Ueber die quadratische Transformation, durch welche die Ebenen des Raumes in ein System von Flächen zweiter Ordnung mit gemeinsamem Poltetraeder übergeführt werden.

(Von H. E. Timerding *in Strassburg.)*

Nachdem Herr Reye durch seine Abhandlung im 48. Bande der *Math. Annalen* die Aufmerksamkeit wieder nachdrücklich auf die bisher sehr vernachlässigten nicht wechselseitig eindeutigen quadratischen Verwandtschaften hingelenkt hat, indem er sie insbesondere zu einer ergiebigen Diskussion der rationalen Flächen benutzte, scheint es an der Zeit zu sein, diejenigen besonderen Fälle dieser Verwandtschaften aufzusuchen, die auch eine einfache analytische Behandlung gestatten. Man könnte hierbei zunächst an die umgekehrt zweideutigen Transformationen denken, bei denen also die Flächen zweiter Ordnung, in die die Ebenen des Raumes übergehen, entweder alle denselben Kegelschnitt oder dieselbe Gerade und dieselben zwei Punkte oder dieselben sechs Punkte gemein haben. Diese Fälle erweisen sich auch nicht als ungeeignet für die analytische Behandlung, nur der letzte, der für die synthetische Behandlung der nächstliegende ist, scheint sich in analytischer Beziehung ganz der ein-vierdeutigen Verwandtschaft, bei der die Flächen zweiter Ordnung nur die Ecken eines Tetraeders gemein haben, unterzuordnen.

Weitaus einfacher gestaltet sich aber die Darstellung, wenn die quadratischen Flächen alle ein gemeinsames Poltetraeder haben, denn dann drücken sich die transformirten Coordinaten einfach durch die Quadrate der ursprünglichen und diese also umgekehrt durch die Quadratwurzeln jener aus. Diese Verwandtschaft benutzte Wilhelm Stahl (im 101. Bande des *Crelle'schen Journals*, S. 73), um aus der Tangentenfläche der biquadratischen Raumcurve zweiter Art die desmische Fläche 12. Ordnung herzuleiten, indem er dem inneren Grunde der von Salmon zufällig gemachten Bemerkung nachging, dass die erstere Fläche in die letztere übergeht, wenn man bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems in ihrer Gleichung die Veränderlichen durch deren Quadrate ersetzt. Stahl hat gleichzeitig die in Rede stehende Verwandtschaft kurz charakterisirt, zwar nur soweit, als es für sein Problem nötig war, aber durch dasselbe nahm er gerade das Schwierigste vorweg.

Am nützlichsten aber erweist sich die genannte Verwandtschaft für die sog. Steiner'sche Fläche und zwar liegt dies daran, dass sie sofort ihre einfachste Abbildung auf eine Ebene liefert. So viele bemerkenswerte Eigenschaften man auch für die Flächen erhält, die als entsprechende Gebilde anderer, insbesondere quadratischer, Flächen erscheinen, sie lassen doch, so lange die Beziehung keine eindeutige ist, vor allem die Vollständigkeit vermissen. Wir halten es aber doch für keinen Nachteil, wenn auch die Grenzen deutlich hervortreten, bis zu denen der Nutzen einer bestimmten Methode reicht. Das Feld, auf dem sich diese besondere quadratische Transformation als erspriesslich erweist, bleibt immerhin ein sehr weites, und Beachtung verdient es auch, dass, so einfach die Verwandtschaft selbst, in analytischer und rein geometrischer Beziehung, ist, so verwickelt und schwierig doch die Verhältnisse werden können, zu denen sie schliesslich führt, und so ausserordentlich mannigfaltig die Gebiete, in die sie den Weg leitet.

ERSTER ABSCHNITT.

Das Gebüsch der quadratischen Flächen mit gemeinsamem Poltetraeder.

1. Das Gebüsch der quadratischen Flächen mit gemeinsamem Poltetraeder ist wohl zuerst von Painvin in einer sehr reichhaltigen, aber nicht systematisch geordneten Arbeit (*) untersucht worden. Später ist es in einer Preisschrift von K. Meister behandelt (**). Herr Reye hat ihm im Anhang zum letzten Band seiner Geometrie der Lage einen Abschnitt gewidmet, in

(*) *Crelle's Journal*, Bd. 63.
(**) *Schlömilch's Zeitschrift*, Bd. 34.

dem die wesentlichen Eigenschaften zusammengestellt sind. Wir wollen kurz hervorheben, was für unsere Zwecke nötig ist.

2. Das gemeinsame Poltetraeder der quadratischen Flächen wollen wir als das Haupttetraeder T bezeichnen und auf dasselbe homogene Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 beziehen. Dann stellt sich eine beliebige Fläche f des Gebüschs, $(f)^3$, durch eine Gleichung von folgender Form dar:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0.$$

Die Flächen des Gebüschs gehen durch die Collineationen, die das Haupttetraeder ungeändert lassen, in einander über.

3. Durch die 8 assoziirten Schnittpunkte dreier Flächen des Gebüschs gehen sechs Ebenenpaare des Gebüschs, die je eine Kante des Haupttetraeders zur Axe haben. Von den Verbindungslinien je zweier der 8 Punkte gehen durch jede Ecke des Haupttetraeders vier. Von den übrigen zwölf schneiden sich zwölfmal je zwei auf einer Kante des Haupttetraeders, während gleichzeitig ihre Verbindungsebene durch die Gegenkante geht.

4. Für die 8 assoziirten Punkte sind die Quadrate der Coordinaten einander gleich und die Coordinaten selbst daher bis auf die Vorzeichen dieselben. Durch beliebige Aenderung der Vorzeichen erhalten wir somit aus einem Punkte die 7 assoziirten. Diese Vorzeichenänderungen stellen 7 Involutionen dar. Von denselben sind 4 centrisch und 3 geschaart. Die Ecken des Haupttetraeders sind die Centren und die gegenüberliegenden Seitenflächen die zugehörigen Involutionsebenen der centrischen Involutionen, und je zwei Gegenkanten des Tetraeders sind die Axen der geschaarten Involutionen.

5. Durch die centrischen Involutionen gehen aus einem Punkte eines Oktupels vier andere hervor, aber dieselben Punkte gehen auch aus irgend einem der drei noch übrigen Punkte durch dieselben Involutionen hervor. Die letzteren drei samt dem ersten Punkte gehen ihrerseits ebenfalls durch die vier centrischen Involutionen aus irgend einem der übrigen Punkte hervor.

Das Oktupel der assoziirten Punkte erscheint so in zwei Quadrupel gesondert. Ein Punkt des einen Quadrupels geht durch die vier centrischen Involutionen in die Punkte des anderen Quadrupels und durch jede dieser Involutionen geht ein Quadrupel in das andere über.

Durch die drei geschaarten Involutionen geht ein Punkt eines Quadrupels in die drei übrigen Punkte desselben Quadrupels über und jedes Quadrupel somit in sich selbst.

6. Beide Quadrupel sollen einander assoziirt heissen. Die Punkte eines Quadrupels liegen zu je zweien mit einer beliebigen Kante des Haupttetraeders in zwei Ebenen, die die Eckpunkte der Gegenkante harmonisch trennen, und dieselben Ebenen enthalten auch das assoziirte Quadrupel. Auf den Geraden, die die Punkte eines Quadrupels mit einer Ecke des Hauptetraeders verbinden, liegen auch die Punkte des assoziirten Quadrupels.

Zwei assoziirte Quadrupel bilden die Ecken zweier Tetraeder, T_1 und T_2, die zu einander vierfach perspektive Lage haben, indem die Projektionscentren mit den Ecken des Haupttetraeders T zusammenfallen.

Es müssen aber auch die Geraden, welche einen Punkt eines Quadrupels mit den Punkten des assoziirten Quadrupels verbinden, durch je einen Eckpunkt des Haupttetraeders laufen. Es hat also auch jedes der Tetraeder T_1 und T_2 vierfach perspektive Lage zum Haupttetraeder T, indem die Projektionscentren jedesmal die Ecken des noch übrigen dritten Tetraeders sind.

Die drei Tetraeder T, T_1, T_2 befinden sich also in der bekannten desmischen Lage (Reye, in den *Acta Mathematica*, Bd. I, S. 99).

7. Zwei assoziirte Punktquadrupel bilden die Ecken von zwei Tetraedern, deren Ebenen zwei assoziirte Ebenenquadrupel bilden. Für solche Ebenenquadrupel gelten genau die reziproken Sätze wie für die analogen Punktquadrupel.

8. Zwei Gruppen von 8 assoziirten Punkten lassen sich auf 8 verschiedene Arten so durch 8 Gerade verbinden, dass diese 8 Geraden selbst assoziirt sind und mit den assoziirten Punkten durch die 7 Involutionen in einander übergehen.

Acht assoziirte Gerade teilen sich in zwei Quadrupel, derart dass die Geraden des einen Quadrupels der einen Regelschaar und die Geraden des anderen Quadrupels der anderen Regelschaar eines und desselben Hyperboloids angehören. Die 16 Punkte, in denen die Geraden des einen Quadrupels sonach die Geraden des anderen Quadrupels schneiden, verteilen sich zu vieren auf die Ebenen des Haupttetraeders.

9. Drei Gruppen von 8 assoziirten Punkten lassen sich auf 64 verschiedene Arten so durch 8 Ebenen, die aus jeder Gruppe einen Punkt enthalten, verbinden, dass diese 8 Ebenen selbst assoziirt sind.

Insbesondere sind die Tangentialebenen einer Fläche des Gebüschs $(f)^3$ in 8 assoziirten Punkten selbst 8 assoziirte Ebenen und lassen sich so in zwei Quadrupel teilen, dass die Ecken der von beiden Quadrupeln gebildeten Tetraeder wieder 8 assoziirte Punkte sind.

10. Von diesen Betrachtungen lassen sich sehr bemerkenswerte Anwendungen auf die Raumcurve vierter Ordnung erster Art machen. Man erhält so alle die Sätze, die H. SCHRÖTER in seinem Büchlein über diese Curve auf S. 47 ff. entwickelt.

11. Um die Flächen des Gebüschs $(f)^3$, die alle ein gemeinsames Poltetraeder T haben, eindeutig auf die Ebenen des Raumes zu beziehen, braucht man nur von einem beliebigen festen Punkte P bezüglich aller dieser Flächen die Polarebenen aufzusuchen (*). Zu jeder Ebene π gehört dann auch nur eine Fläche des Gebüschs, da die polare Verwandtschaft durch das Poltetraeder T und die entsprechenden Elemente P und π eindeutig festgelegt ist, und damit auch ihre Ordnungsfläche.

12. Dem Flächensysteme $(f)^3$ gehören vier Bündel von Kegeln an, deren Scheitel immer eine Ecke des Haupttetraeders T ist, während die in der Ecke sich schneidenden Kanten für den Kegel ein Poldreikant bilden. Diesen Kegeln sind die Ebenen zugeordnet, die durch je eine Ecke des Haupttetraeders gehen.

13. Dem Systeme $(f)^3$ gehören sechs Büschel von Ebenenpaaren an, die mit je zwei Ebenen des Haupttetraeders als Doppelebenen eine Involution bilden. Diesen Ebenenpaaren sind die Ebenen zugeordnet, die durch je eine Kante des Haupttetraeders gehen.

14. Dem Systeme $(f)^3$ gehören vier doppelt zählende Ebenen an: die Ebenen des Haupttetraeders. Diese Ebenen sind sich selbst zugeordnet.

15. Der Durchschnittscurve zweier Flächen des Systems $(f)^3$ entspricht allemal die gerade Linie, in der sich die den Flächen entsprechenden Ebenen schneiden. Acht assoziirten Punkten, in denen sich drei Flächen des Systems schneiden, entspricht ein einziger Punkt.

16. Den Raum des Systems $(f)^3$ wollen wir als den Raum (x) bezeichnen, den Raum der den Flächen des Systems entsprechenden Ebenen als Raum (X), indem wir gleichzeitig Coordinaten, die sich auf den ersten Raum beziehen, mit kleinen Buchstaben, und solche, die zum zweiten Raum gehören, mit grossen Buchstaben schreiben.

Das Haupttetraeder T sollen beide Räume gemein haben, indem die Ecken, Seiten und Kanten dieses Tetraeders sich selbst entsprechen.

17. Um nun die Beziehung der Flächen des Systems auf die Ebenen des Raumes (X) analytisch auszudrücken, wählen wir als den festen Punkt

(*) REYE, *Geometrie der Lage*, 3. Bd. der 3. Aufl., S. 142. Vgl. auch seine letzte Arbeit über diesen Gegenstand, *Math. Ann.*, Bd. 48.

den Einheitspunkt, d. h. den Punkt, dessen Coordinaten, auf das Haupttetraeder bezogen, alle einander gleich sind. Dann entspricht der Fläche:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0,$$

die Ebene:

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0,$$

und die Beziehung zwischen den Punkten der beiden Räume drückt sich einfach aus wie folgt:

$$\rho X_1 = x_1^2,$$
$$\rho X_2 = x_2^2,$$
$$\rho X_3 = x_3^2,$$
$$\rho X_4 = x_4^2.$$

Die Coordinaten eines Punktes des Raumes (X) sind proportional den Quadraten der Coordinaten der entsprechenden Punkte im Raume (x).

