Sopra le funzioni sferiche.

(*del Prof.* Enrico Betti, *a Pisa*).

Una funzione arbitrariamente data sopra tutti i punti della superficie di una sfera, anche se discontinua lungo alcune linee, purchè queste si trovino tra loro a distanza finita, se ha un sol valore in ogni punto e si conserva sempre finita, può esprimersi analiticamente in un solo modo per mezzo di una serie convergente di funzioni sferiche. Questo teorema, di somma importanza nell'applicazione dell'Analisi alla Fisica matematica e alla Meccanica celeste, fu dimostrato da Lejeune Dirichlet nel t. XVII del Giornale di Crelle, con tutto il rigore desiderabile. Ma per altre superficie oltre la sfera esistono funzioni analoghe alle sferiche, per mezzo delle quali si può esprimere in serie convergente una funzione arbitrariamente data sopra tutti i punti della superficie. Tra queste si possono notare le funzioni di Lamé per l'ellissoide. La dimostrazione dell'enunciato teorema, che passo ad esporre, oltre alla sua semplicità, ha il vantaggio di potersi immediatamente generalizzare senza difficoltà.

Lemma I. Se una funzione V dei punti di un dato spazio connesso T sodisfà alla equazione:

$$\Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 , \tag{1}$$

e sopra una porzione finita di una superficie S compresa in T, sodisfà alle due equazioni:

$$V = 0 , \quad \frac{dV}{dp} = 0 , \tag{2}$$

denotando con p la normale alla superficie S, non potrà nello spazio T avere valori differenti da zero, a meno che in qualche punto di questo spazio, essa o le sue derivate prime cessino di essere finite e continue.

In fatti, se la funzione V ha valori differenti da zero in vicinanza della superficie S, potremo sempre prendere una parte T' dello spazio T adiacente ad S, e così piccola che in essa V abbia tutti i suoi valori dello stesso segno. Supponiamo che vi abbia tutti i valori positivi. Per quanto piccolo debba essere lo spazio T', una parte T'' di esso si potrà sempre supporre compresa tra la superficie S e una superficie sferica Σ che abbia il centro O fuori di T''.

Denotiamo con r la distanza di un punto qualunque al centro O, e con R il raggio della sfera Σ.

Le due funzioni V ed $\frac{1}{r}$ saranno in T'' ambedue finite e continue insieme colle loro derivate prime e sodisfaranno alla equazione (1). Quindi per il teorema di Green:

$$\int V \frac{d\frac{1}{r}}{dp}\, ds = \int \frac{dV}{dp} \frac{ds}{r},$$

dove gl'integrali debbono essere estesi a tutta la superficie che chiude T'', della quale una parte è una porzione di superficie S, l'altra una porzione di sfera Σ.

Ora sopra S abbiamo sodisfatte l'equazioni (2); quindi gl'integrali relativi si annullano. Sopra Σ essendo r costante, V finita e continua insieme colle sue derivate prime nell'interno di tutta la sfera, e potendosi supporre $\frac{dV}{dr}=0$ in tutta la porzione di superficie della sfera che non limita T'', abbiamo per un teorema noto (*):

$$\int \frac{dV}{dp} \frac{ds}{r} = \frac{1}{R} \int \frac{dV}{dr}\, ds = 0 .$$

Rimane dunque:

$$\int V \frac{d\frac{1}{r}}{dp}\, ds = -\int V dw = 0 ,$$

(*) Vedi la *Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton*, di E. Betti, pag. 26.

dove dw è l'elemento di superficie sferica di raggio eguale alla unità, e l'integrale è esteso a tutta la porzione Σ della sfera di raggio R. Questa conseguenza contradice alla supposizione che V sia positiva in tutto la spazio T'. Analogamente si dimostra che non può avere in questo spazio valori tutti negativi. Dunque deve esservi eguale a zero. Cosi continuando di strato in strato si vede che V dovrà essere eguale a zero in tutto lo spazio T, a meno che non si ammettano discontinuità in essa o nelle sue derivate prime.

Lemma II. Non può esservi altro che una sola funzione che in un dato spazio connesso T sodisfaccia alla equazione (1), sia finita e continua insieme colle sue derivate prime, e sopra una porzione finita di una superficie S situata in questo spazio, tanto essa quanto la sua derivata rispetto alla normale ad S prendano dati valori.

In fatti, supponiamo che vi siano due funzioni V e V', che sodisfacciano a queste condizioni. Poniamo: $V - V' = U$. Avremo sopra S:

$$U = 0\,, \quad \frac{dU}{dp} = 0\,,$$

dunque per il lemma I., in tutto lo spazio T, sarà: $U = 0$, e quindi: $V = V'$; come volevamo dimostrare.

