SUR LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS INTÉGRALES, ET SUR QUELQUES PROBLÈMES QUI S'Y RATTACHENT.

PAR

HENRI VILLAT

à MONTPELLIER.

Le présent Mémoire est consacré à l'étude de certaines équations intégrales, d'un type qui généralise le type classique de FREDHOLM, à savoir des équations de la forme

$$A(x)f(x)+\int_a^b [f(x)-f(s)]\,N(x,s)\,ds=\varphi(x)$$

ou mieux

$$A(x)f(x)+\int_a^b f(s)\,N(x,s)\,ds=\varphi(x).$$

La fonction inconnue est $f(x)$, et le noyau $N(x,s)$ présente pour $s=x$ une discontinuité polaire, il devient infini comme $\frac{K}{s-x}$, K étant une constante. Dans le seconde écriture, l'intégrale est considérée comme égale à sa valeur principale au sens de CAUCHY. Des équations de cette nature se rencontrent dans diverses questions d'Hydrodynamique que j'expose ailleurs (cf. Comptes-Rendus Acad. sc. Paris, 6 janvier 1913, t. 156, p. 58) et pour lesquelles il était souhaitable d'obtenir la solution effective des équations proposées, sous une forme utilisable.

Dans ce qui suit, j'expose la solution de divers problèmes[1] desquels je dé-

[1] Certains de ces problèmes prennent leur point de départ dans la détermination d'une fonction analytique dans une aire annulaire, par diverses données aux frontières (partie réelle, partie imaginaire, etc.). J'ai indiqué déjà (Circolo mat. di Palermo, 1912, p. 134/175. Comptes-Rendus, 13 mars 1911, 4 sept. 1911. Xenia, Hommage international à l'Université de Grèce, Athènes, 1912, p. 359/380) plusieurs résultats sur ces questions. Dans un beau Mémoire (Circolo mat. di Palermo, 1913, 2ème Sem. p. 1/28) M. U. DINI est revenu, d'ailleurs d'une manière très générale et d'un point de vue différent, sur le même ordre de sujets.

duis ensuite la solution, sous forme simple et par une voie indirecte, de certaines équations intégrales particulières, de la forme indiquée, — et dans lesquelles rentrent justement celles qui se sont présentées dans les questions d'Hydrodynamique auxquelles je faisais allusion plus haut (ou du moins on peut ramener celles-ci à celles-là sans difficulté).

En terminant, je fais voir qu'en utilisant une transformation de M. D. HILBERT, on peut, dans des cas généraux, où rentrent les équations étudiées antérieurement, ramener les équations intégrales en question, à des équations de FREDHOLM. Mais par ces considérations il serait extrêmement difficile, pour ne pas dire impossible, de retrouver sous la même forme simple les résultats exposés dans ce Travail.

Le résumé d'une partie de ce Mémoire a été communiqué à l'Académie des Sciences, le 23 oct. 1911.

PREMIÈRE PARTIE.

§ 1. Nous commencerons par rappeler, au sujet d'une fonction analytique dans un cercle, certaines propriétés qui nous seront utiles par la suite, et qui sont pour la plupart déjà connues; aussi passerons-nous rapidement sur ces propriétés.

On sait (cf. SCHWARTZ, Zur Integrat. der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$, Jnal de Crelle, 1872, p. 218; T. BOGGIO, Sulle funzioni di variabile complessa, R. Accad. di Torino, 47 (1911); H. VILLAT, Bulletin de la Soc. Mathém. 39 (1911), p. 443) que dans un cercle de rayon un ayant pour centre l'origine du plan $z = x + iy$, une fonction analytique régulière dont la partie réelle prenne à la frontière les valeurs $f(\theta)$, est égale, à une constante imaginaire pure, près, à

$$A(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}}\,d\theta = F(x, y) + iG(x, y). \tag{1}$$

Plus précisément, on sait (cf. P. FATOU, Séries trigonométriques, Acta Mathematica, 30, 1906, p. 335) que si $f(\theta)$ est une fonction périodique, de période 2π, bornée et sommable (au sens de LEBESGUE) la partie réelle de l'expression ci-dessus tend vers $f(\theta)$ lorsque le point z tend vers le point $e^{i\theta}$ en suivant le rayon qui y aboutit. Il ne peut y avoir exception que pour des points de la circonférence $|z| = 1$, formant un ensemble de mesure nulle (Fatou, loc. cit. p. 348). La même conclusion est valable si $f(\theta)$ est une fonction non bornée, mais intégrable en valeur absolue (id. p. 373).

La partie imaginaire de la fonction $A(z)$ est bien déterminée dans le cercle; pour qu'elle ait une limite quand z tend vers $e^{i\theta}$ en suivant le rayon, il faut et il suffit (Fatou, p. 360) que l'intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} [f(\theta + t) - f(\theta - t)] \operatorname{cotg} \frac{t}{2}\, dt \tag{2}$$

ait une limite quand ε tend vers zéro par valeurs positives; la partie imaginaire, et l'intégrale ci-dessus, tendent de plus vers leurs limites, uniformément ensemble (c'est à dire qu'il en est ainsi pour la partie imaginaire, sous la condition, nécessaire et suffisante, que l'intégrale tende uniformément vers sa limite).

Si l'intégrale en question a une limite la partie imaginaire de $A(z)$ est égale, au point $e^{i\theta}$, à

$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon)}{\operatorname{tg} \frac{\theta - \varepsilon}{2}}\, d\varepsilon \tag{3}$$

où l'intégrale est considérée comme égale à sa valeur principale, au sens de Cauchy. En particulier, si la fonction $f(\theta)$ satisfait à une condition de Lipschitz, on peut écrire

$$g(\theta) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon) - f(\theta)}{\operatorname{tg} \frac{\theta - \varepsilon}{2}}\, d\varepsilon$$

l'intégrale ayant son sens ordinaire, et la fonction $g(\theta)$ satisfera à une condition de même sorte (Fatou, p. 361).

Comme l'a montré L. Lichtenstein (Journal de Crelle, 141, 1912, p. 12/42), si $f(\theta)$ est intégrable, et qu'il en soit de même de son carré, la fonction $g(\theta)$ est bien déterminée, sauf peut-être pour un ensemble, de mesure nulle, de points de la circonférence frontière; et cette fonction est intégrable, ainsi que son carré, dans l'intervalle $0, 2\pi$.

Si l'on pose

$$z = \varrho e^{i\theta}$$

la dérivée partielle $\frac{\partial A}{\partial \varrho}$ existe à l'intérieur de la circonférence de rayon 1; on en déduit par conséquent la dérivée $\frac{\partial F}{\partial \varrho}$, qui, si elle a une limite quand ϱ tend vers un, nous fournira la dérivée normale extérieure de la fonction F sur la frontière. Si $f(\theta)$ est l'intégrale indéfinie d'une fonction $f'(\theta)$ intégrable ainsi que son carré, alors cette dérivée normale à la frontière, $h(\theta)$, existe sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle, et elle est intégrable ainsi que son carré (LICHTENSTEIN, loc. cit.). Si l'on admet que la fonction $f(\theta)$ soit bornée, et qu'elle n'ait qu'un nombre fini de points θ_i de discontinuité, où elle passe brusquement d'une valeur $f(\theta_i - 0)$ à une autre $f(\theta_i + 0)$, un calcul facile (cf. H. VILLAT, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1914) montre qu'on peut écrire

$$h(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon - \frac{1}{2\pi}\sum_i \frac{f(\theta_i - 0) - f(\theta_i + 0)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\theta_i}{2}} \tag{4}$$

l'intégrale ayant sa valeur principale, ou bien, lorsque $f'(\theta)$ satisfait à une condition de LIPSCHITZ,

$$h(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(\varepsilon) - f'(\theta)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon - \frac{1}{2\pi}\sum_i \frac{f(\theta_i - 0) - f(\theta_i + 0)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\theta_i}{2}}$$

θ étant supposé distinct d'un point de discontinuité. On vérifie du reste aisément la relation $\int_0^{2\pi} h(\theta)\,d\theta = 0$, dont on sait la nécessité.

Supposons maintenant qu'on se donne la valeur $g(\theta)$ de la partie imaginaire d'une fonction analytique dans le cercle de rayon un, aux points de la circonférence frontière; il résulte à peu près immédiatement de ce qui précède, que la fonction

$$\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}}\,d\theta = F(x, y) + iG(x, y)$$

est une telle fonction analytique, et que, dans des conditions analogues à celles qui ont été dites tout à l'heure, sa partie réelle sur la circonférence frontière, est

$$f(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon \tag{5}$$

ou encore, si $g(\varepsilon)$ satisfait à une condition de LIPSCHITZ,

$$f(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\varepsilon)-g(\theta)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}d\varepsilon$$

et $f(\theta)$ satisfait alors à une condition analogue.

Il est d'ailleurs aisé de montrer que, si $g(\theta)$ est l'intégrale indéfinie d'une fonction intégrable $g'(\theta)$ la dérivée normale de la partie réelle $F(x, y)$ aux points de la frontière, est égale, en général,[1] à

$$h(\theta) = g'(\theta)$$

comme on devait s'y attendre.

Supposons encore qu'on se donne la valeur $h(\theta)$ de la dérivée normale extérieure, sur la frontière, de la partie réelle d'une fonction analytique régulière dans le cercle; bien entendu, nous supposons remplie la condition, dont on connaît la nécessité,

$$\int_0^{2\pi} h(\theta)\,d\theta = 0. \tag{6}$$

Il est bien connu que la fonction analytique (à laquelle on peut ajouter une constante quelconque)

$$C(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log(e^{i\varepsilon}-z)\,d\varepsilon = F(x, y) + iG(x, y) \tag{7}$$

répond à la question (cf. par exemple BOGGIO, loc. cit.). D'ailleurs, si l'on pose $z = \varrho e^{i\theta}$, on a de suite

$$\frac{\partial C}{\partial \varrho} = \frac{1}{\pi\varrho}\int_0^{2\pi}\frac{z h(\varepsilon)}{e^{i\varepsilon}-z}d\varepsilon.$$

La partie réelle de cette expression est

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = \frac{1}{\pi\varrho}\int_0^{2\pi}\frac{\varrho\cos(\theta-\varepsilon)-\varrho^2}{1-2\varrho\cos(\theta-\varepsilon)+\varrho^2}h(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

[1] Nous écrirons fréquemment »en général» pour abréger, au lieu de »excepté aux points d'un ensemble de mesure nulle».

ce que, d'après la condition ci-dessus, on met facilement sous la forme

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = \frac{1}{2\pi\varrho}\int_0^{2\pi}\frac{1-\varrho^2}{1-2\varrho\cos(\theta-\varepsilon)+\varrho^2}h(\varepsilon)d(\varepsilon).$$

On est donc ramené à une intégrale de POISSON, à laquelle s'appliquent les résultats connus, particulièrement ceux de M. P. FATOU.

En négligeant la constante additive, on voit aisément que, pour un point $z = e^{i\theta}$ de la frontière, la fonction analytique en question a pour partie réelle

$$(8) \qquad f(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sin\left|\frac{\theta-\varepsilon}{2}\right| d\varepsilon$$

et pour coefficient de i,

$$(9) \qquad g(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi h(\varepsilon)d\varepsilon$$

en désignant par ψ l'angle que fait avec l'axe des x la demi-droite qui va du point $e^{i\theta}$ au point $e^{i\varepsilon}$. La fonction $h(\varepsilon)$ étant supposée sommable, est, sauf sur un ensemble de mesure nulle, la dérivée de son intégrale indéfinie $H(\varepsilon)$. On peut donc écrire

$$g(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi H'(\varepsilon)d\varepsilon$$

et en intégrant par parties,

$$g(\theta) = -\frac{1}{\pi}[\psi H(\varepsilon)]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} H(\varepsilon)\frac{d\psi}{d\varepsilon}d\varepsilon.$$

Or la fonction $\psi(\varepsilon)$ présente une discontinuité lorsque ε traverse la valeur θ, et l'on s'assure facilement que

$$\psi(\theta+0)-\psi(\theta-0)=\pi,$$

d'ailleurs, ψ dépend linéairement de ε $\left(\text{il est même égal à } \pm\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon+\theta}{2} \text{ selon que } \varepsilon \text{ est supérieur ou inférieur à } \theta\right)$. L'intégrale écrite au second membre dans la valeur de $g(\theta)$ est donc une constante indépendante de ε, et la partie intégrée se réduit à

$$-\frac{1}{\pi}H(\theta)[\psi(\theta-0)-\psi(\theta+0)]=H(\theta).$$

On a donc, sauf sur un ensemble de mesure nulle,

$$g'(\theta)=h(\theta).$$

En outre, une méthode directement inspirée de celle qu'emploie L. Lichtenstein (loc. cit. Journal de Crelle, 1912, p. 25 notamment) permet de montrer que, si la fonction $h(\theta)$ est intégrable ainsi que son carré, les fonctions $f(\theta)$ et $g(\theta)$ existent en général, et jouissent de la même propriété. On met d'abord aisément $C(z)$ sous la forme, valable dans le cercle de rayon 1,

$$C(z)=-ib_0+\sum_1^\infty(a_n-ib_n)z^n \tag{10}$$

avec

$$b_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)d\varepsilon,\quad a_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}h(\varepsilon)\cos n\varepsilon d\varepsilon,\quad b_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}h(\varepsilon)\sin n\varepsilon d\varepsilon.$$

Si $h(\theta)$ est intégrable ainsi que son carré, on sait qu'on a, d'après P. Fatou (Acta, 1906, p. 379)

$$\int_0^{2\pi}[h(\varepsilon)]^2d\varepsilon=\sum_1^\infty(n^2a_n^2+n^2b_n^2).$$

Les séries $\sum\limits_1^\infty a_n^2$, $\sum b_n^2$ sont donc a fortiori convergentes, et l'on peut écrire

$$f(\theta)\sim\sum_1^\infty a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta \tag{11}$$

$$g(\theta)\sim\sum_1^\infty -b_n\cos n\theta+a_n\sin n\theta \tag{12}$$

$f(\theta)$ et $g(\theta)$ désignant deux fonctions définies presque partout, sommables en même temps que leurs carrés. Pour faire voir que ce sont justement à une constante près, les deux fonctions déjà désignées sous ce même nom il y a un instant, il suffit de considérer la fonction

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\frac{1 + ze^{-i\varepsilon}}{1 - ze^{-i\varepsilon}}d\varepsilon$$

formée au moyen de la fonction (11). Un calcul immédiat permet d'écrire

$$\Gamma(z) = \alpha_0 + \sum_1^\infty (\alpha_n - i\beta_n) z^n$$

avec

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,d\varepsilon, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\cos n\varepsilon\,d\varepsilon, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\sin n\varepsilon\,d\varepsilon,$$

et d'après la définition de $f(\theta)$ on a $\alpha_n = a_n$; $\beta_n = b_n$. $\Gamma(z)$ ne diffère donc de $C(z)$ que par une constante, d'où la conclusion annoncée.

La comparaison des divers résultats précédents, en supposant que la fonction analytique dont il s'agit à l'intérieur de la circonférence C de rayon un, soit partout la même, conduit aux conclusions suivantes.

Tout d'abord, les deux équations

$$(13) \quad \begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}d\varepsilon + C_1 \\ g(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}d\varepsilon + C_2 \end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes convenables, sont, comme on sait, inverses l'une de l'autre. En multipliant les deux membres des deux égalités par $d\theta$ et intégrant de 0 à 2π, on voit sans peine que les valeurs des constantes sont

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta$$

et que les équations ci-dessus doivent s'écrire

$$(14) \quad f(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

$$g(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}d\varepsilon+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\varepsilon)d\varepsilon.$$

Si l'une des deux fonctions $f(\theta)$ ou $g(\theta)$ est intégrable ainsi que son carré, il en est de même de l'autre; si l'une de ces deux fonctions satisfait à une condition de LIPSCHITZ, il en est de même de l'autre.

Considérons encore les deux équations

$$f(\theta)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h(\varepsilon)\log\sin\left|\frac{\theta-\varepsilon}{2}\right|d\varepsilon+C^{te} \tag{15}$$

$$h(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f'(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}-\frac{1}{2\pi}\sum_i\frac{f(\theta-0)-f(\theta_i+0)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\theta_i}{2}}, \tag{16}$$

elles seront inverses l'une de l'autre dans des conditions qui résultent clairement des développements précédents, lorsque $f(\theta)$ est supposé continu et dérivable, sauf peut-être en un nombre fini de points. Nous ferons remarquer que, si $f(\theta)$ possède une discontinuité au point θ_i, et y subit un saut brusque égal à k, la fonction $h(\theta)$ devient en ce point infinie comme $\frac{k}{\pi}\frac{1}{\theta-\theta_i}$. La réciproque de ce fait est aisée à déduire de l'équation (15).

Il suit de là que, si l'on suppose f continu dans tout l'intervalle (ce qui entraîne que h n'ait pas de singularités polaires), on doit effacer dans (16) les termes contenus sous le signe $\sum_i$, et les deux équations restantes donnent la solution l'une de l'autre. Si alors l'une des deux fonctions f ou h est de carré intégrable, il en sera de même de l'autre, d'après des conclusions antérieures.

§ 2. Je vais maintenant supposer qu'il s'agisse d'une fonction analytique, régulière dans un domaine limité par deux circonférences concentriques, de centre o et dont nous prendrons les rayons égaux à 1 et à q (<1) ainsi qu'on peut évidemment toujours s'y ramener. Nous désignerons constamment par les notations: $f(\theta)$ et $f_1(\theta)$, $g(\theta)$ et $g_1(\theta)$, $h(\theta)$ et $h_1(\theta)$, les valeurs que prennent, aux points $e^{i\theta}$ et $qe^{i\theta}$ des frontières, respectivement, la partie réelle, la partie imaginaire, et la dérivée normale de la partie réelle, dans la direction extérieure à l'aire annulaire.

Supposons d'abord que les valeurs de $f(\theta)$ et de $f_1(\theta)$ soient données. La fonction analytique dont la partie réelle prend sur les deux circonférences C (de rayon I) et C_1 (de rayon q) les valeurs en question, est, comme je l'ai démontré ailleurs,[1] à une constante (imaginaire pure) près,

$$(17)\qquad A(z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega_1,\omega_3\right)d\varepsilon -$$

$$-\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\,\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega_1,\omega_3\right)d\varepsilon = F(x,y) + i\,G(x,y).$$

Les fonctions elliptiques qui interviennent dans cette formule, sont construites avec les périodes $2\omega_1$ et $2i\omega_3$, dont le rapport seul est déterminé, et satisfait à la relation

$$(18)\qquad q = e^{\frac{-\pi\omega_3}{i\omega_1}}.\ [2]$$

D'ailleurs (cf. H. Villat, loc. cit.) la condition, nécessaire et suffisante, pour que la fonction analytique $A(z)$ soit uniforme, est

$$(19)\qquad \int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

et nous supposerons bien entendu cette condition remplie. (Les fonctions f et f_1 sont évidemment supposées sommables.)