Umgekehrt sind die Coordinaten eines Punktes des Raumes (x) proportional den Quadratwurzeln aus den Coordinaten des entsprechenden Punktes im Raume (X).

18. Aus dieser Darstellungsform der Verwandtschaft ist sofort ersichtlich, dass einem beliebigen Punkte des Raumes (X) acht Punkte des Raumes (X) zugeordnet sind. Liegt aber der Punkt in einer Ebene des Haupttetraeders, so sind ihm nur vier und zwar in derselben Ebene gelegene Punkte zugeordnet, liegt er auf einer Kante des Haupttetraeders, so sind ihm zwei Punkte derselben Kante zugeordnet, und die Ecken des Haupttetraeders endlich entsprechen nur sich selbst.

19. Die biquadratische Raumcurve des Raumes (x), die einer Geraden des Raumes (X) entspricht, zerfällt, wenn diese Gerade eine Kante des Haupttetraeders trifft, in zwei Kegelschnitte, die zum Haupttetraeder folgende ausgezeichnete Lage haben. Sie schneiden sich auf der Tetraederkante in zwei Punkten, die die auf der Kante liegenden Eckpunkte harmonisch trennen, ihre Ebenen schneiden sich darum in dieser Tetraederkante und trennen gleichzeitig die in der Kante sich schneidenden Ebenen des Tetraeders harmonisch.

20. Geht die gerade Linie des Raumes (X) durch eine Ecke des Haupttetraeders T, so zerfällt die entsprechende Curve des Raumes (x) in vier Gerade, die alle durch dieselbe Ecke von T und deren Verbindungsebenen paarweise durch eine Kante von T gehen.

21. Liegt die gerade Linie des Raumes (X) in einer Ebene des Haupttetraeders, so entspricht ihr im Raume (x) ein doppelt zu zählender Kegelschnitt derselben Ebene, für den die in der letzteren liegenden Kanten und Ecken des Haupttetraeders ein Poldreieck bilden.

22. Umgekehrt entspricht einer geraden Linie des Raumes (x) ein Kegelschnitt im Raume (X), welcher die vier Ebenen des Haupttetraeders berührt (*).

Einem jeden solchen Kegelschnitt des Raumes (X) entsprechen aber auch immer 8 assoziirte Gerade des Raumes (x), und wie man zwei Gruppen assoziirter Punkte auf 8 Arten durch 8 assoziirte Gerade verbinden kann (8), so giebt es auch 8 Kegelschnitte, die durch zwei gegebene Punkte gehen und vier feste Ebenen berühren.

Die in irgend einer Ebene liegenden unter den in Rede stehenden Kegelschnitten bilden eine Schaar und sind dem Vierseit einbeschrieben, in dem die Ebene das Haupttetraeder schneidet. Ihnen entsprechen im anderen Raume die beiden Regelschaaren der der Ebene zugeordneten Regelfläche. Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei dieser Kegelschnitte.

23. Trifft die Gerade im Raume (x) eine Kante des Haupttetraeders, so berührt der entsprechende Kegelschnitt dieselbe Kante und die zwei Ebenen des Haupttetraeders, die sich in der Gegenkante schneiden.

24. Geht die Gerade im Raume (x) durch eine Ecke des Haupttetraeders, so ist sie in einfach unendlich vielen Kegeln des Flächengebüschs $(f)^3$ enthalten, die einen Büschel bilden. Ihr entspricht deswegen im Raume (X) eine Gerade, die durch die gleiche Ecke des Haupttetraeders geht. (Vgl. § 20.)

25. Ebenso geht durch eine Gerade des Raumes (x), welche zwei Gegenkanten des Haupttetraeders trifft, ein Büschel von Flächen des Systems $(f)^3$ hindurch. Dieselben haben ausser der vorgelegten noch drei Gerade gemein, die mit der ersten ein windschiefes Vierseit bilden, dessen Ecken paarweise auf den beiden Gegenkanten des Haupttetraeders liegen. Diesen vier Geraden des Raumes (x) entspricht eine Gerade des Raumes (X), welche dieselben Gegenkanten des Haupttetraeders trifft.

26. Liegt die Gerade des Raumes (x) in einer Ebene des Haupttetraeders, so entspricht ihr im Raume (X) ein Kegelschnitt, der die drei in der Ebene liegenden Kanten des Haupttetraeders berührt. Demselben Kegelschnitt entsprechen noch drei andere Gerade des Raumes (x), diese bilden mit der ersten zusammen ein Vierseit, dessen Diagonalen Kanten des Tetraeders sind.

(*) Reye, *Geom. d. L.*, 3. A., Bd. 3, S. 219.

27. Im allgemeinen Falle ist die Gerade des Raumes (x) auf den ihr entsprechenden Kegelschnitt des Raumes (X) Punkt für Punkt eindeutig bezogen. In den Spezialfällen aber, wo ihr wieder eine Gerade entspricht, findet diese eindeutige Beziehung nicht mehr statt; jedem Punkte der Geraden des Raumes (X) entsprechen zwei Punkte der Geraden des Raumes (x), die im einen Falle durch eine Ecke und die gegenüberliegende Ebene des Haupttetraeders, im anderen Falle durch zwei Gegenkanten desselben harmonisch getrennt werden.

ZWEITER ABSCHNITT.

Ueber eine Reihe besonderer Flächen vierter Ordnung.

1. Einer beliebigen Fläche 2. Ordnung F^2 im Raume (X) entspricht im Raume (x) eine Fläche 4. Ordnung f^4, welche die Eigenschaft hat, durch 7 Involutionen in sich selbst übergeführt zu werden, und deren Gleichung, auf das Haupttetraeder bezogen, nur die Quadrate und vierten Potenzen der Veränderlichen enthält. Jedem Punkte von F^2 entsprechen i. A. 8 assoziirte Punkte von f^4 (I, 18).

2. Fragen wir nun nach den Bedingungen, unter denen diese Fläche f^4 einen Knotenpunkt bekommt, ohne dass die Fläche F^2 ein Kegel ist, so ist dies zunächst jedesmal der Fall, wenn die Fläche F^2 durch eine Ecke des Haupttetraeders geht. Ihrer Tangentialebene in dieser Ecke entspricht dann der Kegel, welcher sich der Fläche f^4 in dem zugehörigen Knotenpunkte anschmiegt. (Vgl. I, 12.)

3. Die Fläche f^4 bekommt aber immer vier Knotenpunkte, wenn die Fläche F^2 eine Ebene des Haupttetraeders T berührt. Findet diese Berührung auf einer Kante von T statt, so fallen die Knotenpunkte paarweise, und findet sie in einer Ecke von T statt, so fallen sie alle vier zusammen.

Wenn F^2 nämlich eine Ebene des Haupttetraeders berührt, so schneidet die Fläche die Ebene in zwei Geraden, diesen entsprechen im anderen Raume zwei Kegelschnitte derselben Ebene, deren Durchschnittspunkte die Knotenpunkte von f^4 sind (*). Es sind Knotenpunkte und nicht etwa Berührungs-

(*) Die Fläche f^4 wird längs der beiden Kegelschnitte von Kegeln 2. O. berührt, deren Mittelpunkte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt des Haupttetraeders zusammenfallen.

punkte schon deshalb, weil diese Ebene des Haupttetraeders Involutionsebene einer Involution ist, durch die die Fläche f^4 in sich übergeht, und weil die Schnittlinien der Fläche mit zwei auf beiden Seiten der ersten Ebene sehr nahe benachbarten assoziirten Ebenen infolge dessen congruente Curven sind.

4. Berührt die Fläche F^2 eine Kante des Haupttetraeders, so erhält die entsprechende f^4 zwei Knotenpunkte auf derselben Kante.

5. Die Fläche 4. Ordnung des Raumes (x) hat also nur dann 16 Knotenpunkte, wenn die entsprechende Fläche 2. Ordnung des Raumes (X) alle Ebenen des Haupttetraeders berührt (3). Diese Knotenpunkte bilden in den Ebenen des Haupttetraeders vier Vierecke, deren Diagonaldreiecke jedesmal durch drei Kanten des Haupttetraeders gebildet werden. Eine solche Fläche heisst nach Cayley (*) Tetraedroid. Sie hängt von 17 Parametern ab, während die allgemeine Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten, die Kummer'sche Fläche, von 18 Parametern abhängt, und sie ist die projektive Verallgemeinerung der Fresnel'schen Wellenfläche, bei der aber wie bekannt immer nur vier Knotenpunkte reell sind, während sie bei den Tetraedroiden alle reell sein können.

6. Die Gleichungsform, welche die Tetraedroide, auf das Haupttetraeder bezogen, zeigen, ergiebt sich sofort aus der Gestalt, in der die Gleichung einer die vier Ebenen des Coordinatentetraeders berührenden quadratischen Fläche erscheint, wenn man von ihrer Gleichung in Ebenencoordinaten:

$$a_{12}u_1u_2 + a_{13}u_1u_3 + a_{23}u_2u_3 + a_{14}u_1u_4 + a_{24}u_2u_4 + a_{34}u_3u_4 = 0\,,$$

ausgeht. Die Gleichung des zugehörigen Tetraedroids lautet dann in Determinantenform geschrieben:

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^2 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ x_2^2 & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ x_3^2 & a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ x_4^2 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

eine Form, die auch Cayley angiebt.

(*) S. dessen Aufsätze *Liouville's Journal*, Bd. XI; *Crelle's Journal*, Bd. 65 u. 87.

7. Jedem Kegel des Raumes (X), welcher drei Ebenen des Haupttetraeders berührt, dessen Spitze somit in einer Ecke desselben liegt, entsprechen im Raume (X) vier Ebenen, die sich alle in derselben Ecke und zweimal paarweise in jeder durch die Ecke gehenden Ebene des Haupttetraeders schneiden.

Die Gleichung eines solchen Kegels lässt sich nämlich in der Form schreiben:

$$\alpha_1 \sqrt{X_1} + \alpha_2 \sqrt{X_2} + \alpha_3 \sqrt{X_3} = 0,$$

und analog für die anderen Ecken des Haupttetraeders. Aus dieser Gleichungsform ist sofort ersichtlich, dass dem Kegel die Ebenen entsprechen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= 0, \\ -\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= 0, \\ \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= 0, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ein solcher Kegel wird von jeder Ebene in einem Kegelschnitte geschnitten, der drei Ebenen des Haupttetraeders berührt. Jedem derartigen Kegelschnitte entsprechen im anderen Raume wieder Kegelschnitte, und zwar vier, einer in jeder der dem Kegel entsprechenden Ebenen.

8. Die Tangentialkegel K_i, welche sich aus den Ecken des Haupttetraeders an die alle Ebenen des letzteren berührende Fläche F^2 legen lassen, berühren nun drei Ebenen des Haupttetraeders, dasselbe gilt von ihren Berührungskegelschnitten. Die ihnen im Raume (x) entsprechenden Ebenen berühren die entsprechende Fläche f^4 längs Kegelschnitten.

Das Tetraedroid hat also 16 singuläre Tangentialebenen, die es längs Kegelschnitten berühren, und von diesen Ebenen gehen je vier durch eine Ecke des Haupttetraeders T, indem sie ein Vierseit bilden, von dem je zwei Gegenkanten in einer Ebene von T liegen. Ausser diesen 16 Kegelschnitten enthält das Tetraedroid noch 8 andere, nämlich zwei in jeder Ebene von T (3).

Die 6 Kanten eines solchen Vierseits entsprechen den drei Geraden, welche eine Ecke des Haupttetraeders mit drei der vier Berührungspunkte von F^2 verbinden, jede dieser Kanten enthält zwei Knotenpunkte und jede singuläre Ebene somit 6 Knotenpunkte.

Diese 6 Knotenpunkte lassen sich ferner paarweise durch 3 Gerade verbinden, die durch denselben Eckpunkt des Haupttetraeders gehen. Sie bilden also die Ecken eines Brianchon'schen Sechseckes, während sie gleichzeitig, als auf dem singulären Kegelschnitt in der Ebene gelegen, ein Pascal'sches Sechseck bilden.

9. Da die 16 Knotenpunkte sich gleichmässig auf die 16 singulären Ebenen verteilen müssen, so gehen auch durch jeden Knotenpunkt 6 singuläre Ebenen (*) und berühren alle den Schmiegungskegel in demselben. Da solche 6 Ebenen aber immer durch eine centrische Involution in einander übergehen müssen, werden sie von einer beliebigen Ebene in den Seiten eines Pascal'schen Sechsecks geschnitten, das gleichzeitig ein Brianchon'sches sein muss, weil die 6 Ebenen denselben Kegel berühren.

10. Von den 120 Verbindungslinien der 16 Knotenpunkte liegen je 6 in den Ebenen des Haupttetraeders. Von diesen 24 Linien gehen auch je 6 durch eine Ecke des Haupttetraeders und bilden die Schnittlinien der durch diese Ecke gehenden singulären Ebenen.

Die übrigen 96 Verbindungslinien entsprechen den 12 Kegelschnitten des Raumes (X), welche die vier Ebenen des Haupttetraeders berühren und davon je zwei in denselben Punkten wie die Fläche F^2. Durch diese Kegelschnitte gehen aber auch je zwei der Tangentialkegel K_i, die immer in je zwei von ihnen sich schneiden, und die 96 Verbindungslinien singulärer Punkte sind deshalb auch Schnittlinien je zweier singulärer Ebenen.