Ora sia data una superficie chiusa S, e sopra la medesima una funzione v finita e continua, e con un solo valore in ogni punto. Si potrà determinare sempre una sola funzione V che, nello spazio T racchiuso dalla superficie S, si conservi insieme colle sue derivate finita e continua, sodisfaccia all'equazione (1), e sopra S sia eguale a v; e sarà data dal teorema di Green sotto la forma:

$$V' = \frac{1}{4\pi}\int \frac{dV}{dp}\frac{ds}{\rho} - \frac{1}{4\pi}\int V \frac{d\frac{1}{\rho}}{dp}\, ds\,, \tag{3}$$

dove ρ denota la distanza del punto (x', y', z') a cui corrisponde il valore V' dal punto (x, y, z) che è solo variabile nella integrazione da estendersi a tutta la superficie S.

È chiaro che potrà aversi dalla formula (3) una serie convergente per esprimere V', quando si abbia una serie convergente per $\frac{1}{\rho}$. Ma poichè $\frac{1}{\rho}$ diviene infinito quando il punto $(x'\ y'\ z')$ coincide col punto (x, y, z), la serie che dà $\frac{1}{\rho}$ deve cessare di esser convergente per un valore di $\frac{1}{\rho}$, quando il punto (x', y', z') è sopra la superficie; quindi la convergenza della serie che si sarebbe ottenuta per V, rimarrebbe dubbia per i punti della superficie S. L' altra difficoltà che si presenta deriva dal comparire nella formula (3), non solo i valori della funzione V sopra la superficie che sono dati, ma anche quelli della sua derivata $\frac{dV}{dr}$ che non son dati e sono una conseguenza di quelli della funzione. Vediamo come si possono superare queste due difficoltà, limitandoci a considerare per S una sfera di raggio R.

Teorema. Una funzione dei punti di una sfera, sempre finita e discontinua soltanto lungo linee separate da intervalli finiti, è sempre esprimibile per una serie convergente di funzioni sferiche.

Poniamo l'origine delle coordinate nel centro O della sfera, e siano (r', θ', ϕ') le coordinate polari di un punto (x', y', z'), (r, θ, ϕ) quelle di un punto (x, y, z). La distanza inversa di questi due punti, finchè $r' < r$, sarà data dalla serie convergente:

$$\frac{1}{\rho} = \sum_0^\infty \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\theta, \phi; \theta', \phi'), \tag{4}$$

essendo P_n le note funzioni di Legendre.

Sostituendo il valore (4) nella formula (3), abbiamo:

$$V' = \frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty r'^n \int \left(\frac{P_n}{R^{n+1}} \frac{dV}{dr} - V P_n \frac{d\frac{1}{r^{n+1}}}{dr} \right) R^2 dw .$$

Ma dal teorema di Green, essendo nell'interno della sfera:

$$\Delta^2 r^n P_n = 0 , \quad \Delta^2 V = 0 ,$$

abbiamo:

$$\int \left(R^{n+2} P_n \frac{dV}{dr} - n V P_n R^{n+1} \right) dw = 0 ,$$

ossia:

$$\int P_n \frac{dV}{dr} dw = \frac{n}{R} \int V P_n \, dw ;$$

onde:

$$V' = \frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty (2n+1) \frac{r'^n}{R^n} \int V P_n \, dw . \tag{5}$$

Se prendiamo:

$$V = r^n Y_n ,$$

essendo Y_n una funzione sferica, sarà:

$$\Delta^2 r^n Y_n = 0 ,$$

e quindi sostituendo nella (5) si deducono le due relazioni note:

$$\int Y_m P_n \, d w = 0 , \tag{6}$$

quando m non è $= n$, e:

$$\int Y_n P_n \, d w = \frac{4\pi}{2n+1} Y'_n . \tag{7}$$

Dati i valori di V sopra la sfera S, abbiamo determinata la continuazione della funzione nello spazio interno T, in modo che sodisfaccia all'equazione (1) e si mantenga sempre finita e continua insieme colle sue derivate prime. Dunque sopra la superficie della sfera saranno determinate anche le derivate $\frac{dV}{dr}$, prese procedendo verso l'interno, e quindi per il lemma II. la funzione non potrà continuarsi altro che in un solo modo anche all'esterno, in guisa che non si abbiano discontinuità in essa e nelle sue derivate prime attraversando la superficie. Ond'è che, se prendiamo un'altra sfera S' concentrica colla prima, e di raggio $R' > R$, la funzione V, se si vuole che si conservi finita e continua insieme colle sue derivate prime nello spazio compreso tra le due sfere e vi sodisfaccia all'equazione (1), avrà valori determinati sopra la sfera di raggio R'; il quale non si può prendere infinitamente grande, perchè in qualche punto dello spazio esterno ad S, la funzione V o le sue derivate prime debbono, come è noto, cessare di essere continue.

