SUR LES INTÉGRALES IRRÉGULIÈRES

DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

§ 1. *Séries asymptotiques.*

Tous les géomètres connaissent les curieuses propriétés de la série de STIRLING. Cette série:

$$\log \Gamma(x + 1)$$
$$= \frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{B_1}{1 \cdot 2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3 \cdot 4}\frac{1}{x^2} + \frac{B_3}{5 \cdot 6}\frac{1}{x^3} - \ldots$$

est toujours divergente. Cependant on peut en faire légitimement usage pour les valeurs très grandes de x. En effet les termes après avoir décru avec une très grande rapidité, croissent ensuite au delà de toute limite. Mais si l'on s'arrête au plus petit terme, l'erreur commise sur la valeur de $\log \Gamma(x + 1)$ est très petite.

En d'autres termes, la série de STIRLING représente asymptotiquement la fonction $\log \Gamma(x + 1)$; c'est à dire que si S_n est la somme des premiers termes de cette série jusques et y compris le terme:

$$\pm \frac{B_n}{2n(2n - 1)}\frac{1}{x^n},$$

l'expression

$$x^{n+1}[\log \Gamma(x + 1) - S_n]$$

tendra vers 0 quand x croîtra indéfiniment.

Il existe évidemment une infinité de séries dont les termes après avoir décru très rapidement croissent au delà de toute limite. Si par exemple:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

sont une série de nombres tous plus petits que 1, mais ne tendant pas vers 0, la série:

$$\frac{A_1}{x} . 1 + \frac{A_2}{x^2} . 1 . 2 + \ldots + \frac{A_n}{x^n} . 1 . 2 . 3 \ldots n + \ldots$$

sera divergente et on y trouvera des termes aussi grands qu'on voudra. Mais cependant, si x est très grand, les premiers termes décroissent très rapidement. Ainsi, si $x = n$ et que n soit très grand, le n^e terme:

$$\frac{A_n}{n^n} 1 . 2 \ldots n < 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < ne^{-n}$$

est extrêmement petit.

Je dirai qu'une série divergente

$$(1) \qquad A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_n}{x^n} + \ldots$$

où la somme des $n + 1$ premiers termes est S_n, représente asymptotiquement une fonction $J(x)$ si l'expression

$$x^n(J - S_n)$$

tend vers 0 quand x croît indéfiniment. En effet si x est suffisamment grand, on aura

$$x^n(J - S_n) < \varepsilon$$

ε étant très petit; l'erreur

$$J - S_n = \frac{\varepsilon}{x^n}$$

commise sur la fonction J en prenant les $n + 1$ premiers termes de la série est alors extrêmement petite. De plus, elle est beaucoup plus petite que l'erreur commise en prenant seulement n termes et qui est égale à:

$$J - S_{n-1} = \frac{A_n + \varepsilon}{x^n}$$

ε étant très petit et A_n fini.

Il résulte donc de là que la série (1) se comportera tout à fait comme la série de STIRLING; que, si x est très grand, ses termes décroîtront d'abord rapidement pour croître ensuite au delà de toute limite et que, malgré sa divergence, il sera légitime de s'en servir dans le calcul de J. Je dirai aussi quelquefois pour abréger que la série (1) est une série asymptotique.

On peut multiplier l'une par l'autre deux séries asymptotiques d'après les mêmes règles que les séries ordinaires. Soit en effet asymptotiquement

$$(2)\qquad \begin{aligned} J(x) &= A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_n}{x^n} + \ldots \\ J'(x) &= A'_0 + \frac{A'_1}{x} + \frac{A'_2}{x^2} + \ldots + \frac{A'_n}{x^n} + \ldots \end{aligned}$$

en définissant S_n et S'_n comme plus haut:

$$S_n = A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots + \frac{A_n}{x^n}$$

$$S'_n = A'_0 + \frac{A'_1}{x} + \ldots + \frac{A'_n}{x^n}.$$

Les deux équations (2) signifient que

$$(3)\qquad \lim_{x=\infty} x^n(J - S_n) = \lim_{x=\infty} x^n(J' - S'_n) = 0.$$

Faisons le produit de nos deux séries d'après la même règle que si elles étaient convergentes; soit

$$\Sigma = B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \ldots + \frac{B_n}{x^n} + \ldots$$

et Σ_n la somme de ses n premiers termes.

