ÜBER DEN DIVERGENZ-CHARAKTER GEWISSER POTENZREIHEN AN DER CONVERGENZGRENZE

VON

ALFRED PRINGSHEIM
in MÜNCHEN.

Bedeutet Σc_ν eine *convergente*, Σd_ν eine *divergente* Reihe mit beliebigen (d. h. complexen) Gliedern von der Beschaffenheit, dass:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = 1, \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|d_\nu|} = 1,$$

so besitzen die Potenzreihen $\Sigma c_\nu x^\nu$, $\Sigma d_\nu x^\nu$ allemal den Convergenz-Radius $|x| = 1$. Versteht man sodann unter ρ eine *positive* Veränderliche $\leqq 1$, so besagt zunächst ein von ABEL[1] bewiesener Fundamentalsatz, dass:

$$\text{(I)} \qquad \lim_{\rho=1} \sum_0^\infty {}_\nu\, c_\nu \rho^\nu = \sum_0^\infty {}_\nu\, c_\nu .$$

ABEL hat aber auch bereits das Verhalten von $\lim_{\rho=1} \sum_0^\infty {}_\nu\, d_\nu \rho^\nu$ in den Kreis

[1] Journ. f. Math., Bd. 1 (1826), p. 314, Lehrsatz IV = Oeuvres, Éd. SYLOW-LIE, T. 1, p. 223. Ich habe schon bei früherer Gelegenheit (Münch. Sitz.-Ber., Bd. 27 [1897], p. 344) hervorgehoben, dass der betreffende ABEL'sche Beweis, in Wahrheit einfacher ist und das *Wesen* der Sache deutlicher hervortreten lässt, als der auf LIOUVILLE's Veranlassung von DIRICHLET (Journ. de Math. (2), T. 7 [1863], p. 253) mitgetheilte Beweis. ABEL beweist nämlich nicht nur, wie DIRICHLET, die Existenz der Beziehung (I), also die *Stetigkeit* der Reihensumme für $\rho \leqq 1$, sondern geradezu die *gleichmässige* Convergenz der Reihe für $\rho \leqq 1$.

seiner Betrachtungen gezogen, wie das folgende von ihm im 2^{ten} Bande des Crelle'schen Journals (1827)[1] gestellte *Problem* zeigt:

»En supposant la série:

$$f(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots$$ [2]

convergente pour toute valeur positive *moindre* que la quantité positive α, on propose de trouver la limite vers laquelle converge la valeur de la fonction $f(\rho)$ en faisant converger ρ vers la limite α.»

Da nämlich der Fall $a_\nu \alpha^\nu = c_\nu$ durch den Satz (I) schon vollkommen erledigt ist, so kann sich das vorliegende Problem nur noch auf die Annahme $a_\nu \alpha^\nu = d_\nu$ beziehen. Abel selbst hat dasselbe späterhin für den Fall *reeller positiver* d_ν in soweit erledigt, als er in einer aus seinem Nachlasse publicierten Note[3] gezeigt, dass:

$$\text{(II)} \qquad \lim_{\rho=1} \sum_0^\infty {}^\nu d_\nu \rho^\nu = +\infty \quad (d_\nu > 0, \text{ zum mindesten für } \nu \geqq n),$$

ein Resultat, das sich leicht in folgender Weise verallgemeinern lässt[4]: Es ist

$$\text{(III)} \qquad \lim_{\rho=1} \left| \sum_0^\infty {}^\nu d_\nu \rho_\nu^\nu \right| = +\infty,$$

falls die Reihe $\Sigma d_\nu = \Sigma(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ *eigentlich*, d. h. falls *mindestens eine* der beiden Reihen $\Sigma\alpha_\nu$, $\Sigma\beta_\nu$ nach $+\infty$ oder $-\infty$ divergirt.

Es entsteht nun bei schärferer Auffassung der obigen Abel'schen Fragestellung und im Anschlusse an das in den Gleichungen (II), (III) enthaltene Ergebniss die weitere Aufgabe: Wie lässt sich das Bildungsgesetz der d_ν, bezw. die Art ihres Verhaltens für $\lim \nu = \infty$ verwerthen, um über *die Art des Unendlichwerdens* von $\lim\limits_{\rho=1} f(\rho)$ oder, wie ich es bezeichnen will, über *den Divergenz-Charakter* von $\lim\limits_{\rho=1} \sum\limits_0^\infty {}^\nu d_\nu \rho^\nu$ genauere Aus-

---

[1] A. a. O. p. 286 = Oeuvres, T. 1, p. 618.

[2] Bei Abel steht x statt ρ. (Ich schreibe ρ, um die nöthige Übereinstimmung mit den sonst hier gewählten Bezeichnungen zu erzielen.)

[3] Oeuvres, T. 2, p. 203.

[4] Münch. Sitz.-Ber., Bd. 30 (1900), p. 39.

sagen zu machen?[1] Diese Aufgabe soll für gewisse Fälle und zwar mit einer sogleich noch näher anzugebenden, nicht unwesentlichen Verallgemeinerung des betreffenden Grenzüberganges im folgenden beantwortet werden. Es wird sich zeigen, dass unter geeigneten Voraussetzungen zwischen jenem *Divergenz-Charakter* und dem *Divergenz-Maasse* von Σd_ν, d. h. der Art des Unendlichwerdens von $\sum_0^n {}^\nu d_\nu$ für $\lim n = \infty$, ausserordentlich einfache und praegnante Beziehungen bestehen.

---

1. Wie Herr STOLZ zuerst gezeigt hat,[2] lässt sich der ABEL'sche Satz (I) dahin verallgemeinern, dass:

$$\text{(I a)} \qquad \lim_{x=1} \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^\nu = \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu$$

wird, auch wenn x *nicht*, wie die Fassung (I) verlangt, *auf der reellen Axe*, sondern auf einem *beliebigen*, dem Innern des Einheitskreises angehörigen *Strahle*, bezw. — was im wesentlichen auf dasselbe hinausläuft — auf einer *beliebigen, den Kreis nicht tangirenden Curve*[3] der Stelle 1 zustrebt; oder, noch etwas anders ausgesprochen, dass die Reihe $\Sigma c_\nu x^\nu$ *gleichmässig*

---

[1] Eine andere aus der ABEL'schen Fragestellung erwachsende und wohl sicherlich auch schon von ABEL (etwa im Anschlusse an das viel citirte, klassische Beispiel: $\lim_{\rho=1} \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \rho^\nu = \frac{1}{2}$) ausdrücklich dabei in's Auge gefasste Aufgabe ist die folgende: »Wann existirt im Falle *uneigentlicher* Divergenz von Σd_ν *eine bestimmte Zahl* $\lim_{\rho=1} f(\rho)$ und wie kann dieselbe als Function der d_ν dargestellt oder zum mindesten aus den d_ν numerisch berechnet werden?» Theilweise Lösungen dieser Aufgabe geben der bekannte Satz von FROBENIUS (Journ. f. Math. Bd. 89 [1880], p. 262) und dessen Verallgemeinerungen durch HOELDER (Math. Ann. Bd. 20 [1882], p. 535), sowie BOREL's »limite généralisée» (Journ. de Math. (4), T. 12 [1896], p. 103).

[2] Zeitschr. f. Math. u. Phys., Jahrg. 20 [1875], p. 370; desgl. Jahrg. 29 (1884), p. 127.

[3] PICARD, *Traité d'Analyse*, T. 2 (1893), p. 73.

convergirt *im Innern und auf der Begrenzung* jedes durch den Punkt 1 und zwei beliebige Innenpunkte des Einheitskreises gelegten *Dreiecks.*[1]

Die Grundlage für eine derartige Verallgemeinerung des Satzes (I), wie auch ähnlicher auf Reihen der Form $\Sigma d_\nu x^\nu$ bezüglicher Grenzwerthsätze, wird am zweckmässigsten durch das folgende Lemma geschaffen:[2]

Lemma. *Setzt man:*

$$x' = 1 - \delta . e^{\varphi i}$$

und beschränkt δ *auf das Intervall:* $0 < \delta \leqq \cos\varphi$, *wo:* $|\varphi| \leqq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, *so hat man stets:*

$$\frac{|1 - x'|}{1 - |x'|} < \frac{2}{\cos\varphi} \leqq \gamma \tag{1}$$

(*anders geschrieben:*

$$|1 - \delta . e^{\varphi i}| < 1 - \frac{\delta}{\gamma}), \tag{1a}$$

wo:

$$\gamma = \frac{2}{\cos\varphi_0}, \text{ d. h. eine bestimmte positive Zahl.}$$

Beweis. Man hat:

$$|x'|^2 = 1 + \delta^2 - 2\delta . \cos\varphi,$$

also:

$$\begin{aligned} 1 - |x'|^2 &= \delta(2 \cos\varphi - \delta) \\ &\geqq \delta . \cos\varphi \qquad \text{(wegen: } \delta \leqq \cos\varphi) \\ &\geqq |1 - x'| . \cos\varphi \qquad \text{(wegen: } \delta = |1 - x'|), \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} \frac{|1 - x'|}{1 - |x'|} &\leqq \frac{1 + |x'|}{\cos\varphi} \\ &< \frac{2}{\cos\varphi} \leqq \frac{2}{\cos\varphi_0}, \end{aligned}$$

q. e. d.

