen gesetzt werden, die die Form haben:

$$\frac{\Pi\, \vartheta_r(v+a)\, e^{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2}}{\Pi\, \vartheta_s(v+a)}, \tag{3}$$

und zweitens können Summen zu Grunde gelegt werden, die sich aus einer ψ — Function und Differentialquotienten von ihr zusammensetzen lassen.

Von diesen Verallgemeinerungen soll im Folgenden abgesehen werden.

§ 3.

Betrachtung des Falles $n=2$.

Wir wollen nun zunächst den Fall $n=2$ ins Auge fassen. In diesem Falle können wir die Functionen bilden:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\psi_r(v), \quad \vartheta_5^2(v)\,\frac{\partial\,\psi_r(u)}{\partial\,u_\varepsilon}, \quad r: 5,\ 1,\ 3,\ 13,$$

wobei die Grössen a_1 und a_2 als constant angenommen werden. Zwischenje fünf derselben, die dieselbe Characteristik besitzen, besteht dann mindestens eine lineare Relation. Wir wählen die Characteristiken 5, 1, 3, 13, so erhalten wir die Systeme:

$$\vartheta_5^2(v)\frac{\partial\psi_5(u)}{\partial u_\varepsilon},\ \vartheta_5^2(v)\psi_5(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_1(v)\psi_1(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_3(v)\psi_3(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_{13}(v)\psi_{13}(u),$$

$$\vartheta_5^2(v)\frac{\partial\psi_1(u)}{\partial u_\varepsilon},\ \vartheta_5(v)\vartheta_1(v)\psi_5(u),\ \vartheta_5^2(v)\psi_1(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_{13}(v)\psi_3(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_3(v)\psi_{13}(u),$$

$$\vartheta_5^2(v)\frac{\partial\psi_3(u)}{\partial u_\varepsilon},\ \vartheta_5(v)\vartheta_3(v)\psi_5(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_{13}(v)\psi_1(u),\ \vartheta_5^2(v)\psi_3(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_1(v)\psi_{13}(u),$$

$$\vartheta_5^2(v)\frac{\partial\psi_{13}(u)}{\partial u_\varepsilon},\ \vartheta_5(v)\vartheta_{13}(v)\psi_5(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_3(v)\psi_1(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_1(v)\psi_3(u),\ \vartheta_5^2(v)\psi_{13}(u).$$

Zwischen den Gliedern je einer Horizontalreihe besteht dann für $\varepsilon=1$ und $\varepsilon=2$ je eine lineare Relation. Die Coefficienten bestimmen sich unmittelbar mit Hülfe der Betrachtungen des ersten Paragraphen. Setzen wir:

$$x_r=\vartheta_r(a)\,\psi_r(u)\,, \tag{1}$$

$$y_r^{(\varepsilon)}=\frac{1}{\mathfrak{S}_5}\frac{\partial\,\mathfrak{S}_r(v)_0}{\partial u_\varepsilon}\frac{\mathfrak{S}_r(v)}{\mathfrak{S}_5(v)}\,, \tag{2}$$

so erhalten wir die beiden einfachen Systeme von partiellen Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x_5}{\partial u_\varepsilon}&=\qquad\qquad -y_1^{(\varepsilon)}\cdot x_1-y_3^{(\varepsilon)}\cdot x_3-y_{13}^{(\varepsilon)}\cdot x_{13}\,,\\
\frac{\partial x_1}{\partial u_\varepsilon}&=-y_1^{(\varepsilon)}\cdot x_5+\frac{\partial\log a\,l_1(\alpha)}{\partial\alpha_\varepsilon}x_1-y_{13}^{(\varepsilon)}\cdot x_3+y_3^{(\varepsilon)}\cdot x_{13}\,,\\
\frac{\partial x_3}{\partial u_\varepsilon}&=-y_3^{(\varepsilon)}\cdot x_5+y_{13}^{(\varepsilon)}\cdot x_1+\frac{\partial\log a\,l_3(\alpha)}{\partial\alpha_\varepsilon}x_3-y_1^{(\varepsilon)}\cdot x_{13}\,,\\
\frac{\partial x_{13}}{\partial u_\varepsilon}&=-y_{13}^{(\varepsilon)}\cdot x_5-y_3^{(\varepsilon)}\cdot x_1+y_1^{(\varepsilon)}\cdot x_3+\frac{\partial\log a\,l_{13}(\alpha)}{\partial\alpha_\varepsilon}x_{13}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Es können hieraus andere Systeme hergeleitet werden, darunter ein solches welches zwischen den drei Functionen x_1, x_3, x_{13} besteht. Eine Gleichung desselben würde lauten:

$$k^2\frac{\partial x_1}{\partial u_1}-\frac{\partial x_1}{\partial u_2}=-\frac{\partial\,\mathfrak{S}_{04}(v)_0}{\partial u_1}\frac{\mathfrak{S}_{23}}{\mathfrak{S}_2\,\mathfrak{S}_{12}}\frac{\mathfrak{S}_3(a)\,\mathfrak{S}_{13}(a)}{\mathfrak{S}_1(a)\,\mathfrak{S}_5(a)}k_1^2x_1-(k^2-\mu^2)\,y_{13}^{(1)}\cdot x_3-y_3^{(2)}\cdot x_{13}.$$

§ 4.

Der Fall $n = 3$.

Im Falle $n = 3$ sind die folgenden Functionen zubetrachten:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\psi_r(u), \quad \vartheta_5^2(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\frac{\partial\,\psi_r(u)}{\partial\,u_\varepsilon}, \quad \vartheta_5^3(v)\,\frac{\partial^2\,\psi_r(u)}{\partial\,u_\varepsilon\,\partial\,u_{\varepsilon_1}},$$

wobei die Grössen a_1 und a_2 in allen Functionen den nämlichen Werth besitzen. Zwischen je zehn derselben, die dieselbe Characteristik besitzen, besteht dann mindestens eine lineare Relation. Wir beschränken uns auf die Characteristick:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

und wollen unter dieser Voraussetzung die Functionen:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\psi_r(u), \quad r: 1,\ 3,\ 13,\ 5,$$

untersuchen. Nehmen wir $r = 1$, so können wir uns offenbar auf die vier Functionen beschränken:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta^2(v)\,\psi_1(u),$$

wenn für β gesetzt wird 5, 1, 3, 13. Es sei dieses das Quadrupel (1).

Für $r = 3$ wählen wir das Quadrupel (2):

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\psi_3(u),$$

wobei für β und γ resp. gesetzt ist:

$$5,\ 13;\ 3,\ 1;\ 02,\ 4;\ 14,\ 34.$$

Für $r = 13$ wählen wir das Quadrupel (3):

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\psi_{13}(u),$$

wobei für β und γ resp. gesetzt ist:

$$5,\ 3;\ 1,\ 13;\ 02,\ 14;\ 34,\ 4.$$

Für $r = 5$ endlich wählen wir das Quadrupel (4):

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\psi_5(u),$$

wobei für β und γ gesetzt ist resp.:

$$5,\ 1;\ 13,\ 3;\ 02,\ 34;\ 4,\ 14.$$

Wir erhalten dann 4 Quadrupel oder auch 16 Functionen, die denselben characteristischen Bedingungsgleichungen Genüge leisten. Von besonderer Bedeutung ist es, neun derselben zu finden, welche linear von einander unabhängig sind. Es kann das auf mehrfachem Wege geschehen. Jedenfalls gilt der

Lehrsatz: Die vier Functionen des ersten Quadrupels, drei beliebige eines anderen Quadrupels und je eine der beiden übrigen Quadrupel sind linear von einander unabhängig.

Wir wollen den Beweis für einen speciellen Fall kurz andeuten. Wir fragen, können die Constanten c derart bestimmt werden, dass die Gleichung besteht:

$$\vartheta_1(v+a)\sum c_\beta \vartheta_\beta^2(v) + \vartheta_3(v+a)(c_3'\vartheta_5(v)\vartheta_{13}(v) + c_3''\vartheta_3(v)\vartheta_1(v) + c_3'''\vartheta_{02}(v)\vartheta_4(v))$$
$$+ c'_{13}\vartheta_{13}(v+a)\vartheta_5(v)\vartheta_3(v) + c_5'\vartheta_5(v+a)\vartheta_3(v)\vartheta_{13}(v) = 0? \quad \beta: 5,\ 1,\ 3,\ 13.$$

Setzen wir $v = -a$, so folgt $c_5' = 0$, analog ergiebt sich $c'_{13} = 0$. Eine lineare Beziehung zwischen den vier Functionen des ersten Quadrupels und drei Functionen eines anderen Quadrupels kann aber keines falls bestehen, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Aehnlich folgt der Lehrsatz:

Die vier Functionen des ersten Quadrupels bilden mit je zwei Functionen zweier anderer Quadrupel und einer Function des übrig bleibenden Quadrupels ein System von linear von einander unabhängigen Functionen.