Comme S_n, S'_n et Σ_n sont simplement des polynômes en $\frac{1}{x}$, on aura évidemment:

$$\lim x^n(S_n S'_n - \Sigma_n) = 0.$$

On a de plus:

$$\lim \frac{J}{S_n} = \lim \frac{J'}{S'_n} = 1, \qquad \lim \frac{J}{A_0} = \lim \frac{J'}{A'_0} = 1.$$

C'est une conséquence immédiate des équations (3).

Il vient alors:

$$J = S_n + \frac{\varepsilon}{x^n}, \qquad J' = S'_n + \frac{\varepsilon'}{x^n}$$

$$\lim \varepsilon = \lim \varepsilon' = 0$$

d'où:

$$JJ' = S_n S'_n + \frac{S'_n \varepsilon + S_n \varepsilon' + \frac{\varepsilon\varepsilon'}{x^n}}{x^n};$$

S'_n tend vers A'_0 et ε vers 0; donc $S'_n\varepsilon$ tend vers 0. De même $S_n\varepsilon'$ et $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{x^n}$ tendent vers 0. Donc:

$$\lim x^n(JJ' - S_n S'_n) = 0$$

et par conséquent

$$\lim x^n(JJ' - \Sigma_n) = 0$$

ce qui veut dire que l'on a asymptotiquement

$$JJ' = B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \ldots.$$

C. Q. F. D.

En particulier, il est permis d'élever une série asymptotique au carré ou à une puissance quelconque. Soit maintenant;

$$F(z) = B_0 + B_1 z + \ldots + B_n z^n + \ldots \tag{4}$$

une fonction holomorphe de z dans le voisinage de $z = 0$; la série du second membre sera cette fois convergente. Soit

$$S = A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots$$

une série divergente représentant asymptotiquement une fonction J. Si l'on élève la série $S - A_0$ à la puissance n d'après la même règle que si elle était convergente, on obtiendra une série $(S - A_0)^n$ ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$ et représentant asymptotiquement $(J - A_0)^n$.

Formons ensuite la série divergente:

$$B_0 + B_1(S - A_0) + \ldots + B_n(S - A_0)^n + \ldots$$

et ordonnons-la suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$. Nous obtiendrons une série divergente:

$$\Sigma = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_n}{x^n} + \ldots$$

dont la somme des $n + 1$ premiers termes sera Σ_n. Je dis qu'elle représentera asymptotiquement la fonction $F(J - A_0)$.

En effet Σ_n et

$$\Sigma'_n = B_0 + B_1(S_n - A_0) + B_2(S_n - A_0)^2 + \ldots + B_n(S_n - A_0)^n$$

sont deux polynômes entiers en $\frac{1}{x}$ dont les termes de degré inférieur à $n + 1$ ne diffèrent pas. On aura donc:

$$\lim_{x=\infty} x^n(\Sigma_n - \Sigma'_n) = 0.$$

Je dis maintenant que

$$\lim x^n[F(J - A_0) - \Sigma'_n] = 0.$$

En effet on aura évidemment:

$$\lim x^n[B_k(J - A_0)^k - B_k(S_n - A_0)^k] = 0$$

puisque $(S - A_0)^k$ représente asymptotiquement $(J - A_0)^k$. Posons:

$$T_n = B_0 + B_1(J - A_0) + \ldots + B_n(J - A_0)^n$$

il viendra:

$$\lim x^n(T_n - \Sigma'_n) = 0.$$

Il reste à démontrer que

$$\lim x^n(F - T_n) = 0.$$

Or il vient

$$F - T_n = B_{n+1}(J - A_0)^{n+1} + B_{n+2}(J - A_0)^{n+2} + \ldots$$

ou puisque la série (4) est convergente:

$$|F - T_n| < M|J - A_0|^{n+1} < M|x(J - A_0)|^{n+1}\frac{1}{x^{n+1}}$$

M étant une constante positive assignable. Or on a:

$$\lim x(J - A_0) = A_1, \qquad \lim x^n \frac{1}{x^{n+1}} = 0$$

d'où:

$$\lim x^n|F - T_n| = 0.$$

C. Q. F. D.

Ainsi il est permis de substituer une série asymptotique dans le développement d'une fonction holomorphe comme s'il s'agissait d'une série convergente.

Soit par exemple:

$$S = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} = \ldots$$

une série représentant asymptotiquement une fonction J. Elevons-la au carré, au cube, etc. et appelons S^2, S^3, ..., les séries divergentes ainsi obtenues.

Formons la série

$$1 + S + S^2 + S^3 + \ldots + S^n + \ldots$$

et ordonnons-la suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$. Nous obtiendrons ainsi une série Σ qui représentera asymptotiquement la fonction

$$\frac{1}{1 - J}.$$

Cela montre que l'on peut diviser l'une par l'autre deux séries asymptotiques pourvu que le premier terme A_0 de la série diviseur ne soit pas nul.

En effet si l'on a par exemple:

$$S = A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots = J$$

$$S' = A_0' + \frac{A_1'}{x} + \ldots = J'$$

la série $\frac{J'}{J}$ sera représentée asymptotiquement par la série divergente:

$$\frac{S'}{A_0} + \frac{S'}{A_0^2}(A_0 - S) + \frac{S'}{A_0^3}(A_0 - S)^2 + \ldots$$

qui est facile à former.

Il est permis d'intégrer une série asymptotique. Ainsi si l'on a asymptotiquement

$$J = \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \ldots + \frac{A_n}{x^n} + \ldots = S$$

je dis qu'on aura asymptotiquement

$$\int_x^\infty J dx = \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{2x^2} + \ldots + \frac{A_n}{(n-1)x^{n-1}} + \ldots = S'.$$

En effet la première équation signifie que l'on peut prendre x assez grand pour que:

$$|J - S_n| < \frac{\varepsilon}{x^n} \quad \text{quelque petit que soit } \varepsilon.$$

On en déduit:

$$\left| \int_x^\infty J dx - \int_x^\infty S_n dx \right| < \frac{\varepsilon}{(n-1)x^{n-1}}$$

ce qui veut dire que S' représente asymptotiquement $\int J dx$.

C. Q. F. D.

Il ne serait pas permis au contraire de différentier une série asymptotique.

Nous dirons aussi quelquefois, si F, Φ et J sont trois fonctions de x, que J est représenté asymptotiquement par la série:

$$\Phi + FA_0 + \frac{FA_1}{x} + \frac{FA_2}{x^2} + \ldots$$

quand la série:

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots$$

représentera asymptotiquement la fonction $\frac{J - \Phi}{F}$.

Il résulte, par exemple, de l'analyse qui précède que si l'on pose

$$F = e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x}$$

on aura asymptotiquement

$$\Gamma(x + 1) = F + \frac{C_1 F}{x} + \frac{C_2 F}{x^2} + \ldots$$

les C étant des coëfficients faciles à calculer; les premiers ont pour valeur

$$C_1 = \frac{B_1}{1 \cdot 2}, \qquad C_2 = -\frac{B_2}{3 \cdot 4} + \frac{B_1^2}{8}, \quad \text{etc.}$$

Nous avons dit jusqu'ici que x croissait indéfiniment, sans dire de quelle manière; mais il a été sous-entendu que cette variable croissait par valeurs réelles positives. Il est toutefois évident que la théorie n'est pas changée quand on suppose que x tend vers l'infini avec un argument déterminé différent de 0.