Pour préciser davantage les circonstances dans lesquelles on peut être assuré que la fonction $A(z)$ satisfait bien à la question, formons la différence

$$A(z) - \frac{\mathrm{I}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,\frac{\mathrm{I} + ze^{-i\varepsilon}}{\mathrm{I} - ze^{-i\varepsilon}}\,d\varepsilon = A(z) - A_0(z)$$

entre $A(z)$ et une fonction $A_0(z)$ définie, dans tout le cercle de rayon I, par la donnée $f(\theta)$ de la partie réelle sur la frontière. On a

---

[1] Cf. H. Villat, Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1912, 1er Semestre, où j'ai établi directement cette formule. Comme je l'ai fait voir au même endroit, on peut aussi déduire cette formule d'un développement (dû à M. U. Dini) connue antérieurement. Dans son Mémoire déjà cité, M. U. Dini a de nouveau indiqué cette déduction.

[2] Nous adopterons pour ce qui concerne les fonctions elliptiques, les notations du Traité de M. M. Tannery et Molk (Gauthier-Villars, 4 volumes) auquel nous renverrons souvent dans la suite, par l'indication: T. M., suivie du double numéro de la formule à utiliser.

$$A(z) - A_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\left[\frac{i\omega_1}{\pi}\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \frac{1}{2}\frac{1+ze^{-i\varepsilon}}{1-ze^{-i\varepsilon}}\right]d\varepsilon -$$
$$- \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon.$$

Or, en introduisant les fonctions ϑ, on sait (T. M., XXXIII, 7) que

$$\zeta u = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1}\frac{\vartheta'_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}$$

et d'autre part on peut déduire de la formule (T. M. XXXII, 5) la suivante

$$\frac{\vartheta'_1 v}{\vartheta' v} = \pi \operatorname{cotg}\pi v + \sum_1^\infty \frac{4\pi q^n \sin 2\pi v}{1 - 2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}}.$$

On en conclut

$$\zeta u = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1}\operatorname{cotg}\frac{\pi u}{2\omega_1} + \frac{2\pi}{\omega_1}\sum_1^\infty \frac{q^n \sin\frac{\pi u}{\omega_1}}{1 - 2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4n}}.$$

Maintenant, pour $u = \frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon$, on a facilement

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi u}{2\omega_1} = -i\frac{1+ze^{-i\varepsilon}}{1-ze^{-i\varepsilon}}$$

$$\sin\frac{\pi u}{\omega_1} = \frac{1}{2i}\left(ze^{-i\varepsilon} - z^{-1}e^{i\varepsilon}\right)$$

$$\cos\frac{\pi u}{\omega_1} = \frac{1}{2}\left(ze^{-i\varepsilon} + z^{-1}e^{i\varepsilon}\right)$$

d'où

$$\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) = \frac{\eta_1}{\pi}\left(\frac{1}{i}\log z - \varepsilon\right) - \frac{i\pi}{2\omega_1}\frac{1+ze^{-i\varepsilon}}{1-ze^{-i\varepsilon}} + \frac{\pi}{i\omega_1}\sum_1^\infty \frac{q^n(ze^{-i\varepsilon} - z^{-1}e^{i\varepsilon})}{1 - q^{2n}(ze^{-i\varepsilon} + z^{-1}e^{i\varepsilon}) + q^{4n}}$$

et

$$U(z,\varepsilon)=\frac{i\omega_1}{\pi}\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)-\frac{1}{2}\frac{1+ze^{-i\varepsilon}}{1-ze^{-i\varepsilon}}=\frac{\eta_1\omega_1}{\pi^2}(\log z-i\varepsilon)+$$
$$+\sum_1^\infty\frac{q^n(ze^{-i\varepsilon}-z^{-1}e^{i\varepsilon})}{(1-q^{2n}ze^{-i\varepsilon})(1-q^{2n}z^{-1}e^{i\varepsilon})}.$$

Sous cette forme, il est bien clair que la fonction de z

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varepsilon)\,U(z,\varepsilon)\,d\varepsilon$$

se comporte régulièrement dans la couronne, et y est continue, y compris sur la circonférence de rayon 1. Lorsque z tend vers un point $e^{i\theta}$ de cette dernière circonférence, l'intégrale ci-dessus tend d'ailleurs vers la valeur imaginaire pure

$$\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\eta_1\omega_1}{\pi^2}(\theta-\varepsilon)+\sum_1^\infty\frac{2q^n\sin(\theta-\varepsilon)}{1-2q^{2n}\cos(\theta-\varepsilon)+q^{4n}}\right]d\varepsilon.$$

Dans les mêmes conditions, l'intégrale

$$\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}f_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon$$

tend également vers une valeur imaginaire pure, et il en résulte que la partie réelle de la différence $A(z)-A_0(z)$ tend vers zéro. Par suite la façon dont se comporte la partie réelle de $A(z)$ au voisinage de la circonférence C, dépend uniquement de la façon dont s'y comporte la partie réelle de $A_0(z)$.

Les résultats rappelés dans le premier paragraphe relativement à cette dernière fonction, peuvent donc être immédiatement appliqués à la fonction $A(z)$. Celà étant, et en remarquant qu'on peut échanger le rôle des deux frontières par la transformation de z en q/z, on en conclut notamment les conséquences suivantes:

Les fonctions $f(\theta)$ et $f_1(\theta)$ étant données, périodiques (de période 2π) et sommables, la partie réelle de $A(z)$ tend, en général, vers $f(\theta)$ ou $f_1(\theta)$ lorsque z tend vers $e^{i\theta}$ ou $qe^{i\theta}$. La partie imaginaire de $A(z)$ est bien déterminée quand les intégrales analogues à (2) relatives à f ou à f_1, ont des limites. Cette partie imaginaire tend alors vers les expressions

$$g(\theta)=\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon-\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon \tag{20}$$

ou

$$g_1(\theta)=\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon-\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon \tag{21}$$

respectivement. Les intégrales relatives à la fonction ζ doivent y être considérées comme égales à leur valeur principale au sens de CAUCHY. Si f et f_1 satisfont à des conditions de LIPSCHITZ, ces formules peuvent être remplacées par les suivantes, où les intégrales ont la signification ordinaire (cf. H. VILLAT, loc. cit. p. 110, Note 1),

$$\begin{aligned} g(\theta)=\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[f(\varepsilon)-f(\theta)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon-\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)f(\theta)-\\ -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon,\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} g_1(\theta)=\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon-\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[f_1(\varepsilon)-f_1(\theta)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon+\\ +\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)f_1(\theta).\end{aligned} \tag{23}$$

De plus, les fonctions $g(\theta)$ et $g_1(\theta)$ satisfont alors, elles aussi, à des conditions de LIPSCHITZ.

Si $f(\theta)$ et $f_1(\theta)$ sont intégrables ainsi que leurs carrés, je dis que $g(\theta)$ et $g_1(\theta)$ seront alors déterminées, sauf peut être chacune sur un ensemble de mesure nulle, et que ces fonctions seront intégrables ainsi que leurs carrés.

Bien qu'on puisse déduire ce fait sans grand calcul, des théorèmes de P. FATOU et L. LICHTENSTEIN, je démontrerai cependant ce résultat directement, en suivant d'ailleurs la voie tracée par L. LICHTENSTEIN dans le cas du cercle; car cela nous permettra d'obtenir en même temps diverses formules importantes.

Il résulte tout d'abord d'un calcul connu (cf. U. DINI, loc. cit. et H. VILLAT, Palermo, I, 1912, p. 171) qu'en appelant α_n et β_n les coefficients de FOURIER de la fonction $f(\theta)$ et α'_n, β'_n ceux de $f_1(\theta)$, c'est à dire en posant

$$(24)\quad \alpha_0 = \alpha'_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,d\theta \qquad \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta \\ \alpha'_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\cos n\theta\,d\theta, \quad \beta'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\sin n\theta\,d\theta \end{aligned}$$

la partie réelle $F(\varrho, \theta)$ de $A(z)$ peut s'écrire, en plaçant le point $z = \varrho e^{i\theta}$ à l'intérieur de la couronne,

$$(25)\quad F(\varrho, \theta) = \alpha_0 + \sum_1^\infty \frac{\frac{\varrho^n}{q^n} - \frac{q^n}{\varrho^n}}{\frac{1}{q^n} - q^n}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) + \sum_1^\infty \frac{\frac{1}{\varrho^n} - \varrho^n}{\frac{1}{q^n} - q^n}(\alpha'_n \cos n\theta + \beta'_n \sin n\theta).$$

$A(z)$ est par suite, dans la couronne, représentable par l'expression

$$(26)\quad \begin{aligned} A(z) = F(\varrho, \theta) + iG(\varrho, \theta) = \alpha_0 + iA_0 &+ \sum_1^\infty \frac{\alpha_n - q^n\alpha'_n - i(\beta_n - q^n\beta'_n)}{1 - q^{2n}} z^n + \\ &+ \sum_1^\infty \frac{q^n(\alpha'_n - q^n\alpha_n) + iq^n(\beta'_n - q^n\beta_n)}{1 - q^{2n}} z^{-n} \end{aligned}$$

où A_0 est une constante réelle dont il est aisé de trouver la valeur. Il suffit d'observer que l'on a

$$\int_0^{2\pi} A(\varrho e^{i\theta})\,d\theta = 2\pi(\alpha_0 + iA_0).$$

Puis d'après (17),

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} A(\varrho e^{i\theta})\,d\theta = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} d\theta \Bigg\{ &\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega_1}{\pi}(\theta - \varepsilon)\right) d\varepsilon - \\ &- \int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega_1}{\pi}(\theta - \varepsilon)\right) d\varepsilon \Bigg\}. \end{aligned}$$

Or on a aisément

$$\int_0^{2\pi} \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)d\theta = \frac{\pi}{\omega_1}\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + 2\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)} =$$

$$= \frac{\pi}{\omega_1}\left[-i\pi + 2\eta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \omega_1\right)\right]$$

(au sujet de la détermination du multiple de $i\pi$ figurant dans cette formule, voir H. Villat, loc. cit. § 6). On a de même

$$\int_0^{2\pi} \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)d\theta = \frac{2\pi\eta_1}{\omega_1}\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \omega_1\right).$$

D'où en tenant compte de (25), et réduisant,

$$\int_0^{2\pi} A(\varrho e^{i\theta})\,d\theta = \int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,d\varepsilon - 2\eta_1\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varepsilon[f(\varepsilon)-f_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon$$

et par suite

(27) $$\pi A_0 = -\frac{\omega_1\eta_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varepsilon[f(\varepsilon)-f_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon.$$

On a donc pour $A(z)$ un développement de la forme

(28) $$A(z) = a_0 - ib_0 + \sum_1^\infty (a_n - ib_n)z^n + \sum_1^\infty (c_n + id_n)z^{-n},$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,d\theta = \alpha_0, \quad b_0 = \frac{\omega_1\eta_1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\theta[f(\theta)-f_1(\theta)]\,d\theta.$$

$$a_n = \frac{\alpha_n - q^n\alpha'_n}{1-q^{2n}}, \qquad b_n = \frac{\beta_n - q^n\beta'_n}{1-q^{2n}}$$

$$c_n = \frac{q^n\alpha'_n - q^{2n}\alpha_n}{1-q^{2n}}, \quad d_n = \frac{q^n\beta'_n - q^{2n}\beta_n}{1-q^{2n}}.$$

Nous écrirons plus simplement ces dernières:

$$a_n + c_n = \alpha_n, \qquad b_n + d_n = \beta_n$$

$$a_n q^n + c_n \frac{\mathrm{I}}{q_n} = \alpha'_n, \quad b_n q^n + d_n \frac{\mathrm{I}}{q^n} = \beta'_n.$$

On voit que les nombres

$$a_0,\ a_1 + c_1, \ldots\ a_n + c_n, \ldots\ b_1 + d_1, \ldots\ b_n + d_n, \ldots$$

sont les constantes de FOURIER de la fonction $f(\theta)$, et que les nombres

$$a_0,\ a_1 q + c_1 \frac{\mathrm{I}}{q}, \ldots\ a_n q^n + c_n \frac{\mathrm{I}}{q^n}, \ldots\ b_1 q + d_1 \frac{\mathrm{I}}{q}, \ldots\ b_n q^n + d_n \frac{\mathrm{I}}{q^n}, \ldots$$

sont celles attachées à la fonction $f_1(\theta)$, c'est à dire qu'avec les notations de M. HURWITZ, on a

$$(30) \qquad f(\theta) \sim a_0 + (a_1 + c_1)\cos\theta + \cdots + (a_n + c_n)\cos n\theta + \cdots \\ + (b_1 + d_1)\sin\theta + \cdots (b_n + d_n)\sin n\theta + \cdots$$

$$(31) \qquad f_1(\theta) \sim a_0 + \left(a_1 q + c_1 \frac{\mathrm{I}}{q}\right)\cos\theta + \cdots + \left(a_n q^n + c_n \frac{\mathrm{I}}{q^n}\right)\cos\theta + \cdots \\ + \left(b_1 q + d_1 \frac{\mathrm{I}}{q}\right)\sin\theta + \cdots + \left(b_n q^n + d_n \frac{\mathrm{I}}{q^n}\right)\sin n\theta + \cdots$$

Ceci posé, les fonctions f et f_1 étant de carrés sommables, on a d'après un théorème de P. FATOU (loc. cit. p. 379)

$$(32) \qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{I}}{\pi}\int_0^{2\pi} [f(\theta)]^2 d\theta &= 2a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 \\ \frac{\mathrm{I}}{\pi}\int_0^{2\pi} [f_1(\theta)]^2 d\theta &= 2a_0^2 + \sum_1^\infty \left(a_n q^n + c_n \frac{\mathrm{I}}{q^n}\right)^2 + \left(b_n q^n + d_n \frac{\mathrm{I}}{q^n}\right)^2. \end{aligned}$$

En outre, en partant de la formule (28) on a, pour ϱ compris entre q et I (différent des extrémités)

$$F(\varrho,\theta) = a_0 + \sum_1^\infty \left(a_n \varrho^n + c_n \frac{\mathrm{I}}{\varrho^n}\right)\cos n\theta + \left(b_n \varrho^n + d_n \frac{\mathrm{I}}{\varrho^n}\right)\sin n\theta$$

$$G(\varrho,\theta) = -b_0 + \sum_1^\infty \left(a_n \varrho^n - c_n \frac{\mathrm{I}}{\varrho^n}\right)\sin n\theta - \left(b_n \varrho^n - d_n \frac{\mathrm{I}}{\varrho^n}\right)\cos n\theta.$$

Multiplions respectivement par $F(\varrho,\theta)$ et $G(\varrho,\theta)$, et intégrons de o à 2π, en traitant les seconds membres terme à terme, ce dont on a le droit pour les valeurs de ϱ considérées. Il vient d'abord

$$\int_0^{2\pi}[F(\varrho,\theta)]^2 d\theta = a_0\int_0^{2\pi} F(\varrho,\theta)d\theta + \sum\left(a_n\varrho^n + c_n\frac{1}{\varrho^n}\right)\int_0^{2\pi} F(\varrho,\theta)\cos n\theta\, d\theta +$$
$$+\sum\left(b_n\varrho^n + d_n\frac{1}{\varrho_n}\right)\int_0^{2\pi} F(\varrho,\theta)\sin n\theta\, d\theta$$

et par suite

$$\int_0^{2\pi}[F(\varrho,\theta)]^2 d\theta = \pi\left\{2a_0^2 + \sum_1^\infty \left(a_n\varrho^n + \frac{c_n}{\varrho^n}\right)^2 + \left(b_n\varrho^n + \frac{d_n}{\varrho^n}\right)^2\right\}.$$

Et on a de même

$$\int_0^{2\pi}[G(\varrho,\theta)]^2 d\theta = \pi\left\{2b_0^2 + \sum_1^\infty \left(a_n\varrho^n - \frac{c_n}{\varrho^n}\right)^2 + \left(b_n\varrho^n - \frac{d_n}{\varrho^n}\right)^2\right\}.$$

Les séries écrites aux seconds membres sont donc convergentes, et par suite la série

$$\sum_1^\infty (a_n c_n + b_n d_n)$$

obtenue par soustraction, est également convergente.

Cela étant, revenons aux formules (32); il résulte immédiatement de ce qui précède, que les séries

$$\sum a_n^2,\quad \sum c_n^2,\quad \sum b_n^2,\quad \sum d_n^2,\quad \sum a_n^2 q^{2n},\quad \sum c_n^2\frac{1}{q^{2n}},\quad \sum b_n^2 q^{2n},\quad \sum d_n^2\frac{1}{q^{2n}},$$

sont toutes convergentes, et par suite il en est de même des deux suivantes

$$\sum (a_n - c_n)^2 + (b_n - d_n)^2$$
$$\sum\left(a_n q^n - \frac{c_n}{q^n}\right)^2 + \left(b_n q^n - \frac{d_n}{q^n}\right)^2.$$

Le théorème de Riesz-Fischer (cf. notamment Riesz, Comptes-Rendus, 144, 1907, p. 615; Götting. Nachrichten, 1907; E. Fischer, Comptes-Rendus, 144, 1907, p. 1022) permet de conclure de là qu'il existe deux fonctions $g(\theta)$ et $g_1(\theta)$ intégrables et de carrés intégrables, telles que l'on ait

$$(33)\quad \begin{aligned} g(\theta) &\sim -b_0 + \sum (a_n - c_n)\sin n\theta - (b_n - d_n)\cos n\theta \\ g_1(\theta) &\sim -b_0 + \sum \left(a_n q^n - \frac{c_n}{q^n}\right)\sin n\theta - \left(b_n q^n - \frac{d_n}{q^n}\right)\cos n\theta. \end{aligned}$$

Si nous considérons alors la fonction

$$A_1(z) = F_1(\varrho,\theta) + i\,G_1(\varrho,\theta) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon -$$

$$-\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\right)d\varepsilon,$$

la partie réelle de cette fonction tend, en général, vers $g(\theta)$ ou $g_1(\theta)$ lorsque z tend vers les points $e^{i\theta}$ ou $qe^{i\theta}$ des frontières. D'autre part, dans la couronne, on a pour $A_1(z)$ un développement de la forme

$$A_1(z) = a'_0 - ib'_0 + \sum (a'_n - ib'_n)z^n + \sum (c'_n + id'_n)z^{-n}$$

avec

$$a'_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)d\theta$$

$$a'_n + c'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta\, d\theta;\quad a'_n q^n + \frac{c'_n}{q^n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\cos n\theta\, d\theta$$

$$b'_n + c'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\theta\, d\theta;\quad b'_n q^n + \frac{d'_n}{q^n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\sin n\theta\, d\theta$$

(il est à peine besoin de faire remarquer que les deux valeurs écrites pour a'_0 sont évidemment égales). Mais, de la définition même des fonctions g et g_1 il résulte

$$-b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)d\theta$$

$$d_n - b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta\, d\theta; \quad \frac{d_n}{q^n} - b_n q^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\cos n\theta\, d\theta;$$

$$a_n - c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\theta\, d\theta; \quad a_n q^n - \frac{c_n}{q^n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\sin n\theta\, d\theta.$$

On en conclut par comparaison

$$a'_0 = -b_0$$

$$a'_n = -b_n, \quad b'_n = a_n, \quad c_n = d_n, \quad d'_n = -c_n.$$

Donc

$$A_1(\varrho e^{i\theta}) = -b_0 - ib'_0 - \sum (b_n + ia_n)\varrho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) + \sum (d_n - ic_n)\varrho^{-n}\begin{pmatrix}\cos n\theta \\ -i\sin n\theta\end{pmatrix}$$

et par suite la partie réelle $F_1(\varrho, \theta)$ de $A_1(z)$ dans la couronne coïncide avec le coefficient de i, $G(\varrho, \theta)$ de $A(z)$ ce qui démontre complètement le résultat annoncé.

