Sulle relazioni tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere la soluzione generale della equazione di Riccati.

(*del prof.* L. Schläfli, *a Berna*).

Se nella equazione di Riccati, dopo averla ridotta alla forma:

$$du + t^{-a-1}u^2 dt = t^a dt, \tag{1}$$

dove per le potenze t^{-a-1}, t^a si devono intendere $e^{-(a+1)\log t}$, $e^{a\log t}$, con uno stesso valore di $\log t$, si sostituisca $u = t^{a+1}\frac{\partial \log y}{\partial t}$, essa si cambierà in

$$t\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (a+1)\frac{\partial y}{\partial t} - y = 0 \cdot \tag{2}$$

Integrando questa equazione per serie, si trova la funzione:

$$F(a,t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(a+n+1)} = \frac{1}{\Gamma(a+1)}\sum \frac{t^n}{1.2\ldots n \times (a+1)(a+2)\ldots(a+n)},$$

la quale costituisce un caso particolare della serie ipergeometrica di Gauss e converge per ogni valore finito della t; ed allora, indicando con A, B due costanti arbitrarie,

$$y = AF(a,t) + Bt^{-a}F(-a,t)$$

è l'integrale completo della (2). Infatti, mettendo la (2) sotto la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{a+1}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = t^a y,$$

ed avvertendo che:

$$\frac{\partial}{\partial t}F(a,t) = F(a+1,t), \quad \frac{\partial}{\partial t}[t^{a+1}F(a+1,t)] = t^a F(a,t),$$

si vedrà che la (2) è soddisfatta sì da $y = F(a,t)$, che da $y = t^{-a}F(-a,t)$. In conseguenza, l'integrale completo della equazione di Riccati (1) è

$$u = \frac{At^{a+1}F(a+1,t) + BF(-a-1,t)}{AF(a,t) + Bt^{-a}F(-a,t)}$$

ed ha $\frac{B}{A}$ per costante d'integrazione.

Applicando un noto metodo per ottenere un integrale definito che soddisfaccia alla (2), poniamo:

$$y = \int e^{-tm} \frac{M}{m^2} dm,$$

dove m dinota una variabile ausiliare ed M una funzione di essa. Ne segue la condizione:

$$-\int \frac{\partial}{\partial m}(e^{-tm}M) \cdot dm + \int \left(\frac{\partial \log M}{\partial m} - \frac{a+1}{m} - \frac{1}{m^2} \right) e^{-tm} M dm = 0 \cdot$$

Quindi facendo:

$$\frac{\partial \log M}{\partial m} - \frac{a+1}{m} - \frac{1}{m^2} = 0,$$

donde $M = m^{a+1} e^{-\frac{1}{m}}$, avremo:

$$e^{-tm} M = m^{a+1} e^{-(tm+\frac{1}{m})};$$

e perchè svanisca l'eccesso del valore finale di questa espressione sopra il valore iniziale, basta condurre l'argomento m nel piano rappresentativo (*) dalla parte orientale dello *zero* fino ad un punto dell'*orizzonte* dove la parte reale di tm sia positiva, per esempio a quel punto il quale possiede la fase di $\frac{1}{t}$. Se per maggior semplicità supponiamo la parte reale di t esser positiva, basterà condurre m sull'asse positivo dallo *zero* fino al *levante*, e sarà permesso di scrivere:

$$y = \int_0^\infty e^{-(tm+\frac{1}{m})} m^{a-1} dm \cdot$$

Sia $\sqrt{t} = x$ avente positiva la parte reale, $m = \frac{1}{x} e^\theta$; ne verrà:

$$y = x^{-a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x\cosh\theta + a\theta} d\theta, \tag{A}$$

(*) Vedi pag. 109 di questo tomo.

dove per brevità poniamo:

$$e^{\theta}=\cosh\theta+\operatorname{senh}\theta,\quad e^{-\theta}=\cosh\theta-\operatorname{senh}\theta\cdot$$

La sostituzione $t=x^2$ cangia la (2) in:

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(2a+1)\frac{\partial y}{\partial x}-4xy=0\cdot \tag{3}$$