Die 120 Verbindungslinien je zweier Knotenpunkte sind mit den 120 Schnittlinien je zweier singulärer Ebenen identisch.

11. Die Coordinaten der singulären Punkte ergeben sich aus dem folgenden Schema:

Ebene	x_1	x_2	x_3	x_4
$x_1 = 0$	0	$\pm\sqrt{a_{12}}$	$\pm\sqrt{a_{13}}$	$\pm\sqrt{a_{14}}$
$x_2 = 0$	$\pm\sqrt{a_{12}}$	0	$\pm\sqrt{a_{23}}$	$\pm\sqrt{a_{24}}$
$x_3 = 0$	$\pm\sqrt{a_{13}}$	$\pm\sqrt{a_{23}}$	0	$\pm\sqrt{a_{34}}$
$x_4 = 0$	$\pm\sqrt{a_{14}}$	$\pm\sqrt{a_{24}}$	$\pm\sqrt{a_{34}}$	0

(*) Dies lässt sich auch so erkennen: Jeder der Berührungspunkte der Fläche F^2 mit den Ebenen des Haupttetraeders liegt auf drei der Tangentialkegel K_i aus den Ecken des Haupttetraeders. Durch jeden der entsprechenden Knotenpunkte von f^4 gehen daher zunächst drei singuläre Ebenen, dann aber noch drei weitere, die aus den ersteren durch eine centrische Involution hervorgehen.

Die Tangentialkegel K_i, welche sich aus den Ecken des Haupttetraeders an die Fläche F^2 legen lassen, haben folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lllll} & \sqrt{a_{34}X_2} & +\sqrt{a_{24}X_3} & +\sqrt{a_{23}X_4} & =0\,, \\ \sqrt{a_{34}X_1} & & +\sqrt{a_{14}X_3} & +\sqrt{a_{13}X_4} & =0\,, \\ \sqrt{a_{24}X_1} & +\sqrt{a_{14}X_2} & & +\sqrt{a_{12}X_4} & =0\,, \\ \sqrt{a_{23}X_1} & +\sqrt{a_{13}X_2} & +\sqrt{a_{12}X_3} & & =0. \end{array}$$

Die Coordinaten der singulären Ebenen der Fläche f^4 lassen sich demnach durch folgendes Schema darstellen:

Punkt	u_1	u_2	u_3	u_4
$u_1=0$	0	$\pm\sqrt{a_{34}}$	$\pm\sqrt{a_{24}}$	$\pm\sqrt{a_{23}}$
$u_2=0$	$\pm\sqrt{a_{34}}$	0	$\pm\sqrt{a_{14}}$	$\pm\sqrt{a_{13}}$
$u_3=0$	$\pm\sqrt{a_{24}}$	$\pm\sqrt{a_{14}}$	0	$\pm\sqrt{a_{12}}$
$u_4=0$	$\pm\sqrt{a_{23}}$	$\pm\sqrt{a_{13}}$	$\pm\sqrt{a_{12}}$	0

12. Geht eine quadratische Fläche F^2 des Raumes (X) durch eine Kante des Haupttetraeders hindurch, so hat die entsprechende Fläche f^4 des Raumes (x) dieselbe Kante zur Doppellinie (s. I, 13).

13. Einem Hyperboloid, welches 4 Kanten des Haupttetraeders enthält, entspricht daher ein Paar von Hyperboloiden, welche dieselben Kanten mit einander gemein haben.

14. Einem Hyperboloid F^2, welches 3 Kanten des Haupttetraeders enthält, entspricht eine biquadratische Regelfläche f^4, welche dieselben drei Kanten zu Doppellinien hat. Die beiden windschiefen unter den drei Kanten sind durch die eine Regelschaar der Fläche F^2 projektiv auf einander bezogen, diese eindeutige Beziehung geht durch die quadratische Verwandtschaft in eine zweideutige über (I, 18), und die Geraden der Regelfläche f^4 sind diejenigen, welche jeden Punkt einer der beiden windschiefen Doppellinien mit den beiden entsprechenden Punkten der anderen verbinden. (Vgl. I, 25.) Die letzteren beiden Punkte trennen immer zwei Ecken des Haupttetraeders harmonisch.

15. Jede der Ebenen durch die dritte Doppellinie schneidet die Fläche f^4 ausserdem in einem Kegelschnitte. Diese Kegelschnitte entsprechen, während

die Geraden der Fläche f^4 der einen Regelschaar von F^2 entsprechen, paarweise den Geraden der anderen Regelschaar (I, 19).

16. Diese Kegelschnittschaar der Fläche f^4 hat eine besondere Lage zum Haupttetraeder. Durch jeden Punkt der dritten Doppellinie gehen zwei von ihnen, dieselben haben noch einen zweiten Punkt dieser Linie gemein, der von dem ersten durch die beiden auf der Linie liegenden Tetraederecken harmonisch getrennt ist, und die Ebenen der beiden Kegelschnitte bilden mit den in der Linie sich schneidenden Seitenflächen des Haupttetraeders vier harmonische Ebenen.

17. Die Regelfläche f^4 lässt sich durch eine Gleichung von folgender Form darstellen:

$$x_1^2 x_2^2 \pm x_2^2 x_3^2 \pm x_3^2 x_4^2 = 0.$$

18. Nun entspricht umgekehrt einem Hyperboloid f^2 des Raumes (x), das drei Kanten des Haupttetraeders enthält, im Raume (X) eine Regelfläche F^4, die dieselben drei Kanten zu Doppellinien hat. Der Gleichung dieser Fläche lässt sich folgende Form geben:

$$\sqrt{X_1 X_2} + \sqrt{X_2 X_3} + \sqrt{X_3 X_4} = 0,$$

oder rational gemacht:

$$X_2^2 (X_1^2 - 2\,X_1 X_3) + X_3^2 (X_4^2 - 2\,X_2 X_4) + X_2 X_3 (X_2 X_3 - 2\,X_1 X_4) = 0.$$

Derselben Fläche F^4 entsprechen vier Hyperboloide des Raumes (x); durch jeden Punkt einer der beiden windschiefen unter den drei Kanten des Haupttetraeders, die auf den vier Regelflächen enthalten sind, geht von jeder der letzteren ein Regelstrahl, diesen vier Strahlen entsprechen zwei Gerade im Raume (X), die auf der Fläche F^4 liegen (I, 25).

19. Die Ebenen des Haupttetraeders, welche eine und keine zweite der Doppelgeraden enthalten, berühren die Fläche F^4 ausserdem jede längs einer anderen Geraden, die durch eine Ecke des Haupttetraeders geht. Dieselbe entspricht der zweiten Geraden, in der die gleiche Ebene des Haupttetraeders eines der vier entsprechenden Hyperboloide im Raume (x) schneidet (I, 24). Den zweiten Regelschaaren dieser Hyperboloide entspricht auf der Fläche F^4 eine Schaar von Kegelschnitten, deren Ebenen durch die dritte Doppelgerade gehen (I, 23). Diese Kegelschnitte der Fläche F^4 berühren alle die dritte Doppelgerade und ausserdem zwei Ebenen des Haupttetraeders, und zwar liegen diese Berührungspunkte in den bereits erwähnten Geraden, längs denen die beiden Ebenen des Haupttetraeders die Fläche F^4 berühren.

20. Einem Hyperboloid im Raume (X), welches 2 Kanten des Haupttetraeders enthält, entspricht im Raume (x) eine Fläche 4. Ordnung mit zwei geraden Doppellinien.

Scheiden sich also die beiden Tetraederkanten, so haben wir eine Fläche f^4 vor uns, welche zu den biquadratischen Flächen mit einer quadratischen Doppelcurve gehört. Beiden Regelschaaren des Hyperboloides entsprechen Kegelschnittschaaren von f^4. In denselben sind 16 Gerade enthalten. (I, 20 und 25.)

Geht das Hyperboloid des Raumes (X) durch zwei Gegenkanten des Haupttetraeders, so erhalten wir als entsprechende Fläche wieder eine biquadratische Regelfläche, welche sich von einer vorhin besprochenen nur dadurch unterscheidet, dass die dritte Doppelgerade und damit die Kegelschnittschaar wegfällt.

21. Einem Hyperboloid, welches nur eine Kante des Haupttetraeders enthält, entspricht eine Fläche 4. Ordnung mit einer geraden Doppellinie. Nur der einen Regelschaar des Hyperboloids entsprechen dann Kegelschnitte, deren Ebenen durch die Doppellinie gehen. Unter ihnen sind vier paar zerfallende. Für die genauere Untersuchung dieser Flächen ist hier nicht der Ort.

22. Einen Doppelkegelschnitt hat eine Fläche f^4 des Raumes (x), die einer quadratischen Fläche des Raumes (X) entspricht, nur dann, wenn diese letztere eine Ebene des Haupttetraeders längs einer Geraden berührt (I, 21 und II, 3 am Ende), also ein Kegel K^2 ist, dessen Spitze in der betr. Ebene liegt.

23. Auf der Doppelcurve der Fläche f^4 liegen dann noch vier merkwürdige Punkte e, die der Spitze des Kegels K^2 entsprechen. Sind diese vier Punkte e reell, so besteht f^4 aus zwei Stücken, (sodass nur ein Teil der Doppelcurve zu reellen Flächenteilen gehört,) und die vier Punkte e sind die Enden dieser Stücke. Die Stücke platten sich nach den Enden zu unendlich ab, und in den Punkten e giebt es nur je eine Flächentangente, diese geht durch die gegenüberliegende Ecke des Haupttetraeders. Projizirt man aus dieser Ecke den Doppelkegelschnitt der Fläche durch einen Kegel, so schneidet derselbe die Fläche noch in einer biquadratischen Raumcurve, für die die vier Punkte e Wendeberührungspunkte sind. (Vgl. später IV, 3.) Die Wendeberührungsebenen in ihnen sind die Ebenen, denen sich die Fläche f^4 bei ihrer Abplattung unendlich nähert.

24. Jeder Kegelschnitt auf dem Kegel K^2 berührt die eine Ebene des Haupttetraeders. Damit er noch zwei andere Ebenen desselben berührt, muss

er die zwei Kegelschnitte berühren, in denen diese Ebenen den Kegel K^2 schneiden, muss seine Ebene also Tangentialebene des Kegels sein, der sich durch die beiden Kegelschnitte ausser K^2 noch hindurchlegen lässt. Unter diesen Tangentialebenen sind vier, welche auch noch den Kegelschnitt berühren, in dem die vierte Ebene des Haupttetraeders den Kegel K^2 schneidet.

25. Den drei sich so ergebenden Kegelschnittschaaren auf dem Kegel K^2 entsprechen wieder Kegelschnittschaaren auf der zugehörigen Fläche f^4 (7), und zwar gehen durch jeden Punkt der Fläche zwei Kegelschnitte jeder Schaar. Diese Kegelschnitte liegen paarweise in Ebenen, welche die Fläche doppelt berühren. Denn jeder der entsprechenden Kegelschnitte auf K^2 wird aus einer Ecke des Haupttetraeders T durch einen Kegel projizirt, der drei Ebenen von T berührt und aus dem Kegel K^2 noch einen (dieselben drei Ebenen von T berührenden) Kegelschnitt ausschneidet.

26. Die Fläche f^4 enthält 32 Gerade, von denen je 8 einem der 4 Kegelschnitte auf K^2 entsprechen, welche alle vier Ebenen des Haupttetraeders berühren (I, 22). Da jeder von diesen Kegelschnitten die übrigen drei in je zwei Punkten schneidet, trifft auch jede der 32 Geraden $3 \times 2 = 6$ andere.

27. Je zwei Kegelschnitte auf der Fläche f^4 entsprechen ferner den Strahlen des Kegels K^2, welche eine der drei ihn nicht berührenden Kanten des Haupttetraeders treffen (I, 19); so erhalten wir 12 einzelne Kegelschnitte der Fläche f^4. Legen wir ferner durch eine der den Kegel berührenden Kanten des Haupttetraeders eine Ebene, die eine Tetraederebene der Gegenkante in einer Tangente des Kegels schneidet, so entsprechen der Schnittcurve dieser Ebene und des Kegels vier Kegelschnitte auf f^4 (*). Auf diese Art erhalten wir noch $4 \times 6 = 24$ einzelne Kegelschnitte der Fläche f^4.

28. Den Strahlen des Kegels K^2 entsprechen auf f^4 biquadratische Raumcurven, längs denen die Fläche von quadratischen Flächen berührt wird, die das Haupttetraeder zum Poltetraeder haben.

29. Wenn die Spitze des Kegels K^2 auf eine Kante des Haupttetraeders fällt, so vereinigen sich die Knotenpunkte der entsprechenden Fläche f^4 paarweise auf derselben Kante und werden zu zwei Selbstberührungspunkten. Jede Ebene durch diese Kante schneidet die Fläche f^4 in zwei Kegel-

(*) Es ist in der That leicht einzusehen, dass jedem Kegelschnitt des Raumes (X), der eine Kante und ausserdem noch eine Ebene des Haupttetraeders berührt, vier Kegelschnitte im Raume (x) entsprechen.

schnitten (1, 19), die sich in ihren Schnittpunkten mit der Kante berühren. Für zwei Ebenen ausser der Ebene des Doppelkegelschnittes fallen diese Kegelschnitte zusammen.