[1] Münch. Sitz.-Ber., Bd. 27 (1897), p. 347.

[2] Vgl. Münch. Sitz.-Ber., Bd. 31 (1901), p. 514.

Der in dem vorstehenden Lemma definirte Bereich von Werthen x' soll im folgenden stets schlechthin als der Bereich $x = x'$ oder (x') bezeichnet werden. Geometrisch gesprochen wird derselbe begrenzt durch die Hälften der beiden Sehnen, welche mit der reellen Axe im Punkte 1 den Winkel φ_0 bilden, und durch den dazwischen liegenden Bogen eines um den Punkt $\frac{1}{2}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}$ beschriebenen Kreises.

2. Versucht man jetzt den Satz (II) in analoger Weise zu verallgemeinern, so zeigt sich, dass die Gleichung:

$$\text{(II a)} \qquad \lim_{x'=1} \left| \sum_0^\infty {}^\nu \, d_\nu x'^\nu \right| = \infty$$

keineswegs allgemein richtig ist, selbst wenn man sich, wie bei (II), zunächst auf den Fall *reeller positiver* d_ν beschränkt. Um dies zu erkennen, betrachte man z. B. die Potenzreihe:

$$e^{\left(\frac{1}{1-x}\right)^2} = \sum_0^\infty {}^\lambda \frac{1}{|\underline{\lambda}} \left(\sum_0^\infty {}^\mu (\mu + 1) \,.\, x^\mu \right)^\lambda$$
$$= \mathfrak{P}(x),$$

welche offenbar durchweg *positive* Coefficienten besitzt. Man hat dann zunächst für *reelle* $x = \rho$:

$$\lim_{\rho=1} \mathfrak{P}(\rho) = \lim_{\rho=1-0} e^{\left(\frac{1}{1-\rho}\right)^2} = +\infty,$$

woraus mit Sicherheit folgt, dass die aus lauter *positiven* Gliedern bestehende Reihe $\mathfrak{P}(1)$ *divergiren* muss und somit $\mathfrak{P}(x)$ in der That dem Typus $\Sigma d_\nu x^\nu$ $(d_\nu > 0)$ angehört. Sodann ist aber:

$$|\mathfrak{P}(x')| \equiv |\mathfrak{P}(1 - \delta \,.\, e^{\varphi i})| = \left| e^{\frac{1}{\delta} \,.\, e^{-2\varphi i}} \right|$$
$$= e^{\frac{1}{\delta} \,.\, \cos 2\varphi}$$

und daher:

$$\lim_{x'=1} |\mathfrak{P}(x')| \begin{cases} = 1 & \text{für:} \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4} \\ = 0 & \text{für:} \quad \dfrac{\pi}{4} < \varphi \leqq \varphi_0 < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Dass es aber andererseits auch Reihen $\Sigma d_\nu x^\nu$ giebt, welche jener *erweiterten* Grenzbeziehung (II a) genügen, wird unmittelbar ersichtlich, wenn man Ungl. (1) folgendermassen schreibt:

$$(2) \qquad \frac{\left|\sum_0^\infty {}_\nu\, x'^\nu\right|}{\sum_0^\infty {}_\nu\, |x'|^\nu} < \frac{1}{\gamma},$$

sodass also hier in der That die Beziehung $\lim\limits_{x'=1} \sum_0^\infty {}_\nu\, |x'|^\nu = \infty$ ohne weiteres auch die folgende nach sich zieht:

$$\lim_{x'=1} \left| \sum_0^\infty {}_\nu\, x'^\nu \right| = \infty.$$

Das analoge wird offenbar auf Grund des Satzes (III) allemal dann stattfinden, wenn Σd_ν *eigentlich* divergirt und $\Sigma d_\nu x'^\nu$ der folgenden, Ungl. (2) nachgebildeten Bedingung genügt:

$$(\mathrm{A}) \qquad \left| \frac{\sum_0^\infty {}_\nu\, d_\nu x'^\nu}{\sum_0^\infty {}_\nu\, d_\nu |x'|^\nu} \right| \geqq \alpha > 0$$

(zum mindesten für alle x' einer gewissen Umgebung der Stelle 1).

Es erscheint zweckmässig, die durch Ungl. (A) definirte Eigenschaft der Reihe $\Sigma d_\nu x'^\nu$ durch einen besonderen Ausdruck zu bezeichnen, etwa: *die Reihe $\Sigma d_\nu x^\nu$ gehe im Bereiche $x = x'$ bei $x' = 1$ gleichmässig zur Divergenz über*, oder kürzer, wenn auch weniger correct, *die Reihe $\Sigma d_\nu x'^\nu$ divergire bei $x' = 1$ gleichmässig.*

Auf Grund dieser Definition ergiebt sich unmittelbar:

Ist:

$$(\mathrm{B}) \qquad \lim_{x'=1} \left| \frac{\sum_0^\infty {}_\nu\, d_\nu x'^\nu}{\sum_0^\infty {}_\nu\, d_\nu |x'|^\nu} \right| = \alpha > 0,$$

so divergirt $\Sigma d_\nu x'^\nu$ bei $x' = 1$ gleichmässig.

3. Solche *gleichmässig divergente* Potenzreihen $\Sigma d_\nu x^\nu$ können als *Vergleichsreihen* benützt werden, um über die Convergenz und den Divergenz-Charakter anderer Potenzreihen bestimmte Aussagen zu machen. Dabei will ich mich hier auf die Annahme $d_\nu > 0$ beschränken.[1] Alsdann gilt zunächst der folgende Satz:

Ist $\Sigma d_\nu x^\nu$ *(wo* $d_\nu > 0$*) für* $|x| < 1$ *convergent, bei* $x = x' = 1$ *gleichmässig divergent und besitzt* Σa_ν *das g-fache Divergenz-Maass der Reihe* Σd_ν, *d. h. ist:*

$$(3)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu}{\sum_0^n{}_\nu\, d_\nu} = g \text{ (g eine beliebige complexe Zahl incl. 0),}$$

so convergirt auch $\Sigma a_\nu x^\nu$ *für* $|x| < 1$ *und divergirt bei* $x = x' = 1$ *gleichmässig. Dabei ist:*

$$(4)\qquad \lim_{x'=0} \frac{\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x'^\nu}{\sum_0^\infty{}_\nu\, d_\nu x'^\nu} = g.$$

Beweis. Setzt man zur Abkürzung:

$$\sum_0^n{}_\nu\, d_\nu = D_n, \qquad \sum_0^n{}_\nu\, a_\nu = A_n,$$

---

[1] Man kann diese Beschränkung ohne weiteres fallen lassen, wenn man statt der Bedingung (A) die folgende einführt:

$$\frac{\left|\sum_0^\infty{}_\nu\, d_\nu x'^\nu\right|}{\sum_0^\infty{}_\nu\, |d_\nu x'^\nu|} \geqq \alpha > 0$$

(vgl. E. Lasker, *Über Reihen auf der Convergenzgrenze*, Lond. Phil. Transactions, Vol. 196 [1901], p. 433). Übrigens genügt es selbstverständlich zur Ableitung der im Texte angegebenen Resultate, wenn die Bedingung $d_\nu > 0$ erst von einer bestimmten Stelle $\nu \geqq n$ anfangend erfüllt ist, da die Beschaffenheit einer beliebigen endlichen Anzahl von Anfangsgliedern bei der fraglichen Art von Betrachtungen ohne Belang ist. (Vgl. Nr. 6.)

so convergirt zunächst gleichzeitig mit der Reihe $\Sigma d_\nu x^\nu$ auch die Reihe $\Sigma D_\nu x^\nu$ für $|x| < 1$ (wegen: $\frac{1}{1-x}\sum_0^\infty {}^\nu d_\nu x^\nu = \sum_0^\infty {}^\nu D_\nu x^\nu$), folglich auf Grund der Voraussetzung (3) auch $\Sigma A_\nu x^\nu$ und somit schliesslich auch $\Sigma a_\nu x^\nu$ (wegen: $(1-x) . \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu x^\nu = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu$).