Jedenfalls sind wir also im Stande eine Reihe von Systemen von je neun Functionen anzugeben, die linear von einander unabhängig sind.

Daneben aber giebt es Systeme von weniger als neun Functionen, zwischen denen eine lineare Relation thatsächlich besteht. Es gilt der

Lehrsatz: Zwischen den acht Functionen je zweier Quadrupel besteht eine lineare Relation.

Es folgt das entweder aus den von uns aufgestellten Principien oder aber wir können diese Relationen aus den bekannten Additionstheoremen herleiten, wenn wir erwägen, dass die Functionen:

$$\vartheta_r(v+a)\,\vartheta_s(v-a),$$

sich durch die Thetafunctionen mit den Argumenten v und a darstellen lassen.

Nehmen wir ferner diejenigen 10 Functionen, die aus den vier Functionen des ersten Quadrupels und je zwei Functionen der drei anderen Quadrupel bestehen, bei welchen nur die Thetafunctionen $\vartheta_5(v)$, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_{13}(v)$ vorkommen, so muss zwischen ihnen eine lineare Relation bestehen. Man überzeugt sich leicht, dass die Glieder, die zu dem ersten Quadrupel gehören, fortfallen müssen, so dass zwischen den sechs definirten Gliedern der drei anderen Quadrupel eine lineare Relation bestehen muss. Nach leichten Betrachtungen ergiebt sich dieselbe in der Form:

$$\psi_5(u)\,A - \psi_3(u)\,B + \psi_{13}(u)\,(\mu^2 - k^2)\,C = 0, \tag{1}$$

wobei gesetzt ist:

$$A = \frac{\partial\,\vartheta_3(v)_0}{\partial u_2}\,\frac{\partial\,\vartheta_{13}(v)_0}{\partial u_1}\,(\vartheta_3(a)\,\vartheta_{13}(a)\,\vartheta_5(v)\,\vartheta_1(v) + \vartheta_5(a)\,\vartheta_1(a)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_{13}(v)),$$

$$B = \frac{\partial\,\vartheta_1(v)_0}{\partial u_1}\,\frac{\partial\,\vartheta_3(v)_0}{\partial u_2}\,(\vartheta_{13}(a)\,\vartheta_5(a)\,\vartheta_5(v)\,\vartheta_{13}(v) + \vartheta_3(a)\,\vartheta_1(a)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_3(v)),$$

$$C = \frac{\partial\,\vartheta_{13}(v)_0}{\partial u_1}\,\frac{\partial\,\vartheta_1(v)_0}{\partial u_1}\,(\vartheta_5(a)\,\vartheta_3(a)\,\vartheta_5(v)\,\vartheta_3(v) - \vartheta_{13}(a)\,\vartheta_1(a)\,\vartheta_{13}(v)\,\vartheta_1(v)).$$

Offenbar ist diese Gleichung nicht die einzige ihrer Art, sondern als Repräsentant einer Categorie von Beziehungen anzusehen.

Wir haben im Vorhergehenden gezeigt, dass es Systeme von neun Functionen:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\psi_r(u),$$

giebt, die linear von einander unabhängig sind. An ihre Stelle können auch Systeme anderer Art treten, z. B. solche, die aus sieben geeignet gewählten unter ihnen und den beiden Grössen:

$$\vartheta_5^3(v)\,\frac{\partial\,\psi_1(u)}{\partial u_\varepsilon},$$

bestehen. Jedenfalls lässt sich eine jede zu $n = 3$ gehörende Function mit demselben Multiplicator und der Characteristik $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mit Hülfe irgend eines der genannten Systeme darstellen. Zu diesen Functionen gehören Differentialaus drücke erster und zweiter Ordnung. Die entsprechenden Darstellungen ergeben dann Differentialbeziehungen erster und zweiter Ordnung. Die Beziehungen erster Ordnung bieten zunächst kein grösseres Interesse dar, wohl aber ist dasselbe mit den Differentialbeziehungen zweiter Ordnung der Fall.