Diese Kegelschnitte teilen sich ferner derart in Paare ein, dass f^4 längs den Curven eines Paares von einer quadratischen Fläche berührt wird, die das Haupttetraeder zum Poltetraeder hat. Zu diesen quadratischen Flächen gehört das Paar der singulären Berührungsebenen von f^4, die sich in der Kante der Selbstberührungspunkte schneiden; durch die Gegenkante gehen die beiden ausgezeichneten Tangentialebenen von f^4 in den Selbstberührungspunkten.

30. Berührt der Kegel K^2 die Ebene des Haupttetraeders längs einer Kante desselben, so ist die Kante für die entsprechende Fläche f^4 eine Selbstberührungslinie. Alle ihre Ebenen schneiden aus der Fläche noch je einen Kegelschnitt aus; alle diese Kegelschnitte gehen durch die beiden singulären Punkte der Fläche hindurch, die der Kegelspitze entsprechen. Die Fläche hat eine eigentümliche Gestalt, welche unter Umständen einem Wecken ähnlich sieht.

31. Einem Kegel D^2 des Raumes (X), der dem Haupttetraeder umschrieben ist, entspricht im Raume (x) eine Fläche vierter Ordnung d^4, welche, wie der Kegel von einem quadratischen Ebenenbüschel, von einem quadratischen Büschel von Flächen zweiter Ordnung umhüllt wird. Dieser Büschel besteht aus Flächen eines gewöhnlichen (linearen) Bündels im Gebüsch $(f)^3$ und ist insofern ein besonderer, als in ihm die acht Kegel, die der allgemeine quadratische Büschel enthält, paarweise zusammenfallen; sie entsprechen den Tangentialebenen des Kegels D^2 im Raume (X), die durch die Ecken des Haupttetraeders gehen (I, 12). Jeder dieser Kegel schmiegt sich der Fläche d^4 in einem Doppelpunkte an, der in eine Ecke des Haupttetraeders fällt (2), und berührt sie längs vier Geraden, die dem durch die Ecke des Haupttetraeders gehenden Strahl des Kegels D^2 entsprechen. Den übrigen Strahlen des Kegels entsprechen die biquadratischen Raumcurven auf der Fläche d^4, längs denen sie von ihren einhüllenden Flächen berührt wird. Der Spitze des Kegels entsprechen 8 Knotenpunkte der Fläche d^4, so dass die Fläche im Ganzen 12 Knotenpunkte hat; diese sind die Ecken dreier Tetraeder, die ein desmisches System bilden (I, 6). Die Fläche selbst heisst eine desmische Fläche.

32. Die 16 Geraden, welche die Fläche enthält und welche den Kegelstrahlen nach den Ecken des Haupttetraeders entsprechen (I, 20), bilden die

Geraden der desmischen Configuration. Auf jeder von ihnen liegen drei Knotenpunkte und durch jeden Knotenpunkt gehen vier von ihnen. Es giebt ferner 12 Ebenen, in welchen je vier von ihnen liegen, diese Ebenen enthalten je 6 Knotenpunkte und von jedem der drei Tetraeder, die das desmische System bilden, eine Kante; sie sind selbst wieder die Ebenen dreier Tetraeder, die ein neues desmisches System bilden, und zwar bestehen die Kanten dieser Tetraeder aus je drei Paaren Gegenkanten der Tetraeder des alten Systems.

33. Die 16 Geraden bilden die Grundcurve eines Büschels von desmischen Flächen, zu dem auch die Tetraeder des zweiten desmischen Systems gehören. Durch die 4 entsprechenden Geraden des anderen Raumes geht nämlich ein Büschel von Kegeln 2 Ordnung hindurch; zu demselben gehören drei Ebenenpaare, deren jedes ein Paar Gegenkanten des Haupttetraeders mit der gemeinsamen Spitze der Kegel verbindet.

34. Jedes der drei Tetraeder, welche die Knotenpunkte der desmischen Fläche bilden, kann man zum Haupttetraeder einer quadratischen Verwandtschaft der von uns betrachteten Art machen, und immer entspricht der desmischen Fläche ein quadratischer Kegel, der dem Haupttetraeder der Verwandtschaft umschrieben ist.

Die desmische Fläche lässt sich also auch auf dreifache Art als Enveloppe eines quadratischen Büschels von Flächen 2. O. erzeugen, die sie längs biquadratischen Raumcurven berühren. Alles folgende gilt für jede der drei Erzeugungsarten.

35. Die Regelschaaren der Flächen eines der quadratischen Büschel bilden zwei Strahlencongruenzen. Weil durch jeden Punkt zwei Flächen des Büschels gehn und jede Ebene von sechs Flächen des Büschels berührt wird, sind diese Strahlencongruenzen von der 2. Ordnung und 6. Classe, und zwar von der 1. Art (*). Den Regelschaaren, welche diese Congruenzen bilden, entsprechen im anderen Raume die Schaaren von Kegelschnitten, welche in den Tangentialebenen des der desmischen Fläche entsprechenden Kegels liegen und die vier Ebenen des Haupttetraeders berühren (I, 22). Von diesen Kegelschnitten ist aber sofort ersichtlich, dass sie den Kegel D^2 doppelt berühren, die Strahlen der zugehörigen Congruenzen sind also Doppeltangenten der desmischen Fläche, und die letztere ist Brennfläche für beide Strahlencongruenzen.

(*) S. Reye, *Crelle's Journal*, Bd. 93, S. 81.

36. Es giebt nun aber noch mehr Kegelschnitte, welche die Ebenen des Haupttetraeders und den Kegel D^2 doppelt berühren Dies erkennen wir mit Hülfe des Satzes:

Jede Ebene durch die Spitze eines Kegels schneidet diesen und ein ihm einbeschriebenes Tetraeder T zusammen in sechs Tangenten eines Kegelschnittes.

Sehen wir nämlich den Kegel als Kegel eines tetraedralen Complexes mit dem Haupttetraeder T an, so ist der Kegelschnitt die Complexcurve der betr. Ebene.

Aus diesem Satze folgt aber sofort, dass jeder Kegelschnitt, welcher die vier Ebenen des Haupttetraeders und eine Seitenlinie des Kegels D^2 berührt, noch eine Seitenlinie dieses Kegels berühren muss und dass ihm somit Doppeltangenten der desmischen Fläche entsprechen müssen. Die Tangenten der Schaar biquadratischer Raumcurven auf der desmischen Fläche, die den Strahlen des zugehörigen Kegels D^2 im Raume (X) entsprechen, sind also Doppeltangenten der desmischen Fläche (*) und bilden die dritte Strahlencongruenz zweiter Ordnung sechster Classe, von der d^4 Brennfläche ist.

DRITTER ABSCHNITT.

Die Steiner'sche Fläche.

1. Einer Ebene des Raumes (x) entspricht im Raume (X), wie bei der allgemeinen quadratischen Verwandtschaft (**), eine Steiner'sche Fläche vierter Ordnung dritter Classe, und zwar ist dies die allgemeine, und nicht etwa eine durch die spezielle Verwandtschaft ebenfalls spezialisirte Fläche.

Wir erhalten aber so eine Art kanonischer Form der Abbildung dieser Fläche auf eine Ebene, und dem entsprechend ergeben sich eine Reihe sehr einfacher Formeln, die in unmittelbarem Zusammenhang stehen mit den bereits von Kummer und Clebsch angegebenen einfachsten analytischen Darstellungsformen der Steiner'schen Fläche und die wir nicht übergehen dürfen.

2. Die Steiner'sche Fläche hat bekanntlich drei gerade Doppellinien, die sich in einem dreifachen Punkte der Fläche schneiden. Jede ihrer Tan-

(*) Vgl. J. Feder, *Math. Ann.*, Bd. 47.

(**) Reye, *Geom. der Lage*, Bd. 3 der 3. Aufl., S. 147.

gentialebenen schneidet die Fläche in zwei Kegelschnitten. Sie hat ferner vier singuläre Tangentialebenen, die sie längs Kegelschnitten berühren. Diese vier singulären Kegelschnitte berühren alle einander, und zwar liegen die Berührungspunkte auf den Doppellinien und heissen die Cuspidalpunkte der Fläche. Allgemein giebt es nämlich in einem Punkte einer Doppellinie zwei Tangentialebenen, diese gehen durch die Doppellinie und fallen für den dreifachen Punkt mit den Ebenen zusammen, die die Doppellinie mit je einer anderen verbinden. Diese Tangentialebenen in den Punkten einer Doppellinie bilden eine Involution; für zwei Punkte auf jeder Doppellinie fallen die zwei Tangentialebenen zusammen, und dies sind die Cuspidalpunkte. (Die Fläche hat also 6 Cuspidalpunkte, einen auf jeder Schnittlinie zweier singulärer Tangentialebenen.)

Auf jeder Doppellinie giebt es ferner einen Punkt der Art, dass die Tangentialebenen in ihm nicht nur die Tangentialebenen in den Cuspidalpunkten, sondern auch die Ebenen, welche die Doppellinie mit je einer anderen verbinden, harmonisch trennen. Dieser Punkt ist durch die Cuspidalpunkte, die auf der Doppellinie liegen, von dem dreifachen Punkt der Fläche harmonisch getrennt. Die Ebene, welche die so auf den Doppellinien gefundenen Punkte verbindet, hat für die Steiner'sche Fläche eine besondere Bedeutung und soll ihre Hauptebene genannt werden. Die Kanten des Tetraeders, das die singulären Ebenen bilden, werden von der Hauptebene in Punkten geschnitten, die von den Cuspidalpunkten durch je zwei Tetraederecken harmonisch getrennt sind.

Diese bereits von Cremona (*) angegebenen Hauptsätze ergeben sich aus unserer Abbildung der Fläche auf eine Ebene mit Leichtigkeit.

3. Gehen wir nun dazu über, diese Abbildung näher zu betrachten. Sei mit E die Steiner'sche Fläche und mit ε die Bildebene bezeichnet. Es ist nun nützlich, folgendes zu beachten.

Transformiren wir den Raum (x) collinear, derart dass das Haupttetraeder ungeändert bleibt, so wird der Raum (X) in der gleichen Weise collinear transformirt. Stellt sich die eine Transformation durch vier Gleichungen:

$$\rho\, x'_i = a_i x_i\,, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

dar, so stellt sich die andere dar durch die Gleichungen:

$$\rho^2\, X'_i = a_i^2\, X_i\,, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

(*) *Crelle's Journal*, Bd. 63.

Hieraus folgt sofort, dass alle Steiner'schen Flächen, welche wir als entsprechende Gebilde der Ebenen des Raumes (x) erhalten, durch collineare Transformationen aus einander hervorgehen, die alle das Haupttetraeder ungeändert lassen.

4. Sei nun:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

die Gleichung der Bildebene ε, so ist die Gleichung der Steiner'schen Fläche E:

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \sqrt{X_3} + \sqrt{X_4} = 0,$$

und auf diese Form lässt sich nach dem vorigen § die Gleichung der Steiner'schen Fläche immer bringen, wenn man ausser dem Coordinatentetraeder den Einheitspunkt passend wählt.

5. Die Ebenen des Haupttetraeders sind die singulären Tangentialebenen der Fläche E; die Gleichungen der Kegelschnitte, längs denen sie die Fläche berühren, ergeben sich, wenn man in der Flächengleichung eine der Coordinaten $= 0$ setzt. Die Kegelschnitte berühren also die Kanten des Haupttetraeders, welches das singuläre Tetraeder der Steiner'schen Fläche ist, in den Punkten, für welche die zwei nicht verschwindenden Coordinaten einander gleich werden. Ziehen wir durch den Einheitspunkt P (den dreifachen Punkt der Fläche E) die drei Geraden a, b, c, welche je zwei Gegenkanten des singulären Tetraeders T treffen, so sind dies die Doppellinien der Fläche E und ihre Schnittpunkte A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 mit den Tetraederkanten die Cuspidalpunkte.

6. Die singulären Kegelschnitte liegen auf einer Fläche 2. Ordnung, welche die Kanten des Haupttetraeders berührt und deren Gleichung lautet:

$$\Phi = 0,$$

wenn wir setzen:

$$\Phi = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$$
$$- 2(X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_1 X_4 + X_2 X_3 + X_2 X_4 + X_3 X_4).$$

Dies ergiebt sich auch sofort daraus, dass die Gleichung der Fläche E, rational gemacht, die Form annimmt:

$$\Phi^2 = 64\, X_1 X_2 X_3 X_4 .$$

7. Die Geraden a, b, c bestimmen sich durch die Gleichungspaare:

$$X_1 = X_2,\; X_3 = X_4;\quad X_1 = X_3,\; X_4 = X_2;\quad X_1 = X_4,\; X_2 = X_3.$$

In der Bildebene ε entsprechen diesen Geraden wieder gerade Linien, die durch folgende Gleichungen dargestellt werden:

$$x_1+x_2=0,\ x_3+x_4=0;\ x_1+x_3=0,\ x_4+x_2=0;\ x_1+x_4=0,\ x_2+x_3=0.$$

Dies sind aber die Verbindungslinien der Punkte, in denen die Ebene ε je zwei Gegenkanten des Haupttetraeders trifft, oder die Diagonalen des Vierseits V, in dem ε die Ebenen des Haupttetraeders schneidet. Den Ecken dieses Diagonaldreiecks Δ entspricht allein der dreifache Punkt P der Fläche E, und je zwei Punkten auf einer Seite von Δ, welche harmonisch sind zu den auf ihr liegenden Ecken des Vierseits V, entspricht ein einziger Punkt der Doppellinien a, b, c (*). Die Cuspidalpunkte A_1, A_2;... entsprechen den Ecken des Vierseits V, und zwar jeder Punkt nur einer Ecke.