Se però:

$$y=\int e^{xm}\frac{M}{m^2-4}dm,$$

ne seguirà:

$$\int\frac{\partial}{\partial x}(e^{xm}M)\cdot dx+\int\left(\frac{(2a+1)m}{m^2-4}-\frac{\partial\log M}{\partial m}\right)e^{xm}Mdm=0,$$

e poi $M=(m^2-4)^{a+1/2}$; dunque bisogna scegliere una via d'integrazione tale che $\int\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xm}(m^2-4)^{a+1/2}\right)\cdot dx$ si annulli. Non sono da considerarsi che tre punti, $m=\infty$ (l'orizzonte), $m=2$, $m=-2$. Perchè il cammino dell'integrazione incominci o finisca nel primo, quel punto dell'orizzonte deve avere la fase di $-\frac{1}{x}$, o distarne meno di un quadrante; e perchè esso cammino possa uscire dal secondo o terzo punto, bisogna che l'esponente $a+\frac{1}{2}$ abbia positiva la sua parte reale. Quando ha luogo quest'ultimo caso, vi sono tre vie d'integrazioni possibili $(2,\infty)$, $(-2,\infty)$, $(-2,2)$; gli integrali y corrispondenti soddisfacendo ad una relazione lineare ed omogenea (giacchè un giro completo lungo i lati del triangolo $(-2,2,\infty)$, il quale però non ne circondi i vertici, dà all'integrale y il valore nullo). Ma quando la parte reale di $a+\frac{1}{2}$ è nulla o negativa, è affatto necessario che nella regione opportuna dell'orizzonte cominci ad un tempo e finisca la via d'integrazione, la quale deve inoltre girare intorno all'uno o all'altro dei dei due punti 2 e -2. Solamente il caso che $a+\frac{1}{2}$ sia intero offre difficoltà ulteriori. – Per semplificare supponiamo x positivo, $a+\frac{1}{2}$ positivo, e consideriamo solamente la via da -2 a 2, e quella da -2 al ponente. Per la prima convien porre $m=2\cos\theta$, per la seconda $m=-2\cosh\theta$; avremo i due integrali particolari:

$$y=\int_0^{\pi}e^{2x\cos\theta}\operatorname{sen}^{2a}\theta\,.\,d\theta, \tag{B}$$

$$y=\int_0^{\infty}e^{-2x\cosh\theta}\operatorname{senh}^{2a}\theta\,.\,d\theta. \tag{C}$$

E poichè, se $F(a)$ soddisfà alla (3), vi soddisfà anche $x^{-2a} F(-a)$, gli integrali:

$$y = x^{-2a}\int_0^\pi e^{2x\cos\theta}\operatorname{sen}^{-2a}\theta \cdot d\theta\,, \tag{D}$$

$$y = x^{-2a}\int_0^\infty e^{-2x\cosh\theta}\operatorname{senh}^{-2a}\theta \cdot d\theta\,, \tag{E}$$

sussistenti nel caso di $a<\frac{1}{2}$, sono anch'essi soluzioni della (3). Pel caso di $x>0$, $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$, conosciamo adunque cinque integrali particolari della (3), mentre non più di due possono essere indipendenti tra loro. Per mettere le cose in piena luce, tentiamo di ridurre ciascuna di quelle cinque forme integrali $(A),..,(E)$ alla forma normale $AF(a,t)+Bt^{-a}F(-a,t)$.

I. La forma (A) si rappresenti così:

$$y=x^{-a}(V_a+V_{-a})\,, \qquad V_a=\int_0^\infty e^{-2x\cosh\theta+a\theta}d\theta\,.$$

Giovandosi dello sviluppo:

$$e^{a\theta}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}\Big(2\cosh\theta\Big)^{a-2n-1}.\ 2\operatorname{senh}\theta\,, \tag{a}$$

donde segue per la differenziazione:

$$e^{a\theta}=\sum\frac{-a}{2n-a}\binom{2n-a}{n}\Big(2\cosh\theta\Big)^{a-2n}\,, \tag{b}$$

e ponendo $2x\cosh\theta=u$, si ottiene:

$$V_a=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}x^{2n-a}\int_{2x}^\infty e^{-u}u^{a-2n-1}du\,.$$