Nach dem soeben entwickelten können wir jedenfalls den Ansatz machen:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_5^2(v)\frac{\partial^2\psi_1(u)}{\partial u_1^2} &= \psi_1(u)\sum c_\beta\vartheta_\beta^2(v)+\psi_3(u)(c_3'\vartheta_5(v)\vartheta_{13}(v)+c_3''\vartheta_{02}(v)\vartheta_4(v))\\ &+\psi_{13}(u)(c'_{13}\vartheta_5(v)\vartheta_3(v)+c''_{13}\vartheta_{02}(v)\vartheta_{14}(v))+c'_5\psi_5(u)\vartheta_3(v)\vartheta_{13}(v).\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Die Bestimmung der Constanten hat keinerlei Schwierigkeiten. Es ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2}=x_1(c-2y_1^2-2y_{13}^2)-2x_3\cdot y_{13}\frac{\partial\log a\,l_3(\alpha)}{\partial\alpha_1}. \quad(3)$$

Genau so wird:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1\,\partial u_2} &= x_1(c'-2k^2y_1^2-2\mu^2y_{13}^2)\\ -x_3\cdot y_{13}&\left(\mu^2\frac{\partial\log a\,l_3(\alpha)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\log a\,l_3(\alpha)}{\partial\alpha_2}\right)+x_{13}\cdot y_3\frac{\partial\log a\,l_{13}(\alpha)}{\partial\alpha_1},\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_2^2} &= x_1(c''-2k^4y_1^2-2y_3^2-2\mu^4y_{13}^2)\\ -2x_3\cdot y_{13}\mu^2&\frac{\partial\log a\,l_3(\alpha)}{\partial\alpha_2}+2x_{13}\cdot y_3\frac{\partial\log a\,l_{13}(\alpha)}{\partial\alpha_2}.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Bei den Grössen y_1 und y_{13} ist der obere Index 1, bei y_3 der obere Index 2 fortgelassen.

Jede dieser drei Gleichungen ist der Repräsentant eines Systemes von Differentialgleichungen, denen die drei Functionen x_1, x_3, x_{13} Genüge leisten.

Nehmen wir die Gleichung hinzu:

$$k^2\frac{\partial x_1}{\partial u_1}-\frac{\partial x_1}{\partial u_2}=-\frac{\partial\vartheta_{04}(v)_0}{\partial u_1}\frac{\vartheta_{23}}{\vartheta_2\vartheta_{12}}\frac{\vartheta_3(a)\vartheta_{13}(a)}{\vartheta_1(a)\vartheta_5(a)}k_1^2x_1-y_{13}(k^2-\mu^2)x_3-y_3\cdot x_{13},$$

so können wir die Grösse $y_3\cdot x_{13}$ eliminiren und erhalten die drei Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2} &= x_1(c-2y_1^2-2y_{13}^2)-2x_3\cdot y_{13}\frac{\partial\log a\,l_3(\alpha)}{\partial\alpha_1},\\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1\,\partial u_2}&+\frac{\partial\log a\,l_{13}(\alpha)}{\partial\alpha_1}\left(k^2\frac{\partial x_1}{\partial u_1}-\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)\\ &= x_1(c_1'-2k^2y_1^2-2\mu^2y_{13}^2)+c_3'x_3\cdot y_{13},\\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_2^2}&+2\frac{\partial\log a\,l_{13}(\alpha)}{\partial\alpha_2}\left(k^2\frac{\partial x_1}{\partial u_1}-\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)\\ &= x_1(c_1''-2k^4y_1^2-2y_3^2-2\mu^4y_{13}^2)+c_3''x_3\cdot y_{13},\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

wobei die übrig gebliebenen Constanten unmittelbar zu bestimmen sind.

In diesen Gleichungen kommen noch die beiden Grössen x_1 und x_3 vor. Man kann schliesslich auch noch x_3 eliminiren und kommt dann zu 2 Differentialgleichungen, denen x_1 allein Genüge leistet. Wirwählen die Formen:

$$\left.\begin{aligned} & -k\lambda\mu\,\vartheta_{03}^2(a)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial u_1^2}+\vartheta_{13}^2(a)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial u_2^2} \\ & +2\lambda\mu\frac{\vartheta_{01}(a)\,\vartheta_{03}(a)\,\vartheta_{13}(a)}{\vartheta_5(a)}\left(k^2\frac{\partial\psi_1}{\partial u_1}-\frac{\partial\psi_1}{\partial u_2}\right)=\psi_1\cdot M_1, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} & \vartheta_{03}(a)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{03}(a)}{\vartheta_5(a)}}{\partial\alpha_2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial u_1^2} \\ & -2k\frac{\vartheta_{13}(a)\,\vartheta_{01}(a)\,\vartheta_{03}(a)}{\vartheta_5^2(a)}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial u_1\,\partial u_2}+\frac{\vartheta_{34}^2}{\vartheta_2^2}\vartheta_{13}(a)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{13}(a)}{\vartheta_5(a)}}{\partial\alpha_1}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial u_2^2}=\psi_1\cdot M_2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Hierbei haben wir gesetzt:

$$\begin{aligned} M_1 = c_1 &+ 2k^2 y_1^2\left(\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_{34}^2}\vartheta_{03}^2(a)-k^2\vartheta_{13}^2(a)\right) \\ & -2\vartheta_{13}^2(a)\,y_3^2+2\mu^2 y_{13}^2\left(\frac{\vartheta_{23}^2}{\vartheta_4^2}\vartheta_{03}^2(a)-\mu^2\vartheta_{13}^2(a)\right), \end{aligned}$$

$$M_2 = c_2-2c_1'\,y_1^2-2\frac{\vartheta_{34}^2}{\vartheta_2^2}\vartheta_{13}(a)\,y_3^2-2c'_{13}\,y_{13}^2.$$

Die beiden Constanten c_1' und c'_{13} haben die Form:

$$c_1' = \vartheta_{03}(a)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{03}(a)}{\vartheta_5(a)}}{\partial\alpha_2}-\frac{2k^3\,\vartheta_{13}(a)\,\vartheta_{01}(a)\,\vartheta_{03}(a)}{\vartheta_5^2(a)}+k^4\frac{\vartheta_{34}^2}{\vartheta_2^2}\vartheta_{13}(a),$$

$$c'_{13} = \vartheta_{03}(a)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{03}(a)}{\vartheta_5(a)}}{\partial\alpha_2}-\frac{2k\mu^2\,\vartheta_{13}(a)\,\vartheta_{01}(a)\,\vartheta_{03}(a)}{\vartheta_5^2(a)}+\mu^4\frac{\vartheta_{34}^2}{\vartheta_2^2}\vartheta_{13}(a).$$

Damit sind die wichtigsten zu $n=3$ gehörenden Differentialbeziehungen abgeleitet. Es möge bemerkt werden, dass die entsprechenden Gleichungen für $\varphi_1(u)$ sich etwas einfacher gestalten (*).

(*) In Bezug hierauf wird auf eine Note des Verfassers inden *Comptes Rendus* dieses Iahres (4 April) verwiesen.

§ 5.

Betrachtung des Falles $n = 4$.

Im Falle $n = 4$ sind die Functionen zubetrachten:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\vartheta_\delta(v)\,\psi_r(u), \quad \vartheta_5^2(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\frac{\partial\,\psi_r(u)}{\partial\,u_\varepsilon},$$

$$\vartheta_5^3(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\frac{\partial^2\,\psi_r(u)}{\partial\,u_\varepsilon\,\partial\,u_{\varepsilon_1}},$$

wobei die Grössen a_1 und a_2 wieder bei allen Functionen denselben Werth besitzen sollen. Zwischen je 17 unter ihnen, die dieselbe Characteristik besitzen, besteht dann mindestens eine lineare Relation. Wir wollen als Characteristik die Grösse $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ wählen und uns von vorneherein auf die Grössen beschränken:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\vartheta_\delta(v)\,\psi_r(u), \quad \vartheta_5^2(v)\,\vartheta_\beta^2(v)\,\frac{\partial\,\psi_1(u)}{\partial\,u_\varepsilon}, \quad \vartheta_5^4(v)\,\frac{\partial^2\,\psi_1(u)}{\partial\,u_\varepsilon\,\partial\,u_{\varepsilon_1}},$$

wobei bei den ersten Producten die Characteristiken β, γ, δ, r so zu wählen sind, dass ihre Summe gleich der Characteristik von $\vartheta_1(v)$ ist. Bei der zweiten Art von Producten können wir uns darauf beschränken β der Reihe nach gleich 5, 1, 3, 13 zu setzen.

Setzt man für r der Reihe nach 5, 1, 3, 13 so werden sich stets neun linear von einander unabhängige Producte:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\vartheta_\delta(v)\,\psi_r(u),$$

ergeben, auf welche alle andern reducirt werden können. In der Wahl herrscht bekanntlich eine grosse Mannigfaltigkeit. Es können z. B. für $r = 1$ an Stelle von β, γ, δ die Werthsysteme gesetzt werden:

5, 5, 5; 5, 1, 1; 5, 3, 3; 5, 13, 13; 1, 04, 23; 1, 2, 12;
3, 2, 23; 13, 12, 23; 13, 1, 3.