Pertanto nello spazio interno ad S', denotando con ω i valori di V sopra la sfera S', avremo:

$$V = \frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty (2n+1) \left(\frac{r'}{R'} \right)^n \int \omega P_n \, d w = \sum_0^\infty \frac{r'^n}{R'^n} Y_n .$$

Sopra la superficie S che è tutta nello spazio racchiuso da S', e in cui $r' = R < R'$, avremo dunque in serie convergente:

$$V = \sum_0^\infty Y_n .$$

Moltiplicando per $P_n\, dw$ i due membri di questa equazione, integrando per tutta la sfera ed osservando l'equazioni (6) e (7), abbiamo sopra la sfera:

$$V' = \frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty (2n+1) \int V P_n\, dw\,, \tag{8}$$

che è la serie nota di cui volevamo dimostrare la convergenza.

In questa dimostrazione è supposto che la funzione V sia sopra la sfera S finita e continua in tutti i punti. Se la funzione V fosse sempre finita, ma discontinua lungo linee separate da intervalli finiti, bisognerebbe, nello applicare il teorema di Green, escludere spazi tubulari di diametro infinitesimo che avessero per assi queste linee; quindi si dovrebbero aggiungere nella formola (5) gl'integrali relativi alle parti di queste superficie che rimangono dalla parte interna della sfera, e alla formula (8) gl'integrali relativi a tutte intere queste superficie, i quali sono tutti eguali a zero, perchè V ha sopra queste superficie valori finiti (*). Dunque la serie (8) sarà convergente anche in questo caso e darà i valori della funzione per tutta la sfera, fuorchè nelle linee di discontinuità. Nei punti di queste linee darà i valori medi tra quelli verso i quali converge la funzione data, dalle due parti della linea.

In fatti sia $d\sigma$ un elemento della linea lungo la quale è la discontinuità della data funzione; sia p l'arco di geodetica normale a $d\sigma$ da una parte e p' dall'altra. Si prendano sopra p e p' due lunghezze eguali ad η. Sia α il limite verso cui converge il valore della funzione data V, quando ci avviciniamo a $d\sigma$ lungo p, ed α' quello verso cui converge quando ci avviciniamo a $d\sigma$ lungo p'. Sopra p sarà $V = \alpha + \varepsilon$, e sopra p' analogamente $V = \alpha' + \varepsilon'$, dove ε ed ε' sono due quantità che si possono rendere piccole quanto si vuole, diminuendo sufficientemente la lunghezza η. Ora consideriamo il rettangolo che ha per altezza $d\sigma$ e per base 2η, e determiniamo l'integrale di un termine della formula (8), prendendo invece dei valori dati dalla funzione V, i valori di una funzione continua che prenda i medesimi valori di quella all'estremità p e p'. Siano β e β' questi valori che differiranno da α e da α', tanto poco quanto si vuole, e prendiamo:

$$v = \beta + \frac{x(\beta' - \beta)}{2\eta}\,,$$

(*) Vedi Christoffel, *Zur Theorie der einwerthigen Potentiale* (G. Crelle-Borchardt, t. 64).

contando le x sopra le geodetiche a partire dalla estremità di p. Avremo:

$$d\sigma\int_0^{2\eta} P_n v\,dx = \eta\,P_n\,d\sigma(\beta'+\beta)\,.$$

Calcoliamo ora lo stesso integrale coi valori dati dalla funzione V. Trascurando le quantità di secondo ordine avremo, sopra p:

$$V=\beta+\frac{x(\alpha-\beta)}{\eta}\,,$$

e sopra p':

$$V'=\beta'+(x-2\eta)\frac{(\beta'-\alpha')}{\eta}\,:$$

onde:

$$d\sigma\int_0^{2\eta} VP_n\,dx = d\sigma\int_0^{\eta} VP_n\,dx + d\sigma\int_{\eta}^{2\eta} V'P_n\,dx = \eta\,d\sigma P_n\left(\frac{\beta'+\alpha'}{2}+\frac{\beta+\alpha}{2}\right) = \eta\,d\sigma P_n(\beta'+\beta).$$

Dunque, se la funzione è discontinua lungo linee separate da intervalli finiti, la serie (8) rappresenta una funzione che ha per tutto i medesimi valori della funzione data, fuori che nei punti di discontinuità dove ha i valori medi tra quelli che vi prende la data funzione.

Pisa, 12 Marzo 1867.