8. Die Bildebene ε wird von den Flächen des Gebüsches $(f)^3$ in einem linearen System $(k)^3$ von Kegelschnitten geschnitten; diesen entsprechen im Raume (X) die rationalen Curven vierter Ordnung, in denen die Steiner'sche Fläche E von den Ebenen des Raumes geschnitten wird und deren Doppelpunkte die Durchschnitte der Ebenen mit den Doppelgeraden der Fläche sind.

9. Die zerfallenden Kegelschnitte in dem System $(k)^3$ werden von den Flächen des Systems $(f)^3$ ausgeschnitten, die die Ebene ε berühren. Diesen Geradenpaaren entsprechen auf der Steiner'schen Fläche Kegelschnittpaare (I, 22), welche den Schnitt je einer Tangentialebene der Fläche bilden (**). Da die zweifach unendlich vielen Kegelschnitte der Steiner'schen Fläche sonach den Geraden der Bildebene entsprechen, ergiebt sich, was auch aus dem Vorhergehenden (5) folgt: Alle Kegelschnitte der Steiner'schen Fläche berühren die vier Ebenen des singulären Tetraeders.

Die doppelt zählenden Geraden in dem Kegelschnittsystem $(k)^3$ sind die Seiten des Vierseits V; sie entsprechen den singulären Kegelschnitten der Steiner'schen Fläche.

10. Die Geraden eines Geradenpaares in dem System $(k)^3$ werden in ihrem Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten berührt, die dem Vierseit V einbeschrieben sind. Diesen Kegelschnitten entsprechen auf der Steiner'schen Fläche E biquadratische Raumcurven 2. Species, welche in jedem ihrer Punkte

(*) Reye, *Geom. der Lage*, 3. Bd. der 3. Aufl., S. 219.

(**) Weil in jedem Büschel des Kegelschnittsystems $(k)^3$ drei Geradenpaare enthalten sind, ergiebt sich sofort, dass die Steiner'sche Fläche von der dritten Classe sein muss. (Reye, a. a. O., pag. 147.)

einen Kegelschnitt von E dort berühren, wo seine Ebene die Fläche E berührt, welche also überall auch eine Haupttangente berühren und mithin Haupttangentencurven der Fläche sind, und diese Curven berühren sonach auch die vier singulären Kegelschnitte K_i, wie ihre Bildcurven die Seiten des Vierseits V (*).

11. Durch jede Seite des Diagonaldreiecks Δ in der Ebene ε gehen, da sie je zwei Gegenkanten des Haupttetraeders trifft, unendlich viele Flächen des Gebüsches $(f)^2$. Jede dieser Flächen schneidet ε ausserdem in einer zweiten Geraden, die jedesmal durch die gegenüberliegende Ecke von Δ geht, weil die drei Ecken von Δ assoziirte Punkte sind. Jeder dieser Geraden entspricht auf der Fläche E ein Kegelschnitt, der durch den dreifachen Punkt P geht und dessen Ebene eine Doppellinie enthält und Tangentialebene der Fläche in dem Punkte der Doppellinie ist, wo diese den Kegelschnitt ausser P schneidet. Zwei Geraden von ε, die durch eine Ecke des Dreiecks Δ gehen und die auf der gegenüberliegenden Seite liegenden Ecken des Vierseits V harmonisch trennen, entsprechen die beiden Kegelschnitte, die durch denselben Punkt einer Doppellinie gehen. Diese Kegelschnitte fallen in einer Ebene, die eine Doppellinie mit einer Kante des singulären Tetraeders verbindet, zusammen und gehen durch einen Cuspidalpunkt, wenn die entsprechenden Geraden in die Verbindungslinie einer Ecke von Δ mit einer Ecke von V zusammenfallen.

12. Der Kürze halber wollen wir die Tangentialebenen in den Cuspidalpunkten Cuspidalebenen und die in ihnen enthaltenen Kegelschnitte der Steiner'schen Fläche Cuspidalkegelschnitte derselben nennen. Die Haupttangenten in den Cuspidalpunkten, deren es nur je eine giebt und die als vierpunktig berührende anzusehen sind, sollen Cuspidaltangenten heissen; sie fallen mit den Kanten des singulären Tetraeders zusammen.

Die Cuspidalkegelschnitte sind, wie einige Ueberlegung zeigt, als die Kegelschnitte, welche durch den Punkt P gehen, zwei Ebenen des singulären Tetraeders T und die keiner von diesen angehörende Kante in dem auf ihr liegenden Cuspidalpunkte berühren, in der That eindeutig bestimmt.

13. Jeder Strahl durch den dreifachen Punkt P schneidet die Fläche E ausserdem nur noch in einem Punkte, so dass die Fläche eindeutig auf den Strahlenbündel P bezogen ist, der ihre Punkte aus dem Punkte P projizirt. Nur für die Doppellinien a, b, c, die durch den Punkt P gehen,

(*) Reye, a. a. O., pag. 150.

und die Strahlen durch P in den Ebenen α, β, γ, die je zwei Doppellinien verbinden, hört diese eindeutige Beziehung auf.

Der Strahlenbündel P ist mit den Punkten der Bildebene ε durch eine eindeutige quadratische Verwandtschaft verbunden (*). Den Geraden von ε entsprechen in der That auf der Steiner'schen Fläche Kegelschnitte, welche die Strahlen a, b, c alle treffen, und somit im Bündel P quadratische Kegel, die durch die Geraden a, b, c hindurchgehen.

14. In dem Bündel P sind vier Strahlen besonders ausgezeichnet, nämlich die, welche durch die Ecken des Tetraeders T gehen. Sie bilden ein Vierkant, dessen Gegenebenen sich in a, b, c schneiden. Sie seien mit s_1, s_2, s_3, s_4 und die Punkte, in denen sie ausser P die Fläche E schneiden, mit S_1, S_2, S_3, S_4 bezeichnet. Dann ist klar, dass von den Cuspidalebenen, die aus P die Cuspidaltangenten (oder Kanten des singulären Tetraeders) projiziren, je drei sich in einem der Strahlen s schneiden. Es müssen sich deshalb die in solchen drei Cuspidalebenen liegenden Cuspidalkegelschnitte in einem der Punkte S schneiden. Nennen wir die vier Punkte S die Contracuspidalpunkte der Steiner'schen Fläche, so können wir demnach sagen:

Je drei Cuspidalkegelschnitte, deren zugehörige Cuspidaltangenten sich in einem Punkte treffen, schneiden sich ausser in dem dreifachen Punkte noch in einem Contracuspidalpunkte der Steiner'schen Fläche.

15. Es liegen ferner je drei Cuspidalkegelschnitte, deren zugehörige Cuspidaltangenten in einer Ebene liegen, auf einer Fläche 2. Ordnung. Die vier Flächen, welche wir so erhalten, haben die Gleichungen:

$$\Phi = 4\,X_1\,(X_2 + X_3 + X_4 - X_1)\,,$$

$$\Phi = 4\,X_2\,(X_3 + X_4 + X_1 - X_2)\,,$$

$$\Phi = 4\,X_3\,(X_4 + X_1 + X_2 - X_3),$$

$$\Phi = 4\,X_4\,(X_1 + X_2 + X_3 - X_4)\,,$$

wo Φ in derselben Bedeutung gebraucht ist wie früher (6). Diese Gleichungen lassen erkennen, dass jede der vier Flächen durch einen singulären Kegelschnitt der Steiner'schen Fläche E geht. Ausserdem ergiebt sich, dass die Tangentialebene einer der vier Flächen im Punkte P die Ebene des auf der Fläche liegenden singulären Kegelschnittes in einer Geraden der Ebene π

(*) Reye, a. a. O., pag. 151.

schneidet, deren Gleichung lautet:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0.$$

Diese Ebene ist aber offenbar die oben (2) erwähnte Hauptebene der Steiner'schen Fläche. Sie trifft in der That die Geraden a, b, c in Punkten, die vom Einheitspunkt P durch je zwei Cuspidalpunkte harmonisch getrennt sind.

16. Die in Rede stehenden Tangentialebenen der vier quadratischen Flächen im Punkte P bilden ein Vierseit, dessen Kanten die Tangenten der Cuspidalkegelschnitte im Punkte P sind und dessen Diagonaldreikant von den Doppellinien a, b, c gebildet wird.

17. Die Contracuspidalpunkte haben noch eine Eigenschaft, die hervorzuheben ist. Sie sind nämlich die Berührungspunkte derjenigen Tangentialebenen, welche sich durch die Schnittlinien der Hauptebene π mit den singulären Ebenen ausser den letzteren an die Steiner'sche Fläche legen lassen.

Allgemein nämlich ist die Gleichung einer Tangentialebene der Steiner'schen Fläche:

$$\frac{X_1}{\sqrt{Z_1}} + \frac{X_2}{\sqrt{Z_2}} + \frac{X_3}{\sqrt{Z_3}} + \frac{X_4}{\sqrt{Z_4}} = 0,$$

wenn die Z die Coordinaten des Berührungspunktes bezeichnen. Hieraus erkennt man sofort, wenn man z. B. $Z_1 = Z_2 = Z_3$ setzt, dass die Tangentialebene die Ebene $X_4 = 0$ in derselben Geraden schneidet wie die Hauptebene:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0.$$

18. Die Steiner'sche Fläche E ist nicht nur auf die Ebene ε, deren Gleichung lautet:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

eindeutig bezogen, sondern auch auf die assoziirten Ebenen, deren Gleichungen aus der vorstehenden hervorgehen, wenn man in ihr beliebige Vorzeichenänderungen vornimmt.

Diese 8 assoziirten Ebenen sondern sich in der früher (I, 5) angegebenen Weise in Quadrupel. Diese Quadrupel bilden zwei Tetraeder, deren Ecken 8 assoziirte Punkte sind. Die drei Ecken, welche in ε liegen, sind aber nichts wie die Ecken des Diagonaldreiecks Δ in dieser Ebene. Ihre Coordinaten sind durch die Beziehungen festgelegt:

$$x_1 = \quad x_2 = -x_3 = -x_4\,,$$
$$x_1 = -x_2 = \quad x_3 = -x_4\,,$$
$$x_1 = -x_2 = -x_3 = \quad x_4\,.$$

19. Die Ebenen, welche mit ε ein Quadrupel bilden und diese Punkte paarweise enthalten, haben die Gleichungen:

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = 0,$$

wenn wir setzen:

$$4\,\eta_1 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4\,,$$
$$4\,\eta_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4\,,$$
$$4\,\eta_3 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4\,.$$

Aus diesen Gleichungen zusammen mit:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

ergiebt sich aber:

$$x_1 = \quad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3\,,$$
$$x_2 = \quad \eta_1 - \eta_2 - \eta_3\,,$$
$$x_3 = -\eta_1 + \eta_2 - \eta_3\,,$$
$$x_4 = -\eta_1 - \eta_2 + \eta_3\,.$$

20. Die Grössen η lassen sich nun als Coordinaten in der Ebene ε, bezogen auf das Dreieck Δ als Fundamentaldreieck, auffassen. Die Ebenen des Haupttetraeders treffen ε dann in den Geraden:

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0, \quad \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 = 0, \quad -\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0, \quad -\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

Diese Geraden entsprechen also den singulären Kegelschnitten der Steiner'schen Fläche E und bilden das Vierseit V. Dessen 6 Eckpunkte bestimmen sich wie folgt:

$$\eta_1 = 0\,, \quad \eta_2 + \eta_3 = 0\,; \quad \eta_1 = 0\,, \quad \eta_2 - \eta_3 = 0\,;$$
$$\eta_2 = 0\,, \quad \eta_3 + \eta_1 = 0\,; \quad \eta_2 = 0\,, \quad \eta_3 - \eta_1 = 0\,;$$
$$\eta_3 = 0\,, \quad \eta_1 + \eta_2 = 0\,; \quad \eta_3 = 0\,, \quad \eta_1 - \eta_2 = 0.$$

Sie entsprechen den Cuspidalpunkten der Steiner'schen Fläche. Verbinden wir sie mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks Δ, so erhalten wir als

Gleichungen der 6 Geraden die schon in dem vorstehenden System enthaltenen:

$$\eta_2 + \eta_3 = 0\,, \quad \eta_3 + \eta_1 = 0\,, \quad \eta_1 + \eta_2 = 0\,;$$
$$\eta_2 - \eta_3 = 0\,, \quad \eta_3 - \eta_1 = 0\,, \quad \eta_1 - \eta_2 = 0.$$

Diese 6 Geraden entsprechen den Cuspidalkegelschnitten. Sie bilden die Seiten eines Vierecks Υ (*), dessen Ecken durch die Beziehungen bestimmt sind:

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3\,, \quad \eta_1 = -\eta_2 = -\eta_3\,, \quad -\eta_1 = \eta_2 = -\eta_3\,, \quad -\eta_1 = -\eta_2 = \eta_3\,.$$

Diese vier Punkte entsprechen den Contracuspidalpunkten der Steiner'schen Fläche.