Man hat sodann, wenn m eine beliebige natürliche Zahl bedeutet:

$$\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x'^\nu = (1-x') . \left\{ \sum_0^{m-1} {}^\nu A_\nu x'^\nu + \sum_m^\infty {}^\nu A_\nu x'^\nu \right\}$$

also:

$$\left| \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x'^\nu \right| \leqq |1-x'| . \left\{ \left| \sum_0^{m-1} {}^\nu A_\nu x'^\nu \right| + \sum_m^\infty {}^\nu |A_\nu x'^\nu| \right\}.$$

Es werde nun zunächst angenommen, dass $g = 0$. Bringt man alsdann $|A_\nu|$ auf die Form:

$$|A_\nu| = \left| \frac{A_\nu}{D_\nu} \right| . D_\nu = \varepsilon_\nu . D_\nu,$$

so haben, wegen $\lim \frac{A_\nu}{D_\nu} = 0$, die ε_ν für $\nu = m, m+1, \ldots$ *in inf.* eine obere Grenze $\bar{\varepsilon}_m$, welche durch Wahl von m *beliebig klein* gemacht werden kann, und man hat:

$$\left| \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x'^\nu \right| < |1-x'| . \left\{ \left| \sum_0^{m-1} {}^\nu A_\nu x'^\nu \right| + \bar{\varepsilon}_m \sum_m^\infty {}^\nu D_\nu . |x'|^\nu \right\}.$$

Andererseits hat man nach Ungl. (A), sofern man x' auf eine passend gewählte Umgebung der Stelle 1 einschränkt:

$$\left| \sum_0^\infty {}^\nu d_\nu x'^\nu \right| \geqq \alpha . \sum_0^\infty {}^\nu d_\nu . |x'|^\nu = \alpha . (1 - |x'|) . \sum_0^\infty {}^\nu D_\nu . |x'|^\nu$$

$$> \frac{\alpha}{\gamma} . |1-x'| . \sum_0^\infty {}^\nu D_\nu . |x'|^\nu \quad \text{(nach Ungl. (1))}$$

und daher:

$$\left| \frac{\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x'^\nu}{\sum_0^\infty {}^\nu d_\nu x'^\nu} \right| < \frac{\gamma}{\alpha} . \left\{ \frac{\left| \sum_0^{m-1} {}^\nu A_\nu x'^\nu \right|}{\sum_0^\infty {}^\nu D_\nu |x'|^\nu} + \bar{\varepsilon}_m \right\},$$

somit — wegen $\lim\limits_{x'=1} \sum\limits_0^\infty {}^\nu D_\nu |x'|^\nu = +\infty$:

$$\lim_{x'=1} \left| \frac{\sum\limits_0^\infty {}^\nu a_\nu x'^\nu}{\sum\limits_0^\infty {}^\nu d_\nu x'^\nu} \right| \leqq \frac{\gamma}{a} \cdot \bar{\varepsilon}_m$$

d. h., mit Rücksicht auf die oben über $\bar{\varepsilon}_m$ gemachte Bemerkung, schliesslich:

$$\lim_{x'=1} \frac{\sum\limits_0^\infty {}^\nu a_\nu x'^\nu}{\sum\limits_0^\infty {}^\nu d_\nu x'^\nu} = 0,$$

womit zunächst die Behauptung (4) für den Fall $g = 0$ bewiesen ist.

Ist jetzt g von 0 verschieden und schreibt man die Voraussetzung (3) folgendermaassen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_0^n {}^\nu (a_\nu - g \cdot d_\nu)}{\sum\limits_0^n {}^\nu d_\nu} = 0,$$

so folgt unmittelbar aus dem eben bewiesenen Satze, dass:

$$\lim_{x'=1} \frac{\sum\limits_0^\infty {}^\nu (a_\nu - g \cdot d_\nu) \cdot x'^\nu}{\sum\limits_0^\infty {}^\nu d_\nu x'^\nu} = 0,$$

also:

(4) $$\lim_{x'=1} \frac{\sum\limits_0^\infty {}^\nu a_\nu x'^\nu}{\sum\limits_0^\infty {}^\nu d_\nu x'^\nu} = g,$$ q. e. d.

Zusatz. Nach dem CAUCHY-STOLZ'schen Grenzwerthsatze[1] hat man:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{D_n} = g,$$

allemal wenn:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{d_n} = g. \tag{5}$$

Ist also diese letztere (*engere*) Bedingung erfüllt, so besteht gleichfalls die Relation (4) (wie übrigens auch ganz analog, wie oben, *direct* bewiesen werden könnte).

4. Um den Satz von Nr. 3 wirklich anwenden zu können, hat man sich vor allem geeignete Vergleichsreihen von dem dort mit $\Sigma d_\nu x^\nu$ bezeichneten Typus zu verschaffen. Mit Hülfe der für $|x| < 1$ gültigen binomischen Entwickelung:

$$(1 - x)^{-p} = \sum_0^\infty {}^\nu (p + \nu - 1)_\nu \,.\, x^\nu,$$

wo für $\nu = 0$:

$$(p - 1)_0 = 1$$

und für $\nu \geqq 1$:

$$(p + \nu - 1)_\nu = \frac{p\,.\,(p+1)\ldots(p+\nu-1)}{1\,.\,2\ldots\nu} > 0, \quad \text{wenn } p > 0,$$

gewinnt man, nach Analogie von Ungl. (2), durch Erhebung von Ungl. (1) in die $(-p)^{\text{te}}$ Potenz die Beziehung:

$$\frac{\left| \sum_0^\infty {}^\nu (p + \nu - 1)^\nu \,.\, x'^\nu \right|}{\sum_0^\infty {}^\nu (p + \nu - 1)_\nu \,.\, |x'|^\nu} < \left(\frac{1}{\gamma}\right)^p \quad (p > 0). \tag{6}$$

Da andererseits:

$$\sum_0^n {}^\nu (p + \nu - 1)_\nu = 1 + p_1 + (p+1)_2 + \ldots (p + n - 1)_n$$
$$= (p + n)_n$$

---

[1] STOLZ, Math. Ann., Bd. 14 (1879), p. 232. Vorl. über allgem. Arithm. Bd. 1., p. 173.

(wegen: $1 + p_1 = (p+1)_1$ und $(p+k)_\nu + (p+k)_{\nu+1} = (p+k+1)_{\nu+1}$), so erhält man durch Anwendung des Satzes von Nr. 3 den folgenden Satz:

Man hat:

$$\lim_{x'=1} (1 - x')^p \cdot \sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x'^\nu = g, \tag{7}$$

wenn:

$$\sum_0^n {}_\nu\, a_\nu \cong (p+n)_n \cdot g \quad \text{bezw.} \quad a_n \cong (p+n-1)_n \cdot g.\text{[1]} \tag{8}$$

Mit Berücksichtigung der bekannten Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(p+n)_n}{n^p} = \Gamma(p+1)$$

kann man dann die Relationen (7), (8) auch durch die folgenden ersetzen:

$$\left.\begin{array}{lll} (9) & \lim\limits_{x'=1} (1 - x')^p \cdot \sum\limits_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x'^\nu = \Gamma(p+1) \cdot g, & \text{wenn: } \sum\limits_0^n {}_\nu\, a_\nu \cong g \cdot n^p \\ (10) & \lim\limits_{x'=1} (1 - x')^p \cdot \sum\limits_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x'^\nu = \Gamma(p) \cdot g, & \text{wenn: } \quad a_n \cong g \cdot n^{p-1} \end{array}\right\} (p > 0).$$

Satz (10) für *reelle positive* x' und a_ν rührt bekanntlich von Herrn Appell her.[2]

5. Es werde nun vorläufig mit λ_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) eine unbegrenzt fortsetzbare Folge positiver Zahlen bezeichnet, welche gleichzeitig mit ν *monoton* (zum mindestens für $\nu > n$) in's Unendliche wachsen und zwar schliess-

[1] Eine Relation von der Form:

$$A_n \cong g \cdot B_n$$

bedeutet:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = g.$$

(Vergl. Encykl. der Math. Wiss. Bd. 1, p. 75, Gl. (13)).

[2] Comptes rendus, T. 87 (1878), p. 689. Vgl. im übrigen: Münch. Sitz.-Ber., Bd. 31 (1901), p. 522.

lich *langsamer*, als $(\nu + 1)^\varepsilon$ für jedes noch so kleine $\varepsilon < 0$. Dies besagt: jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich eine gewisse natürliche Zahl n_ε so zuordnen, dass:

$$(11) \qquad 1 < \frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-1}} < \left(\frac{\nu + 1}{\nu}\right)^\varepsilon \quad \text{für} \quad \nu > n_\varepsilon.$$

Da man jedenfalls von vornherein $\varepsilon < 1$ annehmen kann, so hat man also:

$$1 < \frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-1}} < 1 + \frac{\varepsilon}{\nu}$$

und daher:

$$(12\text{a}) \qquad 0 < \lambda_\nu - \lambda_{\nu-1} < \varepsilon \,.\, \frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu} < \varepsilon \,.\, \frac{\lambda_\nu}{\nu}$$

für jedes positive $\varepsilon < 1$ und $\nu > n_\varepsilon$. Durch Division mit $\lambda_\nu \,.\, \lambda_{\nu-1}$ folgt sodann, dass analog:

$$(12\text{b}) \qquad 0 < \lambda_{\nu-1}^{-1} - \lambda_\nu^{-1} < \varepsilon \,.\, \frac{\lambda_\nu^{-1}}{\nu}$$

sodass man also setzen kann:

$$\left.\begin{array}{ll} (13\text{a}) & \lambda_\nu - \lambda_{\nu-1} = \varepsilon_\nu \,.\, \dfrac{\lambda_\nu}{\nu} \\ \text{bezw.:} & \\ (13\text{b}) & \lambda_{\nu-1}^{-1} - \lambda_\nu^{-1} = \varepsilon_\nu \,.\, \dfrac{\lambda_\nu^{-1}}{\nu} \end{array}\right\} \quad \text{wo: } \varepsilon_\nu > 0, \ \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0.$$

Wir wollen nunmehr, von der ursprünglich zur Charakterisirung der λ_ν, eingeführten (engeren) Bedingung (11) absehend, unter λ_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine positive Zahlenfolge verstehen, welche der Bedingung (13a) bezw. (13b) genügt, mit dem Zusatze, dass $\lim\limits_{\nu=\infty} \lambda_\nu = \infty$ und $\frac{\lambda_\nu}{\nu}$, zum mindesten von einem gewissen Werthe ν anfangend, *monoton* gegen Null abnimmt.[1]