Wir erhalten auf diesem Wege 36 Functionen der genannten Art. Es ist zu untersuchen, ob unter ihnen 16 linear von einander unabhängige existiren. Es kann diese Frage, wie überhaupt die Frage nach den linearen Beziehungen zwischen den Functionen, die zu $n = 4$ gehören, aehnlich behandelt werden, wie bei $n = 3$. Für unsere Zwecke genügt es aber vollkommen ein einziges System von 16 linear von einander unabhängigen Functionen zu kennen. Wir wählen das folgende. Für $r = 1$ nehmen wir die vorhin angegebenen Werthsysteme β, γ, δ für $r = 3$ wählen wir an Stelle von β, γ, δ die Systeme:

$$13,\ 13,\ 13;\ 13,\ 1,\ 1;\ 13,\ 3,\ 3;\ 5,\ 2,\ 04;\ 5,\ 1,\ 3;$$

schliesslich können die beiden Producte genommen werden:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_3^3(v)\,\psi_{13}(u)\,,\quad \vartheta_5(v)\,\vartheta_1^3(v)\,\psi_5(u).$$

Durch diese 16 Functionen lassen sich die übrigen von uns eingeführten, resp. lineare Verbindungen derselben linear ausdrücken. Von besonderem Interesse sind diejenigen linearen Verbindungen, welche sich lediglich mit Hülfe von $\psi_1(u)$ darstellen lassen, bei welchen also die Glieder mit den Factoren $\psi_3(u)$, $\psi_{13}(u)$, $\psi_5(u)$ fortfallen. Die entsprechenden Gleichungen sind Differentialgleichungen für die Grösse $\psi_1(u)$ allein. Diese Frage wollen wir allgemein lösen. Hierbei legen wir das Haupt gewicht auf die Bildung der linearen Verbindung — ist dieselbe erfolgt, so ist die Darstellung in der Form $\psi_1(u)\,M$, wo M eine Thetafunction 4ter Ordnung ist, ohne alle Schwierigkeit vorzunehmen. Wir wollen zunächst die linearen Verbindungen von Differential ausdrücken erster Ordnung untersuchen. Eine leichte Betrachtung zeigt, dass in den beiden Ausdrücken:

$$\vartheta_5^2(v)\sum c_\beta^{(\varepsilon)}\cdot\vartheta_\beta^2(v)\,\frac{\partial\,\psi_1(u)}{\partial\,u_\varepsilon}\,,$$

die Constanten sich stets in der angegebenen Weise bestimmen lassen. Es geschieht das, indem der Reihe nach gesetzt wird:

$$v_1 = -a_1 + \frac{s_1}{2},\quad v_2 = -a_2 + \frac{s_2}{2},$$

wobei unter $\frac{s_1}{2}$, $\frac{s_2}{2}$ halbe Perioden verstanden sind, welche die Function $\vartheta_1(v)$ in die ungeraden Thetafunctionen überführen. Wir erhalten dann den:

Lehrsatz: Die Function $\psi_1(u)$ leistet den beiden Differentialgleichungen Genüge:

$$2\,F(v,a)\,\frac{\partial\,\psi_1(u)}{\partial\,u_\varepsilon} = \psi_1(u)\left(\frac{\partial\,F}{\partial\,u_\varepsilon} + \frac{\partial\,F}{\partial\,\alpha_\varepsilon}\right),$$

wobei gesetzt ist:

$$F(v,a) = \frac{\vartheta_1(v+a)\,\vartheta_1(v-a)}{\vartheta_5^2(a)\,\vartheta_5^2(v)}\,,$$

oder auch:

$$F(v, a) = -\frac{\vartheta_1^2(a)}{\vartheta_5^2(a)} + \frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_5^2(v)} - \frac{\vartheta_{13}^2(a)}{\vartheta_5^2(a)} \frac{\vartheta_3^2(v)}{\vartheta_5^2(v)} + \frac{\vartheta_3^2(a)}{\vartheta_5^2(a)} \frac{\vartheta_{13}^2(v)}{\vartheta_5^2(v)}.$$