Voici maintenant une remarque très importante pour ce qui va suivre:

Une série divergente ne peut pas représenter une même fonction J quel que soit l'argument avec lequel x tend vers l'infini.

Je dis en effet que:

$$x^2\left(J - A_0 - \frac{A_1}{x} - \frac{A_2}{x^2}\right)$$

ne peut pas tendre vers 0 pour tous les arguments de x (ou du moins ne peut pas tendre uniformément vers 0), sans quoi J serait une fonction holomorphe de $\frac{1}{x}$ et la série serait convergente.

On peut se demander si, pour un même argument de x, une même série peut représenter asymptotiquement plusieurs fonctions différentes. La réponse doit être affirmative.

Il suffit pour s'en assurer, de vérifier qu'il y a des fonctions J qui sont représentées asymptotiquement par une série dont tous les termes sont nuls, c'est à dire des fonctions telles que:

$$\lim J x^n = 0$$

quelque soit n, quand x croît indéfiniment par valeurs positives.

Tel est en effet le cas de la fonction:

$$J = e^{-x}.$$

En revanche pour un même argument de x, une même fonction ne peut être représentée asymptotiquement que par une seule série.

§ 2. *Séries normales.*

Je vais maintenant rappeler succinctement les principaux résultats obtenus par MM. Fuchs et Thomé au sujet des équations linéaires.

Soit:

$$P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0 \tag{1}$$

une équation où les coëfficients P sont des polynômes entiers en x. Je me propose d'étudier les intégrales pour les valeurs très grandes de $|x|$.

Si le degré des polynômes P_n, P_{n-1}, ..., P_0 va constamment en décroissant, il y a n séries de la forme suivante:

$$x^\alpha \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots \right) \tag{2}$$

qui satisfont formellement à l'équation et qui de plus convergent si $|x|$ est assez grand. En d'autres termes il y a n intégrales régulières.

Les valeurs de α sont données par une certaine équation déterminante; il y a exception dans le cas où la différence de deux racines de cette équation devient un entier; le $\log x$ peut alors s'introduire dans les séries.

Si le degré des polynômes P ne va jamais en croissant, mais ne va pas toujours en décroissant et si le degré de P_0 est plus petit que celui de P_n, il y a dans certains cas m séries de la forme (2) $(m < n)$ qui satisfont formellement à l'équation, mais elles ne convergent pas toujours.

Enfin, si on laisse de côté certains cas limités et exceptionnels dont je parlerai plus loin, on démontre qu'il y a n séries de la forme suivante:

$$e^Q x^\alpha \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots \right) \tag{3}$$

qui satisfont formellement à l'équation. Q est un polynôme entier en x. Une pareille série s'appellera une série normale et elle sera d'ordre p si le polynôme Q est d'ordre p.

Malheureusement ces séries normales ne sont pas toujours convergentes. Si l'une d'elles converge, on dira que l'équation admet une intégrale normale. Mais cela n'arrivera qu'exceptionnellement.

Passons maintenant à l'examen de divers cas exceptionnels.

Le polynôme Q étant supposé connu, α nous sera donné par une équation déterminante. Dans le cas où cette équation a deux ou plusieurs racines différant entre elles d'un entier, il peut y avoir exception et on peut trouver au lieu d'une série normale proprement dite une série de la forme suivante:

$$e^Q x^\alpha [\phi_0 + \log x \,.\, \phi_1 + \log^2 x \,.\, \phi_2 + \ldots + \log^q x \,.\, \phi_q]$$

les ϕ étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$.

Nous appellerons une pareille série, série normale logarithmique d'ordre p.