[1] Diese Bedingung ist gleichfalls in der ursprünglichen Bedingung (11) enthalten. Denn darnach hätte man, zum mindesten von einem bestimmten ν ab:

$$\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-1}} < \frac{\nu + 1}{\nu} < \frac{\nu}{\nu - 1},$$

also in der That:

$$\frac{\lambda_\nu}{\nu} < \frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu - 1}.$$

Bedeutet dann r eine *stetige* positive Veränderliche, so soll unter $\lambda(r)$ eine positive monotone Function verstanden werden, die im übrigen lediglich der Bedingung zu genügen hat:

$$\lambda(\nu) = \lambda_\nu. \tag{14}$$

Substituirt man jetzt in (13a) der Reihe nach $\nu = (n+1), (n+2), \ldots, pn$ (wo p eine beliebige natürliche Zahl), so folgt durch Addition:

$$\lambda_{pn} - \lambda_n = \sum_{n+1}^{pn} \varepsilon_\nu \,.\, \frac{\lambda_\nu}{\nu}.$$

Die ε_ν haben für $\nu = (n+1), (n+2), \ldots$ *in inf.* eine obere Grenze $\bar{\varepsilon}_{n+1}$, welche, wegen $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0$, durch Wahl von n *beliebig klein* gemacht werden kann. Man hat nun:

$$\lambda_{pn} - \lambda_n < \bar{\varepsilon}_{n+1} \,.\, \lambda_{pn} \sum_{n+1}^{pn} \frac{1}{\nu} < \bar{\varepsilon}_{n+1} \,.\, \lambda_{pn} \,.\, \lg p$$

also:

$$\lambda_{pn}(1 - \bar{\varepsilon}_{n+1} \,.\, \lg p) < \lambda_n,$$

und, da andererseits $\lambda_n < \lambda_{pn}$:

$$1 < \frac{\lambda_{pn}}{\lambda_n} < \frac{1}{1 - \bar{\varepsilon}_{n+1} \,.\, \lg p},$$

d. h. schliesslich:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_{pn}}{\lambda_n} = 1. \tag{14}$$

Bedeutet dann n die grösste in r enthaltene ganze Zahl, so hat man:

$$\frac{\lambda_{pn}}{\lambda_{n+1}} < \frac{\lambda(pr)}{\lambda(r)} < \frac{\lambda_{p(n+1)}}{\lambda_n},$$

anders geschrieben:

$$\frac{\lambda^n}{\lambda_{n+1}} \cdot \frac{\lambda_{pn}}{\lambda_n} < \frac{\lambda(pr)}{\lambda(r)} < \frac{\lambda_{p(n+1)}}{\lambda_{n+1}} \cdot \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}.$$

Da aber aus (13a) folgt, dass:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1,$$

so ergiebt sich mit Berücksichtigung von Gl. (14):

$$\lim_{r=\infty} \frac{\lambda(pr)}{\lambda(r)} = 1. \tag{15}$$

Man hat nun ferner:

$$\lim_{r=\infty} \frac{\lambda\left(\frac{p}{q}\cdot r\right)}{\lambda(r)} = \lim_{r=\infty} \frac{\lambda\left(p\cdot\frac{r}{q}\right)}{\lambda\left(\frac{r}{q}\right)} \cdot \frac{\lambda\left(\frac{r}{q}\right)}{\lambda\left(q\cdot\frac{r}{q}\right)},$$

sodass mit Benützung von Gl. (15) die Beziehung resultirt:

$$\lim_{r=\infty} \frac{\lambda(kr)}{\lambda(r)} = 1, \tag{16}$$

zunächst für jedes *rationale* $k > 0$ und schliesslich, wegen der *Monotonie* von $\lambda(kr)$, *für jedes beliebige positive* k.

6. Als einfachste divergente Reihe mit dem *Divergenz-Maasse* λ_n ergiebt sich vermöge der Identität:

$$\lambda_n = \lambda_{n_0} + \sum_{n_0+1}^{n} {}_{\nu} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})$$

die Reihe $\sum(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})$. Dabei wollen wir im folgenden der Bequemlichkeit halber stets $n_0 = 0$ setzen und zwar in dem Sinne, dass wir den Zahlen λ_ν schon von $\nu = 0$ ab die Eigenschaft beilegen, *positiv* zu sein und *niemals abzunehmen*. Sollten etwa die λ_ν in Folge ihrer Definition durch irgend einen bestimmten arithmetischen Ausdruck (z. B. $\lambda_\nu = \lg_2 \nu$) jene Eigenschaft erst für $\nu \geqq n_0$ besitzen, so mag unter λ_ν für $\nu < n_0$ eben *nicht* jener arithmetische Ausdruck verstanden, sondern etwa $\lambda_\nu = \lambda_{n_0}$ für $\nu = 0, 1, \ldots, n_0$ gesetzt werden. Die Allgemeinheit der hier in Frage kommenden Resultate erleidet hierdurch offenbar keinerlei Einschränkung, da es in jeder Relation von der Form $\lim_{x'=0} F(x') \cdot \sum_0^\infty {}_\nu\, d_\nu x'^\nu = c$ ohne weiteres freisteht, eine beliebige endliche Anzahl von Anfangsgliedern wegzulassen bezw. in beliebiger Weise abzuändern.

In Folge der Divergenz von $\sum(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})$ und der aus Gl. (13a) resultirenden Beziehung: $\lim_{\nu=\infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) = 0$ besitzt die Potenzreihe

$\sum(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \,.\, x^\nu$ den Convergenz-Radius 1. Um ihr Verhalten bei $x = x' = 1$ zu untersuchen, erscheint es zweckmässig, die Substitution:

$$x = 1 - \frac{1}{y}$$

zu machen. Setzt man alsdann:

$$y = \rho \,.\, e^{-\varphi i},$$

so ist die Reihe:

(17) $$F_\lambda(y) = \lambda_0 + \sum_1^\infty{}^\nu (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \,.\, \left(1 - \frac{1}{y}\right)^\nu$$

convergent, wenn:

$$\left|1 - \frac{1}{\rho} \,.\, e^{\varphi i}\right| < 1,$$

also:

(18) $$\rho \,.\, \cos\varphi \equiv \Re(y) > \frac{1}{2} \quad \text{(wo } \Re(y) \text{ den } \textit{reellen Theil} \text{ von } y \text{ bedeutet).}$$

Darnach muss $\cos\varphi > 0$, also $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ sein. Setzt man etwa fest, dass $|\varphi| \leqq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, und versteht unter y' diejenigen y, welche der Bedingung genügen: $\left|\frac{1}{y'}\right| \leqq \cos\varphi$, so hat man nach Ungl. (1 a):

(19) $$\left|1 - \frac{1}{y'}\right| < 1 - \left|\frac{1}{ry'}\right| \quad \left(\text{wo: } \frac{1}{r} = \frac{\cos\varphi_0}{2} > 0\right).$$

Die Reihe (17) convergirt also *rechts* von der parallel zur Ordinaten-Axe verlaufenden Geraden $\Re(y) = \frac{1}{2}$. Sie genügt überdies der Bedingung (18) in dem Bereiche:

(20) $$|y'| \,.\, \cos\varphi \geqq 1, \quad \text{wo: } \varphi \leqq \varphi_0,$$

d. h. im Innern und auf den Grenzlinien desjenigen Ebenenstückes, welches *rechts* von der Geraden $\Re(y') = 1$ liegt und ausserdem begrenzt wird von den Schenkeln der beiden Winkel $\varphi = \pm\varphi_0$. Dieser sich in's Unendliche erstreckende Bereich werde als der Bereich $y = y'$ bezeichnet und der Grenzübergang $\lim\limits_{y'=\infty}$ allemal so verstanden, dass y' dem Bereiche (y') angehört und $\lim |y'| = \infty$.

7. Dies vorausgeschickt gilt zunächst der Satz:

Es ist:

(21) $$\lim_{y'=\infty} \lambda\left(|y'|\right)^{-1} . F_\lambda(y') = 1.$$

Beweis. Bezeichnet man mit n irgend eine natürliche Zahl und subtrahirt die Identität:

$$\lambda_n = \lambda_0 + \sum_1^n {}^\nu (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})$$

von der Gleichung:

$$F_\lambda(y) = \lambda_0 + \sum_0^\infty {}^\nu (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) . \left(1 - \frac{1}{y}\right)^\nu,$$

so folgt:

$$F(y) - \lambda_n = \sum_1^n {}^\nu (\lambda_n - \lambda_{\nu-1}) . \left\{ \left(1 - \frac{1}{y}\right)^\nu - 1 \right\} + \sum_{n+1}^\infty {}^\nu (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \left(1 - \frac{1}{y}\right)^\nu .$$

Man hat nun:

$$\left(1 - \frac{1}{y}\right)^\nu - 1 = k_\nu . \nu . \frac{1}{y}, \quad \text{wo: } |k_\nu| < 1,$$ [1]