Il résulte indirectement des développements qui précèdent, que l'on a

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} g_1(\theta)d\theta = \frac{2\omega_1\eta_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \theta[f(\theta) - f_1(\theta)]d\theta \tag{34}$$

et que par suite l'égalité

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} f_1(\theta)d\theta \tag{35}$$

entraîne

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} g_1(\theta)d\theta \tag{36}$$

et la réciproque est évidemment exacte.

On peut maintenant démontrer le théorème suivant: si $f(\theta)$ et $f_1(\theta)$ sont des fonctions périodiques (de période 2π) et sont les intégrales indéfinies de deux dérivées (non nécessairement bornées) f' et f'_1 intégrables ainsi que leurs carrés, la partie réelle $F(\varrho, \theta)$ de $A(z)$ a une dérivée $\frac{\partial F}{\partial \varrho}$ qui tend en général vers des limites déterminées $h(\theta)$, et $-h_1(\theta)$, lorsque z tend vers les points $e^{i\theta}$ ou $qe^{i\theta}$. Les fonctions $[h(\theta)]^2$ et $[h_1(\theta)]^2$ sont intégrables. Il suffira de suivre le mode de raisonnement employé par L. LICHTENSTEIN (loc. cit. p. 25, et Journal de Crelle, 1913, p. 189) pour obtenir immédiatement ce résultat.

Dans ces conditions, la dérivée normale de F existe en général sur les frontières. Supposons les fonctions f et f_1 bornées, pourvues en général d'une dérivée, et possédant peut-être un nombre fini de points θ_i de discontinuité, où ces fonctions passent brusquement d'une valeur à une autre. Nous pourrons écrire, en supposant d'abord $q < \varrho < 1$,

$$\frac{\partial A(z)}{\partial \varrho} = -\frac{\omega_1^2}{\pi^3 \varrho}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon + \frac{\omega_1^2}{\pi^3\varrho}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \omega_3\right)d\varepsilon$$

puis on a

$$\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon = \frac{\pi}{\omega_1}\left\{f(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right\}_0^{2\pi} - \frac{\pi}{\omega_1}\int_0^{2\pi} f'(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon$$

de sorte qu'en tenant compte des discontinuités possibles,

$$(37)\qquad \frac{\partial A}{\partial \varrho} = \frac{\omega_1}{\pi^2\varrho}\sum_i [f(\theta_i+0) - f(\theta_i-0)]\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\theta_i\right) + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2\varrho}f(-0) +$$

$$+ \frac{\omega_1}{\pi^2\varrho}\int_0^{2\pi} f'(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon + \frac{\omega_1^2}{\pi^3\varrho}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \omega_3\right)d\varepsilon$$

en comprenant au besoin le point $\varepsilon = 0 \equiv 2\pi$ parmi les points θ_i, si f subit un saut brusque en ce point.

On voit alors que l'étude de cette expression dérive immédiatement de l'étude, déjà faite, des fonctions de la forme

$$\int_0^{2\pi} F(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon - \int_0^{2\pi} F_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon$$

(on pourra prendre ici $F(\varepsilon) = f'(\varepsilon)$, et $F_1(\varepsilon)$ égale à la constante $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(\varepsilon)d\varepsilon$). Par suite, dans des conditions qui ressortent clairement des considérations antérieures, le coefficient de i dans $\frac{\partial A}{\partial \varrho}$ tendra en général vers $-f'(\theta)$ quand z tendra vers le point $e^{i\theta}$; quant à la partie réelle, elle sera

$$
(38) \quad \begin{aligned}
h(\theta) = {} & \frac{\omega_1}{\pi^2}\sum_i [f(\theta_i + 0) - f(\theta_i - 0)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta - \theta_i) + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}f(-0) + \\
& + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f'(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta - \varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\omega_1^2}{\pi^3}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\wp\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \omega_3\right]d\varepsilon,
\end{aligned}
$$

l'intégrale relative à ζ étant prise égale à sa valeur principale; cette dernière existe dans les conditions que l'on sait (et notamment son existence est assurée si $f'(\theta)$ est intégrable ainsi que son carré).

Si f' satisfait à une condition de LIPSCHITZ, on peut mettre, en général, après un calcul très simple, cette expression sous la forme

$$
\begin{aligned}
h(\theta) = {} & \frac{\omega_1}{\pi^2}\sum_i [f(\theta_i + 0) - f(\theta_i - 0)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta - \theta_i) + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}f(-0) + \\
& + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[f'(\varepsilon) - f'(\theta)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta - \varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}\left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)f'(\theta) + \\
& + \frac{\omega_1^2}{\pi^3}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\wp\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \omega_3\right]d\varepsilon,
\end{aligned}
$$

où les intégrales ont leur signification ordinaire.

En désignant par $h_1(\theta)$ la dérivée normale extérieure de $F(\varrho, \theta)$, en un point $qe^{i\theta}$ de la frontière intérieure, un calcul analogue au précédent conduira à l'expression suivante

$$
(39) \quad \begin{aligned}
h_1(\theta) = {} & \frac{\omega_1^2}{\pi^3 q}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\wp\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \omega_3\right]d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2 q}\sum_j [f_1(\theta_j + 0) - f_1(\theta_j - 0)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta - \theta_j) + \\
& + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}f_1(-0) + \frac{\omega_1}{\pi^2 q}\int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta - \varepsilon)\,d\varepsilon
\end{aligned}
$$

ou encore, si f'_1 satisfait à une condition de LIPSCHITZ,

$$h_1(\theta) = \frac{\omega_1^2}{\pi^3 q}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\wp\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\omega_3\right]d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2 q}\sum_j [f_1(\theta_j+0)-f_1(\theta_j-0)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\theta_j) +$$

$$+\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} f_1(-0) + \frac{\omega_1}{\pi^2 q}\int_0^{2\pi}[f'_1(\varepsilon)-f'_1(\theta)]\zeta\frac{\omega}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon - \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi q}\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)f'_1(\theta).$$

Observons encore qu'on peut affirmer que, si f' et f'_1 satisfont à des conditions de LIPSCHITZ, il en est de même des fonctions h et h_1.

Enfin, on peut vérifier sans grande difficulté que les fonctions h et h_1 vérifient les conditions

$$\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} h_1(\theta)d\theta = 0$$

dont on connaît la nécessité, provenant de l'uniformité de la fonction analytique $A(z)$.

§ 3. Si l'on cherche une fonction analytique uniforme, $B(z)$, déterminée par la connaissance des valeurs $g(\theta)$ et $g_1(\theta)$ de sa partie imaginaire sur les deux circonférences limites, il résulte évidemment des développements précédents, qu'une telle fonction est, à une constante (réelle) près,

$$\begin{aligned}B(z) = &-\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega_1,\omega_3\right)d\varepsilon + \\ &+\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega_1,\omega_3\right)d\varepsilon\end{aligned} \tag{40}$$

obtenue en multipliant par i une fonction analogue à la fonction $A(z)$ antérieure. Les données g et g_1 doivent d'ailleurs vérifier, bien entendu, la condition

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} g_1(\theta)d\theta.$$

Ce qui a été dit antérieurement se transporte immédiatement à cette nouvelle fonction de z. Notamment, si g et g_1 sont intégrables et de carrés intégrables, la partie réelle de $B(z)$ tend en général vers des valeurs déterminées $f(\theta)$ et

$f_1(\theta)$ quand z tend vers un point des frontières, et ces nouvelles fonctions f et f_1 sont intégrables ainsi que leurs carrés. Elles ont d'ailleurs pour expressions

$$(41)\quad \begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon,\\ f_1(\theta) &= -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon \end{aligned}$$

ou encore, si g et g_1 satisfont à des conditions de LIPSCHITZ,

$$f(\theta) = -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[g(\varepsilon)-g(\theta)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)g(\theta) + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon,$$

$$\begin{aligned} f_1(\theta) = -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[g_1(\varepsilon)-g_1(\theta)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon -\\ -\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)g_1(\theta). \end{aligned}$$

Les fonctions f et f_1 ainsi déterminées vérifient en outre les relations

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} f_1(\theta)d\theta = \frac{2\omega_1\eta_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\theta[g(\theta)-g_1(\theta)]d\theta.$$

De plus, la partie réelle de $B(z) = B(\varrho e^{i\theta})$ possède une dérivée partielle par rapport à ϱ, qui, en général, tend vers une valeur déterminée quand ϱ tend vers 1 ou q, si l'on suppose que g et g_1 aient des dérivées, et, en général, les valeurs limites $h(\theta)$ et $h_1(\theta)$ qui en résultent pour la dérivée normale (extérieure à l'aire) sont

$$\begin{aligned} h(\theta) &= g'(\theta),\\ h_1(\theta) &= -\frac{1}{q}g'_1(\theta). \end{aligned}$$

Cela découle à peu près immédiatement des développements contenus dans le paragraphe qui précède.

§ 4. Supposons données les valeurs $h(\theta)$ et $h_1(\theta)$ de la dérivée normale de la partie réelle aux frontières, et cherchons une fonction uniforme de z répondant à ces conditions. Bien entendu, nous supposons vérifiées les relations nécessaires

$$\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} h_1(\theta)d\theta = 0 \tag{42}$$

assurant l'uniformité de la fonction de z qu'il s'agit de trouver. Cette fonction de z résulte très simplement des constructions antérieures.[1] Considérons en effet l'expression

$$\begin{aligned} C(z) = & -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right)d\varepsilon - \\ & -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right)d\varepsilon \end{aligned} \tag{43}$$

construite de manière à ce que la dérivée par rapport à $\varrho(z = \varrho e^{i\theta})$ reproduise la fonction (visiblement uniforme)

$$-\frac{\omega_1}{i\pi^2\varrho}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon - \frac{q\omega_1}{i\pi^2\varrho}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon$$

dont nous savons déjà par ce qui précède, que la partie réelle tend vers $h(\theta)$ ou $-h_1(\theta)$ en général, quand z tend vers $e^{i\theta}$ ou $qe^{i\theta}$. Cette fonction $C(z)$ n'est pas uniforme, mais elle le deviendra par l'adjonction d'un terme convenable en $\log z$, ne modifiant pas la valeur de la dérivée normale de la partie réelle, — ce qui exige que ce terme soit de la forme $iA.\log z$, A étant réel. La différence des valeurs de la fonction $C(z) + iA\log z$ quand l'argument de z diminue, par exemple, de 2π, est, en désignant par $\log z$ la première détermination du logarithme,

---

[1] M. U. Dini (Palermo, 1913, loc. cit. — in fine — a déterminé récemment une telle fonction, relativement même au cas un peu plus général, qu'on peut du reste ramener à celui du texte par l'addition d'un terme en $\log z$, où les données vérifient seulement la condition

$$\int_0^{2\pi} h(\theta)d(\theta) = \int_0^{2\pi} h_1(\theta)d\theta .$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon-2\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}d\varepsilon-$$

$$-\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\frac{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon-2\omega_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}d\varepsilon+2A\pi.$$

Mais on a

$$\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon-2\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}=i\pi+2\eta_1\omega_1\left(1-\frac{\log z}{i\pi}+\frac{\varepsilon}{\pi}\right)$$

$$\log\frac{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon-2\omega_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\right)}=2\eta_1\omega_1\left(1-\frac{\log z}{i\pi}+\frac{\varepsilon}{\pi}\right).$$

D'où pour la différence précédente, en tenant compte des relations (42), l'expression

$$-\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)d\varepsilon-\frac{2\eta_1\omega_1 q}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varepsilon h_1(\varepsilon)d\varepsilon+2A\pi$$

qui sera nulle si l'on choisit la constante réelle A par

$$A=\frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon)+qh_1(\varepsilon)]d\varepsilon.$$

Donc la fonction uniforme

$$D(z)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h(\varepsilon)\log\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon-\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi}h_1(\varepsilon)\log\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon-$$

(44)

$$-\frac{\eta_1\omega_1}{i\pi^3}\log z\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon)+qh_1(\varepsilon)]d\varepsilon$$

à laquelle on peut d'ailleurs ajouter une constante quelconque, répond à la question proposée. Ses valeurs aux frontières sont déterminées par

$$D(e^{i\theta}) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log \sigma \frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \sigma_3 \frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon -$$

$$- \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi} \varepsilon[h(\varepsilon)+q h_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon$$

et de même

$$D(qe^{i\theta}) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log \sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\omega_3\right]d\varepsilon - \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \sigma_3\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\omega_3\right]d\varepsilon -$$

$$- \frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\left(\theta+\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}\right)\int_0^{2\pi} \varepsilon[h(\varepsilon)+q h_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon.$$

Mais on sait que (T. M., XII, 3)

$$\log \sigma(a+\omega_3) = \eta_3 a + \log \sigma\omega_3 + \log \sigma_3 a;$$

$$\log \sigma_3(a+\omega_3) = \eta_3 a + \log\frac{\sigma_1\omega_3\,\sigma_2\omega_3}{\sigma\omega_3} + \log \sigma a + (2k+1)i\pi.$$

De sorte qu'en se rappelant les conditions auxquelles h et h_1 sont assujettis, il vient

$$D(qe^{i\theta}) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log \sigma_3\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right]d\varepsilon - \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \sigma\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon +$$

$$+ \left(\frac{\omega_1\eta_3}{\pi^2} - \frac{\eta_1\omega_3}{\pi^2} - \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\right)\int_0^{2\pi} \varepsilon[h(\varepsilon)+q h_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon$$

ou encore

$$D(qe^{i\theta}) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log \sigma_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \sigma\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon -$$

$$- \left(\frac{i}{2\pi} + \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\right)\int_0^{2\pi} \varepsilon[h(\varepsilon)+q h_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon$$

à cause de la relation connue

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{i\pi}{2}.$$

Finalement on voit qu'on peut écrire, en séparant le réel et l'imaginaire,

(45)
$$f(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log \sigma\frac{\omega_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\,d\varepsilon - \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon)+qh_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon;$$

$$f_1(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\,d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon)+qh_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon;$$

(46)
$$g(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\arg\left(\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)d\varepsilon;$$

$$g_1(\theta) = -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\arg\left(\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)d\varepsilon - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon)+qh_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon.$$

On peut simplifier beaucoup ces deux dernières formules. Dans la première, le logarithme qui figure provient de $\log\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)$ quand $|z|$ tend vers 1 en lui restant inférieur. D'après cela, on se rend compte aisément que l'on doit écrire, λ désignant un nombre entier dont la valeur sera sans importance,

$$\arg\left(\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right) = 2\lambda\pi \qquad \text{pour } \varepsilon<\theta;$$

$$\arg\left(\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right) = 2\lambda\pi+\pi \quad \text{pour } \varepsilon>\theta$$

et par suite, à cause de (42),

$$g(\theta) = -\int_\theta^{2\pi} h(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

ou encore

(47)
$$g(\theta) = \int_0^\theta h(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

De même, dans la seconde formule, le logarithme provient de $\log \sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)$ quand $|z|$ tend vers q en lui restant supérieur. Cela entraîne, μ étant un entier,

$$\arg\left(\log \sigma \frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right) = \begin{cases} 2\mu\pi & \text{pour } \varepsilon < \theta \\ 2\mu\pi - \pi & \text{pour } \varepsilon > \theta \end{cases}$$

et par suite

$$g_1(\theta) = q\int_\theta^{2\pi} h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon) + q h_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon$$

ou bien

$$g_1(\theta) = -q\int_0^{\theta} h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon) + q h_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon. \tag{48}$$

Par un procédé exactement analogue à celui qu'on a indiqué dans le cas d'un domaine circulaire, au paragraphe 1, on démontre que, si les données $h(\theta)$ et $h_1(\theta)$ sont intégrables ainsi que leurs carrés, les fonctions $f(\theta)$, $g(\theta)$, $f_1(\theta)$, $g_1(\theta)$ jouissent de la même propriété.

§ 5. Considérons maintenant une fonction analytique $E(z)$, dont la partie réelle soit donnée, égale à $f(\theta)$ sur la circonférence de rayon 1, et dont la partie imaginaire soit assujettie à être *nulle* sur la circonférence de rayon q. Prolongeons analytiquement la fonction dans la couronne, de rayons extrêmes q et q^3, obtenue par inversion à partir de la couronne primitive (la puissance étant égale à q^2, et le centre d'inversion étant le centre commun); aux points inverses, la fonction et la fonction prolongée auront même partie réelle, et des coefficients de i opposés. La fonction qui en résulte, définie dans la couronne totale $q^2 < |z| < 1$, possède alors une partie réelle égale à $f(\theta)$ sur les deux frontières, et par suite une telle fonction est (cf. H. Villat, Comptes-Rendus, Sept. 1911, Xenia, Athènes, 1912, U. Dini, Palermo, 1913, loc. cit.)

$$E(z) = \frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right) - \zeta_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{i\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right)\right]d\varepsilon \tag{49}$$

à une constante près, imaginaire pure. Cela résulte d'ailleurs des résultats antérieurs; les périodes $2\omega'_1$, $2\omega'_3$ avec lesquelles sont construites les fonctions elliptiques actuelles, sont définies par l'égalité

(50) $$q^2 = e^{\frac{-\pi \omega'_3}{i\omega'_1}}$$

de sorte qu'on peut choisir si l'on veut

$$\omega'_3 = 2\omega_3, \quad \omega'_1 = \omega_1,$$

$2\omega_1$, $2\omega_3$ désignant toujours les périodes utilisées jusqu'ici. D'ailleurs on peut écrire (T. M., LIX à LXIII)

(51) $$\zeta a - \zeta_3 a = \frac{-\wp' a}{2(\wp a - e'_3)} = \xi_{10} a \xi_{23} a = \frac{\xi_{10} a \xi_{20} a}{\xi_{30} a} = -\frac{\xi'_{30} a}{\xi_{30} a}$$

et par suite, plus brièvement,

(52) $$E(z) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\frac{d}{d\varepsilon}\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\right) d\varepsilon.$$

Il est manifeste, d'après la façon même dont on a construit $E(z)$, que la partie imaginaire de cette fonction est constante sur la circonférence de rayon q; cette partie imaginaire y est d'ailleurs nulle; en effet, pour $z = qe^{i\theta}$, la valeur de la fonction est

$$E(qe^{i\theta}) = \frac{i\omega'_1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\frac{\wp'\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right]}{\wp\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right) - e'_3} d\varepsilon;$$

or on a (T. M., LXIII, 5, et XI, 2)

$$\frac{\wp'\left(a + \frac{\omega'_3}{2}\right)}{\wp\left(a + \frac{\omega'_3}{2}\right) - e'_3} = \zeta\left(a - \frac{\omega'_3}{2}\right) - \zeta\left(a + \frac{\omega'_3}{2}\right) + \eta'_3.$$

Comme $\zeta\left(a + \frac{\omega'_3}{2}\right)$ et $\zeta\left(a - \frac{\omega'_3}{2}\right)$ sont imaginaires conjugués, il en résulte évidemment que la valeur de $E(qe^{i\theta})$ est réelle.

Si dans la fonction $E(z)$ on fait la transformation de z en q/z, ce qui intervertit les frontières, et si l'on envisage l'expression

$$\frac{1}{i}E\left(\frac{q}{z}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\frac{d}{d\varepsilon}\log \xi_{30}\left(-\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega'_3}{2}\right) d\varepsilon$$

la partie réelle de cette nouvelle fonction sera nulle sur la frontière extérieure, et la partie imaginaire sera $-f(\theta)$ au point $qe^{-i\theta}$. On en conclut sans difficulté que la fonction

$$(53) \qquad F(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{2}\right)$$

a une partie réelle nulle pour $|z| = 1$, et une partie imaginaire égale à $g_1(\theta)$ pour $z = qe^{i\theta}$.