Soit a le coëfficient de x^p dans Q, et supposons qu'aucune des séries normales qui satisfont à l'équation (1) ne soit d'ordre supérieur à p. Il arrivera alors que a nous sera donné par une certaine équation facile à former.

Dans le cas où cette équation a des racines multiples, il peut arriver que le procédé qui permet de former les séries normales devienne illusoire. M. Fabry, dans une thèse récemment soutenue devant la Faculté des sciences de Paris, a fait voir que l'on peut former alors des séries de la forme suivante:

$$e^Q x^\alpha \phi$$

où Q est un polynôme entier de degré $> (p - 1)n$ et $\leqq pn$ en $x^{\frac{1}{n}}$ et où ϕ est ordonné suivant les puissances croissantes de $x^{-\frac{1}{n}}$. Ces séries généralement divergentes satisfont formellement à l'équation (1).

J'appellerai une pareille série, série anormale d'ordre p.

Voyons comment l'ordre des séries normales se rattache au degré des polynômes P. Soit M_i le degré de P_i. Soit:

$$N_i = \frac{M_i - M_n}{n - i}.$$

Soit h la plus grande des n quantités N_i. Soit p l'entier qui est égal ou immédiatement supérieur à h. On trouve que toutes les séries normales ou anormales qui satisfont formellement à l'équation (1) sont d'ordre p au plus.

Je vais démontrer la réciproque:

J'appellerai le nombre h, le rang de l'équation (1). Je vais faire voir que si n séries normales d'ordre égal ou inférieur à p satisfont formellement à une équation linéaire de la forme (1), cette équation est au plus de rang p.

En effet l'équation peut s'écrire en la divisant par P_n

$$\frac{d^n y}{dx^n} + F_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + F_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + F_1\frac{dy}{dx} + F_0 y = 0$$

les F étant des séries convergentes ordonnées suivant les puissances décroissantes de x. La série F_i commencera par un terme $x^{M_i - M_n}$ et l'une au moins des séries F_i commencera par un terme en $x^{h(n-i)}$.

Cela posé, soient

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n$$

n séries normales d'ordre p satisfaisant formellement à l'équation. Appelons S_i^k la dérivée k^e de S_i formée d'après les règles ordinaires du calcul, en différentiant chaque terme comme si la série était convergente, puis en ordonnant. Formons un tableau de n lignes et de $n+1$ colonnes où le i^e terme de la $1^{\text{ère}}$ colonne est S_i, et où le i^e terme de la $(k+1)^e$ colonne est S_i^k. Soit Δ_k le déterminant formé en supprimant dans le tableau la k^e colonne. On calculera ce déterminant par les règles ordinaires du calcul et on obtiendra une série divergente que l'on ordonnera de la même manière que les séries S.

Quant au quotient:

$$\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{n+1}}$$

si on l'effectue d'après la règle ordinaire de la division des séries, on obtient une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x qui doit être identique à $\pm F_i$ et qui par conséquent est convergente.

Mais on voit sans peine, d'après la loi même de sa formation, qu'elle ne peut commencer que par un terme d'ordre $p(n-i)$ en x au plus.

On a donc

$$h \leqq p.$$

C. Q. F. D.

D'ailleurs supposons que l'on ait une équation de rang $p+1$ et que l'on forme l'équation qui donne le coëfficient de x^{p+1} dans les polynômes Q. Si toutes les séries normales étaient d'ordre p ou au dessous, toutes les racines de cette équation devraient être nulles, et il est aisé de voir alors que le rang de l'équation différentielle s'abaisserait.