[1] Nach einem von G. Darboux (Journ. de Mathém. (2), T. 2 [1876], p. 293) und P. Mansion (Ann. de la soc. scient. de Bruxelles, 1885—86, p. 36) bewiesenen Satze hat man für eine *differenzirbare* Function $f(x)$ der *complexen* Veränderlichen x:

$$f(x) = f(0) + k . x . f'(\vartheta x).$$

wo:

$$|k| < 1, \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

Hiernach ergiebt sich:

$$\begin{aligned}(1 - z)^\nu &= 1 - k . \nu z . (1 - \vartheta z)^{\nu-1} \\ &= 1 - k_\nu . \nu z,\end{aligned}$$

wo:

$$\begin{aligned}|k_\nu| &= |k| . |1 - \vartheta z|^\nu \\ &< 1,\end{aligned}$$

wenn:

$$|1 - \vartheta z| \leqq 1,$$

also sicher, wenn:

$$|1 - z| \leqq 1.$$

und somit, wenn man noch Gl. (13a) berücksichtigt:

$$F_\lambda(y) - \lambda_n = \frac{1}{y} \cdot \sum_1^n {}^{\nu} k_\nu \varepsilon_\nu \cdot \lambda_\nu + \sum_{n+1}^{\infty} {}^{\nu} \varepsilon_\nu \cdot \frac{\lambda_\nu}{\nu} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^\nu.$$

Bedeutet jetzt wiederum $\bar{\varepsilon}_{n+1}$ die obere Grenze von $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \ldots$ *in inf.*, so hat man:

$$|F_\lambda(y) - \lambda_n| < \left|\frac{1}{y}\right| \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \varepsilon_\nu \lambda_\nu + \bar{\varepsilon}_{n+1} \cdot \frac{\lambda_n}{n} \cdot \sum_{n+1}^{\infty} {}^{\nu} \left|1 - \frac{1}{y}\right|^\nu$$

und, wenn man jetzt y auf den Bereich (y') einschränkt, mit Berücksichtigung von Ungl. (19):

$$\begin{aligned} |F_\lambda(y') - \lambda_n| &< \left|\frac{1}{y'}\right| \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \varepsilon_\nu \lambda_\nu + \bar{\varepsilon}_{n+1} \cdot \frac{\lambda_n}{n} \cdot \sum_{n+1}^{\infty} {}^{\nu} \left(1 - \frac{1}{\gamma \cdot |y'|}\right)^\nu \\ &< \left|\frac{1}{y'}\right| \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \varepsilon_\nu \lambda_\nu + \bar{\varepsilon}_{n+1} \cdot \frac{\lambda_n}{n} \cdot \gamma \cdot |y'|, \end{aligned}$$

also:

$$\left|\frac{F_\lambda(y')}{\lambda_n} - 1\right| < \frac{n}{|y'|} \cdot \frac{\sum_1^n {}^{\nu} \varepsilon_\nu \lambda_\nu}{n \cdot \lambda_n} + \gamma \cdot \bar{\varepsilon}_{n+1} \cdot \frac{|y'|}{n}.$$

Da nach dem CAUCHY-STOLZ'schen Satze:

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} \frac{1}{n\lambda_n} \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \varepsilon_\nu \lambda_\nu &= \lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_n \lambda_n}{n \cdot \lambda_n - (n-1)\lambda_{n-1}} \\ &= \lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_n \lambda_n}{\varepsilon_n \lambda_n + \lambda_{n-1}} \quad \text{(nach Gl. (13a))} \\ &= 0, \end{aligned}$$

so folgt, dass $\frac{1}{n\lambda_n} \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \varepsilon_\nu \lambda_\nu$ durch Wahl einer passenden unteren Schranke für n *beliebig klein* gemacht werden kann. Dasselbe gilt bezüglich der Zahl $\bar{\varepsilon}_{n+1}$, sodass man also setzen kann:

$$\frac{1}{n\lambda_n} \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \varepsilon_\nu \lambda_\nu < \varepsilon \quad \text{und:} \quad \bar{\varepsilon}_{n+1} < \varepsilon \quad \text{etwa für } n \geqq n'.$$

Nimmt man jetzt $|y'| \geqq n'$ und setzt $n = [y']$, wo $[y']$ die grösste in $|y'|$ enthaltene ganze Zahl bedeutet, so wird:

$$\left| \lambda_{[y']}^{-1} \cdot F_\lambda(y') - 1 \right| < \varepsilon \cdot \left(1 + \gamma \cdot \frac{|y'|}{[y']} \right)$$

also:

$$\lim_{y'=\infty} \lambda_{[y']}^{-1} \cdot F_\lambda(y') = 1$$

und schliesslich, wegen: $\lim \lambda(|y'|) \cdot \lambda_{[y']}^{-1} = 1$, wie behauptet:

$$(21) \qquad \lim_{y'=\infty} \lambda(|y'|)^{-1} \cdot F_\lambda(y') = 1.$$

8. Setzt man jetzt:

$$F_\lambda\left(\frac{1}{1-x}\right) = \mathfrak{P}_\lambda(x) \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{P}_\lambda(x) = \lambda_0 + \sum_1^\infty{}_\nu (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \cdot x^\nu,$$

so nimmt zunächst die Relation (21) die Form an:

$$(22) \qquad \lim_{x'=1} \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-1} \cdot \mathfrak{P}_\lambda(x') = 1.$$

Daraus ergiebt sich speciell, wenn man $x' = |x'|$ setzt:

$$(23) \qquad \lim_{x'=1} \lambda\left(\frac{1}{1-|x'|}\right) \cdot \mathfrak{P}_\lambda(|x'|) = 1.$$

Nun ist aber mit Berücksichtigung von Ungl. (1):

$$\frac{1}{1-|x'|} \geqq \frac{1}{|1-x'|} > \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1-|x'|},$$

also:

$$1 \geqq \frac{\lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)}{\lambda\left(\frac{1}{1-|x'|}\right)} > \frac{\lambda\left(\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1-|x'|}\right)}{\lambda\left(\frac{1}{1-|x'|}\right)},$$

und daher nach Gl. (16):

$$(24) \qquad \lim_{x'=1} \frac{\lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)}{\lambda\left(\frac{1}{1-|x'|}\right)} = 1.$$

Darnach lässt sich aber Gl. (23) auch durch die folgende ersetzen:

$$\lim_{x'=1} \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right) \cdot \mathfrak{P}_\lambda(|x'|),$$

sodass in Verbindung mit Gl. (22) folgt:

$$(25) \qquad \lim_{x'=1} \frac{\mathfrak{P}_\lambda(x')}{\mathfrak{P}_\lambda(|x'|)} = 1,$$

d. h. (s. Nr. 2, am Ende):

Die Reihe $\mathfrak{P}_\lambda(x')$ divergirt bei $x' = 1$ gleichmässig.

Da andererseits $\mathfrak{P}_\lambda(1)$ das Divergenz-Maass λ_n besitzt, so gewinnt man mit Benützung des in Nr. 3 angegebenen Vergleichungs-Princips den folgenden Satz:

Besitzt die Reihe $\sum a_\nu$ das Divergenz-Maass $g\lambda_n$, so convergirt $\sum a_\nu x^\nu$ für $|x| < 1$ und divergirt bei $x = x' = 1$ gleichmässig, derart dass:

$$(26) \qquad \lim_{x'=1} \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-1} \cdot \sum_0^\infty {}^\nu\, a_\nu x'^\nu = g.$$

Dabei ist die auf $\sum a_\nu$ bezügliche Voraussetzung allemal erfüllt, wenn:

$$(26\text{a}) \qquad a_n \cong g(\lambda_n - \lambda_{n-1}).$$

9. Da:

$$\mathfrak{P}_\lambda(x) = \lambda_0 + \sum_1^\infty {}^\nu (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \cdot x^\nu$$

$$= (1-x) \cdot \sum_0^\infty {}^\nu \lambda_\nu \cdot x^\nu,$$

so lässt sich Gl. (22) auch folgendermaassen schreiben:

$$(27) \qquad \lim_{x'=1} (1-x') \cdot \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-1} \cdot \sum_0^\infty {}^\nu \lambda_\nu x'^\nu = 1.$$

Wir zeigen nun zunächst, dass die ähnlich gebildete Reihe: $\sum_0^\infty {}_\nu \lambda_\nu^{-1} . x^\nu$, welche offenbar gleichfalls für $|x| < 1$ *convergirt*, für $x = 1$ *divergirt*, einer ganz analogen Relation genügt. Man hat für $|x| < 1$:

$$\sum_0^\infty {}_\nu \lambda_\nu x^\nu . \sum_0^\infty {}_\nu \lambda_\nu^{-1} x^\nu = \sum_0^\infty {}_\nu k_\nu . x^\nu, \tag{28}$$

wenn gesetzt wird:

$$k_n = \lambda_0 . \lambda_n^{-1} + \lambda_1 . \lambda_{n-1}^{-1} + \ldots + \lambda_{n-1} . \lambda_1^{-1} + \lambda_n . \lambda_0^{-1}.$$

Daraus folgt zunächst:

$$k_n \begin{cases} > \lambda_n^{-1} (\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \\ < \lambda_n \, (\lambda_0^{-1} + \lambda_1^{-1} + \ldots + \lambda_n^{-1}) \end{cases}$$

und daher:

$$\frac{k_n}{n+1} \begin{cases} > \dfrac{1}{(n+1) . \lambda_n} . \sum_0^n {}_\nu \lambda_\nu \\ < \dfrac{1}{(n+1) . \lambda_n^{-1}} . \sum_0^n {}_\nu \lambda_\nu^{-1}. \end{cases}$$

Nach dem Cauchy-Stolz'schen Satze ist aber:

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} \frac{1}{(n+1) . \lambda_n^{\pm 1}} . \sum_0^n {}_\nu \lambda_\nu^{\pm 1} &= \lim_{n=\infty} \frac{\lambda_n^{\pm 1}}{(n+1) . \lambda_n^{\pm 1} - n . \lambda_{n+1}^{\pm 1}} \\ &= \lim_{n=\infty} \frac{1}{\varepsilon_n + 1} \quad \text{(s. Gl. (13 a), (13 b))}, \\ &= 1, \end{aligned} \tag{29}$$

sodass sich ergiebt:

$$\lim_{n=\infty} \frac{k_n}{n+1} = 1, \quad \text{also: } k_n \cong n,$$

und somit nach Gl. (10):

$$\lim_{x'=1} (1 - x')^2 . \sum_0^\infty {}_\nu k_\nu x'^\nu = 1.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung $\sum_0^\infty {}_\nu k_\nu x'^\nu$ durch das gleichgeltende Reihen-Product (28) und schreibt die so resultirende Gleichung folgendermaassen:

$$\lim_{x'=\infty} \left\{ (1 - x') . \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)^{-1} . \sum_0^\infty {}_\nu \lambda_\nu x'^\nu \right\} . \left\{ (1 - x') . \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right) . \sum_0^\infty {}_\nu \lambda_\nu^{-1} . x'^\nu \right\} = 1,$$

so ergiebt sich mit Berücksichtigung von Gl. (27) die gesuchte Relation:

$$(31) \qquad \lim_{x'=1} (1 - x') . \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right) . \sum_0^\infty {}_\nu \lambda_\nu^{-1} . x'^\nu = 1.$$

10. Durch Zusammenfassung der Beziehungen (27) und (30) ergiebt sich, wenn man noch des folgenden wegen den unteren Summations-Index 0 durch 1 ersetzt:

$$(31) \qquad \lim_{x'=1} (1 - x') . \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)^{-\alpha} . \sum_1^\infty {}_\nu \lambda_\nu^\alpha . x'^\nu = 1, \quad \text{wo: } \alpha = \pm 1..$$

Daraus folgt in's besondere, dass $\sum \lambda_\nu^\alpha . x'^\nu$ bei $x' = 1$ *gleichmässig* divergirt, da:

$$\frac{1 - |x'|}{|1 - x'|} > \frac{1}{r} \quad \text{und:} \quad \lim_{x'=1} \frac{\lambda\left(\frac{1}{1 - |x'|}\right)}{\lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)} = 1 \qquad \text{(Gl. (24)).}$$

Um nun aus der Beziehung (31) eine allgemeinere abzuleiten, combiniren wir sie mit der folgenden (aus Gl. (10) resultirenden):

$$(32) \qquad \lim_{x'=1} (1 - x')^p . \sum_1^\infty {}_\nu \nu^{p-1} . x'^\nu = \Gamma(p) \qquad (p > 0).$$

Durch Multiplication mit Gl. (31) ergiebt sich alsdann:

$$(33) \qquad \lim_{x'=1} (1 - x')^{p+1} . \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right) . \sum_1^\infty {}_\nu h_\nu x'^{\nu+1} = \Gamma(p),$$

wenn gesetzt wird:

$$(34) \qquad h_n = \lambda_1^\alpha . n^{p-1} + \lambda_2^\alpha . (n - 1)^{p-1} + \ldots + \lambda_{n-1}^\alpha . 2^{p-1} + \lambda_n^\alpha . 1^{p-1}.$$

Dabei ist, wie zunächst gezeigt werden soll:

$$h_n \cong \frac{1}{p} \cdot n^p \cdot \lambda_n^\alpha. \tag{35}$$

Durch partielle Summation folgt nämlich aus (34):

$$h_n = (\lambda_1^\alpha - \lambda_2^\alpha) \cdot n^{p-1} + (\lambda_2^\alpha - \lambda_3^\alpha)\left((n-1)^{p-1} + n^{p-1}\right) + \ldots$$
$$+ (\lambda_{n-1}^\alpha - \lambda_n^\alpha)(2^{p-1} + \ldots + n^{p-1}) + \lambda_n^\alpha(1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + n^{p-1})$$

und hieraus, da die Differenzen $\lambda_{\nu-1}^\alpha - \lambda_\nu^\alpha$, gleichgültig ob $\alpha = \pm 1$, jedenfalls gleiches Vorzeichen haben:

$$\left| h_n - \lambda_n^\alpha \cdot \sum_1^n {}_\nu \, \nu^{p-1} \right| = \left| (\lambda_1^\alpha - \lambda_2^\alpha) \cdot n^{p-1} + (\lambda_2^\alpha - \lambda_3^\alpha)\left((n-1)^{p-1} + n^{p-1}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. + (\lambda_{n-1}^\alpha - \lambda_n^\alpha)(2^{p-1} + \ldots + n^{p-1}) \right|. \tag{36}$$

Sei nun zunächst $p > 1$, also $(\nu + 1)^{p-1} > \nu^{p-1}$, $\lim \nu^{p-1} = \infty$. Aus (36) folgt alsdann:

$$\left| h_n - \lambda_n^\alpha \cdot \sum_1^n {}_\nu \, \nu^{p-1} \right| < \left| (\lambda_1^\alpha - \lambda_2^\alpha) \cdot n^{p-1} + (\lambda_2^\alpha - \lambda_3^\alpha) \cdot 2n^{p-1} + \ldots \right.$$
$$\left. + (\lambda_{n-1}^\alpha - \lambda_n^\alpha) \cdot (n-1) \cdot n^{p-1} \right|$$
$$= n^{p-1} \cdot \left| \sum_1^n {}_\nu \, \lambda_\nu^\alpha - n \cdot \lambda_n^\alpha \right| \tag{37}$$

und durch Division mit $n^p \cdot \lambda_n^\alpha$:

$$\left| \frac{h_n}{n^p \cdot \lambda_n^\alpha} - \frac{1}{n^p} \sum_1^n {}_\nu \, \nu^{p-1} \right| < \left| \frac{1}{n \cdot \lambda_\alpha} \cdot \sum_1^n {}_\nu \, \lambda_n^\alpha - 1 \right|. \tag{38}$$

Da aber:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1}{n^p} \cdot \sum\limits_1^n {}_\nu \, \nu^{p-1} = \dfrac{1}{p} & \text{(nach dem Cauchy-Stolz'sche Satze)} \\[2ex] \lim\limits_{u=\infty} \dfrac{1}{n \cdot \lambda_n^\alpha} \cdot \sum\limits_1^n {}_\nu \, \lambda_\nu^\alpha = 1 & \text{(desgl.; s. übrigens Gl. (29)),} \end{cases} \tag{39}$$

so ergiebt sich, wie behauptet (Gl. (35)):

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n}{n^p \cdot \lambda_n^\alpha} = \frac{1}{p}.$$

Ist jetzt $p < 1$, also $(\nu + 1)^{p-1} < \nu^{p-1}$, so hat man:

$$n^{p-1} + (n-1)^{p-1} + \ldots + (n - \nu + 1)^{p-1} < \nu \,.\, (n-\nu)^{p-1} \quad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, (n-1))},$$

und wenn man auf beiden Seiten den Ausdruck

$$\nu\left(n^{p-1} + (n-1)^{p-1} + \ldots + (n-\nu+1)^{p-1}\right)$$

addirt:

$$(\nu + 1).\left\{n^{p-1} + (n-1)^{p-1} + \ldots + (n-\nu+1)^{p-1}\right\}$$
$$< \nu\left\{n^{p-1} + (n-1)^{p-1} + \ldots + (n-\nu)^{p-1}\right\},$$

also:

$$\frac{n^{p-1} + (n-1)^{p-1} + \ldots + (n-\nu+1)^{p-1}}{\nu} < \frac{n^{p-1} + (n-1)^{p-1} + \ldots + (n-\nu)^{p-1}}{\nu + 1}.$$

Durch successive Anwendung dieser Relation für $\nu = 1, 2, \ldots, (n-1)$ findet man:

$$\frac{n^{p-1}}{1} < \frac{n^{p-1} + (n-1)^{p-1}}{2} < \ldots < \frac{n^{p-1} + (n-1)^{p-1} + \ldots + 1^{p-1}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, \nu^{p-1},$$

sodass mit Benützung dieser Ungleichungen aus Gl. (36) sich ergiebt:

$$\left| h_n - \lambda_n^a . \sum_1^n{}_\nu\, \nu^{p-1} \right| < \left(\frac{1}{n} . \sum_1^n{}_\nu\, \nu^{p-1}\right) . \left| 1 . (\lambda_1^a - \lambda_2^a) + 2 (\lambda_2^a - \lambda_3^a) + \ldots \right.$$
$$\left. + (n-1) . (\lambda_{n-1}^a - \lambda_n^a) \right|$$
$$= \left(\frac{1}{n} . \sum_1^n{}_\nu\, \nu^{p-1}\right) . \left| \sum_1^n{}_\nu\, \lambda_\nu^a - n . \lambda_n^a \right|$$

und, wenn man wiederum noch durch $n^p . \lambda_n^a$ dividirt:

$$\left| \frac{h_n}{n^p . \lambda_n^a} - \frac{1}{n^p} . \sum_1^n{}_\nu\, \nu^{p-1} \right| < \left(\frac{1}{n^p} . \sum_1^n{}_\nu\, \nu^{p-1}\right) . \left| \frac{1}{n . \lambda_n^a} . \sum_1^n{}_\nu\, \lambda_\nu^a - 1 \right|.$$

Daraus folgt dann schliesslich wieder mit Hülfe von (39):

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n}{n^p . \lambda_n^a} = \frac{1}{p}.$$

Für den noch übrig bleibenden Fall $p = 1$, für welchen nach Gl. (34):

$$h_n = \sum_1^n {}_\nu \lambda_\nu^\alpha,$$

findet man unmittelbar aus der zweiten Gleichung (39):

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n}{n \cdot \lambda_n^\alpha} = 1,$$

sodass also die Gültigkeit der Beziehung (35) nunmehr für jedes $p > 0$ erwiesen ist.