On en conclut enfin que la fonction

$$G(z) = E(z) + F(z)$$

c'est à dire

$$(54) \qquad G(z) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega'_1 \omega'_3\right) + \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{2} \,\middle|\, \omega'_1 \omega'_3\right)$$

est celle qui répond aux données $f(\theta)$ et $g_1(\theta)$.

Il résulte évidemment des considérations précédentes, que pour cette fonction, dans des circonstances connues, la partie réelle et la partie imaginaire tendront en général vers des limites déterminées quand z tendra vers un point des frontières (et notamment lorsque les données seront intégrables et de carrés intégrables). Et l'on pourra, en général, écrire, en remarquant que par construction, la deuxième intégrale qui figure dans $G(z)$ est imaginaire pure pour $|z| = 1$,

$$(55) \qquad g(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, d\log \xi_{30} \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \frac{1}{i\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right).$$

Et l'on a de même,

$$(56) \qquad f_1(\theta) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\, d\log \xi_{30} \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon).$$

Les fonctions $g(\theta)$ et $f_1(\theta)$ seront elles-mêmes de carrés intégrables en même temps que les données. Si ces données satisfont à des conditions de Lipschitz, g et f_1 y satisferont également, et l'on aura

$$g(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(\varepsilon)-f(\theta)]\,d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{1}{i\pi}\int_0^{2\pi}g_1(\varepsilon)\,d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)-\frac{\omega'_3}{2}\right);$$

$$f_1(\theta)=\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varepsilon)\,d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\right)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g_1(\varepsilon)\,d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon).$$

On peut remarquer qu'on vérifie facilement les relations

$$\int_0^{2\pi}f_1(\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta$$

et

$$\int_0^{2\pi}g(\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}g_1(\theta)\,d\theta.$$

Quant à la dérivée normale de la partie réelle de $G(z)$, elle existera dans des conditions générales que je ne répéterai pas; notamment si les données f et g_1 sont les intégrales indéfinies de deux fonctions intégrables ainsi que leurs carrés, les fonctions $h(\theta)$ et $h_1(\theta)$ définies comme on sait, jouiront de la même propriété. On aura, en général, à cause de (51),

$$\frac{\partial G}{\partial\varrho}=\frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}f(\varepsilon)\frac{d}{d\varrho}\left\{\zeta\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right]-\zeta_3\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right]\right\}d\varepsilon+$$
$$+\frac{\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}g_1(\varepsilon)\frac{d}{d\varrho}\left\{\zeta\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)-\frac{\omega'_3}{2}\right]-\zeta_3\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)-\frac{\omega'_3}{2}\right]\right\}d\varepsilon.$$

On sait que

$$\frac{d}{du}(\zeta_3u-\zeta u)=\wp u-\wp(u+\omega'_3).$$

Par suite il vient

$$\frac{\partial G}{\partial\varrho}=-\frac{\omega'^2_1}{\pi^3\varrho}\int_0^{2\pi}f(\varepsilon)\left\{\wp\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right]-\wp\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\omega'_3\right]\right\}d\varepsilon-$$
$$-\frac{\omega'^2_1}{i\pi^3\varrho}\int_0^{2\pi}g_1(\varepsilon)\left\{\wp\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)-\frac{\omega'_3}{2}\right]-\wp\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\right]\right\}d\varepsilon.$$

Supposons $f(\theta)$ continue sauf en un nombre fini de points θ_i, et pourvue presque partout d'une dérivée $f'(\theta)$. La première partie de l'expression précédente pourra s'écrire

$$\frac{\omega'_1}{\pi^2\varrho}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\frac{d}{d\varepsilon}\left\{\frac{\xi'_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)}{\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)}\right\}d\varepsilon$$

ou encore

$$\frac{\omega'_1}{\pi^2\varrho}\sum_i[f(\theta_i-0)-f(\theta_i+0)]\frac{\xi'_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_i)\right)}{\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_i)\right)}-$$

$$-\frac{\omega'_1}{\pi^2\varrho}\int_0^{2\pi} f'(\varepsilon)\frac{\xi'_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)}{\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)}d\varepsilon$$

le point $\theta=0$ pouvant être compris dans les points θ_i sous le signe $\sum$ sans modifications d'écriture, comme il résulte immédiatement du fait que la fonction $\frac{\xi'_{30}u}{\xi_{30}u}$ admet la période $2\omega'_1$. De là on tire, pour $\varrho=1$, dans des conditions déjà énoncées,

$$(57)\quad h(\theta)=\frac{\omega'_1}{\pi^2}\sum_i[f(\theta_i-0)-f(\theta_i+0)]\frac{\xi'_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_i)}{\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_i)}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(\varepsilon)d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)-$$

$$-\frac{\omega'^2_1}{i\pi^3}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\left\{\wp\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)-\frac{\omega'_3}{2}\right]-\wp\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\right]\right\}d\varepsilon$$

la dernière intégrale écrite étant évidemment imaginaire pure.

En suivant une voie analogue, on peut encore démontrer que quand ϱ tend vers q, la portion de $\frac{\partial G}{\partial\varrho}$ relative à $f(\varepsilon)$ devient imaginaire pure, et que, en supposant $g_1(\theta)$ pourvue d'une dérivée presque partout, la portion relative à $g_1(\varepsilon)$ donne à la limite, en général, une partie réelle égale à $1/q\cdot g'_1(\theta)$; d'où pour la dérivée normale (extérieure),

$$h_1(\theta)=-\frac{1}{q}g'_1(\theta).$$

Si les données, au lieu d'être $f(\theta)$ et $g_1(\theta)$, sont $f_1(\theta)$ et $g(\theta)$, la solution se déduit immédiatement de ce qui précède. A cet effet, dans la fonction $g(z)$, faisons la transformation de z en q/z; la fonction $G\left(\frac{q}{z}\right)$ aura une partie réelle égale à $f(\theta)$ au point $qe^{-i\theta}$, et une partie imaginaire égale à $g_1(\theta)$ au point $e^{-i\theta}$. En posant

$$f_1(\theta) = f(-\theta)$$

et

$$g(\theta) = g_1(-\theta),$$

des transformations simples amènent à écrire la fonction

$$(58) \qquad H(z) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{2}\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right) - $$
$$- \frac{\mathrm{I}}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right)$$

dont la partie réelle sera $f_1(\theta)$ au point $qe^{i\theta}$, et la partie imaginaire $g(\theta)$ au point $e^{i\theta}$. C'est la fonction cherchée, répondant aux données f_1 et g. Des conclusions analogues à celles qui ont été développées pour $G(z)$ sont actuellement valables, et notamment, on a, dans des conditions connues

$$(59) \qquad f(\theta) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right) - \frac{\mathrm{I}}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon);$$

$$(60) \qquad g_1(\theta) = -\frac{\mathrm{I}}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{\mathrm{I}}{i\pi}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right)$$

puis, relativement aux dérivées normales,

$$h(\theta) = g'(\theta)$$

et

$$(61) \qquad h_1(\theta) = \frac{\omega'_1}{\pi^2}\sum_j \frac{\xi'_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_j)}{\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_j)}[f_1(\theta_j - \mathrm{o}) - f_1(\theta_j + \mathrm{o})] + \frac{\mathrm{I}}{\pi}\int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon)d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) +$$
$$+ \frac{\omega_1'^2}{i\pi^3 q}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\left[\wp\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right)\right]d\varepsilon.$$

§ 6. Je passe maintenant au cas où l'on donne $f(\theta)$ et $h_1(\theta)$. La fonction cherchée est alors celle que j'ai déjà indiquée antérieurement (cf. H. VILLAT, Comptes-Rendus, Sept-1911, Xenia, Athènes, loc. cit. 1912) et sur laquelle M. U. DINI est revenu dans son Mémoire (Palermo, 1913, loc. cit.). Je vais faire voir brièvement qu'elle se déduit presque sans calcul de ce qui précède. On suppose toujours la relation

$$\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon = 0 \tag{62}$$

pour l'uniformité du résultat à obtenir.

Reprenons la fonction $E(z)$ considérée déjà; sa partie imaginaire est nulle sur la circonférence $|z| = q$ des deux côtés de laquelle $E(z)$ est régulière; par suite la dérivée normale de la partie réelle sera certainement nulle sur cette circonférence, — ce qu'on vérifierait au reste facilement.

Ceci posé, considérons la fonction

$$I(z) = \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon) \log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{2}\,\middle|\,\omega'_1\,\omega'_3\right) d\varepsilon \tag{63}$$

visiblement construite de manière à ce que sa dérivée par rapport à $\varrho\,(z = \varrho e^{i\theta})$ reproduise

$$\frac{iq}{\pi\varrho}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{2}\right).$$

Nous savons que cette dernière expression (analogue à la fonction $F(z)$ du paragraphe précédent) possède une partie réelle qui, pour z tendant vers $qe^{i\theta}$ tend en général vers $-h_1(\theta)$. La fonction $I(z)$ est d'ailleurs uniforme, car la différence des valeurs qu'elle prend pour deux valeurs de $\log z$ différant de $2i\pi$, est

$$\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon) \log \frac{\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{\pi} + 2\omega'_1\right)}{\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{2}\right)} d\varepsilon = \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log(-1)\,d\varepsilon$$

quantité nulle par hypothèse. Enfin, pour $z = e^{i\theta}$, la valeur

$$I(e^{i\theta}) = \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right) d\varepsilon$$

est imaginaire pure, car la partie réelle de cette expression serait

$$\frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\left\{\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)-\frac{\omega'_3}{2}\right)\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\right)\right\}d\varepsilon.$$

ou bien (T. M., LX, 4),

$$\frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\left(-\sqrt{e_1-e_3}\,\sqrt{e_2-e_3}\right)d\varepsilon = 0.$$

La fonction $I(z)$ a donc une partie réelle nulle sur la circonférence de rayon 1, et cette partie réelle a pour dérivée normale extérieure $h_1(\theta)$ au point $qe^{i\theta}$.

Au sujet de cette fonction $I(z)$ introduisons ici une remarque, qu'aussi bien on pourrait aussi démontrer autrement. En utilisant la relation

$$\log \xi_{30} u = \log \sigma_3 u - \log \sigma u,$$

et les formules (T. M., CVI, 1) on trouve facilement

$$\log \xi_{30} u = -\log\frac{2\omega'_1}{\pi} - \log\sin\frac{\pi u}{2\omega'_1} + \sum_1^{\infty}\frac{q^{2n}}{n(1+q^{2n})}\left(2\sin\frac{n\pi u}{2\omega'_1}\right)^2$$

(il est à noter que les formules (T. M.) auxquelles nous renvoyons ici, désignent par q la quantité que nous désignons actuellement par q^2). Partant de là, un calcul que j'omets pour abréger (d'autant qu'on trouvera dans le Mémoire cité de M. U. Dini, le développement d'un calcul inverse assez analogue) conduit à l'égalité suivante, assurément valable dans l'intérieur de la couronne,

$$I(z) = -ib_0 + \sum_1^{\infty}(a_n - ib_n)z^n - \sum_1^{\infty}(a_n + ib_n)z^{-n} \tag{64}$$

où l'on a posé

(65)

$$b_0 = -\frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\theta h_1(\theta)d\theta$$

$$a_n = -\frac{q^{n+1}}{n\pi(1+q^{2n})}\int_0^{2\pi}h_1(\theta)\cos n\theta d\theta,\quad b_n = -\frac{q^{n+1}}{n\pi(1+q^{2n})}\int_0^{2\pi}h_1(\theta)\sin n\theta d\theta.$$

Ceci montre qu'on a

$$h_1(\theta) \sim -\sum_{1}^{\infty} n a_n \frac{1+q^{2n}}{q^{n+1}} \cos n\theta - \sum_{1}^{\infty} n b_n \frac{1+q^{2n}}{q^{n+1}} \sin n\theta .$$

Admettons alors que $h_1(\theta)$ soit sommable en même temps que son carré; on aura, d'après un théorème de P. Fatou,

$$\int_{0}^{2\pi} h_1^2(\theta)\, d\theta = \sum_{1}^{\infty} n^2 a_n^2 \frac{(1+q^{2n})^2}{q^{2n+2}} + \sum_{1}^{\infty} n^2 b_n^2 \frac{(1+q^{2n})^2}{q^{2n+2}} .$$

On en conclut de suite que les séries

$$\sum a_n^2 \frac{(1 \pm q^{2n})^2}{q^{2n}}, \quad \sum b_n^2 \frac{(1 \pm q^{2n})^2}{q^{2n}}, \quad \sum n^2 a_n^2, \quad \sum n^2 b_n^2, \quad \sum a_n^2, \quad \sum b_n^2,$$

sont toutes convergentes, et par suite on peut poser, $g(\theta)$, $h(\theta)$, $f_1(\theta)$, $g_1(\theta)$ désignant des fonctions de carrés sommables,

$$(66) \quad \begin{aligned} g(\theta) &= -b_0 - \sum_{1}^{\infty} 2 b_n \cos n\theta + \sum_{1}^{\infty} 2 a_n \sin n\theta \\ h(\theta) &= \sum_{1}^{\infty} 2 n a_n \cos n\theta + \sum_{1}^{\infty} 2 n b_n \sin n\theta \\ f_1(\theta) &\sim \sum_{1}^{\infty} a_n \left(q^n - \frac{1}{q^n}\right) \cos n\theta + \sum_{1}^{\infty} b_n \left(q^n - \frac{1}{q^n}\right) \sin n\theta \\ g_1(\theta) &\sim -b_0 + \sum_{1}^{\infty} - b_n \left(q^n + \frac{1}{q_n}\right) \cos n\theta + \sum_{1}^{\infty} {}_n \left(q^n + \frac{1}{q^n}\right) \sin n\theta . \end{aligned}$$

Les deux premières de ces fonctions sont la partie réelle et la dérivée normale de celle-ci, sur la circonférence de rayon un; ceci résulte de ce que le développement en série de Laurent de $I(z)$ est convergent pour $|z| = 1$, et même au delà, comme il est évident d'après la construction même de $I(z)$. Quant à f_1 et g_1, ce seront la partie réelle et la partie imaginaire de $I(z)$ pour $|z| = q$; cela est facile à démontrer en employant une méthode indiquée par L. Lichtenstein (cf. le Mém. cité, p. 23).

De tout ceci il résulte que, si la donnée $h_1(\theta)$ est sommable avec son carré, il en sera de même de g, h, f_1, g_1.

Il est clair d'après ce qui précède, qu'une fonction de z répondant aux données $f(\theta)$ et $h_1(\theta)$ est

$$J(z) = E(z) + I(z) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon) d \log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega'_1 \omega'_3\right) + \tag{67}$$
$$+ \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon) \log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{2} \,\middle|\, \omega'_1 \omega'_3\right) d\varepsilon$$

à laquelle on peut ajouter une constante imaginaire pure quelconque. Pour cette fonction on a

$$(68)\quad \begin{aligned} g(\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon) d \log \xi_{30} \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \frac{q}{i\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon) \log \xi_{30}\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right] d\varepsilon; \\ f_1(\theta) &= \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon) d \log \xi_{30}\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right] + \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon) \log \xi_{30} \frac{\omega'_1}{\pi} | \theta - \varepsilon | d\varepsilon \end{aligned}$$

la dernière intégrale écrite dans $g(\theta)$ étant, comme on l'a déjà vu, imaginaire pure; puis

$$g_1(\theta) = \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon) \arg \left[\log \xi_{30} \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon)\right] d\varepsilon,$$

ce qui donne facilement

$$g_1(\theta) = -q\int_0^{\theta} h_1(\varepsilon) d\varepsilon. \tag{69}$$

Enfin, par un calcul simple, on trouve, dans des conditions déjà énoncées,

$$(70)\quad \begin{aligned} h(\theta) &= \frac{\omega'_1}{\pi^2}\sum_i [f(\theta_i - 0) - f(\theta_i + 0)] \frac{\xi'_{30} \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \theta_i)}{\xi_{30} \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \theta_i)} + \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(\varepsilon) d \log \xi_{30} \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \frac{iq}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon) d \log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right). \end{aligned}$$

Si les données sont de carrés sommables, et si $f(\theta)$ est en même temps l'intégrale indéfinie d'une fonction de pareille nature, les quatre fonctions qu'on vient d'écrire jouiront de la même propriété.

Si dans la fonction $J(z)$ on change z en q/z, la partie réelle de $J\left(\frac{q}{z}\right)$ sera $f(\theta)$ au point $qe^{-i\theta}$; et des propriétés connues de l'inversion il suit que cette partie réelle aura une dérivée normale extérieure égale à $q h_1(\theta)$ au point $e^{-i\theta}$. De sorte qu'en posant

$$f(-\theta) = f_1(\theta),$$

$$q h_1(-\theta) = h(\theta)$$

on voit, après transformations simples, que la fonction

$$\begin{aligned}K(z) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{2}\,\Big|\,\omega'_1\omega'_3\right) + \\ (71) \qquad + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\,\Big|\,\omega'_1\omega'_3\right) d\varepsilon\end{aligned}$$

répond aux données $f_1(\theta)$ et $h(\theta)$. On peut du reste lui ajouter une constante imaginaire pure. Pour cette fonction on a

$$(72)\quad f(\theta) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}\,|\theta-\varepsilon|\, d\varepsilon$$

puis

$$g(\theta) = +\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\arg\left(\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right) d\varepsilon$$

ce qui donne sans difficulté

$$(73)\qquad g(\theta) = \int_0^{\theta} h(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

et enfin

$$g_1(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right) d\varepsilon;$$

$$(74)\quad \begin{aligned} h_1(\theta) &= \frac{\omega'_1}{\pi^2 q}\sum_j [f_1(\theta_j - 0) - f_1(\theta_j + 0)] \frac{\xi'_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_j)}{\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_j)} + \\ &+ \frac{1}{\pi q}\int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{i}{\pi q}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right). \end{aligned}$$

Ces fonctions jouissent de propriétés analogues à celles dont il était question il y a un instant.

§ 7. Pour terminer ces généralités, nous voulons encore signaler les cas où les données de la question seraient $h(\theta)$ et $g_1(\theta)$, ou bien $g(\theta)$ et $h_1(\theta)$.

