Sur quelques variétés d'Einstein compactes.

par MARCEL BERGER (à Strasbourg, France)

À M. Enrico Bompiani pour son Jubilé scientifique.

Résumé. - *On démontre en particulier qu'un variété riemanienne compacte d'*ENSTEIN *de dimension quatre et de courbure comprise entre* 1 *et* 1/4 *est nécessairement à courbure constante.*

1. **Introduction.** - Une variété riemannienne est dite d'EINSTEIN si sa courbure de RICCI est proportionelle à sa métrique. Dans le cas où la structure riemannienne est celle associée à une structure kählérienne, la courbure de RICCI peut être exprimée a l'aide de la forme de KÄHLER; en utilisant alors une méthode due à E. CALABI ([3]), on montre que si deux structures kählériennes différentes sur une même variété analytique complexe compacte sont toutes deux d'EINSTEIN. avec une facteur de proportionnalité négatif, les deux formes de KÄHLER sont nécessairement proportionelles (théorème 1). On peut se demander si cette unicité subsiste dans le cas où les deux facteurs de proportionnalité sont positifs et, plus généralement, dans le cas où la structure riemannienne n'est plus nécessairement celle associée à une structure kälhérienne. On donne une réponse positive à cette dernière question dans le cas très particulier d'une variété de dimension quatre et de courbure comprise entre 1 et 1/4 (théorème 2).

2. **Définitions.** - Soit V une variété indéfiniment différentiable, de dimension supérieure ou égale à deux; soit $T(V)$ (resp. T_p) l'espace de ses vecteurs (resp. vecteurs d'origine $p \in V$). Une structure riemannienne sur V est la donnée, sur chaque T_p, d'une forme bilinéaire symétrique (notée $\langle\,,\rangle$ pour tout p) qui dépend de p de façon indéfiniment différentiable et dont la forme quadratique correspondante (notée $\|\ \|$) est définie positive. A la structure riemannienne de V on associe canoniquement son *tenseur de courbure* qui est, pour chaque p, une forme bilinéaire antisymétrique sur T_p à valeurs dans les endomorphisme valeur de cette forme sur la couple (X, Y). La *courbure de V dans un sous-espace à deux dimensions* de T_p, engendré par deux vecteurs orthogonaux non nuls X, Y de T_p, est le scalaire

$$\rho(X, Y) = -\frac{\langle R(X, Y)X, Y\rangle}{\|X\|^2\,\|Y\|^2}.$$

La varieété V est dite à courbure constante si le scalaire $k = \rho(X, Y)$ ne dépend, ni de X, $Y \in T_p$, ni de $p \in V$. Il est classique que, si k est strictement positif, la structure riemannienne de V est alors localement isomorphe à celle de la sphère de rayon $k^{-(1/2)}$de l'espace euclidien R^{m+1} (où m désigne la dimension de V et où la structure riemannienne de la sphère considérée est celle induite par le plongement): si k est négatif ou nul, on a un résultat analogue, où la sphère est remplacée par l'espace euclidien ou un espace hyperbolique.

Si l'on fixe X et Y, l'application $Z \to -\langle R(X, Y)Y, Z\rangle$ est une forme quadratique sur T_p; la trace de cette forme quadratique, par rapport à la norme définie sur T_p par la structure riemannienne, est, en vertu des relations classiques que satisfait le tenseur de courbure, une forme bilinéaire symétrique en X, Y, appelée la *courbure de Ricci* de la structure riemannienne considérée; on notera Ric (X, Y) sa valeur sur le couple (X, Y). Si $\{X_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ est un repère orthonormé de T_p, on aura donc:

$$\text{Ric}\,(X_i, X_i) = \sum_{j \neq i} \rho(X_i, X_j). \tag{2.1}$$

La variété riemannienne V est dite une variété d'Einstein s'il existe un nombre réel k tel que l'on ait

$$\text{Ric}\,(X, Y) = k\langle X, Y\rangle, \text{ quels que soient } X, Y \in T_p \text{ et } p \in V. \tag{2.2}$$

(on pourrait exiger seulement d'avoir Ric $(X, Y) = k(p)\langle X, Y\rangle$, où $p \to k(p)$ est une fonction sur V, mais il résulte alors classiquement des propriétes du tenseur de courbure que la fonction k est constante sur V). Une sphère de l'espace euclidien, étant à courbure constante, est évidemment d'Einstein. Réciproquement, si V est d'Einstein et de dimension 2 ou 3, elle est à courbure constante: c'est évident en dimension 2; en dimension 3, si $\{X, Y, Z\}$ est un repère orthonormé quelconque, on a d'après les formules (2.1) et (2.2):

$$\rho(X, Y) + \rho(X, Z) = \rho(Y, X) + \rho(Y, Z) = \rho(Z, X) + \rho(Z, Y) = k$$

d'où $\rho(X, Y) = k/2$. L'étude des variétés d'Einstein ne présente donc d'intérêt qu'en dimension supérieure ou égale à quatre.