11. Beachtet man noch, dass Gl. (33) offenbar wieder die *gleichmässige* Divergenz der betreffenden Potenzreihe anzeigt, so liefert der Zusatz von Nr. 3 und das soeben bezüglich der h_ν gewonnene Resultat die folgende Beziehung:

$$(40)\quad \lim_{x'=1} (1 - x')^{p+1} . \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)^{-\alpha} . \sum_1^\infty {}_\nu \nu^p . \lambda_\nu^\alpha . x'^\nu = p . \Gamma(p)$$
$$= \Gamma(p + 1) \quad (p > 0,\ \alpha = \pm 1),$$

und, wenn man den Factor $(1 - x')$ unter das Summenzeichen zieht:

$$(41)\quad \lim_{x'=1} (1 - x')^p . \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)^{-\alpha} . \sum_1^\infty {}_\nu \left(\nu^p . \lambda_\nu^\alpha - (\nu - 1)^p . \lambda_{\nu-1}^\alpha\right) . x'^\nu = \Gamma(p + 1).$$

Diese unter der Voraussetzung $p > 0$, $\alpha = \pm 1$ abgeleitete Gleichung gilt offenbar auch für $p > 0$, $\alpha = 0$, da sie alsdann bereits in Gl. (9) enthalten ist; desgl. für $p = 0$, $\alpha = +1$, in welchem Falle sie auf Gl. (22) führt. Da andererseits Gl. (41) wiederum die *gleichmässige* Divergenz der Potenzreihe bei $x' = 1$ erkennen lässt, und da ausserdem die für $x' = 1$ resultirende Reihe das Divergenz-Maass $n^p . \lambda_n^\alpha$ besitzt, so lässt sich unter nochmaliger Anwendung des Satzes von Nr. 3 das Gesammtresultat dieser Untersuchung in folgender Weise formuliren:

Hauptsatz (Erste Form). *Besitzt die Reihe $\sum a_\nu$ das Divergenz-Maass:*

$$g . n^p . \lambda_n^\alpha \begin{cases} \text{wo: } p > 0, & \alpha = \pm 1 \text{ oder } 0, \\ \text{oder: } p = 0, & \alpha = +1, \end{cases}$$

so convergirt die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ *für* $|x| < 1$ *und divergirt bei* $x = x' = 1$ *gleichmässig mit dem Divergenz-Charakter:*

$$\Gamma(p+1) \cdot g \cdot \left(\frac{1}{1-x'}\right)^p \cdot \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^\alpha,$$

d. h. man hat:

$$\lim_{x'=1} (1-x')^p \cdot \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-\alpha} \cdot \sum_0^\infty a_\nu x'^\nu = \Gamma(p+1) \cdot g. \tag{42}$$

Die Voraussetzung dieses Satzes, nämlich:

$$\sum_0^n a_\nu \cong g \cdot n^p \cdot \lambda_n^\alpha,$$

ist dann nach dem CAUCHY-STOLZ'schen Satze oder auch direct im Anschlusse an Gl. (41) wiederum sicher erfüllt, wenn:

$$a_n \cong g(n^p \cdot \lambda_n^\alpha - (n-1)^p \cdot \lambda_{n-1}^\alpha). \tag{43}$$

Ist nun $p > 0$, so hat man für $\alpha = \pm 1$:

$$n^p \lambda_n^\alpha - (n-1)^p \cdot \lambda_{n-1}^\alpha = (n^p - (n-1)^p) \cdot \lambda_n^\alpha + (n-1)^p \cdot (\lambda_n^\alpha - \lambda_{n-1}^\alpha),$$

also:

$$\begin{aligned}\frac{n^p \cdot \lambda_n^\alpha - (n-1)^p \cdot \lambda_{n-1}^\alpha}{n^{p-1} \cdot \lambda_n^\alpha} &= n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p \cdot n \cdot \frac{\lambda_n^\alpha - \lambda_{n-1}^\alpha}{\lambda_n^\alpha} \\ &= n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p \cdot \varepsilon_n \quad \text{(Gl. (13a), (13b))}\end{aligned}$$

und daher:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^p \cdot \lambda_n^\alpha - (n-1)^p \cdot \lambda_{n-1}^\alpha}{n^{p-1} \cdot \lambda_n^\alpha} = p,$$

anders geschrieben:

$$n^p \cdot \lambda_n^\alpha - (n-1)^p \cdot \lambda_{n-1}^{\alpha-1} \cong p \cdot n^{p-1} \cdot \lambda_n^\alpha, \tag{44}$$

eine Formel, die offenbar auch im Falle $\alpha = 0$ richtig bleibt, sodass also für $p > 0$ die für die Gültigkeit von Gl. (42) ausreichende Bedingung (43) auch durch die folgende einfachere ersetzt werden kann:

$$a_n \cong p \cdot g \cdot n^{p-1} \cdot \lambda_n^\alpha. \tag{45}$$

Ist dagegen $p = 0$, so versagt die eben durchgeführte Transformation, sodass es also in diesem Falle bei der Bedingung (43), d. h. (wegen $\alpha = +1$, wenn $p = 0$):

$$a_n \cong g(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \tag{46}$$

sein Bewenden hat und lediglich das schon durch Gl. (26), (26a) ausgesprochene Resultat wieder zum Vorschein kommt.

Ersetzt man jetzt schliesslich noch in Gl. (45) g durch $\frac{g}{p}$, sodass $\Gamma(p+1).g$ auf der rechten Seite von Gl. (42) in $\Gamma(p).g$ übergeht, so gewinnt man die folgende

Zweite Form des Hauptsatzes. *Es ist* $\sum a_\nu x^\nu$ *für* $|x| < 1$ *convergent, bei* $x = x' = 1$ *gleichmässig divergent und genügt der Grenz-Beziehung:*

$$(47)\begin{cases} \text{(a)} \quad \lim\limits_{x'=1} (1 - x')^p . \lambda\left(\dfrac{1}{|1 - x'|}\right)^{-\alpha} . \sum\limits_0^\infty {}^\nu a_\nu x'^\nu = \Gamma(p).g, \\ \qquad\qquad \textit{wenn: } a_n \cong g . n^{p-1} . \lambda_n^\alpha \quad (p > 0,\ \alpha = \pm 1 \text{ oder } 0) \\ \text{(b)} \quad \lim\limits_{x'=1} \lambda\left(\dfrac{1}{|1 - x'|}\right)^{-1} . \sum\limits_0^\infty {}^\nu a_\nu x'^\nu = g, \ \textit{wenn: } a_n \cong g(\lambda_n - \lambda_{n-1}). \end{cases}$$

Obschon die a_ν hier *specielleren* Bedingungen genügen müssen, als zuvor für die Gültigkeit von Gl. (42) erforderlich waren, so besitzt doch der Satz in dieser neuen Formulirung, ja sogar schon der in Gl. (47a) enthaltene Theil desselben in Wahrheit keine geringere Tragweite, als der Hauptsatz I — d. h. man kann von Gl. (47a) aus auch wiederum zu Gl. (42), ja sogar mit noch etwas erweiterter Gültigkeits-Bedingung zurück gelangen. Ersetzt man nämlich in (47a) a_ν durch s_ν und setzt sodann $s_n = \sum\limits_0^n {}^\nu a_\nu$, so ergiebt sich zunächst:

$$\lim_{x'=1} (1 - x')^p . \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)^{-\alpha} . \sum_0^\infty {}^\nu s_\nu x'^\nu = \Gamma(p).g,$$

$$\text{wenn } \sum_0^n {}^\nu a_\nu \cong g . n^{p-1} . \lambda_n^\alpha \text{ und } p > 0.$$

Da aber:

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, s_\nu x'^\nu = \frac{1}{1 - x'} \cdot \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x'^\nu,$$

so folgt, wenn man noch $p + 1$ statt p schreibt:

$$\lim_{x'=1} (1 - x')^p . \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)^{-\alpha} \cdot \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x'^\nu = \Gamma(p + 1) . g, \tag{48}$$

$$\text{wenn: } \sum_0^n{}_\nu\, a_\nu \cong g . n^p . \lambda_n^\alpha, \quad p + 1 > 0,$$

in voller Übereinstimmung mit Gl. (42), nur mit dem Unterschiede, dass an die Stelle der Gültigkeits-Bedingung $p \geqq 0$ jetzt die folgende: $p > -1$ tritt. Dabei ist aber hervorzuheben, dass für $p < 0$ und auch schon in dem (oben ausdrücklich ausgeschlossenen) Falle: $p = 0$, $\alpha = -1$ die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu$ nicht mehr *divergirt*, sondern *convergirt* und zwar gegen die Summe *Null*, wie ja auch andererseits der Factor $(1 - x')^p . \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)^{-\alpha}$ dann *nicht* mehr den Grenzwerth 0, sondern den Grenzwerth ∞ besitzt. Die Relation (48) macht also in diesem Falle eine Aussage über den Zusammenhang des *Convergenz*-Charakters der Potenzreihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x'^\nu$ bei $x' = 1$ und des *Convergenz*-Maasses der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu$. Man bemerke noch, dass alsdann die *Festhaltung* des *unteren* Summations-Index ν, also bei der hier gewählten Formulirung: $\nu = 0$, für die Gültigkeit der Gleichung (48) durchaus *wesentlich* ist, während derselbe in dem bisher ausschliesslich betrachteten Falle der *Divergenz* von Σa_ν, wie bereits oben bemerkt wurde (s. Nr. 6), durchaus willkürlich bleibt.