21. Dem Kegelschnittsystem $(k)^3$, in dem das Flächensystem $(f)^3$ die Ebene ε schneidet, gehören alle Kegelschnitte an, deren Gleichung von der Form:

$$\mu_1(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)^2 + \mu_2(\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)^2 + \mu_3(-\eta_1 + \eta_2 - \eta_3)^2 + \mu_4(-\eta_1 - \eta_2 + \eta_3)^2 = 0,$$

oder was dasselbe heisst, von der Form:

$$\rho_0(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) + 2\,\rho_1\,\eta_2\,\eta_3 + 2\,\rho_2\,\eta_3\,\eta_1 + 2\,\rho_3\,\eta_1\,\eta_2 = 0$$

ist. Sollen die Geraden:

$$\alpha_1\,\eta_1 + \alpha_2\,\eta_2 + \alpha_3\,\eta_3 = 0, \quad \beta_1\,\eta_1 + \beta_2\,\eta_2 + \beta_3\,\eta_3 = 0$$

ein Paar bilden, das dem Kegelschnittsystem angehört, so muss:

$$\alpha_1\,\beta_1 = \alpha_2\,\beta_2 = \alpha_3\,\beta_3$$

sein. Die Geraden, die dem System angehörende Geradenpaare bilden, stehen also miteinander in einer eindeutigen, quadratischen Verwandtschaft, deren singuläres Dreieck das Dreieck Δ ist. Sie sind einander conjugirt bez. aller Curven zweiter Classe, die dem Vierseit V der doppelt zählenden Geraden des Systems einbeschrieben sind und deren Gleichungen in Liniencoordinaten, bezogen auf das Dreieck Δ, sich schreiben:

$$\sigma_1\,v_1^2 + \sigma_2\,v_2^2 + \sigma_3\,v_3^2 = 0,$$

indem:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0.$$

(*) Die Beziehungen, in denen das Viereck Υ und das Vierseit V zu einander stehen, sind ausführlich untersucht von G. Kohn, *Abhdlgn. d. Wiener Akad.* Bd. XCIII.

22. Die Gleichungen der Ebenen α, β, γ, welche je zwei Doppelgeraden der Steiner'schen Fläche enthalten, lauten:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0,$$

wenn man setzt:

$$\lambda_1 = X_1 + X_2 - X_3 - X_4,$$
$$\lambda_2 = X_1 - X_2 + X_3 - X_4,$$
$$\lambda_3 = X_1 - X_2 - X_3 + X_4.$$

Die Grössen λ lassen sich als Coordinaten der Strahlen im Bündel P betrachten. Die Cuspidalebenen haben in diesen Coordinaten die Gleichungen:

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_3 + \lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$
$$\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \quad \lambda_3 - \lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 0.$$

Sie schneiden sich zu dreien in den Strahlen, deren Coordinaten durch die Doppelgleichungen bestimmt sind:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \quad \lambda_1 = -\lambda_2 = -\lambda_3, \quad -\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3, \quad -\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3.$$

Dies sind die Strahlen s, welche den Punkt P mit den Ecken des singulären Tetraeders und den Contracuspidalpunkten verbinden. Durch die Gleichungen:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \quad -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \quad -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

werden die Ebenen dargestellt, welche den Punkt P mit den Schnittlinien der Hauptebene π und der singulären Ebenen der Fläche verbinden.

23. Als analytischer Ausdruck für die Verwandtschaft zwischen dem ebenen Punktfeld ε und dem Strahlenbündel P ergiebt sich mit Hülfe der Coordinaten η und λ die Doppelgleichung:

$$\eta_1 \lambda_1 = \eta_2 \lambda_2 = \eta_3 \lambda_3.$$

Denn die vier Strahlen s im Bündel P und die entsprechenden Punkte in der Ebene ε sind bei beiden Coordinatenbestimmungen die Einheitselemente.

24. Die Kegel im Bündel P, welche die singulären Kegelschnitte der Fläche E enthalten, haben in den λ die Gleichungen:

$$\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0,$$
$$-\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0,$$
$$\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0,$$
$$\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2 = 0.$$

Diese Kegel stehen in der Beziehung zu einander, dass sich je zwei von ihnen in einer Kante des Doppelliniendreikants berühren und in den beiden anderen so schneiden, dass ihre Tangentialebenen in denselben zwei Seitenflächen des Dreikants harmonisch trennen. Diese Tangentialebenen sind nichts anderes als die Cuspidalebenen der Steiner'schen Fläche.

25. An die Punktcoordinaten in der Ebene ε knüpft sich unmittelbar die Parameterdarstellung der Steiner'schen Fläche. Da nämlich:

$$\rho X_1 = x_1^2, \quad \rho X_2 = x_2^2, \quad \rho X_3 = x_3^2, \quad \rho X_4 = x_4^2,$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen des § 17, welche die x durch die η ausdrücken, sofort (*):

$$\left.\begin{aligned} \rho X_1 &= (\quad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3)^2, \\ \rho X_2 &= (\quad \eta_1 - \eta_2 - \eta_3)^2, \\ \rho X_3 &= (-\eta_1 + \eta_2 - \eta_3)^2, \\ \rho X_4 &= (-\eta_1 - \eta_2 + \eta_3)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Aus dieser Parameterdarstellung folgt sofort eine andere, indem wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} \rho Y_1 &= 2\,\eta_2\,\eta_3, \\ \rho Y_2 &= 2\,\eta_3\,\eta_1, \\ \rho Y_3 &= 2\,\eta_1\,\eta_2, \\ \rho Y_4 &= \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Es ist dann:

$$\begin{aligned} X_1 &= \quad Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4, \\ X_2 &= -Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4, \\ X_3 &= -Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4, \\ X_4 &= \quad Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4, \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} 4\,Y_1 &= X_1 - X_2 - X_3 + X_4, \\ 4\,Y_2 &= X_1 - X_2 + X_3 - X_4, \\ 4\,Y_3 &= X_1 + X_2 - X_3 - X_4, \\ 4\,Y_4 &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4. \end{aligned}$$

(*) Diese Darstellung giebt Clebsch a. a. O., ebenso die folgende.

Die Ebenen $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$, $Y_3 = 0$ sind also die mit α, β, γ bezeichneten, welche je zwei Doppellinien enthalten; die Ebene $Y_4 = 0$ ist die Hauptebene π der Fläche E.

26. (A) ist die erste Parameterdarstellung der Steiner'schen Fläche, bezogen auf das singuläre Tetraeder T, (B) ihre zweite, bezogen auf das Tetraeder Π der Ebenen α, β, γ, π. Die singulären Ebenen haben für dieses Tetraeder genau dieselben Gleichungen wie die Ebenen α, β, γ, π für das singuläre Tetraeder. Die Beziehungen zwischen den beiden Tetraedern sind durchaus wechselseitig, jede Kante des einen wird von zwei Gegenkanten des anderen getroffen und harmonisch geteilt.

27. Aus den Gleichungen (B) ergiebt sich durch Elimination der η:

$$Y_2^2 Y_3^2 + Y_3^2 Y_1^2 + Y_1^2 Y_2^2 = 2\, Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 .$$

Dies ist die einfachste rationale Gleichungsform der Steiner'schen Fläche, die zuerst von Kummer angegeben wurde.

Die Tangenten in den Doppelpunkten der Curve:

$$Y_2^2 Y_3^2 + Y_3^2 Y_1^2 + Y_1^2 Y_2^2 = 0 ,$$

in der π die Fläche E schneidet, sind Schmiegungsstrahlen der Fläche und gleichzeitig Tangenten des Kegelschnittes:

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = 0 ,$$

in dem die Ebene π die Fläche $\Phi = 0$ schneidet.

28. Diese quadratische Fläche, welche die Kanten des singulären Tetraeders T in den Cuspidalpunkten berührt, hat nämlich in den Y die Gleichung:

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 - Y_4^2 = 0 ,$$

sie hat also das Tetraeder Π zum Poltetraeder. Da nun, auf ein Tangententetraeder bezogen, die Gleichung einer quadratischen Fläche sich immer in die Form $\Phi = 0$ bringen lässt, wo Φ dieselbe Bedeutung hat wie in § 6, so ergiebt sich beiläufig:

Jedes Tangententetraeder einer quadratischen Fläche steht zu einem bestimmten Poltetraeder derselben in der Beziehung, das jede Kante des einen Tetraeders von zwei Gegenkanten des anderen getroffen und harmonisch geteilt wird. Sechs von diesen zwölf Treffpunkten sind die Berührungspunkte der Tangenten, und zwar gehen die Kanten des Poltetraeders, die sie paarweise verbinden, durch eine Ecke desselben.

Es giebt noch ein zweites Tangententetraeder, welches mit demselben Poltetraeder in der gleichen Beziehung steht, und diese beiden Tangententetraeder bilden mit dem Poltetraeder zusammen ein desmisches System.

Dieser Satz wird zur Trivialität, wenn man an die Kugel und einen ihr umschriebenen Würfel denkt. Die Diagonalen in dessen Seitenflächen bilden zwei gleichseitige Tetraeder, deren Kanten Tangenten der Kugel sind.

29. Die Steiner'sche Fläche wird in sich transformirt durch 24 Collineationen einschliesslich der Identität, die zusammen eine Gruppe bilden. Es sind dies die Collineationen, die den dreifachen Punkt P unverändert lassen und die vier singulären Ebenen irgendwie unter einander vertauschen. Sie führen dann naturgemäss auch die Doppellinien, die durch den Punkt P gehen und je zwei Gegenkanten des Tetraeders T der singulären Ebenen treffen, und damit auch die Cuspidalpunkte in einander über. Sie führen weiter die Hauptebene π in sich über, welche als Verbindungsebene der vierten harmonischen Punkte auf den Doppellinien zu ihren Cuspidalpunkten und dem Punkt P definirt war.

Sie müssen ferner die Verbindungslinien des Punktes P mit den Ecken des Tetraeders T und damit die Contracuspidalpunkte auf der Steiner'schen Fläche in einander überführen. In den Coordinaten X stellen sie sich dar durch beliebige Permutationen derselben ohne Vorzeichenänderung, in den Coordinaten Y durch beliebige Vertauschung und geeignete Vorzeichenänderung der drei ersten Y_1, Y_2, Y_3. In den Coordinaten η der Bildebene ε stellen sie sich ebenfalls dar durch beliebige Vertauschung und Vorzeichenänderung dieser Grössen. Die zugehörigen 24 Collineationen in der Bildebene ε führen sonach, wie es sein muss, das Vierseit V, das den singulären Kegelschnitten der Steiner'schen Fläche E entspricht, und gleichzeitig das Viereck Υ, dessen Ecken und Seiten den Contracuspidalpunkten und Cuspidalkegelschnitten entsprechen, in sich über. Sie transformiren gleichzeitig das Dreieck Δ in sich, dessen Ecken und Seiten dem dreifachen Punkte und den Doppellinien der Steiner'schen Fläche E entsprechen (*).

30. Bemerkenswert sind die Curven 4. Ordnung auf ε und die entsprechenden Raumcurven 4. Ordnung auf E, welche die Ebene und die Fläche einfach überdecken und durch die 24 Collineationen in sich übergehen.

(*) Ueber diese merkwürdige Gruppe von 24 Collineationen ist 1896 eine Strassburger Dissertation von L. Renner in Bayreuth erschienen, in welcher dieselbe ausführlich behandelt ist.

Die Raumcurven werden aus der Steiner'schen Fläche ausgeschnitten durch die quadratischen Flächen:

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 - \lambda Y_4^2 = 0,$$

die in der That alle durch die 24 Collineationen in sich übergeführt werden. Die entsprechenden Curven in der Ebene haben die Gleichungsform:

$$\eta_1^4 + \eta_2^4 + \eta_3^4 = \mu(\eta_2^2 \eta_3^2 + \eta_3^2 \eta_1^2 + \eta_1^2 \eta_2^2).$$

Sie zerfallen in dreizügige und vierzügige Curven. Eine Curve der ersteren Gattung schrumpft scheinbar auf die Ecken des Dreiecks Δ, eine der letzteren Gattung auf die Ecken des Vierecks Υ zusammen. Beide Gattungen grenzen an einander durch das Vierseit V, dem die singulären Kegelschnitte der Steiner'schen Fläche entsprechen, d. h. der Schnitt der letzteren mit der Fläche $\Phi = 0$.

VIERTER ABSCHNITT.

Die Raumcurve vierter Ordnung erster Art.

1. Jeder biquadratischen Raumcurve des Raumes (x), welche die Schnittlinie zweier Flächen des Gebüschs $(f)^3$ ist, entspricht im Raume (X) eine gerade Linie (I, 15).