Indicando con S_n l'integrale nel secondo membro, si ha da integrare:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S_n}{\partial x}=-e^{-2x}(2x)^{a-2n-2}=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{\Pi m}(2x)^{m+a-2n-1}.$$

Per determinare la costante d'integrazione, possiamo far uso di una scala di recursione, nota dalla teoria delle funzioni *gamma*, e troveremo:

$$S_n=\Gamma(a-2n)-\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{(m+a-2n)\Pi m}(2x)^{m+a-2n}.$$

Ma:

$$\binom{2n-a}{n}\Gamma(a-2n)=(-1)^n\frac{\Gamma(a-n)}{\Gamma(n+1)}=\frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-a+1)},$$

epperò:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}\Gamma(a-2n)x^{2n-a}=\frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}\cdot x^{-a}F(-a,x^2)\,.$$

Quindi, ponendo per brevità:

$$A_m=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}\frac{2^{a+m-2n}}{a+m-2n}\left(\text{convergente come }\sum^{n=\infty}n^{-3/2}\right),$$

si ricava:

$$V_a=\frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}x^{-a}F(-a,x^2)-\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)}A_m x^m\,.$$

La somma infinita A_m è un caso particolare di quest'altra:

$$f(a,m,\theta)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}\frac{1}{a+m-2n}(2\cosh\theta)^{a+m-2n},$$

cioè $A_m=f(a,m,0)$, mentre lo sviluppo (α) somministra:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}f(a,m,\theta)=e^{a\theta}(e^{\theta}+e^{-\theta})^m=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m}\binom{m}{\lambda}e^{(a+m-2\lambda)\theta}\,.$$

Dunque facendo:

$$S(a,m,\theta)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m}\binom{m}{\lambda}\frac{1}{a+m-2\lambda}e^{(a+m-2\lambda)\theta},$$

si ha:

$$f(a,m,\theta)=S(a,m,\theta)+cost.$$

Per determinare la costante d'integrazione, bisogna ricorrere ad una scala di relazione. Si trova (*)

(*) Potrei aggiungere anche queste relazioni:

$$f(a,m,\theta)=f(a+1,m-1,\theta)+f(a-1,m-1,\theta);$$

$$(m^2-a^2)f(a,m,\theta)-4m(m-1)f(a,m-2,\theta)=e^{a\theta}(2\cosh\theta)^m(m\tanh\theta-a)\,.$$

$$(a+m)f(a,m,\theta)-2mf(a-1,m-1,\theta)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{-a}{2n-a}\binom{2n-a}{n}(2\cosh\theta)^{a+m-2n},$$

ed in forza della (b):

$$=e^{a\theta}(2\cosh\theta)^m=(a+m)\,S(a,m,\theta)-2m\,S(a-1,m-1,\theta).$$

Dunque:

$$f(a,0,\theta)=S(a,0,\theta),\ \text{poi}\ f(a,1,\theta)=S(a,1,\theta),$$

e così di seguito; in generale, se m è intero positivo, e θ positivo, si ha $f(a,m,\theta)=S(a,m,\theta)$, cosicchè $cost.=0$. Quindi:

$$A_m=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m}\binom{m}{\lambda}\frac{1}{a+m-2\lambda}=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m}\binom{m}{\lambda}\frac{a}{a^2-(m-2\lambda)^2},$$

è funzione dispari di a. Sostituendo:

$$\frac{1}{a+m-2\lambda}=\frac{(-1)^m}{2\,\mathrm{sen}\,a\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(a+m-2\lambda)\theta}\,d\theta,$$

nella prima espressione di A_m, troveremo:

$$A_m=\frac{(-2)^m}{\mathrm{sen}\,a\pi}\int_0^{\pi}\cos a\theta.\cos^m\theta.d\theta;$$

dunque finalmente:

$$V_a=\frac{\pi}{\mathrm{sen}\,a\pi}x^{-a}F(-a,x^2)-\frac{1}{\mathrm{sen}\,a\pi}\int_0^{\pi}e^{2x\cos\theta}\cos a\theta.d\theta. \qquad (c)$$