Es fragt sich im Anschluss an dieses Resultat, ob es nicht noch andere lineare Verbindungen der Grössen:

$$\vartheta_5^2(v)\, \vartheta_\beta^2(v) \frac{\partial \psi_1(u)}{\partial u_\varepsilon},$$

giebt, welche sich als Product von $\psi_1(u)$ und einer Thetafunction 4^{ter} Ordnung darstellen lassen. Jedenfalls können wir uns darauf beschränken, Ausdrücke zu untersuchen:

$$\vartheta_5^2(v) \left(f_1^{(1)}(v) \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} + f_1^{(2)}(v) \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} \right), \tag{1}$$

wenn $f_1^{(1)}(v)$ und $f_1^{(2)}(v)$ die Formen besitzen:

$$f_1^{(1)}(v) = c_1^{(1)} \cdot \vartheta_1^2(v) + c_2^{(1)} \cdot \vartheta_3^2(v) + c_3^{(1)} \cdot \vartheta_{13}^2(v),$$

$$f_1^{(2)}(v) = c_1^{(2)} \cdot \vartheta_1^2(v) + c_2^{(2)} \cdot \vartheta_3^2(v) + c_3^{(2)} \cdot \vartheta_{13}^2(v).$$

Um diese Untersuchung durchzuführen, denken wir uns die Substitutionen halber Perioden angewandt, für welche $\vartheta_1(v)$ der Reihe nach übergeht in $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_{13}(v)$, $\vartheta_{24}(v)$, $\vartheta_{04}(v)$, $\vartheta_{02}(v)$ und die entsprechenden Functionen f eingeführt, die wir bezeichnen wollen durch:

$$f_3^{(\varepsilon)}(v) = -c_1^{(\varepsilon)} \vartheta_3^2(v) + c_2^{(\varepsilon)} \vartheta_1^2(v) + c_3^{(\varepsilon)} \vartheta_5^2(v),$$

$$f_{13}^{(\varepsilon)}(v) = c_1^{(\varepsilon)} \vartheta_{13}^2(v) + c_2^{(\varepsilon)} \vartheta_5^2(v) - c_3^{(\varepsilon)} \vartheta_1^2(v),$$

$$f_{24}^{(\varepsilon)}(v) = -c_1^{(\varepsilon)} \vartheta_{24}^2(v) - c_2^{(\varepsilon)} \vartheta_0^2(v) + c_3^{(\varepsilon)} \vartheta_{01}^2(v),$$

$$f_{04}^{(\varepsilon)}(v) = c_1^{(\varepsilon)} \vartheta_{04}^2(v) - c_2^{(\varepsilon)} \vartheta_2^2(v) - c_3^{(\varepsilon)} \vartheta_{12}^2(v),$$

$$f_{02}^{(\varepsilon)}(v) = c_1^{(\varepsilon)} \vartheta_{02}^2(v) + c_2^{(\varepsilon)} \vartheta_4^2(v) + c_3^{(\varepsilon)} \vartheta_{14}^2(v).$$

Setzen wir $v = -a$, so müssen die entsprechenden Ausdrücke:

$$f^{(1)}(v) \frac{\partial \psi}{\partial u_1} + f^{(2)}(v) \frac{\partial \psi}{\partial u_2},$$

verschwinden, so dass wir die Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} f_1^{(1)}(a) + k^2 f_1^{(2)}(a) &= 0\,, \\ f_3^{(2)}(a) &= 0\,, \\ f_{13}^{(1)}(a) + \mu^2 f_{13}^{(2)}(a) &= 0\,, \\ f_{24}^{(1)}(a) &= 0\,, \\ f_{04}^{(1)}(a) + f_{04}^{(2)}(a) &= 0\,, \\ f_{02}^{(1)}(a) + \lambda^2 f_{02}^{(2)}(a) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Die Gleichungen sind auflösbar und zwar wird ihnen Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} f_1^{(1)}(v) = \vartheta_5(a)\,\vartheta_0(a)\,\vartheta_{01}(a)\,\vartheta_1^2(v) \\ + \frac{\vartheta_{14}\cdot\vartheta_{12}}{\vartheta_{23}\cdot\vartheta_{34}}\,\vartheta_{13}(a)\,\vartheta_{24}(a)\,\vartheta_{01}(a)\,\vartheta_3^2(v) + \frac{\vartheta_2\cdot\vartheta_4}{\vartheta_{23}\cdot\vartheta_{34}}\,\vartheta_{24}(a)\,\vartheta_0(a)\,\vartheta_3(a)\,\vartheta_{13}^2(v)\,, \\ -k^2 f_1^{(2)}(v) = \vartheta_5(a)\,\vartheta_0(a)\,\vartheta_{01}(a)\,\vartheta_1^2(v) \\ + \frac{\vartheta_{14}\cdot\vartheta_{12}}{\vartheta_2\cdot\vartheta_4}\,\vartheta_{13}(a)\,\vartheta_3(a)\,\vartheta_5(a)\,\vartheta_{24}^2(v) + \frac{\vartheta_{23}\cdot\vartheta_{34}}{\vartheta_2\cdot\vartheta_4}\,\vartheta_{24}(a)\,\vartheta_0(a)\,\vartheta_3(a)\,\vartheta_{13}^2(v). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Hierbei möge daran erinnert werden, dass die Beziehung besteht:

$$\vartheta_5^2\cdot\vartheta_{24}^2(v) = -\vartheta_{03}^2\cdot\vartheta_1^2(v) + \vartheta_{01}^2\cdot\vartheta_3^2(v) + \vartheta_0^2\cdot\vartheta_{13}^2(v).$$

Die Weiterführung des Problems hat keinerlei Schwierigkeiten. Wir finden den:

Lehrsatz: Die Function $\psi_1(u)$ leistet einer Differentialgleichung erster Ordnung Genüge:

$$f_1^{(1)}(v)\,\frac{\partial\psi_1}{\partial u_1} + f_1^{(2)}(v)\,\frac{\partial\psi_1}{\partial u_2} = \psi_1(u)\,\frac{M}{\vartheta_5(v)}\,,$$

wenn unter M eine gewöhnliche Thetafunction 3^{ter} Ordnung von der Characteristik Null verstanden wird.

Damit sind die linearen Ausdrücke der Differentialquotienten erster Ordnung erschöpft.

Wir nehmen jetzt die zweiten Differentialquotienten hinzu. Unter Berücksichtigung der Resultate des vorigen Paragraphen, insbesondere der Gleichungen (7, 8) können wir uns auf einen derselben beschränken z. B. $\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial u_1^2}$, ferner folgt aus den zuletzt gefundenen Resultaten, dass wir als allgemeinsten zu betrachtenden Ausdruck die Grösse wählen können:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u_1^2} + g_1^{(1)}(v)\frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} + g_1^{(2)}(v)\frac{\partial \psi_1}{\partial u_2}, \tag{4}$$

wobei $g_1^{(1)}(v)$ und $g_1^{(2)}(v)$ die Form haben:

$$g_1^{(1)}(v) = c_3^{(1)} \cdot \vartheta_3^2(v) + c_{13}^{(1)} \cdot \vartheta_{13}^2(v),$$

$$g_1^{(2)}(v) = c_1^{(2)} \cdot \vartheta_1^2(v) + c_3^{(2)} \cdot \vartheta_3^2(v) + c_{13}^{(2)} \cdot \vartheta_{13}^2(v).$$

Stellen wir aehnliche Betrachtungen, wie vorhin an, so erhalten wir den *Lehrsatz: Die Function $\psi_1(u)$ leistet der Differentialgleichung Genüge:*

$$\vartheta_{01}(a)\vartheta_0(a)\vartheta_5(a)\vartheta_1(a)\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u_1^2} + \mu\,\vartheta_{13}^2(a)\left(g_1^{(1)}(v)\frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} + g_1^{(2)}(v)\frac{\partial \psi_1}{\partial u_2}\right) = \psi_1(u)\frac{N}{\vartheta_5^3(v)},$$

wobei gesetzt ist:

$$\vartheta_5^2(v)\,g_1^{(1)}(v) = \vartheta_{01}^2(a)\,\vartheta_3^2(v) + c \cdot \vartheta_0^2(a)\,\vartheta_{13}^2(v),$$

$$\mu^2\,\vartheta_5^2(v)\,g_1^{(2)}(v) = -\,\vartheta_5^2(a)\,\vartheta_{24}^2(v) + \vartheta_0^2(a)\,\vartheta_{13}^2(v),$$

$$\vartheta_2 \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_0(a)\,\vartheta_{13}(a)\,c = -\left(\vartheta_{12} \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_3(a)\,\vartheta_{01}(a) + \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{03}(a)\,\vartheta_1(a)\right).$$

Unter N ist eine gewöhnliche Thetafunction 3ter Ordnung von der Characteristik Null verstanden.

Hiermit sind auch die definirten Differentialgleichungen zweiter Ordnung vollständig entwickelt.