Ist die Raumcurve die Schnittlinie der Flächen:

$$\Sigma a_i x_i^2 = 0, \quad \Sigma a'_i x_i^2 = 0,$$

so ist die entsprechende Gerade g die Schnittlinie der Ebenen:

$$\Sigma a_i X_i = 0, \quad \Sigma a'_i X_i = 0,$$

und ihre Coordinaten sind:

$$a_{ik} = a_i a'_k - a_k a'_i.$$

Ebendiese Grössen, zwischen denen die identische Beziehung statt hat:

$$a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23} = 0,$$

können wir auch als Coordinaten der biquadratischen Raumcurve, bezogen auf ihr Haupttetraeder, bezeichnen.

2. Die vier Kegel k_1, k_2, k_3, k_4, welche sich durch die Raumcurve hindurchlegen lassen, entsprechen den vier Ebenen K_i, welche die Gerade

mit den Ecken des Haupttetraeders verbinden, und haben deswegen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{12}x_2^2 + a_{13}x_3^2 + a_{14}x_4^2 &= 0\,, \\ a_{21}x_1^2 + a_{23}x_3^2 + a_{24}x_4^2 &= 0\,, \\ a_{31}x_1^2 + a_{32}x_2^2 + a_{34}x_4^2 &= 0\,, \\ a_{41}x_1^2 + a_{42}x_2^2 + a_{43}x_3^2 &= 0\,, \end{aligned}$$

wobei zu beachten, dass $a_{ki} = -a_{ik}$ ist.

3. Die 16 Wendeberührungspunkte p_i^k der Raumcurve entsprechen den 4 Schnittpunkten P_i der Geraden g mit den Ebenen des Haupttetraeders. Ihre Coordinaten ergeben sich daher aus dem folgenden Schema:

Ebene	x_1	x_2	x_3	x_4
$x_1 = 0$	0	$\pm\sqrt{a_{34}}$	$\pm\sqrt{a_{42}}$	$\pm\sqrt{a_{23}}$
$x_2 = 0$	$\pm\sqrt{a_{34}}$	0	$\pm\sqrt{a_{41}}$	$\pm\sqrt{a_{13}}$
$x_3 = 0$	$\pm\sqrt{a_{24}}$	$\pm\sqrt{a_{41}}$	0	$\pm\sqrt{a_{12}}$
$x_4 = 0$	$\pm\sqrt{a_{23}}$	$\pm\sqrt{a_{31}}$	$\pm\sqrt{a_{12}}$	0

4. Die Wendeberühungslinien l_i^k entsprechen den Geraden L_i, welche je einen Punkt P_i mit der gegenüberliegenden Ecke des Haupttetraeders verbinden.

5. Die Wendeberührungsebenen w_i^k entsprechen den Kegeln des anderen Raumes, die je drei Ebenen des Haupttetraeders und eine Ebene K_i, letztere in der zugehörigen Geraden L_i, berühren, und sind die Tangentialebenen der Kegel k_i in den auf ihnen liegenden Punkten p_i^k oder Strahlen l_i^k. Für ihre Coordinaten ergiebt sich daher sofort, wenn wir abkürzend:

$$\sqrt{a_{12}\,a_{34}} = a\,, \quad \sqrt{a_{13}\,a_{42}} = a'\,, \quad \sqrt{a_{14}\,a_{23}} = a''$$

setzen, das Schema:

Punkt	u_1	u_2	u_3	u_4
$u_1 = 0$	0	$\pm\sqrt{a_{12}}\cdot a$	$\pm\sqrt{a_{13}}\cdot a'$	$\pm\sqrt{a_{14}}\cdot a''$
$u_2 = 0$	$\pm\sqrt{a_{21}}\cdot a$	0	$\pm\sqrt{a_{23}}\cdot a''$	$\pm\sqrt{a_{24}}\cdot a'$
$u_3 = 0$	$\pm\sqrt{a_{31}}\cdot a'$	$\pm\sqrt{a_{32}}\cdot a''$	0	$\pm\sqrt{a_{34}}\cdot a$
$u_4 = 0$	$\pm\sqrt{a_{41}}\cdot a''$	$\pm\sqrt{a_{42}}\cdot a'$	$\pm\sqrt{a_{43}}\cdot a$	0

6. Es giebt drei Collineationen, welche die Ebenen eines Tetraeders unter sich vertauschen und gleichzeitig eine Gerade in sich selbst überführen. Durch sie muss nämlich der Wurf der vier Schnittpunkte der Geraden mit den Ebenen des Tetraeders in sich übergehen, und dies ist auf 3 Arten möglich, entsprechend den 3 verschiedenen Arten, auf die sich 4 Elemente paarweise vertauschen lassen (*) Diese drei Collineationen sind geschaarte Involutionen, deren Axen je zwei paar Eckpunkte des Tetraeders harmonisch trennen.

Da jeder solchen Transformation des Raumes (X), welche die Ebenen des Haupttetraeders vertauscht, 8 Collineationen im Raume (x) entsprechen, welche die der Geraden entsprechende biquadratische Raumcurve in sich überführen, so geht die letztere ausser durch die Identität und die 7 Involutionen, die alle Gruppen assoziirter Punkte in sich transformiren, durch 24 Collineationen, im Ganzen also, die Identität einbegriffen, durch 32 Collineationen in sich über.

7. Die drei Involutionen, welche die Gerade g mit den Coordinaten a_{ik} in sich überführen, lassen sich durch das folgende Schema für die Coordinaten X'_i des aus X_i entstandenen Punktes darstellen:

	X'_1	X'_2	X'_3	X'_4
I.	$-a_{13}a_{14}X_2$	$-a_{23}a_{24}X_1$	$a_{31}a_{32}X_4$	$a_{41}a_{42}X_3$
II.	$-a_{14}a_{12}X_3$	$a_{21}a_{23}X_4$	$-a_{32}a_{34}X_1$	$a_{43}a_{41}X_2$
III.	$-a_{12}a_{13}X_4$	$a_{24}a_{21}X_3$	$a_{34}a_{31}X_2$	$-a_{42}a_{43}X_1$

Hieraus ergeben sich sofort die zugehörigen Transformationen des Raumes (x) (**).

8. Je zwei der drei Involutionen liefern mit einander combinirt die dritte, alle drei combinirt die Identität. So lässt sich auch die Gruppe der 32 Involutionen im Raume (x) in Untergruppen teilen, derart dass die zugehörigen Gruppen von 32 Punkten sich in Paare sondern durch eine Involution, oder in Quadrupel durch 3 Involutionen, die verschiedenen Transfor-

(*) Die Doppelpunkte der so auf der geraden Linie entstehenden projektiven, und zwar involutorischen, Verwandtschaften sind jedesmal die Punkte, welche beide Paare, in die sich die 4 Punkte sondern, harmonisch trennen und somit die Verschwindungspunkte der zu einer jene 4 Punkte liefernden Binärform gehörigen Covariante T (Clebsch, *Binärformen*, pag. 142).

(**) S. Harnack, *Math. Ann.*, Bd. 12, S. 82 Anm.

mationen der Geraden in sich entsprechen, oder auch durch die Involutionen, welche die früher besprochenen Quadrupel auf der biquadratischen Raumcurve liefern u. s. f.

9. Den Sehnen der biquadratischen Raumcurve entsprechen die dem Haupttetraeder einbeschriebenen Kegelschnitte, welche die Gerade g doppelt schneiden, und insbesondere entsprechen den Tangenten der Raumcurve die Kegelschnitte, welche die Gerade g und die Ebenen des Haupttetraeders berühren.

Durch den Berührungspunkt P eines dieser Kegelschnitte kann man in derselben Ebene einen anderen legen, welcher die Gerade g noch einmal schneidet und ebenfalls dem Haupttetraeder einbeschrieben ist. Dieser Kegelschnitt entspricht den Schmiegungsstrahlen der zu P gehörigen Punkte, d. h. den in den Schmiegungsebenen dieser Punkte liegenden wirklichen Sehnen.

10. Eine Schmiegungsebene der biquadratischen Raumcurve wird, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\alpha_1 = a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\,, \quad \alpha_2 = a_{21}\, a_{23}\, a_{24}\,, \quad \alpha_3 = a_{31}\, a_{32}\, a_{34}\,, \quad \alpha_4 = a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\,,$$

dargestellt durch folgende Gleichung:

$$\Sigma\, \alpha_i\, z_i^3\, x_i = 0,$$

wenn die z_i die Coordinaten des Schmiegungspunktes bezeichnen. Diese Schmiegungsebene ist aber Tangentialebene der Fläche:

$$\Sigma\, \alpha_i\, z_i^2\, x_i^2 = 0,$$

und dieser Fläche entspricht im anderen Raume die Ebene:

$$\Sigma\, \alpha_i\, Z_i\, X_i = 0,$$

die ihrerseits Tangentialebene der Fläche:

$$\Sigma\, \alpha_i\, Z_i^2 = 0$$

im Punkte (Z) der Geraden g ist. Diese Fläche muss somit die Gerade g enthalten und ist die einzige Fläche, die durch diese Gerade geht und das Haupttetraeder zum Poltetraeder hat.

11. Dies können wir umgekehrt benutzen, um die Ebene des Kegelschnittes zu bestimmen, welcher im Raume (X) einer Geraden mit den Coordinaten a_{ik} des Raumes (x) entspricht. Da nach dem Obigen die Fläche des Systems $(f)^3$, die diese Gerade enthält, die Gleichung hat:

$$\Sigma\, \alpha_i\, x_i^2 = 0,$$

so lautet die Gleichung der Ebene im Raume (X), die den entsprechenden Kegelschnitt enthält:

$$\Sigma \alpha_i X_i = 0.$$

12. Der Kegelschnitt selbst wird aus der Ebene ausgeschnitten durch jeden der vier Kegel:

$$\begin{array}{llll} & a_{12}\sqrt{X_2} + a_{13}\sqrt{X_3} + a_{14}\sqrt{X_4} & = 0, \\ a_{21}\sqrt{X_1} & + a_{23}\sqrt{X_3} + a_{24}\sqrt{X_4} & = 0, \\ a_{31}\sqrt{X_1} + a_{32}\sqrt{X_2} & + a_{34}\sqrt{X_4} & = 0, \\ a_{41}\sqrt{X_1} + a_{42}\sqrt{X_2} + a_{43}\sqrt{X_3} & & = 0. \end{array}$$

Diese Kegel haben aber ausser dem einen Kegelschnitt zu zweien noch je einen anderen gemein, und diesen 6 Kegelschnitten entsprechen im Raume (x) 48 Gerade: diese Geraden verbinden die Punkte paarweise, in denen die dem ersten Kegelschnitt entsprechenden acht assoziirten Geraden die Ebenen des Haupttetraeders schneiden, und bilden mit diesen acht assoziirten Geraden zusammen die sämtlichen Verbindungslinien der 16 Schnittpunkte, sofern sie nicht in den Ebenen des Haupttetraeders liegen. Durch jeden der 16 Schnittpunkte gehen 8 von diesen Linien. Jede der 8 ausgezeichneten wird also von 28 der übrigen Geraden geschnitten, in jedem Schnittpunkt mit einer Ebene des Haupttetraeders von 7. Von den 48 anderen Geraden trifft jede 16 der übrigen.

13. In der Sehnencongruenz der biquadratischen Raumcurve ist eine Reihe von bemerkenswerten Regelschaaren, i. A. 8. Grades, enthalten (*), unter denen vier besonders hervorzuheben sind: einmal die Tangentenschaar der Curve und sodann die Schaaren derjenigen Sehnen, welche zwei Gegenkanten des Haupttetraeders treffen. Die letzteren erfüllen je eine Regelfläche 4. Grades. Diesen Regelflächen sind im Raume (X) die drei Hyperboloide zugeordnet, welche die der Raumcurve entsprechende Gerade g mit je einem Paar Gegenkanten des Haupttetraeders verbinden.

14. Der Tangentenfläche t^8 der biquadratischen Raumcurve entspricht die Fläche T^4, welche von den die Gerade g und die vier Ebenen des Haupttetraeders T berührenden Kegelschnitten erfüllt wird. Diese Fläche ist eine

(*) S. Harnack, a. a. O., S. 77 ff.

Plücker'sche Complexfläche (*); einer der zugehörigen quadratischen Complexe ist ein tetraedraler mit dem Haupttetraeder T. Sie wird gleichzeitig erfüllt von den cubischen Raumcurven, welche die Gerade g berühren und dem Tetraeder T umschrieben sind.

15. Sie ist von der vierten Ordnung und der vierten Classe. Die Gerade g ist für sie eine Schneide. Sie hat ferner acht Knotenpunkte, von denen vier die Ecken des Haupttetraeders sind und die übrigen auf g liegen, und acht singuläre Ebenen, darunter die vier Ebenen des Haupttetraeders, die sie längs Kegelschnitten berühren. Die übrigen vier singulären Ebenen berühren sie längs Geraden und gehen durch die Gerade g und je eine Ecke des Haupttetraeders, durch die auch die Berührungslinie geht.

16. Die Fläche ist sich selbst reciprok zugeordnet in der polaren Correlation, deren Ordnungsfläche durch die Gerade g geht und das Haupttetraeder zum Poltetraeder hat.