Soit $L(z)$ une fonction de z répondant aux données $h(\theta)$ et $g_1(\theta)$, en supposant particulièrement $g_1 \equiv 0$ (Bien entendu, on a toujours, comme dans tout ce qui précède,

$$(75)\qquad \int_0^{2\pi} h(\theta)\,d\theta = 0).$$

Une telle fonction étant réelle sur le cercle de rayon q, est prolongeable analytiquement dans la couronne de rayons extrêmes q et q^2, et l'on démontre bien facilement que les valeurs de la dérivée normale de la partie réelle devront être $h(\theta)$ (sur la circonférence de rayon 1) et $1/q^2 . h(\theta)$ (sur la circonférence de rayon q^2). Donc, en se reportant à la fonction $D(z)$ et en employant ici une formation analogue dans la couronne de rayons extrêmes 1 et q^2, on voit immédiatement que la fonction cherchée $L(z)$ ne saurait différer que par une constante de la fonction suivante

$$\begin{aligned} L_1(z) = &-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\left\{\sigma\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega'_1, \omega'_3\right)\sigma_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega'_1, \omega'_3\right)\right\} d\varepsilon - \\ &- \frac{2\eta'_1\omega'_1}{i\pi^3}\log z \int_0^{2\pi} \varepsilon h(\varepsilon)\,d\varepsilon. \end{aligned}$$

Formons la valeur de cette fonction pour $z = q e^{i\theta}$, il vient

$$\begin{aligned} L_1(q e^{i\theta}) = &-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log \sigma\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right) d\varepsilon - \\ &- \frac{2\eta'_1\omega'_1}{i\pi^3}\left(i\theta - \frac{\pi\omega'_3}{2i\omega'_1}\right)\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)\,d\varepsilon. \end{aligned}$$

Mais on a (T. M., XII, 3)

$$\sigma_3\left(a+\frac{\omega'_3}{2}\right)=-e^{-\eta'_3\left(a-\frac{\omega'_3}{2}\right)}\frac{\sigma_1\omega'_3\sigma_2\omega'_3}{\sigma\omega'_3}\sigma\left(a-\frac{\omega'_3}{2}\right).$$

Donc, en tenant compte de l'hypothèse relative à h, et de la relation

$$\eta'_1\omega'_3-\eta'_3\omega'_1=\frac{i\pi}{2},$$

il vient

$$L_1(qe^{i\theta})=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h(\varepsilon)\log\sigma\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)-\frac{\omega'_3}{2}\right)d\varepsilon-$$
$$-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{i\pi}{2}+\frac{2\eta'_1\omega'_1\theta}{\pi}\right)\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)d\varepsilon.$$

Par suite, on peut écrire, à une constante (réelle) près,

$$L(z)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h(\varepsilon)\log\sigma\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right)\sigma_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right)d\varepsilon-$$

(76)

$$-\frac{2\eta'_1\omega'_1}{i\pi^3}\log z\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)d\varepsilon+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)d\varepsilon.$$

A côté de cette fonction, considérons une fonction $M(z)$ dont la partie imaginaire soit $g_1(\theta)$ sur la circonférence de rayon q, et égale à une constante K sur la circonférence de rayon 1, — la constante K étant telle que

$$2\pi K=\int_0^{2\pi}g_1(\varepsilon)d\varepsilon.$$

La derivée normale de la partie réelle sera alors nulle sur la frontière $|z|=1$. Dans ces conditions, il existe une fonction uniforme $M(z)$ répondant à la question, sous la forme

$$M(z) = -\frac{\omega_1}{2\pi^3}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon \int_0^{2\pi} \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega_1\omega_3\right) d\varepsilon +$$

$$+ \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega_1\omega_3\right) d\varepsilon$$

comme il résulte de la formation de $B(z)$ considérée antérieurement. D'ailleurs on peut montrer que

$$\int_0^{2\pi} \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega_1\omega_3\right) d\varepsilon = -\frac{\pi}{\omega_1}\left[i\pi + 2\eta_1\omega_1\left(1 - \frac{\log z}{i\pi}\right)\right]$$

(cf. mon Mém. cité du Circolo di Palermo, 1912, parag. 6). Par suite

$$(77)\quad M(z) = \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega_1\omega_3\right) d\varepsilon + \frac{1}{2\pi^2}\left\{i\pi + 2\eta_1\omega_1\left(1 - \frac{\log z}{i\pi}\right)\right\}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

et enfin, une fonction répondant aux données $h(\theta)$ et $g_1(\theta)$ est (avec, si l'on veut, une constante additionnelle, réelle),

$$P_1(z) = L(z) + M(z) =$$

$$(78)\quad \begin{aligned} &-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log \sigma\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega'_1\omega'_3\right)\sigma_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega'_1\omega'_3\right) d\varepsilon - \\ &-\frac{2\eta'_1\omega'_1}{i\pi^3}\log z\int_0^{2\pi} \varepsilon h(\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon h(\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega_1\omega_3\right) d\varepsilon + \\ &+\frac{1}{2\pi^2}\left[i\pi + 2\eta_1\omega_1\left(1 - \frac{\log z}{i\pi}\right)\right]\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon. \end{aligned}$$

On peut simplifier cette expression, qui présente du reste l'inconvénient de comporter des fonctions elliptiques construites avec des paires de périodes différentes. Tout d'abord, de la définition des périodes, il résulte qu'on a le droit de prendre

$$\omega'_1 = \omega_1, \quad \omega'_3 = 2\omega_3.$$

Cela étant, désignons toujours par des lettres accentuées les quantités relatives aux fonctions elliptiques construites avec $2\omega'_1$, $2\omega'_3$. On sait que (T. M., XXIV, 1)

$$\sigma(a\,|\,\omega'_1\,\omega'_3)\,\sigma_3(a\,|\,\omega'_1\,\omega'_3) = e^{-e'_3\frac{a^2}{2}}\,\sigma\left(a\,\Big|\,\omega'_1\,\frac{\omega'_3}{2}\right) = e^{-\frac{e'_3 a^2}{2}}\,\sigma(a\,|\,\omega_1\,\omega_3).$$

Puis

$$\eta'_1 = \zeta(\omega'_1\,|\,\omega'_1\,\omega'_3)$$

est lié à

$$\eta_1 = \zeta\left(\omega'_1\,\Big|\,\omega'_1\,\frac{\omega'_3}{2}\right)$$

par (T. M., XXIV, 4)

$$\eta_1 = 2\eta'_1 + e'_3\,\omega'_1$$

et

$$e'_3 = \wp(\omega'_3\,|\,\omega'_1\,\omega'_3)$$

est lié à

$$e_1 = \wp\left(\omega'_1\,\Big|\,\omega'_1\,\frac{\omega'_3}{2}\right)$$

par (id. 5)

$$e_1 = -2e'_3.$$

Ceci permet de ne conserver dans la formule définitive, que des fonctions elliptiques aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$; et après réductions on obtient, en négligeant la constante réelle, sans importance, $-\dfrac{e_1\,\omega_1^2}{4\pi^3}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varepsilon^2 h(\varepsilon)\,d\varepsilon + \dfrac{\eta_1\,\omega_1}{\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon$

$$(79)\quad \begin{aligned} P(z) = &-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\Big|\,\omega_1\,\omega_3\right)d\varepsilon + \left(\frac{i}{2\pi} - \frac{\eta_1\,\omega_1}{i\pi^3}\log z\right)\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)\,d\varepsilon + \\ &+ \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\Big|\,\omega_1\,\omega_3\right)d\varepsilon + \left[\frac{i}{2\pi} - \frac{\eta_1\,\omega_1}{i\pi^3}\log z\right]\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon. \end{aligned}$$

Pour cette fonction, les expressions $f(\theta)$, $g(\theta)$, $f_1(\theta)$, $h_1(\theta)$, existeront en général, et seront de carrés sommables, dès que les données $g_1(\theta)$, $h(\theta)$, jouiront de la même propriété, et que la fonction g_1 sera la primitive d'une fonction de carré sommable. On aura du reste en général, comme conséquence de calculs que je ne reproduis pas pour abréger,

$$f(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\,d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)\,d\varepsilon +$$

$$+\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon + \int_0^{\theta} h(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

(80)

$$f_1(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)\,d\varepsilon +$$

$$+\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

$$h_1(\theta) = -\frac{1}{q}g'_1(\theta).$$

Si enfin dans la fonction $P(z)$ on fait la transformation de z en q/z, un procédé déjà expliqué plus haut conduit sans difficulté, après réductions, à la fonction

(81)

$$Q(z) = -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega_1\,\omega_3\right)d\varepsilon - \frac{q\eta_1\omega_1}{i\pi^3}\log z\int_0^{2\pi}\varepsilon h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon -$$

$$-\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega_1\omega_3\right)d\varepsilon + \frac{\eta_1\omega_1}{i\pi^3}\log z\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

(à laquelle on peut d'ailleurs ajouter une constante réelle quelconque), et qui répond aux données $g(\theta)$ et $h_1(\theta)$. On suppose toujours

$$\int_0^{2\pi} h_1(\theta)\,d\theta = 0.$$

Et dans les mêmes conditions que plus haut, on a les expressions, donnant naissance à des conclusions analogues à celles qu'on a déjà dites,

$$
(82)\quad
\begin{aligned}
f(\theta) &= -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \sigma_3 \frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{q\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon - \\
&\qquad - \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\,d\varepsilon, \\
f_1(\theta) &= -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \sigma \frac{\omega_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\,d\varepsilon - \frac{q\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon - \\
&\qquad - \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\,d\varepsilon, \\
g_1(\theta) &= -q\int_0^{\theta} h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\,d\varepsilon, \\
h(\theta) &= g'(\theta).
\end{aligned}
$$

§ 8. La simple comparaison des résultats qui précèdent, permet d'écrire à côté de certaines équations intégrales, une solution de celles-ci. Je citerai rapidement ci-dessous quelques uns des plus simples parmi les ensembles de formules qu'on peut obtenir de cette manière. Je n'ai pas besoin de redire que nombre des intégrales qui vont être écrites doivent être entendues comme égales à leur valeur principale, et qu'on pourrait éviter cette convention en introduisant, comme on l'a déjà indiqué, à la place d'une expression telle que $\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon$ une autre de la forme $\int_0^{2\pi}[f(\varepsilon)-f(\theta)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon$, qui est reliée simplement à la première.

Si l'on envisage une fonction régulière de z donné dans le domaine annulaire, soit par la connaissance de $f(\theta)$ et $f_1(\theta)$, soit par celle de $g(\theta)$ et $g_1(\theta)$, il est clair qu'il résulte des paragraphes 2 et 3, que les systèmes d'équations

$$
(83)\quad
\begin{aligned}
g(\theta) &= \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + C_1, \\
g_1(\theta) &= \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi^2}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + C_1,
\end{aligned}
$$

et

(84)
$$f(\theta) = -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\,\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + C_2,$$
$$f_1(\theta) = -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\,\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + C_2,$$

seront réciproques les uns des autres; les constantes C_1 et C_2 y sont d'ailleurs liées aux données par les relations

(85)
$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,d\theta = \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\theta[g(\theta)-g_1(\theta)]\,d\theta + 2\pi C_2,$$
$$\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} g_1(\theta)\,d\theta = -\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\theta[f(\theta)-f_1(\theta)]\,d\theta + 2\pi C_1.$$

Si f et f_1 sont de carrés sommables, il en est de même de g et g_1, et réciproquement.

Le cas des données f, f_1, d'une part, f, g_1 d'autre part, permet de même d'écrire les équations réciproques

(86)
$$g_1(\theta) = \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\,\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon[f(\varepsilon)-f_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon,$$
$$f_1(\theta) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,d\log\xi_{30}\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right] +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\log\xi_{30}\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right].$$

Si notamment on sait que $\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,d\theta = 0$, on peut plus simplement écrire les relations

$$g_1(\theta) = -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

(87)

$$f_1(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\log\xi_{30}\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\middle|\omega'_1\omega'_3\right],$$

dont chacune donne une solution de l'autre.

Les données f, f_1, et les données f, h_1, indiquent les relations, qu'on doit rapprocher,

$$h_1(\theta) = \frac{\omega_1^2}{\pi^3 q}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\wp\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\omega_3\right]d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2 q}\sum_j [f_1(\theta_j+0)-f(\theta_j-0)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\theta_j) +$$

(88)

$$+\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}f_1(-0) + \frac{\omega_1}{\pi^2 q}\int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

$$f_1(\theta) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,d\log\xi_{30}\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\right] + \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\,d\varepsilon.$$

Supposant $f=0$, et f_1 continu, on a en même temps, dès que f_1 possède une dérivée sommable,

$$(89)\qquad h_1(\theta) = \frac{\omega_1}{\pi^2 q}\int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}f_1(-0)$$

et

$$(90)\qquad f_1(\theta) = \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\,d\varepsilon.$$

Des données g, f_1, ou g, g_1, on tire de même les équations

$$f_1(\theta) = -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi^2}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon +$$

(91)

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon[g(\varepsilon)-g_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon,$$

$$g_1(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d \log \xi_{30} \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{1}{i\pi}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right],$$

on peut y faire $g = 0$ si l'on est assuré que $\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\, d\theta = 0$.

Les données g, f_1, et g, h_1 donnent, en supposant par exemple f_1 continu et de dérivée sommable,

$$(92)\quad \begin{aligned} h_1(\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon) d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \\ &\quad + \frac{\omega'^2_1}{i\pi^3 q}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\left[\wp\left\{\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right\} - \wp\left\{\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\right\}\right] d\varepsilon, \\ f_1(\theta) &= -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \sigma\frac{\omega_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\, d\varepsilon - \frac{q\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon h_1(\varepsilon)\, d\varepsilon - \\ &\quad - \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\, d\varepsilon + \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\, d\varepsilon + C. \end{aligned}$$

En négligeant g, qui ne joue qu'un rôle épisodique, on obtient les relations plus simples

$$(93)\quad \begin{aligned} h_1(\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon) d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon), \\ f_1(\theta) &= -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\, d\varepsilon - \frac{q\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon h_1(\varepsilon)\, d\varepsilon + C. \end{aligned}$$

Partons des données h, f_1, et h, g_1, en supposant tout de suite, pour simplifier, $h = 0$; on a les deux équations

$$(94)\quad \begin{aligned} f_1(\theta) &= \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\, d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\, d\varepsilon + C', \\ g_1(\theta) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + C''. \end{aligned}$$

On s'assure bien simplement que les deux constantes C' et C'' ont les valeurs suivantes

$$
(95)\qquad
\begin{aligned}
C' &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon\, g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon,\\
C'' &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon,
\end{aligned}
$$

par exemple en observant que les intégrales

$$\int_0^{2\pi}\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\theta$$

et

$$\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\varepsilon}\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\theta$$

ont pour valeurs principales $2\pi\eta_1\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)$ et zéro.

Enfin, des données h, f_1, et h, h_1, nous tirerons, en supposant f_1 continue, et pourvue d'une dérivée, et en supposant de suite $h = 0$, les deux équations

$$
(96)\qquad
\begin{aligned}
h_1(\theta) &= \frac{1}{\pi q}\int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon)\,d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon),\\
f_1(\theta) &= -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\,d\varepsilon - \frac{q\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon\, h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon + C^{te}.
\end{aligned}
$$

Il est clair qu'on pourrait obtenir encore un grand nombre d'équations ou de groupes d'équations simultanées, à côté desquels les inconnues simultanées pourraient être explicitées. Nous nous contenterons ici des relations qui précèdent, et dont certaines sont effectivement utiles dans diverses questions, d'Hydrodynamique notamment.

II.

§ 9. Je veux maintenant obtenir, en partant des considérations développées dans le Chapitre qui précède, quelques résultats relatifs à une fonction analytique dans un rectangle donné, — résultats que je veux appliquer un peu plus loin.

Reprenons tout d'abord la fonction

$$(97)\quad \begin{aligned} A(z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega_1\,\omega_3\right)d\varepsilon - \\ - \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\,\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega_1\,\omega_3\right)d\varepsilon \end{aligned}$$

et supposons que les fonctions périodiques f et f_1 satisfassent aux relations

$$(98)\quad \begin{aligned} f(2\pi - \varepsilon) &= -f(\varepsilon) \\ f_1(2\pi - \varepsilon) &= -f_1(\varepsilon), \end{aligned}$$

moyennant lesquelles la condition, nécessaire comme on sait à l'uniformité de $A(z)$,

$$\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

est vérifiée d'elle même. Par un calcul facile, $A(z)$ devient

$$(99)\quad \begin{aligned} A_1(z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} f(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) + 2\eta_1\right]d\varepsilon - \\ - \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} f_1(\varepsilon)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) + 2\eta_1\right]d\varepsilon. \end{aligned}$$

Négligeons la constante imaginaire pure

$$\frac{2i\eta_1\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi}[f(\varepsilon) - f_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon$$

qui est sans intérêt pour nous. Il reste

$$(100)\qquad A_2(z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon -$$

$$-\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f_1(\varepsilon)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\right) - \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon\,.$$

Or cette fonction est imaginaire pure pour z réel. Cela est évident pour z réel positif (entre q et 1). Supposons z négatif, entre -1 et $-q$; on sait qu'on peut considérer seulement pour $\log z$ la valeur

$$\log z = \log\varrho + i\pi \qquad (\varrho = |z|)\,.$$

Or pour cette valeur du logarithme, la fonction $A_2(z)$ prend d'après des formules connues (T. M., XII, 5) la valeur

$$\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f(\varepsilon)\left[\zeta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon -$$

$$-\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f_1(\varepsilon)\left[\zeta_2\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta_2\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon$$

ce qui est visiblement imaginaire pure.

Il en résulte que la partie réelle de $A_2(z)$ a les valeurs: $f(\theta)$ ou $f_1(\theta)$ sur les demi-circonférences de rayons respectifs 1 et q, et zéro sur les segments rectilignes -1, $-q$; q, $+1$.

Faisons maintenant la transformation

$$(101)\qquad Z = X + iY = \frac{\lambda}{i}\log z$$

λ étant une constante réelle positive quelconque, que nous préciserons ultérieurement. A la demi-couronne circulaire correspondra un domaine rectangulaire dont deux côtés seront portés par les axes du plan XOY, et dont les dimensions seront: dans le sens horizontal, $a = \lambda\pi$, et dans le sens vertical, $b = \lambda\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}$. La fonction de Z

$$(102)\qquad A^1(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{\lambda\pi}Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{\lambda\pi}Z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon -$$

$$-\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f_1(\varepsilon)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\lambda\pi}Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\lambda\pi}Z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon$$

a sa partie réelle nulle sur les bords verticaux, et égale à $f(\theta)$ ou à $f_1(\theta)$ aux points d'abscisse $\lambda\theta$, sur les bords horizontaux (le côté inférieur correspond à $f(\theta)$). Tout ce qui a été dit au sujet de la fonction analytique dans une couronne, se transpose immédiatement sans aucun changement, dans le nouveau domaine rectangulaire.

Partons maintenant de la fonction, écrite avec d'autres périodes ω'_1 et ω'_3,

$$A_3(z) = \frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_2(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega'_1\omega'_3\right)d\varepsilon -$$

$$-\frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_3(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega'_1\omega'_3\right)d\varepsilon.$$

D'après ce qui précède, la fonction

$$A_4(z) = \frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} f_2(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon - \tag{103}$$

$$-\frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} f_3(\varepsilon)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon$$

a une partie réelle égale à $f_2(\theta)$ ou $f_3(\theta)$ sur les demi-circonférences de rayon respectifs 1 et q' $\left(q' = e^{-\frac{\pi\omega'_3}{i\omega'_1}}\right)$, et à zéro le long des segments rectilignes -1, $-q'$; q', $+1$. μ étant une constante réelle positive, posons

$$Z = X + iY = \mu(\log z - \log q'). \tag{104}$$

A la demi-couronne correspond dans le plan Z un rectangle dont deux côtés sont sur les axes OX et OY, et dont les dimensions sont: suivant OX, $a = \mu\frac{\pi\omega'_3}{i\omega'_1}$, et suivant OY, $b = \mu\pi$. Par suite la fonction de Z (après simplifications immédiates)

$$B^1(Z) = \frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} f_2(\varepsilon)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi\mu}Z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega'_1\omega'_3\right) - \zeta_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi\mu}Z + \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon - \tag{105}$$

$$-\frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} f_3(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega'_1}{i\pi\mu}Z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega'_1}{i\pi\mu}Z + \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon$$

a sa partie réelle égale à zéro sur les bords horizontaux et à $f_2(\theta)$ ou $f_3(\theta)$ sur les bords verticaux, aux points d'ordonnée $\mu\theta$ (f_2 correspond au bord droit, f_3 au bord gauche.)