Une classe assez large de variétés d'Einstein compactes s'obtient de la façon suivante (Lichnerowicz: [4]): soit $V = G/H$ un espace homogène de groupes de Lie compacts G et H, muni d'une structure riemannienne provenant d'une structure riemannienne biinvariante sur G; le groupe H possède canoniquement une représentation $\tilde{H}$ dans l'espace tangent en un point quelconque de V (représentation qui peut s'identifier à la restriction de la représentation adjointe de H au sous-espace orthogonal de l'algèbre de Lie de H dans l'algèbre de LIE de G. *Si la représentation $\tilde{H}$ est irréductible, alors V est d'Einstein avec $k > 0$.* En effet, la représentation $\tilde{H}$, laissant invariantes la forme quadratique définie positive $\|X\|^2$ et la forme quadratique Ric (X, X), est réductible si ces deux formes quadratiques ne sont pas proportionnelles; le fait que k soit strictement positif provient de ce que V est à courbure positive ou nulle ([1], p. 287). Dans cette classe, on trouve en particulier tous les espaces riemanniens symétriques G/H à G simple et compact.

3. **Le cas kählérien.** - Soit V une variété analytique complexe; J désignera l'endomorphisme de carré -1 de $T(V)$ qui définit la structure presque complexe de V. On sait ce qu'il faut entendre par forme extérieure ξ sur V de type (p, q) (le degré de ξ est alors $p+q$): voir, par exemple, [5], p. 205. La différentielle exterieure $d\xi$ de ξ est somme d'une forme de type $(p+1, q)$ (resp. $(p, q+1)$) que l'on note $d'\xi$ (resp. $d''\xi$). La condition pour qu'une forme extérieure ξ de degrè deux soit de type (1, 1) est: $\xi(X, Y) = \xi(JX, JY)$ quels que soient X, Y. On en déduit que si une forme *extérieure* réelle ξ est de type (1, 1), l'expression $\widehat{\xi}(X, Y) = \xi(X, JY)$ est une forme bilinéaire réelle *symétrique* sur V, que l'on note $\widehat{\xi}$. Une forme extérieure ω sur V est appelée une forme de KÄHLER si elle vérifie les trois conditions suivantes: *a*) - ω est fermée, c'est à dire $d\omega = 0$; *b*) - ω est réelle de type (1, 1); *c*) - la forme quadratique que définit la forme bilinéaire symétrique $\widehat{\omega}$ est définie positive. On notera $\|\ \|_\omega$ la norme de la structure riemannienne que définit une forme de KÄHLER ω, c'est à dire que l'on pose: $\|X\|_\omega^2 = \omega(X, JX)$.

Dans le cas kählérien, la courbure de RICCI se relie à la forme de KÄHLER de la façon suivante ([5], p. 253 et [3], p. 78-79): sur toute variété riemannienne V, on peut définir un élément de volume qui est une forme extérieure η, de degré égal à la dimension m de V, en posant: $\eta(X_1, X_2, \ldots, X_m) = (\det(\langle X_i, X_j\rangle))^{1/2}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$. Dans le cas d'une structure riemannienne associée à une forme de KAHLER ω, comme $\langle X, Y\rangle = \omega(X, JY)$, en prenant une base orthonormée de la forme $\{X_1, JX_1, X_2, JX_2, \ldots, X_n, JX_n\}$ (où n désigne la dimension complexe de V), on voit que l'élément de volume correspondant, noté $\eta(\omega)$, vaut: $\eta(\omega) = (1/n!)\omega^n$. Dans une carte locale U de V, l'unique coefficient de $\eta(\omega)$ est une fonction réelle strictement positive sur U, notée $\eta(\omega)_U$: ce qui permet de définir sur U la forme extérieure de type (1, 1): $d'd''\log(\eta(\omega)_U)$. Si U, U' sont deux cartes locales et j leur jacobien de passage dans $U \cap U'$, on a $\eta(\omega)_{U'} = j\bar{j}\eta(\omega)_U$, d'où l'on déduit: $d'd''\log(\eta(\omega)_{U'}) = d'd''\log(\eta(\omega)_U)$ dans $U \cap U'$, ce qui prouve que l'on définit ainsi sur V toute entière une forme de type (1, 1) que l'on notera $d'd''\log(\eta(\omega))$ (par abus de langage puisque $\log(\eta(\omega))$ n'est pas une fonction sur V). Si l'on désigne par Ric(ω) la courbure de RICCI de la structure riemannienne que définit ω, il se trouve que l'on a:

$$\mathrm{Ric}\,(\omega) = -\widehat{d'd''\log(\eta(\omega))}. \tag{3.1}$$

On a évidemment $\mathrm{Ric}\,(k\omega) = \mathrm{Ric}\,(\omega)$ pour tout scalaire réel $k > 0$. La structure kählérienne définie par ω sera d'EINSTEIN si $\mathrm{Ric}\,(\omega) = k\widehat{\omega}$.

Dans [3], E. CALABI a montré que si ω et ω' sont deux formes de KÄHLER cohomologues sur une variété analytique complexe compacte, telles que $\mathrm{Ric}\,(\omega) = \mathrm{Ric}\,(\omega')$, alors on a nécessairement $\omega = \omega'$. En modifiant très légèrement sa démonstration, on obtient, pour l'unicité des structures d'EINSTEIN, le :

THÉORÈME 1. - *Soit V une variété analytique complexe compacte et ω, ω' deux formes de Kähler sur V, telles que* $\mathrm{Ric}\,(\omega) = k\widehat{\omega}$ *et* $\mathrm{Ric}\,(\omega') = k'\widehat{\omega'}$. *Alors, il est impossible que $kk' < 0$; et si $k < 0$ et $k' < 0$, c'est que ω et ω' sont proportionnelles.*

En multipliant ω et ω' respectivement par $|k|$ et $|k'|$, on peut visiblement supposer que l'on a $\mathrm{Ric}\,(\omega) = -\widehat{\omega}$ et $\mathrm{Ric}\,(\omega') = \pm\widehat{\omega'}$, d'où, d'après (3.1): $\omega = d'd''\log(\eta(\omega))$ et $\omega' = \pm\, d'd''\log(\eta(\omega'))$. Comme le quotient $\eta(\omega)/\eta(\omega')$ de deux formes extérieures de degré égal à la dimension de V est une fonction strictement positive sur V, on peut poser $\eta(\omega)/\eta(\omega') = e^f$, et on est amené à considérer $\omega \pm \omega' = d'd''f$. Supposons d'abord que $\omega + \omega' = d'd''f$; en un point de V où la fonction f est maxima, la forme biliéaire symétrique $\widehat{d'd''f}$ est semi-définie négative, ce qui est impossible puisque $\widehat{\omega} + \widehat{\omega'}$ est définie positive.

Supposons maintenant que $\omega - \omega' = d'd''f$; ce qui montre d'abord que ω et ω' sont cohomologues, puis ω^n et ω'^n d'où $\int_V \omega^n = \int_V \omega'^n$. Mais $\eta(\omega)/\eta(\omega') = \omega^n/\omega^{n\prime} \equiv e^f$, donc $\int_V \omega'^n(e^f - 1) = 0$. Supposons la fonction f non constamment nulle; elle atteint donc son maximum, strictement positif, en un point pour lequel on aura $\omega^n > \omega'^n$. Mais, d'après [3], p. 87, en un point où f est maxima, on doit avoir $\omega^n - \omega'^n \leq 0$. C'est une contradiction; donc f est constamment nulle et l'on a $\omega = \omega'$.

4. **Le cas des variétés riemanniennes de dimension quatre.** - Le théorème précédent montre l'unicité, sur une variété analytique complexe compacte, des structures kählériennes d'EINSTEIN à coefficients négatifs. On peut se demander si une telle unicité subsiste ou non: d'une part, dans le cas des coefficients positifs, d'autre part, dans le cas des variétés différentiables compactes supposées seulement riemanniennes. Nous donnerons seulement une réponse à la deuxième question, dans le cas très particulier suivant:

THÉORÈME 2. - *Soit V une variété riemannienne compacte de dimension quatre et telle que $1/4 < \rho(X, Y) \leq 1$, quels que soient X, $Y \in T(V)$. Alors, si* *la structure riemannienne de V est d'Einstein, elle est à courbure constante.*

REMARQUES: 1)— d'après [2], la condition sur la courbure entraîne que le revêtement universel de V est une sphère. ce que la conclusion du théorème entraîne aussi.

2)— la démonstration ci-dessous montre facilement que, dans le cas où l'on suppose seulement que $1/4 \leq \rho(X, Y) \leq 1$, soit V est à courbure constante, soit V a une structure riemannienne isomorphe, localement, à celle, canonique, de l'espace projectif complexe $P_2(C)$, de dimension complexe égale à deux.