§ 3. *Cas du premier ordre.*

Nous commencerons par nous restreindre au cas où toutes les séries normales sont de 1^er^ ordre, c'est à dire où dans l'équation:

$$P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0 \tag{1}$$

le degré d'aucun des polynômes P ne surpasse le degré m de P_n. Soit alors A_i le coëfficient de x^m dans P_i; nous formerons l'équation:

$$A_n a^n + A_{n-1} a^{n-1} + \ldots + A_1 a + A_0 = 0. \tag{2}$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les racines de cette équation que je supposerai d'abord toutes distinctes. L'équation (1) sera satisfaite alors par n séries normales du 1^er^ ordre de la forme suivante:

$$e^{a_1 x} x^{\alpha_1} \varphi_1, \qquad e^{a_2 x} x^{\alpha_2} \varphi_2, \quad \ldots, \quad e^{a_n x} x^{\alpha_n} \varphi_n;$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des constantes convenablement choisies et où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$.

Considérons la transformée de LAPLACE de notre équation (1) pour laquelle je renverrai à mon mémoire *sur les équations linéaires aux diffé-*

rences ordinaires et aux différences finies inséré au Tome 7 de l'American Journal of Mathematics. Cette transformée pourra s'écrire:

$$(3) \qquad Q_m \frac{d^m v}{dz^m} + Q_{m-1} \frac{d^{m-1} v}{dz^{m-1}} + \ldots + Q_1 \frac{dv}{dz} + Q_0 v = 0.$$

Les Q sont des polynômes de degré n au plus en z et l'on a:

$$Q_m = (z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_n).$$

L'équation (3) admet alors n points singuliers simples:

$$z = a_1, \qquad z = a_2, \quad \ldots, \quad z = a_n.$$

Formons l'équation déterminante relative au point singulier $z = a_i$. Les racines de cette équation seront:

$$0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ m - 2, \ \beta_i.$$

Je supposerai d'abord que β_i n'est pas entier positif ou négatif. Il existera alors $m - 1$ intégrales de l'équation (3) qui seront holomorphes dans le voisinage du point $z = a_i$ et une m^e que j'appellerai v_i et qui sera de la forme suivante:

$$(4) \qquad v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i+1} + C_2(z - a_i)^{\beta_i+2} + \ldots.$$

Construisons maintenant un contour fermé k_i de la façon suivante. Du point a_i comme centre avec un rayon très petit, décrivons un cercle. Par le point a_i menons une droite parallèle à l'axe des quantités réelles et prolongeons-la indéfiniment dans la direction des quantités réelles négatives; elle coupera notre petit cercle en un certain point b_i. Cela posé, le contour k_i sera formé comme il suit; on suivra d'abord la droite que je viens de définir depuis l'infini jusqu'au point b_i, puis on fera le tour du petit cercle pour revenir au point b_i et enfin on retournera du point b_i à l'infini en suivant la droite.

Si l'on se reporte au mémoire cité (American Journal of Mathematics, Tome 7), on verra que l'intégrale suivante:

$$J_i = \int v_i e^{zx} dz$$

prise le long du contour k_i est une intégrale de l'équation (1) pourvu que la partie réelle de x soit suffisamment grande, et en particulier si x est positif et très grand.

Nous décomposerons cette intégrale J_i en trois autres:

$$J_i = J_i' + J_i'' + J_i'''$$

la première J_i' étant prise le long de notre droite de l'infini à b_i; la seconde J_i'' étant prise le long du petit cercle qui a pour centre le point a_i et qui passe par le point b_i; et la troisième J_i''' étant prise le long de la droite suivie en retour depuis b_i jusqu'à l'infini.

J'ai montré dans le mémoire cité qu'on peut trouver deux quantités D et D' telles que

$$\lim \frac{J_i'}{x^{-1} e^{b_i x}} = D, \qquad \lim \frac{J_i'''}{x^{-1} e^{b_i x}} = D'$$

lorsque x tend vers l'infini par valeurs réelles positives.

Comme, par construction, la partie réelle de b_i est plus petite que celle de a_i, on peut en conclure qu'on aura:

$$\lim x^q e^{-a_i x}(J_i' + J_i''') = 0$$

quelque grand que soit q.

