Note sur les équations du cinquième degré.

(*par M.* MICHAEL ROBERTS *à Dublin.*)

Dans mon Mémoire inséré dans le tome VII des *Annali di Matematica*, page 257, j'ai donné une expression par les racines de l'invariant gauche d'une équation du cinquième degré, qui est assez compliquée. Dans les savantes recherches de M. HERMITE on trouve une valeur de cette fonction remarquable par sa simplicité et son élégance. Dans ce qui suit je vais faire voir comment on peut parvenir à ce résultat, en partant de la définition de l'invariant dont il s'agit, que j'ai donnée pour la première fois (voir le *Quarterly Journal n.°* 18, mars 1862, page 150)*, savoir qu'il résulte de l'élimination de $\frac{y}{x}$ entre l'équation proposée, rendue homogène, et le covariant dont l'origine est la fonction J. Pour cela remarquons d'abord qu'en désignant par l, m, n, p quatre quantités quelconques, on a

$$(2l-m-n)(2m-l-n)(2n-l-m)+(2l-m-p)(2m-l-p)(2p-l-m)+(2l-n-p)(2n-l-p)(2p-l-n)$$
$$+(2m-n-p)(2n-m-p)(2p-m-n)+6(l+m-n-p)(l+n-m-p)(l+p-m-n)=0\,,$$

d'où l'on trouve

$$\Sigma l^3\{2mp-n(m+p)\}\{2np-m(n+p)\}\{2mn-p(m+n)\}$$
$$+6\{mp(n-l)+ln(p-m)\}\{np(m-l)+lm(p-n)\}\{np(m-l)+lm(n-p)\}=0\,.$$

Observons maintenant qu'en conservant les notations de mon Mémoire, le covariant dont l'origine est la fonction J peut s'écrire de la manière suivante:

(*) Cette définition résulte comme corollaire d'un théorème que j'ai donné (*Quarterly Journal*, vol. v, pag. 19) savoir que, si φ, ψ sont deux covariants d'une forme U, la quantité qui provient de l'élimination de $\frac{y}{x}$ entre les équations $\varphi=0$, $\psi=0$ est un invariant de la forme U.

$$a_0^3\{J_1(x-\alpha y)^3+J_2(x-\beta y)^3+J_3(x-\gamma y)^3+J_4(x-\delta y)^3+J_5(x-\varepsilon y)^3\},$$

et par conséquent l'invariant gauche a pour facteur la quantité

$$J_2(\alpha-\beta)^3+J_3(\alpha-\gamma)^3+J_4(\alpha-\delta)^3+J_5(\alpha-\varepsilon)^3.$$

Mais en posant $\alpha-\beta=l$, $\alpha-\gamma=m$, $\alpha-\delta=n$, $\alpha-\varepsilon=p$, nous tirons

$$J_2=\{2np-m(n+p)\}\{2mp-n(m+p)\}\{2mn-p(m+n)\},$$
$$J_3=\{2ln-p(l+n)\}\{2lp-n(l+p)\}\{2np-l(n+p)\},$$
$$J_4=\{2lm-p(l+m)\}\{2lp-m(l+p)\}\{2mp-l(m+p)\},$$
$$J_5=\{2lm-n(l+m)\}\{2ln-m(l+n)\}\{2mn-l(m+n)\},$$

en sorte que $J_2(\alpha-\beta)^3+J_3(\alpha-\gamma)^3+J_4(\alpha-\delta)^3+J_5(\alpha-\varepsilon)^3$ s'exprime par l, m, n, p de la manière suivante

$$-6\{mp(n-l)+ln(p-m)\}\{np(m-l)+lm(p-n)\}\{np(m-l)+lm(n-p)\}$$

d'où, en remettant leurs valeurs par les racines et en posant

$$f=(\alpha-\gamma)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\delta)+(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\gamma-\varepsilon),\quad g=(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\gamma)+(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\delta-\varepsilon),$$
$$h=(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\gamma)+(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\varepsilon-\delta)$$

nous trouvons

$$J_2(\alpha-\beta)^3+J_3(\alpha-\gamma)^3+J_4(\alpha-\delta)^3+J_5(\alpha-\varepsilon)^3=-6fgh,$$

ce qui coïncide avec l'expression de M. Hermite.