Faisons maintenant coïncider les deux rectangles ci-dessus, en supposant, ce qui est évidemment permis, ses dimensions égales à ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$. On s'assure facilement qu'il suffit de poser

$$\lambda = \frac{\omega_1}{\pi}, \qquad \mu = \frac{\omega'_1}{\pi}$$

$$\omega'_1 = -i\omega_3, \qquad \omega'_3 = i\omega_1.$$

Dans ces conditions, il y a lieu de ne conserver que des fonctions elliptiques correspondant aux demi-périodes ω_1 et ω_3. A cet effet, observons que

$$\zeta(u \,|\, \omega'_1 \omega'_3) = \zeta(u \,|\, -i\omega_3, i\omega_1) = \zeta(u \,|\, i\omega_1, i\omega_3)$$

puis

$$\zeta(u \,|\, i\omega_1, i\omega_3) = -i\zeta\left(\frac{u}{i} \,\middle|\, \omega_1 \omega_3\right).$$

On a encore

$$\zeta_3(u \,|\, \omega'_1 \omega'_3) = \zeta(u + \omega'_3 \,|\, \omega'_1 \omega'_3) - \zeta(\omega'_3 \,|\, \omega'_1 \omega'_3)$$

c'est à dire

$$\zeta_3(u \,|\, \omega'_1 \omega'_3) = -i\left[\zeta\left(\frac{u}{i} + \omega_1 \,|\, \omega_1 \omega_3\right) - \zeta(\omega_1 \,|\, \omega_1 \omega_3)\right] = -i\zeta_1\left(\frac{u}{i} \,\middle|\, \omega_1 \omega_3\right).$$

Par suite la fonction $B^1(Z)$ prend la forme

$$(106) \qquad B^1(Z) = \frac{i\omega_3}{\pi^2}\int_0^\pi f_2(\varepsilon)\left[\zeta_1\left(Z - \frac{\omega_3}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta_1\left(Z + \frac{\omega_3}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon -$$

$$- \frac{i\omega_3}{\pi^2}\int_0^\pi f_3(\varepsilon)\left[\zeta\left(Z - \frac{\omega_3}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta\left(Z + \frac{\omega_3}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon.$$

La fonction $A^1(Z) + B^1(Z)$ a donc évidemment pour partie réelle une fonction harmonique qui résoud le problème de Dirichlet dans le rectangle considéré. Cette résolution n'est d'ailleurs pas entièrement nouvelle, puisque la fonction de Green pour le rectangle est déjà connue (cf. par exemple Goursat, Analyse, t. III).

En faisant le changement de notations

$$f\left(\frac{\pi}{\omega_1}t\right)=F(t),\quad f_1\left(\frac{\pi}{\omega_1}t\right)=F_2(t),\quad f_2\left(\frac{i\pi}{\omega_3}t\right)=F_1(t),\quad f_3\left(\frac{i\pi}{\omega_3}t\right)=F_3(t),$$

on voit sans peine que la somme $A^1(Z)+B^1(Z)$ en question peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}T(Z)=\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1}F(t)[\zeta(Z-t)-\zeta(Z+t)]dt-\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1}F_2(t)[\zeta_3(Z-t)-\zeta_3(Z+t)]dt-\\ -\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}F_1(t)[\zeta_1(Z-it)-\zeta_1(Z+it)]dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}F_3(t)[\zeta(Z-it)-\zeta(Z+it)]dt.\end{aligned}\tag{107}$$

Cette fonction analytique, dont la partie réelle prend sur les bords du rectangle les valeurs: $F(X)$ pour $Z=X(0<X<\omega_1)$, $F_1(Y)$ pour $Z=\omega_1+iY\left(0<Y<\frac{\omega_3}{i}\right)$, $F_2(X)$ pour $Z=\omega_3+X(0<X<\omega_1)$, $F_3(Y)$ pour $Z=iY\left(0<Y<\frac{\omega_3}{i}\right)$, jouit dans ce domaine, de toutes les propriétés analogues à celles qu'on a rencontrées dans le Chapitre précédent pour les fonctions analogues.

Notamment, la valeur de la partie imaginaire de $T(Z)$ sur les bords verticaux, par exemple, sera bien définie dans des conditions déjà précisées, et auront pour expression en général: pour $Z=\omega_1+iY$,

$$\begin{aligned}G_1(Y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1}F(t)[\zeta_1(iY-t)-\zeta_1(iY+t)]dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1}F_2(t)[\zeta_2(iY-t)-\zeta_2(iY+t)]dt-\\ -\frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}F_1(t)[\zeta(iY-it)-\zeta(iY+it)]dt+\frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}F_3(t)[\zeta_1(iY-it)-\zeta_1(iY+it)]dt\end{aligned}\tag{108}$$

où la troisième intégrale a sa valeur principale; et pour $Z=iY$,

$$\begin{aligned}G_3(Y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1}F(t)[\zeta(iY-t)-\zeta(iY+t)]dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1}F_2(t)[\zeta_3(iY-t)-\zeta_3(iY+t)]dt-\\ -\frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}F_1(t)[\zeta_1(iY-it)-\zeta_1(iY+it)]dt+\frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}F_3(t)[\zeta(iY-it)-\zeta(iY+it)]dt\end{aligned}\tag{109}$$

où c'est la quatrième intégrale qui a sa valeur principale.

§ 10. Je veux maintenant traiter un nouveau problème, par un procédé également déduit du Chapitre précédent. Il s'agit de trouver une fonction analytique définie dans le rectangle ci-dessus, par les valeurs de sa partie réelle sur les bords horizontaux ($F(X)$ et $F_2(X)$, aux points d'abscisse X, F correspondant au bord inférieur), et par les valeurs de la partie imaginaire sur les bords verticaux ($G_1(Y)$ et $G_3(Y)$ aux points d'ordonnée Y, G_1 correspondant au bord droit).

Partons encore de la même fonction $A(z)$ que précédemment, mais supposons-y

$$\begin{aligned} f(2\pi-\varepsilon) &= f(\varepsilon) \\ f_1(2\pi-\varepsilon) &= f_1(\varepsilon) \end{aligned} \tag{110}$$

de sorte que la condition de régularité devienne

$$\int_0^\pi f(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^\pi f_1(\varepsilon)d\varepsilon. \tag{111}$$

La fonction $A(z)$ se met alors aisément sous la forme suivante

$$\begin{aligned} &\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)+\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z+\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon- \\ &\qquad -\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f_1(\varepsilon)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)+\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z+\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon. \end{aligned} \tag{112}$$

On s'assure sans grande difficulté que cette fonction est réelle lorsque z est un point des segments rectilignes -1, $-q$; q, $+1$, de l'axe réel. Par suite, en posant

$$\frac{\omega_1}{i\pi}\log z = Z = X+iY,\quad f\left(\frac{\omega_1}{\pi}t\right) = F(t),\quad f_1\left(\frac{\omega_1}{\pi}t\right) = F_2(t),$$

et opérant une transformation analogue à une déjà faite, la fonction de Z

$$S(Z) = \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} F(t)[\zeta(Z-t)+\zeta(Z+t)]dt - \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} F_2(t)[\zeta_3(Z-t)+\zeta_3(Z+t)]dt \tag{113}$$

a une partie réelle égale à $F(X)$ ou $F_2(X)$ sur les bords horizontaux du rectangle, et une partie imaginaire nulle sur les bords verticaux. D'ailleurs on a la condition

(114) $$\int_0^{\omega_1} F(t)dt = \int_0^{\omega_1} F_2(t)dt.$$

Observons encore que la fonction $iS(Z|\omega'_1\omega'_3)$ construite avec de nouvelles périodes $2\omega'_1$ et $2\omega'_3$, aurait sa partie imaginaire égale à F ou à F_2 sur les bords horizontaux d'un rectangle analogue au précédent, et sa partie réelle nulle sur les bords verticaux. On en déduit qu'en posant

$$Z' = -i\omega'_3 + iZ$$

la fonction $iS\left(\frac{Z' + i\omega'_3}{i}\middle|\omega'_1\omega'_3\right)$ dans le plan Z' sera définie dans un rectangle dont deux côtés seront portés par les axes (les dimensions de ce rectangle étant $-i\omega'_3$ dans le sens horizontal, et ω'_1 dans le sens vertical); la partie réelle de cette nouvelle fonction sera nulle sur les bords horizontaux, et sa partie imaginaire sera $F(Y)$ ou $F_2(Y)$ aux points d'ordonnée Y, sur les bords verticaux, (F à droite). Donc la fonction

(115) $$\begin{aligned} S_1(Z) = &-\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega'_1} G_1(t)\left[\zeta_3\left(\frac{Z + i\omega'_3}{i} - t\middle|\omega'_1\omega'_3\right) + \zeta\left(\frac{Z + i\omega'_3}{i} + t\middle|\omega'_1\omega'_3\right)\right]dt + \\ &+\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega'_1} G_3(t)\left[\zeta_3\left(\frac{Z + i\omega'_3}{i} - t\middle|\omega'_1\omega'_3\right) + \zeta_3\left(\frac{Z + i\omega'_3}{i} + t\middle|\omega'_1\omega'_3\right)\right]dt \end{aligned}$$

avec, au moins momentanément, la condition $\int_0^{\omega'_1} G_1(t)dt = \int_0^{\omega'_1} G_3(t)dt$, répond à la donnée de la partie imaginaire (G_1 et G_3) sur les bords verticaux, la partie réelle étant nulle sur les autres bords du nouveau rectangle.

Faisons maintenant coïncider les deux rectangles en posant

$$\omega_1 = -i\omega'_3, \quad \omega_3 = i\omega'_1$$

et observons que

$$\zeta\left(\frac{Z + i\omega'_3}{i} - t\middle|\omega'_1\omega'_3\right) = -i\zeta\left(-Z - \omega_1 - \frac{t}{i}\middle|\omega_1\,\omega_3\right) = i\zeta(Z + \omega_1 - it)$$

et que de même

$$\zeta_3\left(\frac{Z+i\omega'_3}{i}-t\,\Big|\,\omega'_1\omega'_3\right)=i\zeta_1(Z+\omega_1-it\,|\,\omega_1\omega_3)$$

il vient

$$S_1(Z)=-\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}G_1(t)[\zeta(Z+\omega_1-it)+\zeta(Z+\omega_1+it)]dt+$$
$$+\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}G_3(t)[\zeta_1(Z+\omega_1-it)+\zeta_1(Z+\omega_1+it)]dt$$

c'est à dire encore, d'après les formules (T. M., XII, 5) et d'après la condition supposée entre G_1 et G_3,

$$(116)\qquad \begin{aligned} S_1(Z)&=-\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}G_1(t)[\zeta_1(Z-it)+\zeta_1(Z+it)]dt+\\ &+\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}G_3(t)[\zeta(Z-it)+\zeta(Z+it)]dt.\end{aligned}$$

Par suite enfin, la fonction $S(Z)+S_1(Z)$, ou bien

$$(117)\qquad \begin{aligned} U(Z)&=\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1}F(t)[\zeta(Z-t)+\zeta(Z+t)]dt-\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1}F_2(t)[\zeta_3(Z-t)+\zeta_3(Z+t)]dt-\\ &-\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}G_1(t)[\zeta_1(Z-it)+\zeta_1(Z+it)]dt+\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}G_3(t)[\zeta(Z-it)+\zeta(Z+it)]dt\end{aligned}$$

répond aux données F, F_2, G_1, G_3, dans le rectangle de dimensions ω_1, $\frac{\omega_3}{i}$. Momentanément, on a supposé les deux conditions

$$(118)\qquad \int_0^{\omega_1}F(t)dt=\int_0^{\omega_1}F_2(t)dt,$$

$$\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)\,dt = \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)\,dt. \tag{119}$$

Supposons que ces deux égalités ne soient pas toutes deux vérifiées, mais admettons seulement l'existence de la suivante

$$\int_0^{\omega_1} [F(t) - F_2(t)]\,dt = \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [G_1(t) - G_3(t)]\,dt \tag{120}$$

sur laquelle nous reviendrons bientôt. Considérons la fonction

$$U^*(Z) = U(Z) + ikZ,$$

où k est réel; pour cette fonction, en désignant par les mêmes lettres munies d'astérisques les éléments correspondants à ceux de la fonction U, on a

$$F^*(t) = F(t), \qquad G^*_1(t) = G_1(t) + k\omega_1,$$

$$F^*_2(t) = F_2(t) - k\frac{\omega_3}{i}, \qquad G^*_3(t) = G_3(t),$$

et par suite, à cause de la relation supposée, on aura

$$\int_0^{\omega_1} F^*(t)\,dt = \int_0^{\omega_1} F^*_2(t)\,dt$$

et

$$\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G^*_1(t)\,dt = \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G^*_3(t)\,dt,$$

dès que l'on prendra la constante k telle que

$$ik\omega_1\omega_3 = \int_0^{\omega_1} (F - F_2)\,dt = \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} (G_1 - G_3)\,dt.$$

On pourra alors évidemment écrire

$$
\begin{aligned}
U(Z) = - ikZ + \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} F(t)\,[\zeta(Z-t) + \zeta(Z+t)]\,dt\, - \\
- \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1}\left[F_2(t) - k\frac{\omega_3}{i}\right][\zeta_3(Z-t) + \zeta_3(Z+t)]\,dt\, - \\
- \frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [G_1(t) + k\omega_1][\zeta_1(Z-it) + \zeta_1(Z+it)]\,dt\, + \\
+ \frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)\,[\zeta(Z-it) + \zeta(Z+it)]\,dt.
\end{aligned}
\tag{121}
$$

Or on a, par un calcul simple,

$$
\int_0^{\omega_1}[\zeta_3(Z-t) + \zeta_3(Z+t)]\,dt = 2\eta_1 Z,
$$

et de même

$$
\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}[\zeta_1(Z-it) + \zeta_1(Z+it)]\,dt = \frac{1}{i}\,2\eta_3 Z.
$$

Par suite le coëfficient de k dans l'expression de $U(Z)$ est

$$
- iZ + \frac{2Z}{\pi}(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1),
$$

c'est à dire zéro d'après une relation connue. La formule (117) est donc valable dans tous les cas moyennant la seule condition (120).

Cette dernière condition est d'ailleurs nécessaire. Soient en effet $F + iG$, $F_1 + iG_1$, etc., avec les mêmes notations que plus haut, les valeurs sur les côtés du rectangle, d'une fonction analytique $F(z)$ dans ce domaine. On sait que l'intégrale

$$
\int \frac{F(Z)\,dZ}{Z-u},
$$

prise le long du contour total du rectangle, est nulle pour tout point u extérieur à celui-ci, c'est à dire qu'on a

$$0=\int_0^{\omega_1} u\,\frac{F(t)+iG(t)}{t-u}\,dt+\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} u\,\frac{F_1(t)+iG_1(t)}{it+\omega_1-u}\,i\,dt-$$

$$-\int_0^{\omega_1} u\,\frac{F_2(t)+iG_2(t)}{\omega_3+t-u}\,dt-\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} u\,\frac{F_3(t)+iG_3(t)}{it-u}\,i\,dt.$$

Supposons le point u très éloigné dans le plan, et considérons la partie réelle de l'expression qu'on vient d'écrire, il viendra de suite la relation qu'on voulait obtenir,

$$\int_0^{\omega_1}[F(t)-F_2(t)]\,dt-\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}[G_1(t)-G_3(t)]\,dt=0.$$

A la fonction $U(Z)$ s'appliquent immédiatement tous les résultats obtenus dans le premier Chapitre à propos des domaines annulaires. Notamment, dans des conditions bien connues, la partie réelle de $U(Z)$ sur les bords verticaux du rectangle sera en général: pour $Z=iY$,

$$F_3(Y)=\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1}F(t)[\zeta(iY-t)+\zeta(iY+t)]\,dt-$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1}F_2(t)[\zeta_3(iY-t)+\zeta_3(iY+t)]\,dt- \tag{122}$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}G_1(t)[\zeta_1(iY-it)+\zeta_1(iY+it)]\,dt+\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}G_3(t)[\zeta(iY-it)+\zeta(iY+it)]\,dt$$

et pour $Z=\omega_1+iX$, on a de même

$$F_1(Y)=\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1}F(t)[\zeta_1(iY-t)+\zeta_1(iY+t)+2\eta_1]\,dt-$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1}F_2(t)[\zeta_2(iY-t)+\zeta_2(iY+t)+2\eta_1]\,dt-$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)[\zeta(iY-it)+\zeta(iY+it)+2\eta_1)dt+$$

$$\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)[\zeta_1(iY-it)+\zeta_1(iY+it)+2\eta_1]\,dt$$

qui se réduit à

$$F_1(Y)=\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} F(t)[\zeta_1(iY-t)+\zeta_1(iY+t)]\,dt-\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} F_2(t)[\zeta_2(iY-t)+\zeta_2(iY+t)]\,dt-$$

(123)

$$-\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)[\zeta(iY-it)+\zeta(iY+it)]\,dt+\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)[\zeta_1(iY-it)+\zeta_1(iY+it)]\,dt,$$

à cause de la relation (120). La quatrième intégrale dans l'expression de F_3, et la troisième dans l'expression de F_1, doivent être considérées comme remplacées par leur valeurs principales.

On pourrait évidemment, avec une grande facilité, obtenir par les mêmes méthodes qu'on vient d'exposer, une fonction analytique dont la partie réelle, la partie imaginaire ou la dérivée normale de la partie réelle, ou encore des combinaisons linéaires de ces quantités, seraient données sur les bords du rectangle considéré. Nous laisserons de côté ces généralisations dont nous n'aurons pas besoin. Remarquons simplement ici, que les développements précédents nous permettent d'écrire des systèmes d'équations intégrales et les solutions correspondantes: par exemple on obtient de tels systèmes en comparant les valeurs d'une même fonction analytique dans le rectangle considéré précédemment, sur les bords verticaux des frontières, la fonction étant supposée définie, d'abord par la donnée de F, F_1, F_2, F_3, puis par la donnée de F, F_2, G_1, G_3.

Dans les formules qu'on trouve ainsi, les fonctions F et F_2 ne jouant pas un rôle essentiel, remplaçons-les par zéro, en supposant

$$\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}[G_1(t)-G_3(t)]\,dt=0.$$

Il viendra les deux systèmes suivants, où C est une constante,

$$
(124)\quad \begin{cases}
G_1(\theta) = -\dfrac{1}{i\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_1(t)\,[\zeta(i\theta - it) - \zeta(i\theta + it)]\,dt\, + \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{i\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_3(t)\,[\zeta_1(i\theta - it) - \zeta_1(i\theta + it)]\,dt + C, \\
G_3(\theta) = -\dfrac{1}{i\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_1(t)\,[\zeta_1(i\theta - it) - \zeta_1(i\theta + it)]\,dt\, + \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{i\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_3(t)\,[\zeta(i\theta - it) - \zeta(i\theta + it)]\,dt + C,
\end{cases}
$$

$$
(125)\quad \begin{cases}
F_1(\theta) = -\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)\,[\zeta(i\theta - it) + \zeta(i\theta + it)\,dt\, + \\
\qquad\qquad + \dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)\,[\zeta_1(i\theta - it) + \zeta_1(i\theta + it)]\,dt, \\
F_3(\theta) = -\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)\,[\zeta_1(i\theta - it) + \zeta_1(i\theta + it)]\,dt\, + \\
\qquad\qquad + \dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)\,[\zeta(i\theta - it) + \zeta(i\theta + it)]\,dt.
\end{cases}
$$

Les équations des deux groupes sont réciproques, c'est à dire donnent la solution les unes des autres, dans les conditions énoncées.