Perciò la prima forma integrale è:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2x\cosh\theta+a\theta}d\theta=\frac{\pi}{\mathrm{sen}\,a\pi}\Big(x^{-a}F(-a,x^2)-x^aF(a,x^2)\Big). \qquad (A)$$

Prima di passare alla discussione delle altre forme, facciamo l'osservazione che, cambiando a in $-a$, dalla (c) si desume:

$$F(a,x^2)=\frac{1}{\pi}x^{-a}\left(\int_0^{\pi}e^{2x\cos\theta}\cos a\theta.d\theta-\mathrm{sen}\,a\pi.\int_0^{\infty}e^{-2x\cosh\theta-a\theta}d\theta\right), \qquad (4)$$

espressione convergente per qualunque valore finito di a, purchè la parte reale di x sia positiva. Ma egli è facile il far sì che questa formola sussista per ogni valore finito di x. Supposto per esempio che la fase ϕ di

$x=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$ decresca da 0 fino a $-\frac{\pi}{2}$, potremo assumere $\theta=K+i\beta$ per limite superiore del secondo integrale, allorquando sia $x=re^{-i\beta}$ (dinotando con K l'infinito positivo). Sarà:

$$-2x\cosh\theta=-r(e^{K}+e^{-K-2i\beta}),$$

epperò l'integrale conserverà lo stesso grado di convergenza, mentre β va da 0 fino a $\frac{\pi}{2}$. Fissato finalmente il termine della via d'integrazione in $K+i\frac{\pi}{2}$, questa può essere condotta da 0 ad $i\frac{\pi}{2}$, poi da $i\frac{\pi}{2}$ a dirittura verso $K+\frac{i\pi}{2}$. Lungo il primo tratto di via l'integrale è (mutando θ in $i\theta$):

$$i\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2ir\cos\theta-ia\theta}\,d\theta,$$

e lungo il secondo tratto, mutando θ in $\frac{i\pi}{2}+\theta$, abbiamo:

$$\int_0^{\infty} e^{-2r\operatorname{sen}\mathrm{h}\theta-a\theta-\frac{ia\pi}{2}}\,d\theta$$

Inoltre si ha $x^{-a}=r^{-a}e^{\frac{ia\pi}{2}}$. Prendendo nel primo integrale della espressione (4) due intervalli $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, per mutare nel secondo intervallo θ in $\pi-\theta$, avvertendo che:

$$e^{\frac{ia\pi}{2}}\cos(a\pi-a\theta)-i\operatorname{sen}a\pi.e^{\frac{ia\pi}{2}-ia\theta}=e^{-\frac{ia\pi}{2}}\cos a\theta,$$

e scrivendo finalmente x in luogo di r, troveremo:

$$F(a,-x^2)=\frac{1}{\pi}x^{-a}\left(2\int_0^{\pi/2}\cos\left(2x\cos\theta-\frac{a\pi}{2}\right)\cos a\theta.d\theta-\operatorname{sen}a\pi\int_0^{\infty}e^{-2x\operatorname{senh}\theta-a\theta}d\theta\right),\quad(5)$$

formola sussistente finchè la fase di x è compresa fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Le formole (4) e (5) entrambe giovano in ogni caso ad esprimere $F(a,x^2)$ per mezzo di integrali assai convergenti.

Se per evitare l'uguaglianza dei fattori di $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2$, avessimo scritto:

$$t\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\left(-\frac{1}{K}t+a+1\right)\frac{\partial y}{\partial t}-y=0\quad(K=\text{infinito positivo}),$$

in luogo della (2), avremmo potuto sperimentare anche una seconda soluzione:

$$y=\int_{0\circlearrowleft 1} e^{\frac{t}{K}z} z^{K-1}(z-1)^{-K+a}\,dz\,,$$

la via d'integrazione partendo da 0 e ritornando a 0, dopo un giro attorno ad 1, ed assunte positive le potenze di z, $z-1$ nell'istante in cui z diventa positivo e maggiore di 1. Ma sviluppando la funzione esponenziale e giovandosi delle funzioni *gamma,* questa soluzione si riduce a $2i\pi K^a F(a,t)$, senza fornire una espressione integrale libera da K.