Die zuletzt gemachten Bemerkungen gelten auch für die Relation:

$$\lim_{x'=1} (1 - x')^{-1} . \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)^{-1} \cdot \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x'^\nu = g, \text{ wenn: } \sum_0^n{}_\nu\, a_n \cong \lambda_n - \lambda_{n-1}, \tag{49}$$

welche sich durch die eben benützte Transformation aus Gl. (47 b) ergeben würde.

12. Die Function $\lambda(r)$ war bisher keiner anderen Beschränkung unterworfen, als dass sie *monoton* zunehmen und der Beziehung $\lambda(\nu) = \lambda_\nu$ genügen sollte. Nimmt man jetzt $\lambda(r)$ als *stetig* und *differenzirbar* an, so wird an die Stelle der Bedingung (12a) die folgende treten:

$$\lambda'(r) < \varepsilon \cdot \frac{\lambda(r)}{r} \quad \text{für } r > r_\varepsilon, \tag{50}$$

mit dem Zusatze, dass $\frac{\lambda(r)}{r}$ und $\lambda'(r)$ von einem gewissen r ab *monoton* abnehmen. Alsdann wird nämlich:

$$\begin{aligned}\lambda(r) - \lambda(r-h) &= \lambda'(r - \vartheta h) \cdot h \\ &< \lambda'(r) \cdot h < \varepsilon \cdot \frac{\lambda(r)}{r} \cdot h,\end{aligned}$$

also speciell:

$$\lambda(\nu) - \lambda(\nu - 1) < \varepsilon \cdot \frac{\lambda(\nu)}{\nu},$$

übereinstimmend mit Ungl. (12a).

Man erkennt nun unmittelbar, dass jeder Ausdruck von der Form:

$$\Lambda(r) = (\lg_m r)^q \cdot (\lg_{m+1} r)^{q_1} \ldots (\lg_{m+k} r)^{q_k}, \tag{51}$$

wo: $m \geqq 1$, $q > 0$, $q_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, k)$ beliebig reell, incl. 0,

den soeben in Bezug auf $\lambda(r)$, $\lambda'(r)$ statuirten Bedingungen genügen, und dass sodann, im Falle $q < 0$, $\Lambda(r)$ dem Typus $\lambda(r)^{-1}$ angehört.

Beachtet man noch, dass:

$$\lim_{r=\infty} \frac{\lg r e^{\varphi i}}{\lg r} = \lim_{r=\infty} \frac{\lg r + \varphi i}{\lg r} = 1$$

also:

$$\lim_{x'=1} \frac{\lg \frac{1}{1-x'}}{\lg \frac{1}{|1-x'|}} = 1 \quad \text{und allgemein:} \quad \lim_{x'=1} \frac{\lg_k \frac{1}{1-x'}}{\lg_k \frac{1}{|1-x'|}} = 1, \tag{52}$$

wobei man etwa, um eine eindeutige Festsetzung zu treffen, unter $\lg y$ den *Haupt-Logarithmus*, also unter $\lg_2 y = \lg(\lg y)$ den *Haupt-Logarithmus* vom *Haupt-Logarithmus* u. s. f. verstehen mag (was im übrigen für die

Gültigkeit von (52) belanglos ist), so liefert der Hauptsatz I für $\lambda(r)^\alpha = A(r)$ das folgende Resultat:

Besitzt die Reihe $\sum a_\nu$ das Divergenz-Maass:

$$g \,.\, n^p \,.\, A(n) \begin{cases} \text{wo: } A(n) = (\lg_m n)^q \,.\, (\lg_{m+1} n)^{q_1} \ldots (\lg_{m+k} n)^{q_k} \\ p \geqq 0 \text{ und im Falle } p = 0 : q > 0, \end{cases}$$

so hat man:

$$(53) \qquad \lim_{x'=1} (1 - x')^p \,.\, A\left(\frac{1}{1-x'}\right)^{-1} \,.\, \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x'^\nu = \Gamma(p+1) \,.\, g.$$

13. Die Substitution $\lambda(r)^\alpha = A(r)$ würde unmittelbar ein analoges Ergebniss aus der Gleichung (47a) liefern. Um aber für die *beiden* Relationen (47a), (47b) eine in Bezug auf die Normirung der a_n möglichst einheitlich gestaltete Fassung zu gewinnen, verfahren wir folgendermaassen. Es werde gesetzt:

$$(54) \qquad \overline{A(r)} = (\lg_m r)^{1-q} \,.\, (\lg_{m+1} r)^{-q_1} \ldots (\lg_{m+k})^{-q_k},$$

wo $q < 1$, die übrigen q_ν beliebig reell, eventuell auch Null.

Alsdann wird:

$$\overline{A'(r)} = \overline{A(r)} \left\{ \frac{1-q}{r \,.\, \lg_1 r \ldots \lg_m r} - \frac{q_1}{r \,.\, \lg_1 r \ldots \lg_{m+1} r} - \ldots \right\},$$

also für $r = \infty$:

$$(55) \qquad \overline{A'(r)} \cong (1-q) \,.\, \frac{\overline{A(r)}}{r \,.\, \lg_1 r \ldots \lg_m r}$$

$$= (1-q) \frac{1}{L_{m-1}(r) \,.\, (\lg_m r)^q \,.\, (\lg_m{}^{+1} r)^{q_1} \ldots (\lg_{m+k} r)^{q_k}},$$

wo:

$$(56) \qquad L_\mu(r) = r \,.\, \lg_1 r \ldots \lg_\mu r \quad (\mu \geqq 1) \quad \text{und speciell: } L_0(r) = r.$$

Führt man in Gl. (47b) $\lambda(r) = \overline{A(r)}$ ein, so kann die Bedingung:

$$a_n \cong g(\overline{A(n)} - \overline{A(n-1)})$$

mit Hülfe der Relation:

$$\overline{A(n)} - \overline{A(n-1)} = \overline{A'(n-\vartheta)} \cong \overline{A'(n)},$$

und falls man schliesslich noch $\frac{g}{1-q}$ statt g schreibt, durch die folgende ersetzt werden:

$$a_n \cong \frac{g}{1-q} \cdot \overline{\Lambda'(n)} = g \cdot \frac{1}{L_{m-1}(n) \cdot (\lg_m n)^q \cdot (\lg_{m+1} n)^{q_1} \ldots (\lg_{m+k} n)^{q_k}} \qquad (q < 1).$$

Setzt man dann noch die zu Gl. (47a) gehörige Bedingung in die Form:

$$a_n \cong g \cdot \frac{n^p}{n \cdot \lambda_n^{-a}} = g \cdot \frac{n^p}{L_{m-1}(n) \cdot (\lg_m n)^q \ldots (\lg_{m+k} n)^{q_k}} \qquad (q \gtrless 1),$$

so liefern die beiden Beziehungen (47) den folgende Satz: [1]

Ist:

$$a_n \cong g \cdot \frac{n^p}{L_{m-1}(n) \cdot (\lg_m n)^q \cdot (\lg_{m+1} n)^{q_1} \ldots (\lg_{m+k} n)^{q_k}} \qquad (m \geqq 1),$$

so hat man, falls $p > 0$, $q \lesseqgtr 1$:

$$\lim_{x'=1} (1-x')^{p+1} \cdot L_{m-1}\left(\frac{1}{1-x'}\right) \lg_m \left(\frac{1}{1-x'}\right)^q \cdot \lg_{m+1}\left(\frac{1}{1-x'}\right)^{q_1} \ldots \lg_{m+k}\left(\frac{1}{1-x'}\right)^{q_k}$$
$$\times \sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x'^\nu = \Gamma(p) \cdot g,$$

dagegen für $p = 0$, *in welchem Falle dann allemal* $q < 1$ *sein muss:* [2]

$$\lim_{x'=1} \lg_m \left(\frac{1}{1-x'}\right)^{q-1} \cdot \lg_{m+1}\left(\frac{1}{1-x'}\right)^{q_1} \ldots \lg_{m+k}\left(\frac{1}{1-x'}\right)^{q_k} \cdot \sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x'^\nu = \frac{g}{1-q}.$$

München, Januar 1902.

---

[1] Für *reelle* x' bei E. Lasker, a. a. O. p. 453. Die dort benützte Methode *versagt* für *complexe* x'.

[2] Für $q > 1$, wäre ja Σa_ν *convergent.*