3)— les exemples du n° 2 montrent que, avec l'hypothèse $0 \leq \rho(X, Y) \leq 1$, tous les espaces homogènes G/H à G compact et H irréductible, sont d'EINSTEIN.

LEMME 1. - *Si V est une variété d'Einstein de dimension quatre, quelle que soit la base orthonormée $\{X, Y, Z, T\}$, on a $\rho(X, Y) = \rho(Z, T)$.*

On a en effet, d'après les formules (2.2) et (2.2):

$$\rho(X, Y) + \rho(X, Z) + \rho(X, T) = k \qquad \rho(Y, X) + \rho(Y, Z) + \rho(Y, T) = k$$

$$\rho(Z, X) + \rho(Z, Y) + \rho(Z, T) = k \qquad \rho(T, X) + \rho(T, Y) + \rho(T, Z) = k.$$

Si l'on additionne les deux égalités de la première ligne et que l'on en soustrait celles de la deuxième ligne, on obtient:

$2\rho(X, Y) - 2\rho(Z, T) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Dans ce qui suit, nous employons la notation classique:

$R_{ijkh} = -(R(X_i, X_j)X_k . X_h)$. lorsque $\{X_i . X_j, X_k, X_h\}$ est un ensemble orthonormé; on posera aussi: $\rho(X_i, X_j) = \rho_{ij}$.

LEMME 2. - *Soit V une variété riemannienne d'Einstein de dimension quatre; quel que soit $p \in V$, il existe un repère orthonormé $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ de T_p tel que: 1) — tous les $R_{ijkh}(i. j, k, h = 1, 2, 3, 4)$ soient nuls à l'exception des suivants: $R_{1212} = R_{3434}$, $R_{1313} = R_{4242}$, $R_{1414} = R_{2323}$, R_{1234}, R_{1342}, R_{1423} (qui doivent satisfaire la relation classique: $R_{1234} + R_{1342} + R_{1423} = 0$); 2) — on ait les inégalités: $| R_{1342} - R_{1234} | \leq \rho_{13} - \rho_{12}$, $| R_{1342} - R_{1423} | \leq \rho_{13} - \rho_{14}$, $| R_{1423} - R_{1234} | \leq \rho_{14} - \rho_{12}$.*

Soit $P \subset T_p$ un sous-espace vectoriel de dimension deux de T_p tel que la courbure de V dans P *soit maxima* pour l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension deux de T_p. Soit P^0 l'orthogonal de P dans T_p; choisissons $X_1 \in P$, $X_2 \in P^0$ tels que $\rho(X_1, X_2) \leq \rho(X, Y)$ quels que soient $X \in P$ et $Y \in P^0$. Complétons $\{X_1, X_2\}$ en un repère orthonormé $\{X_1 . X_2, X_3, X_4\}$ tel que $X_3 \in P$ et $X_4 \in P^0$. Puisque $\rho(X, Y) \leq \rho(X_1, X_3)$ quels que soient

$X, Y \in T_p$, on a en particulier: $\rho(X, X_3) \leq \rho(X_1, X_3)$ quel que soit $X \in T_p$, c'est à dire que ρ_{13} est une valeur maxima pour la forme quadratique $\rho(X, X_3)$ en X; on a alors classiquement: $R_{3132} = R_{3134} = 0$. De même: $R_{1312} = R_{1314} = 0$. Mais, d'après le lemme 1, la courbure dans P^0, engendré par X_2 et X_4, est aussi maxima; on a donc aussi: $R_{2421} = R_{2423} = R_{4241} = R_{4243} = 0$. Comme, par construction: $\rho(X_1, X_2) \leq \rho(X, Y)$ quels que soient $X \in P$ et $Y \in P^0$, en particulier: $\rho(X, X_1) \geq \rho(X_1, X_2)$ quel que soit $X \in P^0$, d'où l'on déduit: $R_{1214} = 0$, et, de même: $R_{2123} = 0$. Comme, d'après le lemme 1: $\rho_{12} = \rho_{34}$, on a de même: $R_{3432} = R_{4341} = 0$, ce qui achève la démonstration du 1) du lemme.