II. La formola (B) diventa:

$$y=\int_0^\pi e^{2x\cos\theta}\operatorname{sen}^{2a}\theta.d\theta=2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(2x)^{2n}}{\Gamma(2n+1)}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta.\operatorname{sen}^{2a}\theta.d\theta\,,$$

$$=\sum 2^{2n}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)\Gamma(a+n+1)}x^{2n}=\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(a+\tfrac{1}{2})\sum\frac{x^{2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(a+n+1)}\,,$$

cioè la formola notissima:

$$\int_0^\pi e^{2x\cos\theta}\operatorname{sen}^{2a}\theta.d\theta=\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(a+\tfrac{1}{2})F(a,x^2)\,, \qquad (B)$$

purchè sia $a>-\frac{1}{2}$.

III. Posto $2x\cosh\theta=u$, la terza forma (C) diventa:

$$y=(2x)^{-2a}\int_{2x}^{\infty}e^{-u}(u^2-4x^2)^{a-\frac{1}{2}}du=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\binom{a-\frac{1}{2}}{n}(2x)^{2n-2a}\int_{2x}^{\infty}e^{-u}u^{2a-2n-1}\,du\,.$$

Poi dalla teoria delle funzioni *gamma* si desume:

$$\Gamma(2a-2n)-\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)}\cdot\frac{(2x)^{2a+m-2n}}{2a+m-2n}\,,$$

pel valore dell'ultimo integrale. La sostituzione di questa espressione contribuisce, pel suo primo termine, allo sviluppo della y il gruppo:

$$x^{-2a}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n 2^{2n-2a}\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(2a-2n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(a-n+\frac{1}{2})}x^{2n}\,;$$

in virtù della:

$$\Gamma(2a-2n)=2^{2a-2n-1}\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\Gamma(a-n)\Gamma(a-n+\tfrac{1}{2}),$$

il coefficiente di x^{2n} diventa:

$$(-1)^n\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(a-n)}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}{2\operatorname{sen}a\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-a+1)};$$

e però il gruppo medesimo ha il valore:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}{2\operatorname{sen}a\pi}x^{-2a}F(-a,x^2)\,.$$

Quanto all'altro gruppo proveniente dal secondo termine (sommatorio) di quella espressione, esso procede secondo le potenze $1, x, x^2, \ldots$; il coefficiente di $-x^m$ è:

$$\frac{(-2)^{m-1}}{\Gamma(m+1)}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{n-a-\frac{m}{2}}\binom{a-\frac{1}{2}}{n}$$

(convergente come $\sum n^{-a-3/2}$, cosicchè la condizione della convergenza richiede $a>-\frac{1}{2}$)

$$=\frac{(-2)^{m-1}}{\Gamma(m+1)}\cdot\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma\left(-a-\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}\right)}=\frac{(-1)^{m-1}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\Gamma\left(a+\frac{m}{2}+1\right)}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{(m+1)\pi}{2}}{\operatorname{sen}\left(a\pi+\frac{(m+1)\pi}{2}\right)},$$

e si annulla per conseguenza ogniqualvolta m è positivo e dispari. Mettendo però $2n$ in luogo di m, abbiamo:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}{2\operatorname{sen}a\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+a+1)}\,.$$

pel coefficiente di $-x^{2n}$; donde segue:

$$-\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}{2\operatorname{sen}a\pi}F(a,x^2)\,,$$

pel valore del secondo gruppo. Finalmente si ha:

$$\int_0^\infty e^{-2x\cosh\theta}\operatorname{senh}^{2a}\theta\cdot d\theta=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}{2\operatorname{sen}a\pi}[x^{-2a}F(-a,x^2)-F(a,x^2)]\,,\qquad (C)$$

purchè sia $a>-\frac{1}{2}$.