17. Die cubischen Raumcurven (C) der Fläche sind durch die Kegelschnitte (K) der Fläche und deren Ebenen projektiv auf einander bezogen. Umgekehrt sind die Kegelschnitte (K) durch die Raumcurven (C) projektiv auf einander bezogen, indem entsprechende Punkte immer auf derselben Curve (C) liegen. Insbesondere entsprechen die Berührungspunkte der Kegelschnitte mit derselben Ebene des Haupttetraeders einander, die auf einem singulären Kegelschnitte der Fläche liegen. Die Strahlen aus den Berührungspunkten der Kegelschnitte (K) mit der Geraden g nach ihren Berührungspunkten mit den 4 Ebenen des Haupttetraeders haben constantes Doppelverhältnis.

18. Der tetraedrale Complex, zu dem die Complexfläche T' gehört, hat auch für die biquadratische Raumcurve, die der Geraden g entspricht, eine besondere Bedeutung.

Jedem Punkte P des Raumes können wir bez. der biquadratischen Raumcurve eine Gerade p als Polare zuweisen, die so entsteht: Wir ziehen durch den Punkt P die beiden Sehnen an die Raumcurve, suchen auf ihnen die vierten harmonischen Punkte zu P und den auf ihnen liegenden Curvenpunkten und verbinden dieselben durch eine Gerade, dies ist dann die Polare p von P. Sie ist die Schnittlinie der Polarebenen des Punktes bez. der quadratischen Flächen, die durch die biquadratische Raumcurve gehen. Sind nun, wie oben, a_{ik} die Coordinaten der Raumcurve, bezogen auf ihr Haupt-

(*) Vgl. u. a. STURM, *Liniengeometrie*, zu Anfang des 3. Bandes.

tetraeder T, x_i die Coordinaten des Punktes P, so sind die Coordinaten der Polare p:

$$p_{ik} = a_{ik}\, x_i\, x_k\,,$$

zwischen denen, wie sofort ersichtlich, in der That die Beziehung:

$$p_{12}\, p_{34} + p_{13}\, p_{42} + p_{14}\, p_{23} = 0\,,$$

stattfindet. Es ist aber ferner:

$$\frac{p_{12}\, p_{34}}{a_{12}\, a_{34}} = \frac{p_{13}\, p_{42}}{a_{13}\, a_{42}} = \frac{p_{14}\, p_{23}}{a_{14}\, a_{23}}\,, \qquad (\Gamma)$$

d. h. die Polaren aller Punkte des Raumes bilden einen tetraedralen Complex Γ, zu dem auch die Gerade mit den Coordinaten a_{ik}, also die Gerade g, die Polare des Einheitspunktes ist, gehört. Mit diesem Complex Γ ist demnach auch der Complex identisch, auf den wir durch die Complexfläche T^4 geführt wurden.

18ᵃ. Die Tangenten der biquadratischen Raumcurve sind Strahlen des Complexes Γ und die ihnen im Raume (X) entsprechenden Kegelschnitte sind Complexcurven von Γ.

18ᵇ. Den Punkten einer Geraden sind bez. der biquadratischen Raumcurve als Polaren die Strahlen einer quadratischen Regelschaar zugeordnet; gehört die Gerade aber selbst dem Complex Γ an, so entsprechen ihren Punkten die Strahlen des Complexkegels, dessen Spitze der Geraden entspricht.

18ᶜ. Den Punkten einer Ebene sind die Sehnen einer cubischen Raumcurve zugeordnet, die dem Haupttetraeder umschrieben ist, und die Tangenten dieser Raumcurve entsprechen den Punkten des Complexkegelschnittes, der in der Ebene liegt.

19. Diese Complexkegelschnitte sind nichts anderes als die Kegelschnitte, welche im Raume (X) den zum Raume (x) gerechneten Strahlen des Complexes Γ entsprechen.

Eine charakteristische Eigenschaft des tetraedralen Complexes ist es nämlich, dass man alle seine Geraden aus einer hervorgehen lassen kann durch die Collineationen, die sein Haupttetraeder ungeändert lassen. Durch dieselben Collineationen müssen auch alle Complexkegelschnitte aus einem hervorgehen. Durch dieselben Collineationen müssen aber auch die Kegelschnitte, die den Complexstrahlen in der von uns betrachteten Punktverwandtschaft entsprechen, in einander übergehen (vgl. III, 3), und deshalb, weil sie sich teil-weise mit den Complexkegelschnitten decken (18[a]), ganz mit ihnen zusammenfallen.

20. Rechnet man nun den Complex Γ zum Raume (X), so entsprechen seinen Strahlen im Raume (x) dreifach unendlich viele biquadratische Raumcurven, die alle aus einer durch die Collineationen, die das Haupttetraeder ungeändert lassen, hervorgehen. Wollen wir den tetraedralen Complex Γ in der oben (18) angegebenen Weise auf den Punktraum beziehen, so können wir irgend eine von diesen biquadratischen Raumcurven zur Ordnungscurve wählen. Denn die Coordinaten p_{ik} dieser Ordnungscurve müssen, damit sie den Complex Γ liefert, der Bedingung:

$$\frac{p_{12}\,p_{34}}{a_{12}\,a_{34}} = \frac{p_{13}\,p_{42}}{a_{13}\,a_{42}} = \frac{p_{14}\,p_{23}}{a_{14}\,a_{42}}$$

genügen, d. h. die ihr im Raume (X) entsprechende Gerade muss zum Complex Γ gehören.

21. Aus diesen Betrachtungen geht hervor, wie sich der Gesamtheit der Geraden im Raume, wenn man ein festes Tetraeder T annimmt, gleichartige Mannigfaltigkeiten von Kegelschnitten zuordnen, die alle die Ebenen des Tetraeders berühren, von cubischen Raumcurven, die alle durch die Ecken des Tetraeders gehen, und endlich von biquadratischen Raumcurven, die alle das Tetraeder zum Haupttetraeder haben. Aus allen diesen Mannigfaltigkeiten heben sich solche Complexe heraus, deren sämtliche Curven aus einer durch die Collineationen hervorgehen, welche das Tetraeder T ungeändert lassen.

22. Fragen wir nun nach den Collineationen, die das Tetraeder T und eine von diesen Curven in sich überführen, so ist die Frage bereits beantwortet für die Geraden und biquadratischen Raumcurven. Ganz ähnlich lautet die Antwort auch für die Kegelschnitte und cubischen Raumcurven. Ausser der Identität ergeben sich auch hier drei Involutionen, welche die vier Punkte, die die Curven mit dem Tetraeder T gemein haben, paarweise vertauschen. Bei den biquadratischen Raumcurven nimmt die Antwort deswegen einen etwas anderen Charakter an, weil diese Curven nicht mehr rational sind.

23. Für die cubische Raumcurve verdienen die erwähnten drei Involutionen und die Quadrupelanordnung, welche sie auf der Raumcurve begründen, eine kurze Darstellung (*).

(*) Vgl. für das Folgende W. Stahl in *Crelle's Journal*, Bd. 101, S. 83 ff.

Die cubische Raumcurve wird aus den Ecken des ihr einbeschriebenen Tetraeders T durch 4 Kegel zweiter Ordnung projizirt, deren Gleichungen sich schreiben lassen wie folgt:

$$\begin{aligned}
&& b_{12}\,x_3\,x_1 + b_{13}\,x_4\,x_2 + b_{14}\,x_2\,x_3 &= 0\,,\\
b_{21}\,x_3\,x_4 && + b_{23}\,x_4\,x_1 + b_{24}\,x_1\,x_3 &= 0\,,\\
b_{31}\,x_2\,x_4 + b_{32}\,x_4\,x_1 && + b_{34}\,x_1\,x_2 &= 0\,,\\
b_{41}\,x_2\,x_3 + b_{42}\,x_3\,x_1 + b_{43}\,x_1\,x_2 && &= 0\,,
\end{aligned}$$

indem:

$$b_{ik} = -\,b_{ki}\,.$$

24. Aus der Analogie dieser Gleichungen mit denen für die Verbindungsebenen einer Geraden mit den Ecken des Coordinatentetraeders ergiebt sich für die drei Involutionen, welche die cubische Raumcurve zugleich mit dem Coordinatentetraeder in sich überführen, das Schema:

	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4
I.	$-b_{23}\,b_{24}\,x_2$	$-b_{13}\,b_{14}\,x_1$	$b_{41}\,b_{42}\,x_4$	$b_{31}\,b_{32}\,x_3$
II.	$-b_{32}\,b_{34}\,x_3$	$b_{43}\,b_{41}\,x_4$	$-b_{14}\,b_{12}\,x_1$	$b_{21}\,b_{23}\,x_2$
III.	$-b_{42}\,b_{43}\,x_4$	$b_{34}\,b_{31}\,x_3$	$b_{24}\,b_{21}\,x_2$	$-b_{12}\,b_{13}\,x_1$

25. Durch je zwei Gegenkanten des Tetraeders T und die cubische Raumcurve geht ein Hyperboloid. Die Gleichungen dieser drei Flächen ergeben sich sofort durch Addition je zweier der vier Kegelgleichungen und lauten:

$$\begin{aligned}
b_{23}\,x_1\,x_4 + b_{24}\,x_1\,x_3 + b_{13}\,x_2\,x_4 + b_{14}\,x_2\,x_3 &= 0\,,\\
b_{34}\,x_1\,x_2 + b_{32}\,x_1\,x_4 + b_{14}\,x_3\,x_2 + b_{12}\,x_3\,x_4 &= 0\,,\\
b_{42}\,x_1\,x_3 + b_{43}\,x_1\,x_2 + b_{12}\,x_4\,x_3 + b_{13}\,x_4\,x_2 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Diese Hyperboloide haben zu zweien ausser der cubischen Raumcurve eine Gerade gemein. Die Coordinaten der drei Geraden, die wir so erhalten, sind die folgenden:

	p_{12}	p_{34}	p_{13}	p_{42}	p_{14}	p_{23}
1.	$-b_{34}$	$-b_{12}$	b_{42}	b_{13}	b_{23}	b_{14}
2.	b_{34}	b_{12}	$-b_{42}$	$-b_{13}$	b_{23}	b_{14}
3.	b_{34}	b_{12}	b_{42}	b_{13}	$-b_{23}$	$-b_{14}$

Um diese Formeln zu deuten, nehmen wir die Gerade mit den Coordinaten:

$$b_{34} \qquad b_{12} \qquad b_{42} \qquad b_{13} \qquad b_{23} \qquad b_{14}$$

hinzu, dann bilden diese vier Geraden ein Quadrupel im Sinne des § 5 im ersten Abschnitt und liegen auf einer Fläche 2. Ordnung, deren Gleichung lautet:

$$b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 = 0\,, \qquad (L)$$

indem wir setzen:

$$b_1 = b_{34} b_{42} b_{23}\,, \quad b_2 = b_{43} b_{31} b_{14}\,, \quad b_3 = b_{12} b_{24} b_{41}\,, \quad b_4 = b_{21} b_{13} b_{32}\,.$$

Suchen wir aber die Verbindungsebene der drei Punkte, welche aus einem beliebigen Punkte durch die drei Involutionen I, II, III hervorgehen, so zeigt sich, dass diese Ebene die Polarebene des Punktes bez. der Fläche (L) ist. Die Punktquadrupel des Raumes, welche durch die drei Involutionen in sich übergehen, bilden also je ein Poltetraeder der Fläche (L).

Die von uns ausführlich behandelte quadratische Verwandtschaft hat, wie bereits erwähnt, Wilhelm Stahl benutzt, um aus der Tangentenfläche der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art die desmische Fläche 12. Ordnung herzuleiten. Es sei uns gestattet, mit wenigen Worten noch auf diesen Punkt zu sprechen zu kommen.

Die desmische Fläche 4. Ordnung fanden wir als Enveloppe eines quadratischen Büschels von Flächen 2. Ordnung mit gemeinsamem Poltetraeder (II, 31). Die reziproke Fläche 4. Classe muss darum die Enveloppe einer quadratischen Schaar von Flächen 2. Classe sein. Diese Flächen 2. Classe haben 8 gemeinsame Tangentialebenen und berühren dieselben in den Punkten je eines Kegelschnittes k. Jeder dieser Kegelschnitte k muss die vier Ebenen des Haupttetraeders berühren. Die 8 singulären Flächen der quadratischen Schaar fallen nämlich paarweise zusammen und ihre Kegelschnitte liegen in den Ebenen des Haupttetraeders. (Vgl. I, 31.) Die gemeinsamen Tangentialebenen der Flächen der quadratischen Schaar entsprechen nun, wenn man sie zum Raume (x) rechnet, in unserer Verwandtschaft einer Steiner'schen Fläche des Raumes (X) (III, 1) und die in ihnen liegenden Kegelschnitte k einer Haupttangentencurve K der Steiner'schen Fläche (III, 10). Den Schmiegungsebenen dieser biquadratischen Raumcurve entsprechen ferner die Flächen der quadratischen Schaar selbst, und darum der Tangentenfläche dieser Raumcurve die desmische Fläche 4. Classe. Die Tangentenfläche ist von der 6. Ordnung und die desmische Fläche von der 12. Ordnung.

Betreffs der Eigenschaften der desmischen Fläche, die sich sonach aus den Eigenschaften der Tangentenfläche der biquadratischen Raumcurve ableiten lassen, sei auf die letzten Seiten der Stahl'schen Abhandlung verwiesen.

Strassburg, den 13. Mai 1897.