On remarquera que l'addition d'une même constante quelconque à G_1 et à G_3 ne modifie pas les deux dernières équations, à cause des relations, faciles à démontrer,

$$
\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [\zeta_1(i\theta - it) + \zeta_1(i\theta + it)]\,dt = \text{val. ppale de} \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [\zeta(i\theta - it) + \zeta(i\theta + it)]\,dt = 2\eta_3\theta.
$$

III.

§. 11. J'envisagerai dans ce Chapitre la solution de la question suivante, qu'on rencontre souvent en Hydrodynamique (cf. notamment deux Notes aux C. R. Acad. sc. Paris, 17 juin 1912, 10 févr. 1913), à savoir: trouver, quand il est possible, une fonction analytique régulière dans un cercle $|z| = 1$, du plan z, dont la partie réelle soit donnée sur une portion de la circonférence frontière, et la partie imaginaire sur le reste de la circonférence. Ce reste peut être constitué par un arc c ou par deux arcs c et c_1, de cette circonférence.

Plaçons-nous d'abord dans le premier cas, et soient $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, les extrémités de l'arc c (pour les points $e^{i\theta}$ de l'arc c, on aura par exemple $\alpha < \theta < \beta$). Soit $f(\theta)$ la valeur donnée de la partie réelle sur l'arc complémentaire de c; soit $l(\theta)$ la valeur (inconnue) de la partie réelle de la fonction cherchée, sur l'arc c, et enfin soit $g(\theta)$ la valeur donnée de la partie imaginaire de la même fonction sur le même arc c. Bien entendu, dans tout ce qui suit, il est admis implicitement qu'on a par définition des relations telles que

$$f(\theta + 2n\pi) = f(\theta).$$

Ceci posé, on a d'après le Chapitre 1, sur l'arc c, pour $\alpha < \theta < \beta$,

$$(126) \qquad g(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{l(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_\beta^{\alpha+2\pi} \frac{f(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}d\varepsilon + C^{\text{te}};$$

l'intégrale relative à $l(\theta)$ est égale à sa valeur principale, par convention. D'ailleurs, en général, on peut encore mettre cette équation sous la forme

$$(127) \quad \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{l(\varepsilon)-l(\theta)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}d\varepsilon + \frac{l(\theta)}{\pi}\log\frac{\sin\frac{\varepsilon-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta-\varepsilon}{2}} = g(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_\beta^{\alpha+2\pi}\frac{f(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}d\varepsilon - C.$$

D'après le Chapitre I, il est clair que la recherche de la fonction de z demandée, revient à la résolution par rapport à l'inconnue $l(\theta)$, de l'équation intégrale qu'on vient d'écrire. La solution peut s'en obtenir indirectement comme on va l'expliquer (cf. C. R. 23 oct. 1911). Divers artifices conduisent à ce résultat. Je vais exposer celui qui donne la solution sous la forme même où j'ai eu effectivement à l'appliquer dans d'autres recherches, dont on trouvera ailleurs l'exposé.

Je commencerai par remplacer l'aire du cercle où la fonction est cherchée, par l'aire d'un demi cercle de rayon 1 d'un nouveau plan Z, au moyen d'une représentation conforme qui fasse correspondre l'arc c, au diamètre horizontal situé sur l'axe OX du nouveau plan, et l'arc complémentaire de c, à la demi circonférence $|Z|=1$ au dessus de OX. Comme il est bien connu, une telle représentation du plan z sur le plan Z est obtenue par une relation de la forme

$$N\frac{z-e^{i\alpha}}{z-e^{i\beta}}=\left(\frac{Z+1}{Z-1}\right)^2, \tag{128}$$

où la constante N est quelconque.

Pour simplifier, je choisirai

$$N=-e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}},$$

de telle manière que le point $Z=0$ corresponde au point $z=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$, milieu de l'arc c. Explicitons alors les équations qui font correspondre les points des frontières.

Voyons d'abord la correspondance entre les bords circulaires. En posant

$$Z=e^{i\varphi},$$

$$z=e^{i\theta},$$

un calcul facile montre qu'on a

$$\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}-\cos\left(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{1-\cos(\theta-\beta)},$$

ou encore

$$\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}. \tag{129}$$

D'une manière analogue, on verrait qu'entre un point $Z=X$ du diamètre limite, et un point $z=e^{i\theta}$ de l'arc c, on a la relation

$$\left(\frac{X+1}{X-1}\right)^2=\frac{\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta-\theta}{2}},$$

ou encore

$$\frac{X+1}{1-X} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta-\theta}{2}}}, \tag{130}$$

le radical étant arithmétique.

En conséquence, à la fonction $f(\theta)$ donnée sur l'arc complémentaire de c, il correspondra une fonction $F(\varphi)$ définie au moyen de (129). Comme on a alors

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}},$$

ou si l'on veut

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\cos\varphi\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4} - \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}}{\cos\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}},$$

il en résulte

$$F(\varphi) = f\left[2\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\varphi - \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}}{\cos\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}}\right]. \tag{131}$$

De même, à $g(\theta)$ correspondra une fonction $G(X)$; en observant que (130) donne

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\left(\frac{X+1}{X-1}\right)^2}{\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\left(\frac{X+1}{X-1}\right)^2},$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{(1+X^2)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4} - 2X\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}}{1+X^2+2X\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}},$$

on aura

$$G(X) = g\left[2\operatorname{arc\,tg}\frac{(1+X^2)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4} - 2X\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}}{1+X^2+2X\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}}\right]. \tag{132}$$

On est alors ramené à trouver une fonction analytique dans le demi-cercle, dont la partie réelle soit $F(\varphi)$ au point $e^{i\varphi}$ sur la demi-circonférence, et dont la partie imaginaire soit $G(X)$ au point d'abscisse X sur le diamètre frontière.

A cet effet, envisageons d'abord une fonction analytique régulière dans le demi-plan supérieur, et dont la partie imaginaire soit $G(X)$ pour $Z=X(|X|<1)$. L'intégrale

$$H(Z)=\frac{1}{\pi}\int\frac{G(u)}{u-Z}du, \tag{133}$$

prise le long de l'axe réel dans le sens positif, représente une telle fonction si $G(X)$ est une fonction (sommable) définie sur l'axe réel par la condition: 1° d'être égale à $G(X)$ sur le segment $-1, +1$, de l'axe OX; 2° d'être égale en dehors de ce segment, à des fonctions choisies arbitrairement, de manière toutefois que $G(X)$ soit sommable entre $-\infty$ et $+\infty$. Par exemple on pourrait prendre

$$H(Z)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{G(u)}{u-Z}du. \tag{134}$$

Les propriétés d'une telle fonction $H(Z)$ ont été déjà étudiées bien souvent, et sont bien connues. Cette fonction donne lieu à des résultats analogues à ceux qui ont été rappelés dans le Chapitre I au sujet de la fonction $iA(z)$, — à laquelle on peut du reste la ramener par une inversion qui transforme en un demi-plan la surface du cercle considéré à cet endroit.

La fonction $H(Z)$ une fois construite, est bien déterminée sur la circonférence $|Z|=1$. Pour $Z=e^{i\varphi}$, sa partie réelle est

$$\mathfrak{H}(\varphi)=\frac{1}{\pi}\int G(u)\frac{u-\cos\varphi}{1-2u\cos\varphi+u^2}du. \tag{135}$$

Il est à peine besoin de faire observer que cette dernière expression est bien déterminée sur la demi-circonférence, mais qu'elle n'est pas valable sans précaution aux points extrêmes situés sur l'axe réel: en ces points, pour $\varphi=0$ ou π, l'intégrale doit être réduite à sa valeur principale.

Cela posé, la fonction

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[F(\varepsilon)-\mathfrak{H}(\varepsilon)]\frac{1-Z^2}{1-2Z\cos\varepsilon+Z^2}d\varepsilon, \tag{136}$$

qui est un cas particulier de la fonction $A(z)$ du Chapitre I (lorsque les données sont symétriques par rapport à l'axe réel), est réelle sur l'axe réel du plan Z, et sa partie réelle tend vers $F(\varphi)-\mathfrak{H}(\varphi)$ au point $e^{i\varphi}$ de la frontière. Donc la fonction analytique

$$(137) \qquad K(Z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(u)\,du}{u-Z}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[F(\varepsilon)-\mathfrak{H}(\varepsilon)]\frac{1-Z^2}{1-2Z\cos\varepsilon+Z^2}d\varepsilon,$$

répond à la question proposée.

L'indétermination qui intervient dans la définition de $G(X)$, facilite évidemment les calculs, comme on s'en rend compte sur l'exemple donné plus loin.

Ce qu'on vient de dire suppose la fonction $\mathfrak{H}(\varepsilon)$ sommable entre 0 et π. Or ce point ne présente en général aucune difficulté, dès que la fonction $G(X)$ est elle-même sommable, et que la partie réelle de la fonction $H(Z)$ qui en résulte, existe et est finie aux points $Z \pm 1$. On a vu les conditions pour qu'il en soit ainsi: il suffit par exemple, que $G(X)$ au voisinage de $X=\pm 1$, soit continue, et y satisfasse à une condition de LIPSCHITZ. Dans ces conditions, il est clair que $\mathfrak{H}(\varepsilon)$ sera bornée dans l'intervalle considéré, et par suite sera sommable.

Pour donner un exemple simple du mode de construction dont on vient de parler, supposons que les valeurs de $F(\varphi)$ étant quelconques, celles de $G(X)$ soient égales: à une constante a sur le segment $0,1$, et à une constante b sur le segment $-1,0$. Il est évident sans calcul que la fonction

$$ia+\frac{b-a}{\pi}\log Z$$

répond à ces valeurs de la partie imaginaire (on suppose le logarithme réel pour Z réel positif). Comme sa partie réelle est nulle pour $Z=e^{i\varphi}$, la fonction de Z

$$ia+\frac{b-a}{\pi}\log Z+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}F(\varepsilon)\frac{1-Z^2}{1-2Z\cos\varepsilon+Z^2}d\varepsilon$$

répond au problème proposé avec ces valeurs particulières des données.

Dans le cas général, remarquons que la valeur de la partie réelle de la fonction de Z obtenue, est sur l'axe réel, entre 1 et -1,

$$(138) \qquad L(X)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(u)\,du}{u-X}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[F(\varepsilon)-\mathfrak{H}(\varepsilon)]\frac{1-X^2}{1-2X\cos\varepsilon+X^2}d\varepsilon,$$

où la première intégrale est considérée comme égale à sa valeur principale. Par la transformation

$$X = \frac{\sqrt{\dfrac{\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\beta-\theta}{2}}} - 1}{\sqrt{\dfrac{\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\beta-\theta}{2}}} + 1},$$

qui résulte de (130), la fonction

$$l(\theta) = L(X)$$

est une fonction de θ dans l'intervalle $\alpha\beta$, et qui fournit une solution explicite de l'équation intégrale écrite au début de ce Chapitre.

La fonction analytique de z, que l'on voulait déterminer, est d'ailleurs obtenue en faisant dans la fonction $K(Z)$ la transformation inverse de la transformation (128).

§ 12. Passons au cas où la circonférence dans laquelle on envisage la fonction de z, est séparée en quatre arcs, sur deux desquels, c et c_1, on donne la partie imaginaire, la partie réelle étant donnée sur les deux autres. Désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, les arguments, définis à $2n\pi$ près, des extrémités des arcs c et c_1. Nous supposerons, ce qui est toujours possible, $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \alpha + 2\pi$, et nous désignerons par $f(\theta)$, $f_1(\theta)$ les valeurs données de la partie réelle aux points $e^{i\theta}$ des arcs complémentaires de c et c_1; par $l(\theta)$ et $l_1(\theta)$ les valeurs (inconnues) de la partie réelle sur les arcs $c\,(\alpha < \theta < \beta)$ et $c_1\,(\gamma < \theta < \delta)$ par $g(\theta)$ et $g_1(\theta)$ les valeurs données de la partie imaginaire sur c et c_1. Il résulte des propriétés rappelées dans le premier chapitre, que les fonctions $l(\theta)$ et $l_1(\theta)$, dont la connaissance entraîne celle de la fonction analytique cherchée, satisfont aux deux équations simultanées

$$(139) \quad (\alpha < \theta < \beta) \; \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{l(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta-\varepsilon}{2}} + \frac{1}{2\pi}\int_\gamma^\delta \frac{l_1(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta-\varepsilon}{2}} =$$

$$= g(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_\beta^\gamma \frac{f(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta-\varepsilon}{2}} - \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{\alpha+2\pi} \frac{f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta-\varepsilon}{2}} + C,$$

où la première intégrale a sa valeur principale, et

$$(140)\qquad (\gamma<\theta<\delta)\ \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{l(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}+\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}^{\delta}\frac{l_1(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}=$$

$$=g_1(\theta)-\frac{1}{2\pi}\int_{\beta}^{\gamma}\frac{f(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}-\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\alpha+2\pi}\frac{f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}+C,$$

où la même convention est faite cette fois pour la seconde intégrale.

Telles sont les deux équations intégrales qu'on va résoudre indirectement.

Nous transformerons d'abord le domaine circulaire donné, en le demi-plan inférieur d'un plan auxiliaire Z_1, au moyen de la substitution

$$(141)\qquad Z_1=i+\frac{2}{z+i}.$$

On se rend compte aisément qu'à un point $e^{i\theta}$ de la circonférence frontière, correspond un point d'abscisse X_1 sur l'axe réel du nouveau plan, X_1 étant lié à θ par la relation

$$(142)\qquad X_1=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right).$$

Nous appellerons X_α, X_β, X_γ, X_δ, les valeurs de X_1 correspondant à $\theta=\alpha$, β, γ, ou δ.

Cela étant, posons

$$dZ=\frac{dZ_1}{\sqrt{(Z_1-X_\alpha)(Z_1-X_\beta)(Z_1-X_\gamma)(Z_1-X_\delta)}}$$

et plus précisément

$$(143)\qquad Z=\int_{\infty}^{Z_1}\frac{dZ_1}{\sqrt{(Z_1-X_\alpha)(Z_1-X_\beta)(Z_1-X_\gamma)(Z_1-X_\delta)}},$$

Z_1 devient une fonction elliptique de Z, construite avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ (la première réelle, la seconde imaginaire pure) et définies comme on sait par

$$\omega_1=\int_{X_\delta}^{X_\alpha}\frac{dX_1}{\sqrt{(X_1-X_\alpha)(X_1-X_\beta)(X_1-X_\gamma)(X_1-X_\delta)}}=\int_{X_\gamma}^{X_\beta}\frac{dX_1}{\sqrt{\text{id.}}},$$

$$\omega_3 = + \int_{X_\beta}^{X_\alpha} \frac{dX_1}{V} = - \int_{X_\delta}^{X_\gamma} \frac{dX_1}{V}.$$

En désignant par S_1, S_2, S_3, S_4 les fonctions symétriques élémentaires des quatre nombres $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta$, on aura

$$Z_1 = \frac{1}{2} \frac{\wp'(Z|\omega_1\omega_3) - \wp'(\nu_1|\omega_1\omega_3)}{\wp(Z|\omega_1\omega_3) - \wp(\nu_1|\omega_1\omega_3)} + \frac{S_1}{4}, \tag{144}$$

dans laquelle équation ν_1 représente un argument défini par les relations compatibles

$$\wp\,\nu_1 = \frac{S_1^2}{16} - \frac{S_2}{6},$$

$$\wp'\nu_1 = -\frac{S_3}{4} + \frac{S_1 S_2}{8} - \frac{S_1^3}{32},$$

(on peut prendre ν_1 entre 0 et $2\omega_1$). On a aussi

$$\sqrt{(Z_1 - X_\alpha)(Z_1 - X_\beta)(Z_1 - X_\gamma)(Z_1 - X_\delta)} = \wp Z - \wp(Z + \nu). \tag{145}$$

Par ce procédé, d'ailleurs classique (cf. par ex. APPELL et LACOUR, Fonct. Ellipt. p. 254), on fait correspondre au demi-plan précédent, l'aire d'un rectangle dans le plan Z, un côté de ce rectangle étant situé sur l'axe réel. Les sommets de ce rectangle sont les points

$$Z = -\frac{\nu_1}{2},\ -\frac{\nu_1}{2} + \omega_3,\ -\frac{\nu_1}{2} - \omega_1 + \omega_3,\ -\frac{\nu_1}{2} - \omega_1.$$

Aux arcs c et c_1 de la circonférence primitive, correspondent les côtés verticaux de ce rectangle (c correspond au bord droit.) On en conclut bien facilement, par des calculs que j'abrège, la correspondance entre les points $e^{i\theta}$ de la circonférence du plan z, et les points, définis par leur abscisse X ou leur ordonnée Y, des côtés du rectangle ci-dessus:

A l'arc $\delta < \theta < \alpha + 2\pi$, correspond le côté horizontal placé sur OX, par

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \zeta(X + \nu_1) - \zeta X - \zeta\nu_1 + \frac{S_1}{4}. \tag{146}$$

A l'arc $\alpha < \theta < \beta$ correspond le côté vertical droit, par

$$\text{(147)} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\zeta\left(\frac{\nu_1}{2}+iY\right)+\zeta\left(\frac{\nu_1}{2}-iY\right)-\zeta\nu_1+\frac{S_1}{4}.$$

A l'arc $\beta<\theta<\gamma$ correspond le bord horizontal supérieur, par

$$\text{(148)} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\zeta_3(X+\nu_1)-\zeta_3 X-\zeta\nu_1+\frac{S_1}{4}.$$

A l'arc $\gamma<\theta<\delta$ correspond le côté vertical gauche, par

$$\text{(149)} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\zeta_1\left(\frac{\nu_1}{2}+iY\right)+\zeta_1\left(\frac{\nu_1}{2}-iY\right)-\zeta\nu_1+\frac{S_1}{4}.$$

Les quatre expressions de $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$ sont toutes évidemment réelles.