Désignons maintenant par $Jx^3+3J'x^2y+3J''xy^2+J'''y^3$ le covariant dont l'origine est J, et nous savons que l'invariant du douzième degré que nous nommons C a pour expression

$$C=27(JJ'''-J'J'')^2-108(J'^2-JJ'')(J''^2-J'J''').$$

Si l'équation donnée a deux racines doubles, ou bien si $\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$, ce dernier covariant devient, en introduisant les valeurs par les racines des quantités J, J', J'', J''':

$$\frac{a_0{}^3(\alpha-\gamma)^3}{3000}\{2(\gamma-\varepsilon)^3(x-\alpha y)^3-2(\alpha-\varepsilon)^3(x-\gamma y)^3+(\alpha-\gamma)^3(x-\varepsilon y)^3\}.$$

(Je dois observer qu'au lieu de cette formule j'ai donné par inadvertence un résultat inexact dans mon Mémoire). Pour le cas de deux racines doubles nous avons:

$$C=\frac{a_0^{12}(\alpha-\gamma)^{18}(\alpha-\varepsilon)^6(\gamma-\varepsilon)^6}{2^8\times 5^{12}},$$

et pour l'octinvariant Ω, l'expression suivante:

$$\Omega = \frac{a_0^8(\alpha-\gamma)^{12}(\alpha-\varepsilon)^4(\gamma-\varepsilon)^4}{2^5\times 5^8}$$

et pour l'invariant K:

$$K = \frac{2(\alpha-\gamma)^6(\alpha-\varepsilon)^2(\gamma-\varepsilon)^2}{5^4},$$

en sorte que, si λ, μ, ν sont des facteurs numériques, un invariant du douzième degré $\lambda K^3+\mu K\Omega+\nu C$ s'anéantit pour deux racines doubles si $2^{11}\lambda+2^4\mu+\nu=0$, ou bien si l'invariant peut être mis sous la forme: $\lambda(K^3-2^{11}C)+\mu(K\Omega-2^4C)$.

On voit que d'après les notations de mon Mémoire le produit $J_1J_2J_3J_4J_5$ s'exprime par un invariant du douzième degré: et nous trouvons la formule suivante:

$$\frac{a_0^{12}J_1J_2J_3J_4J_5}{5^{10}} = K^3-2^7\times 3^2K\Omega+2^{13}\times 3^3C,$$

et la valeur nulle de cet invariant indique l'existence d'une relation de la forme

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)=0$$

entre les racines d'une équation du cinquième degré.

D'après l'expression de M. Hermite, on voit que son invariant s'anéantit en supposant deux racines égales, p. e. $\beta=\gamma$, si l'on a en même temps l'une ou l'autre des conditions

$$\delta-\varepsilon=0, \quad (\alpha-\delta)(\beta-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)(\beta-\delta)=0;$$

par conséquent l'invariant gauche s'anéantit pour ces deux systèmes de conditions

$$\left.\begin{aligned} K^2-12\delta\Omega&=0 \\ K^3-2^{11}C&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} K^2-12\delta\Omega&=0 \\ K^3-2^{10}\cdot 3^3C&=0 \end{aligned}\right\}$$

ce qui s'accorde avec des résultats déjà connus.

Nous avons aussi, en nous rappelant les notations de mon Mémoire,

$$\frac{a_0^{12}N_1N_2N_3N_4N_5}{2^{10}\times 5^{10}} = K^3-2K\Omega+qC,$$

et l'anéantissement de cette quantité établit entre les racines d'une équation du cinquième degré une relation de la forme:

$$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2+(\alpha-\beta)^2(\alpha-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2+(\alpha-\beta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2+(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2$$
$$+(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\delta)^2+(\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2=0.$$

On peut mettre le premier membre de cette dernière équation sous la forme

$$\tfrac{1}{2}\{(\alpha-\beta)^2 I_2+(\alpha-\gamma)^2 I_3+(\alpha-\delta)^2 I_4+(\alpha-\varepsilon)^2 I_5\}$$

et, en observant que le covariant dont l'origine est la fonction I peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{a_0^2}{200}\{I_1(x-\alpha y)^2+I_2(x-\beta y)^2+I_3(x-\gamma y)^2+I_4(x-\delta y)^2+I_5(x-\varepsilon y)^2\},$$

on déduit que la quantité qui résulte de l'élimination de $\frac{y}{x}$ entre les équations :

$$a_0 x^5+5a_1 x^4+10a_2 x^3+10a_3 x^2+5a_4 x+a_5=0$$

$$I_1(x-\alpha)^2+I_2(x-\beta)^2+I_3(x-\gamma)^2+I_4(x-\delta)^2+I_5(x-\varepsilon)^2=0$$

est $K^3-2K\Omega+qC$: ce qui a été déjà remarqué par M. Hermite.

On trouve aussi que la quantité

$$81\, J_1 J_2 J_3 J_4 J_5 - 8\, N_1 N_2 N_3 N_4 N_5$$

s'annulle pour deux racines doubles.

Collège de la Trinité à Dublin, le 12 avril 1867.