Exprimons maintenant que $\rho(X, Y) \leq \rho(X_1, X_3)$ quels que soient $X, Y \in T_p$, sous la forme: $\rho(aX_1 + bX_2, cX_3 + dX_4) \leq \rho_{13}$ quels que soient a, b, c, d. Un calcul direct, compte tenu de la conclusion 1) du lemme, montre que l'inégalité ci-dessus ne peut être satisfaite que si l'on a: $|R_{1423} - R_{1342}| \leq \rho_{13} - \rho_{14}$. On obtient, de même, les autres inégalités, en exprimant que l'on doit avoir: $\rho(aX_1 + bX_3, cX_2 + dX_4) \geq \rho_{12}$ et $\rho(aX_1 + bX_4, cX_2 + dX_3) \leq \rho_{13}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. - Elle repose sur la formule (6.8) de [4], p. 10, qui affirme que, si $\{X_i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ est un repère orthonormé de T_p, et $K(p)$ la fonction sur V définie par:

$$K = \sum_{i,j,k,h,l,m} (-R_{ikjh}R_{ihlm}R_{jhlm} + R_{ijhk}R_{khlm}R_{lmij} + 2R_{ikjh}R_{iljm}R_{klhm}) \qquad (i, j, k, h, l, m = 1, 2, 3, 4),$$

on a $\int_V K\eta \leq 0$. Le théorème résultera bien de cette condition sur K si nous montrons que, sous les hypothèses du théorème, on a $K(p) \geq 0$ quel que soit $p \in V$ et que $K(d) = 0$ entraine que la courbure au point p est constante.

Utilisons, au point p, le repère orthonormé $\{X_i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ dont l'existence et les propriétés sont assurées par le lemme 2. Si l'on pose: $\rho_{12} = a$, $\rho_{13} = b$, $\rho_{14} = c$, $R_{1234} = \alpha$, $R_{1342} = \beta$, $R_{1423} = \gamma$, un calcul direct montre que.

$$\text{(4.1)} \quad K/8 = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + \alpha^2(b+c-2a) + \beta^2(c+a-2b) + \ldots$$
$$\ldots + \gamma^2(a+b-2c) - 6a\beta\gamma - 6b\gamma\alpha - 6c\alpha\beta.$$

Utilisant les inégalités 2) du lemme 2, on trouve:

$$K/16 \geq \alpha^2(b+c-a) + \beta^2(c+a-b) + \gamma^2(a+b-c) - 4a\beta\gamma - 4b\gamma\alpha - 4c\alpha\beta.$$

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 0$, on peut remplacer β par $-(\alpha + \gamma)$ et l'on obtient.

$$K/96 \geq a\gamma^2 + c\alpha^2 + (a + c - b)\alpha\gamma$$

forme quadratique en (α, γ) dont le discriminant est $\Delta = (a - c)^2 + b^2 - 2b(a + c)$. Sous les hypothèses du théorème, on a $\Delta < 0$. En effet, on peut écrire $\Delta = (b - (a^{1/2} + c^{1/2})^2)(b - (c^{1/2} - a^{1/2})^2)$; mais on a: $1/4 < a \leq c \leq b \leq 1$. d'où l'on déduit: $b^{1/2} < a^{1/2} + c^{1/2}$ et $b^{1/2} - c^{1/2} + a^{1/2} > b^{1/2} - c^{1/2} \geq 0$, ce qui entraîne bien $\Delta < 0$. On a donc toujours $K \geq 0$ et $K = 0$ entraîne $\alpha = \gamma = 0$. De la formule (6.8) de [4], on déduit donc que l'on doit avoir $\alpha = \gamma = 0$ en tout point de V (et aussi $\beta = 0$). Mais de la valeur de K fournie par la formule (4.1), on déduit aussi la nécessité d'avoir $a = b = c = k/3$ (où k est la constante d'EINSTEIN) en tout point de V. *Il en résulte que* $\rho(X, Y)) = k/3$ *quels que soient* $X, Y \in T(V)$; car le calcul direct de $\rho(aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4, a'X_1 + b'X_2 + c'X_3 + d'X_4)$, compte tenu de ce que les seules valeurs non nulles des R_{ijkh} sont les R_{ijij} qui sont tous égaux, conduit à la valeur $k/3$, indépendante des $a, b, c, d, a', b', c', d'$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MARCEL BERGER, *Variétés riemanniennes à courbure positive*, « Bull. Soc. math. France », 87, 1959, p. 285-292.

[2] MARCEL BERGER, *Les variétés riemanniennes*, 1/4-pincées, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, s. III, vol. XIV, 1960, p. 161-170.

[3] EUGENIO CALABI. *On Kähler manifold with vanishing canonical class*, « Algebraic geometry and topology ». Princeton mathematical series n. 12.

[4] ANDRÉ LICHNEROWICZ *Géometrie des groupes de transformations*, Paris, Dunod, 1958.

[5] ANDRÉ LICHNEROWICZ. *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Paris, Dunod, 1955.