Il paragone delle (A) e (C) fornisce la uguaglianza:

$$x^a \int_0^\infty e^{-2x\cosh\theta} \operatorname{senh}^{2a}\theta \cdot d\theta = \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x\cosh\theta + a\theta} d\theta ,$$

della quale non seppi scoprire una dimostrazione diretta, benchè sembri che un integrale doppio, opportunamente costituito, debba condurvi. Ma la formola (B) è una conseguenza immediata della (C); per convincersene bisogna far retrocedere la fase di x da 0 fino a $-\pi$, e ad un tempo il limite superiore dell'integrale (C) dal *levante* fino a *levante*$+i\pi$.

Per quanto concerne il metodo qui adoperato per trovar degli integrali definiti che soddisfacciano ad una equazione differenziale lineare ed omogenea con coefficienti lineari, alcuni scrittori, come Spitzer e Dienger, sembrano aver creduto ch'esso non sia applicabile a tutti i casi. Ecco un esempio di tale natura, tratto da Dienger, *Calcolo diff. ed int.* vol. II, pag. 105 (f):

Alla equazione differenziale lineare ed omogenea del second'ordine:

$$\begin{gathered}(x-a)(x-b)(x-c)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\\ +[(\beta+\gamma)(x-b)(x-c)+(\gamma+\alpha)(x-c)(x-a)+(\alpha+\beta)(x-a)(x-b)]\frac{\partial y}{\partial x}\\ +(\alpha+\beta+\gamma-1)[\alpha(x-a)+\beta(x-b)+\gamma(x-c)]y=0 ,\end{gathered}$$

soddisfà l'integrale definito:

$$y=\int (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}(t-x)^{1-\alpha-\beta-\gamma} dt ,$$

ogni qual volta la via d'integrazione sia idonea ad annullar l'espressione:

$$\int \frac{\partial}{\partial t}[(t-a)^{\alpha}(t-b)^{\beta}(t-c)^{\gamma}(t-x)^{-\alpha-\beta-\gamma}]\cdot dt$$

(inteso che la via d'integrazione sia la stessa in ambedue gli integrali), senza annullar ad un tempo il valore della y. Ma ciò è sempre possibile, poichè almeno uno dei quattro esponenti $\alpha, \beta, \gamma, -(\alpha+\beta+\gamma)$ sarà positivo (od avrà positiva la sua parte reale). Se fosse, per esempio, l'ultimo il solo positivo, potremmo tracciare la via d'integrazione dal punto x intorno ad uno de'tre altri a, b, c e ritornare all'x, purchè essa racchiuda quell'unico punto, ed avremmo in tal modo tre integrali y, legati però da una relazione lineare ed omogenea, giacchè l'integrale y corrispondente ad un cammino rientrante che racchiude tutti e quattro i punti a, b, c, x ha il valore zero. Che la stessa variabile x sia limite dell'integrale y, non fa ostacolo alla giustezza dei soliti ragionamenti, perchè $(t-x)^{-\alpha-\beta-\gamma}$ svanisce a questo limite nel caso supposto.

Il metodo è in difetto solamente quando uno degli esponenti è intero.

Indicando con f, g due funzioni intere, se è proposta la equazione differenziale:

$$xf\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)y+g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)y=0,$$

questa sarà soddisfatta dall' integrale definito:

$$y=\int e^{xt}\frac{T}{f(t)}dt, \qquad \text{ove } \log T=\int\frac{g(t)}{f(t)}dt,$$

ogni qual volta la via d' integrazione, partendo da od arrivando a $t=\infty$ o ad una radice della $f(t)=0$, annulli la $\int\frac{\partial}{\partial t}(e^{xt}T).dt$, senza annullare y. Supposto che la g non superi in grado la f, anche se T diventasse infinito per tutte le radici della $f(t)=0$, vi sarebbe però una regione opportuna dell'orizzonte per cominciare e terminar la via d'integrazione, la qual via dovrebbe allora racchiudere alcuna di dette radici.