Aux fonctions données de θ, correspondent par suite quatre fonctions connues, soit de X, soit de Y, définies par les relations suivantes

$$\text{(150)} \qquad \begin{aligned}
f(\theta)&=f\left[\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arc\,tg}\left\{\zeta_3(X+\nu_1)-\zeta_3X-\zeta\nu_1+\frac{S_1}{4}\right\}\right]=F_2(X),\\
f_1(\theta)&=f_1\left[\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arc\,tg}\left\{\zeta(X+\nu_1)-\zeta X-\zeta\nu_1+\frac{S_1}{4}\right\}\right]=F(X),\\
g(\theta)&=g\left[\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arc\,tg}\left\{\zeta\left(\frac{\nu_1}{2}+iY\right)+\zeta\left(\frac{\nu_1}{2}-iY\right)-\zeta\nu_1+\frac{S_1}{4}\right\}\right]=G_1(Y),\\
g_1(\theta)&=g_1\left[\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arc\,tg}\left\{\zeta_1\left(\frac{\nu_1}{2}+iY\right)+\zeta_1\left(\frac{\nu_1}{2}-iY\right)-\zeta\nu_1+\frac{S_1}{4}\right\}\right]=G_3(Y).
\end{aligned}$$

Comme l'équation

$$\text{(151)} \qquad Z+\frac{\nu_1}{2}+\omega_1=\mathfrak{z},$$

transforme le rectangle précédent, en un autre du plan $\mathfrak{z}=\mathfrak{X}+iY$ dont deux côtés soient situés sur les demi-axes positifs, en posant

$$F_2\left(\mathfrak{X}-\frac{\nu_1}{2}-\omega_1\right)=\mathfrak{F}_2(\mathfrak{X}), \quad F\left(\mathfrak{X}-\frac{\nu_1}{2}-\omega_1\right)=\mathfrak{F}(\mathfrak{X}),$$

on se trouvera ramené à déterminer, dans un rectangle de dimensions ω_1 et $\frac{1}{i}\omega_3$, une fonction dont les parties réelle ou imaginaire soient égales sur les bords, à $\mathfrak{F}(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F}_2(\mathfrak{X})$, $G_1(Y)$, $G_3(Y)$, respectivement.

Or on sait écrire une telle fonction, sous l'hypothèse qu'il existe entre les données la condition (cf. le Chapitre antérieur)

$$(152)\qquad \int_0^{\omega_1}[\mathfrak{F}(\mathfrak{X})-\mathfrak{F}_2(\mathfrak{X})]\,d\mathfrak{X}=\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}[G_1(Y)-G_2(Y)]\,dY.$$

Par des calculs assez simples, on peut, en revenant à la variable θ, remplacer cette condition par la suivante

$$\int_\alpha^\beta \frac{ig(\theta)\,d\theta}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\wp\left(\frac{\nu_1}{2}+iY\right)-\wp\left(\frac{\nu_1}{2}-iY\right)\right]}+$$
$$+\int_\gamma^\delta \frac{ig_1(\theta)d\theta}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\wp\left(\frac{\nu_1}{2}+\omega_1+iY\right)-\wp\left(\frac{\nu_1}{2}+\omega_1-iY\right)\right]}+$$
$$+\int_\beta^\gamma \frac{f(\theta)\,d\theta}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)[\wp(X+\nu_1+\omega_3)-\wp(X+\omega_3)]}+$$
$$+\int_\delta^{\alpha+2\pi} \frac{f_1(\theta)\,d\theta}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)[\wp(X+\nu_1)-\wp X]}=0,$$

où il est entendu que dans les dénominateurs, X ou Y doivent être considérés comme les fonctions de θ définis par les relations écrites plus haut, liant θ à X ou Y sur les quatre arcs successivement.

En utilisant la variable X_1 on a une formule plus maniable. Car on a par exemple pour la première intégrale

$$\wp\left(\frac{\nu_1}{2}+iY\right)-\wp\left(\frac{\nu_1}{2}-iY\right)=-\sqrt{(X_1-X_\alpha)(X_1-X_\beta)(X_1-X_\gamma)(X_1-X_\delta)},$$

$$\frac{d\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}=-2\,dX_1,$$

et des relations analogues sont valables pour les trois autres. Il en résulte la condition de possibilité sous la forme

$$\int_{X_\alpha}^{X_\beta} \frac{i g(\theta)\, d X_1}{\sqrt{(X_1 - X_\alpha)(X_1 - X_\beta)(X_1 - X_\gamma)(X_1 - X_\delta)}} + \int_{X_\gamma}^{X_\delta} \frac{i g_1(\theta)\, d X_1}{V} + \int_{X_\beta}^{X_\gamma} \frac{f(\theta)\, d X_1}{V} +$$

$$(153) \qquad + \int_{X_\delta}^{-\infty} \frac{f_1(\theta)\, d X_1}{V} + \int_{+\infty}^{X_\alpha} \frac{f_1(\theta)\, d X_1}{V} = 0,$$

$\left(\text{avec } \theta = \frac{\pi}{2} - 2 \text{ arc tg } X_1\right)$. Toutes les intégrales qui y figurent ont un sens dès que f, f_1, g, g_1, sont sommables et ne deviennent pas infinies aux limites des intervalles, d'un ordre d'infinitude supérieur à $(\theta - \alpha)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$ par exemple, $-\varepsilon$ étant un nombre positif arbitrairement petit. Cela est assurément le cas si les données f, f_1, g, g_1, sont de carrés intégrables.

On pourra alors écrire, en général, les valeurs suivantes pour la partie réelle de la fonction analytique répondant aux données $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_2, G_1, G_3$, sur les bords verticaux du rectangle:

$$F_1(Y) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t) [\zeta(iY - it) + \zeta(iY + it)]\, dt +$$

$$+ \frac{i}{\pi} \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t) [\zeta_1(iY - it) + \zeta_1(iY + it)]\, dt +$$

$$+ \frac{i}{\pi} \int_0^{\omega_1} \mathfrak{F}(t) [\zeta_1(iY - t) + \zeta_1(iY + t)]\, dt - \frac{i}{\pi} \int_0^{\omega_1} \mathfrak{F}_2(t) [\zeta_2(iY - t) + \zeta_2(iY + t)]\, dt,$$

(154)

$$F_3(Y) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t) [\zeta_1(iY - it) + \zeta_1(iY + it)]\, dt +$$

$$+ \frac{i}{\pi} \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t) [\zeta(iY - it) + \zeta(iY + it)]\, dt - \frac{i}{\pi} \int_0^{\omega_1} \mathfrak{F}(t) [\zeta(iY - t) + \zeta(iY + t)]\, dt -$$

$$- \frac{i}{\pi} \int_0^{\omega_1} \mathfrak{F}_2(t) [\zeta_3(iY - t) + \zeta_3(iY + t)]\, dt.$$

La solution des deux équations intégrales (139) et (140) sera dans ces conditions

$$l(\theta) = F_1(Y),$$

avec

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \zeta\left(\frac{\nu_1}{2} + iY\right) + \zeta\left(\frac{\nu_1}{2} - iY\right) - \zeta\nu_1 + \frac{S_1}{4},$$

et

$$l_1(\theta) = F_3(Y),$$

avec

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \zeta_1\left(\frac{\nu_1}{2} + iY\right) + \zeta_1\left(\frac{\nu_1}{2} - iY\right) - \zeta\nu_1 + \frac{S_1}{4}.$$

Quant à la fonction analytique elle-même, dans le rectangle du plan $\mathfrak{z}$, elle sera

(155)
$$\begin{aligned} &+\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} \mathfrak{F}(t)\left[\zeta(\mathfrak{z}-t) + \zeta(\mathfrak{z}+t)\right]dt - \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} \mathfrak{F}_2(t)\left[\zeta_3(\mathfrak{z}-t) + \zeta_3(\mathfrak{z}+t)\right]dt - \\ &-\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)\left[\zeta_1(\mathfrak{z}-it) + \zeta_1(\mathfrak{z}+it)\right]dt + \frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)\left[\zeta(\mathfrak{z}-it) + \zeta(\mathfrak{z}+it)\right]dt, \end{aligned}$$

et l'on en déduirait la fonction analytique de z dans le cercle primitif, en opérant sur cette expression les transformations inverses de celles qu'on a faites ci-dessus.

Avant de quitter ce sujet, je dirai un mot d'un autre procédé pour résoudre la question dont on vient de s'occuper, en utilisant une méthode fort semblable à celle utilisée au paragraphe 11. Par la transformation

(156)
$$Z = -\frac{\omega_1}{i\pi}\log W - \frac{\nu_1}{2} + \omega_3,$$

le rectangle du plan Z est représenté sur une demi-couronne circulaire de rayons extrêmes 1 et $q\left(= e^{-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}} < 1\right)$. En posant $W = \varrho^{i\varphi}$, les points des frontières se correspondent, soit par la relation

$$X = -\frac{\nu_1}{2} - \frac{\omega_1}{\pi}\varphi,$$

soit par cette autre

$$Y = \frac{\omega_1}{\pi} \log \varrho + \frac{\omega_3}{i},$$

relations au moyen desquelles les fonctions données $F(X)$, $F_2(X)$, $G_1(Y)$, $G_3(Y)$, deviennent les fonctions $\mathfrak{F}^*(\varphi)$, $\mathfrak{F}^*_2(\varphi)$, $\mathfrak{G}_1(\varrho)$, $\mathfrak{G}_3(\varrho)$.

Formons alors une fonction de W régulière dans le demi-plan supérieur, et dont la partie imaginaire prenne les valeurs $\mathfrak{G}_3(-u)$ et $\mathfrak{G}_1(u)$ aux points d'abscisse u sur les segments -1, $-q$, et $+q$, $+1$, de l'axe réel; par exemple

$$\Omega_1(W) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-q} \frac{\mathfrak{G}_3(-u)\,du}{u-W} + \frac{1}{\pi}\int_{q}^{1} \frac{\mathfrak{G}_1(u)\,du}{u-W}, \tag{157}$$

est une telle fonction.

Elle donne lieu aux mêmes remarques que la fonction $H(Z)$ d'un paragraphe antérieur. Sa partie réelle prend, pour $W = e^{i\varphi}$ ou $W = q e^{i\varphi}$, les valeurs

$$(158)\quad \begin{aligned} \mathfrak{H}(\varphi) &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-q} \mathfrak{G}_3(-u)\frac{u - q\cos\varphi}{u^2 - 2qu\cos\varphi + q^2}\,du + \frac{1}{\pi}\int_{q}^{1} \mathfrak{G}_1(u)\frac{u - q\cos\varphi}{u^2 - 2qu\cos\varphi + q^2}\,du, \\ \mathfrak{H}_2(\varphi) &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-q} \mathfrak{G}_3(-u)\frac{u - \cos\varphi}{u^2 - 2u\cos\varphi + 1}\,du + \frac{1}{\pi}\int_{q}^{1} \mathfrak{G}_1(u)\frac{u - \cos\varphi}{u^2 - 2u\cos\varphi + 1}\,du. \end{aligned}$$

Si l'on forme ensuite la fonction

$$\begin{aligned} \Omega_2(W) = {} & \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} [\mathfrak{F}^*_2(\varepsilon) - \mathfrak{H}_2(\varepsilon)]\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log W - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log W + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right] d\varepsilon - \\ & - \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} [\mathfrak{F}^*(\varepsilon) - \mathfrak{H}(\varepsilon)]\left[\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log W - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) + \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log W + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right] d\varepsilon, \end{aligned}$$

(cf. ante, par. 10) qui est régulière sous la condition

$$\int_0^{\pi} [\mathfrak{F}^*_2(\varepsilon) - \mathfrak{F}^*(\varepsilon)]\,d\varepsilon = \int_0^{\pi} [\mathfrak{H}_2(\varepsilon) - \mathfrak{H}(\varepsilon)]\,d\varepsilon, \tag{159}$$

la fonction $\Omega_1(W) + \Omega_2(W)$ répond à la question, en ce sens que sa partie réelle ou sa partie imaginaire prennent sur les frontières les valeurs respectives $\mathfrak{F}^*(\varphi)$,

$\mathfrak{F}^*_2(\varphi)$, $\mathfrak{G}_1(\varrho)$, $\mathfrak{G}_3(\varrho)$. En revenant à la variable z, on a donc une fonction de z répondant au problème primitif. D'où indirectement la solution, sous une autre forme, des équations intégrales signalées antérieurement. Cette construction nouvelle de la solution, construction qui en apparence présente une certaine indétermination, dûe à ce fait qu'on peut modifier la fonction $\Omega_1(W)$ comme on l'a déjà vu au paragraphe 11, en prolongeant les fonctions $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_3$ arbitrairement hors des segments $-1, -q;\ +q, +1$, est fort utile dans certaines applications (cf. mon Mémoire «Sur la détermination des problèmes d'Hydrodynamique relatifs à la résistance des fluides», Annales de l'Ecole Normale supérieure, 1914).

Je laisse de côté l'écriture facile de la solution obtenue par le procédé qu'on vient de décrire. En terminant ce Chapitre, je ferai seulement observer que la condition de possibilité du problème a été obtenue sous deux formes très différentes (152) et (159); il est essentiel de remarquer que ces deux conditions sont au fond équivalentes.

Il est en effet aisé de s'assurer que, pour ϱ positif, on a l'égalité

$$\int_0^\pi \frac{u-\varrho\cos\varepsilon}{u^2-2\varrho u\cos\varepsilon+\varrho^2}\,d\varepsilon = \frac{\pi}{2u} + \frac{u^2-\varrho^2}{2u}\,\pi\,\frac{1}{\sqrt{(u^2-\varrho^2)^2}} = \frac{\pi}{u} \text{ ou zéro.}$$

Il en résulte sans difficulté, en appliquant cette égalité pour $\varrho=1$ et $\varrho=q$ successivement,

$$\int_0^\pi \mathfrak{H}_2(\varepsilon)\,d\varepsilon = 0$$

et

$$\int_0^\pi \mathfrak{H}(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_{-1}^{-q} \mathfrak{G}_3(-u)\frac{du}{u} + \int_q^1 \mathfrak{G}_1(u)\frac{du}{u}.$$

Par la substitution

$$Y = \frac{\omega_1}{\pi}\log|u| + \frac{\omega_3}{i},$$

on trouve

$$\int_0^\pi \mathfrak{H}(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{\pi}{\omega_1}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [G_1(Y)-G_3(Y)]\,dY.$$

Maintenant on a, par la transformation $X = -\frac{\nu_1}{2} - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon$,

$$\int_0^{\pi} \mathfrak{F}^*_2(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_{-\frac{v_1}{2}-\omega_1}^{-\frac{v_1}{2}} \frac{\pi}{\omega_1} F_2(X)\,dX = \frac{\pi}{\omega_1}\int_0^{\omega_1} \mathfrak{F}_2(\mathfrak{X})\,d\mathfrak{X},$$

et on trouve de même

$$\int_0^{\pi} \mathfrak{F}^*(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{\pi}{\omega_1}\int_0^{\omega_1} \mathfrak{F}(\mathfrak{X})\,d\mathfrak{X}.$$

Portant ces résultats dans (159) on voit que cette condition se réduit bien à la condition (152) obtenue par la première méthode.

Note.

§ 13. Dans les Chapitres précédents, il a été résolu, d'une manière indirecte, certaines équations intégrales, — il est vrai très particulières, — rentrant dans la forme

$$\int_a^b f(s)\,N(x,s)\,ds = g(x) \tag{160}$$

ou encore

$$A(x)\,f(x) + \int_a^b [f(x) - f(s)]\,N(x,s)\,ds = g(x), \tag{161}$$

$f(x)$ étant la fonction inconnue. Le noyau $N(x, s)$ présente une discontinuité polaire pour $s = x$. Tous les noyaux $N(x, s)$ qu'on a rencontrés dans de telles équations sont, comme il est facile de s'en assurer, tels que la différence $N(x, s) - \frac{k}{x-s}$, où k est une constante convenablement choisie, reste une fonction finie et continue, et même dérivable, dans l'intervalle a, b, y compris le point $s = x$. En terminant, nous ferons observer que les équations intégrales de la forme (160) et celles aussi de la forme

$$f(x) + \int_a^b f(s)\,N(x,s)\,ds = g(x), \tag{162}$$

peuvent se ramener à des équations de FREDHOLM, lorsque le noyau présente la propriété qu'on vient de dire. Cela résulte de considérations qui ont été signalées par D. HILBERT (Congrès des Mathém. Heidelberg, 1904, Verhandlungen, p. 233).

Effectuons d'abord un même changement de variable (linéaire) sur s et sur x, en ramenant les limites de l'intervalle d'intégration, à être égales à 0 et 2π, de sorte qu'on ait affaire à des équations de la forme

$$F(\varepsilon) + \int_0^{2\pi} \mathfrak{N}(\varepsilon, t) F(t)\, dt = \Phi(\varepsilon), \tag{163}$$

ou bien

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{N}(\varepsilon, t) F(t)\, dt = \Phi(\varepsilon), \tag{164}$$

suivant les cas. De l'hypothèse faite sur les noyaux, il résulte évidemment qu'on peut trouver une constante m telle que l'on ait

$$\mathfrak{N}(\varepsilon, t) = \frac{m}{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon - t}{2}} + P(\varepsilon, t), \tag{165}$$

$P(\varepsilon, t)$ étant fini, continu dans tout l'intervalle, y compris pour $t = \varepsilon$.

Appelons fonction associée de $F(\varepsilon)$ la fonction $G(\varepsilon)$ qui lui est reliée par les deux équations (éq. 14 du paragraphe 1)

$$\left.\begin{aligned} 2\pi F(\theta) &= -\int_0^{2\pi} \frac{G(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta - \varepsilon}{2}}\, d\varepsilon + \int_0^{2\pi} F(\varepsilon)\, d\varepsilon, \\ 2\pi G(\theta) &= \int_0^{2\pi} \frac{G(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta - \varepsilon}{2}}\, d\varepsilon + \int_0^{2\pi} G(\varepsilon)\, d\varepsilon. \end{aligned}\right. \tag{166}$$

Cela étant, considérons d'abord l'équation (163); multiplions-la par $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta - \varepsilon}{2}}$ et intégrons entre 0 et 2π par rapport à ε. Après un changement dans l'ordre des intégrations pour le terme $\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\int\limits_0^{2\pi}F(t)\mathfrak{N}(\varepsilon, t)dt$, de l'expression obtenue (cf. HILBERT, loc. cit.) on obtient aisément l'équation

$$(167)\quad \int\limits_0^{2\pi}\frac{F(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}+\int\limits_0^{2\pi}F(t)\,dt\int\limits_0^{2\pi}\frac{P(\varepsilon, t)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}-2\pi^2 mF(\theta)+2\pi m\int\limits_0^{2\pi}F(\varepsilon)\,d\varepsilon=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\Phi(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}.$$

Et comme on a d'après (166)

$$F(\theta)+\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{m}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}+P(\theta, \varepsilon)\right]F(\varepsilon)\,d\varepsilon=\Phi(\theta),$$

en multipliant ces deux dernières équations par m et -1, et ajoutant, il vient

$$(168)\quad -(1+4\pi^2m^2)\,F(\theta)+\int\limits_0^{2\pi}F(t)\,dt\left\{m\int\limits_0^{2\pi}\frac{P(\varepsilon, t)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon+2\pi m^2-P(\theta, t)\right\}=$$
$$=m\int\limits_0^{2\pi}\frac{\Phi(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}-\Phi(\theta),$$

ce qui est une équation de FREDHOLM pour l'inconnue $F(\theta)$.

Si l'on était parti de l'équation (164), le premier calcul aurait donné aussitôt, à la place de (167) l'équation suivante

$$(169)\qquad -4\pi^2 m\,F(\theta)+\int\limits_0^{2\pi}F(t)\,dt\left[\int\limits_0^{2\pi}\frac{P(\varepsilon, t)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon+2\pi m\right]=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\Phi(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}.$$

Bien entendu, les intégrales où il subsiste une tangente au dénominateur, sont prises égales à leur valeur principale.

Les équations proposées sont donc ramenées à des équations de FREDHOLM. Mais il semble qu'il soit bien difficile de tirer parti de ce fait pour retrouver, dans les cas particuliers considérés antérieurement, les résultats simples auxquels on est parvenu d'une autre manière.