Ecrivons

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i+1} + \ldots + C_k(z - a_i)^{\beta_i+k} + R_k$$

R_k étant le reste de la série (4). Je puis prendre le rayon de notre petit cercle assez petit pour que cette série soit convergente.

On a alors:

$$J_i'' = \int (z - a_i)^{\beta_i} e^{zx} dz + \ldots + C_k \int (z - a_i)^{\beta_i+k} e^{zk} dz + \int R_k e^{zx} dz$$

les intégrales étant prises le long du petit cercle.

J'ai montré dans le mémoire cité que l'expression suivante

$$x^q e^{-a_i x} \int R_k e^{zx} dz$$

tend *uniformément* vers 0 pour toutes les valeurs de x quand k croît indéfiniment.

Cela est vrai d'ailleurs quel que soit q.

D'autre part, l'expression suivante:

$$\int (z - a_i)^h e^{zx} dz$$

est représentée asymptotiquement par l'expression:

$$(e^{2i\pi h} - 1)\Gamma(h + 1)x^{-h-1}e^{a_i x}.$$

Je veux dire que la différence de ces deux expressions multipliée par $x^q e^{-a_i x}$ tend vers 0 quand x grandit indéfiniment.

Il résulte de là que J_i'', et par conséquent J_i, est représenté asymptotiquement par la série suivante:

$$\frac{e^{2i\pi\beta_i} - 1}{x^{\beta_i + 1}} e^{a_i x}\Gamma(\beta_i + 1) + C_1 \frac{e^{2i\pi\beta_i} - 1}{x^{\beta_i + 2}} e^{a_i x}\Gamma(\beta_i + 2)$$

$$+ C_2 \frac{e^{2i\pi\beta_i} - 1}{x^{\beta_i + 3}} e^{a_i x}\Gamma(\beta_i + 3) + \dots .$$

Or il est aisé de vérifier que cette série n'est autre chose que la série normale

$$e^{a_i x} x^{\alpha_i} \varphi_i$$

que nous avons définie plus haut. (On a $\alpha_i = -\beta_i - 1$.)

Ainsi *une série normale du 1^er ordre, alors même qu'elle est divergente, représente asymptotiquement une des intégrales de l'équation à laquelle elle satisfait formellement.*

Cette série normale pourra s'écrire, à un facteur constant près:

$$\frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 1}} + C_1(\beta_i + 1)\frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 2}} + C_2(\beta_i + 1)(\beta_i + 2)\frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 3}} + \dots .$$

Ainsi à chaque point singulier simple de l'équation (3) correspondra une intégrale de l'équation (1) et une série normale qui la représente asymptotiquement. J'ai supposé jusqu'ici que x tendait vers l'infini par valeurs réelles positives; mais cela reste vrai quand x tend vers l'infini avec un argument donné différent de 0.

Il faut toutefois faire attention à une chose. A chaque point singulier a_i correspond une intégrale de (1) quel que soit l'argument de x;

mais quand cet argument varie, cette intégrale ne reste pas la même; pour certaines valeurs de cet argument, cette intégrale se change brusquement en une autre qui n'en est pas la continuation analytique. C'est ce que j'ai exposé en détail dans le § 5 du mémoire cité.

Comme à un point singulier correspond toujours la même série normale, il en résulte que la même série normale ne représentera pas asymptotiquement la même intégrale quand l'argument x variera, si ce n'est dans des cas exceptionnels.

Passons maintenant aux cas particuliers.

Nous supposerons d'abord que β_i étant entier, l'intégrale v_i contienne un logarithme. Soit:

$$v_i = \varphi + \log(z - a_i)\psi$$

φ et ψ étant holomorphes dans le voisinage de $z = a_i$. On aura alors:

$$J_i = \int e^{zx}[\varphi + \psi \log(z - a_i)]\,dz = \int \psi dz \log(z - a_i)$$

les intégrales étant prises le long de k_i. Ici encore nous aurons:

$$J_i = J_i' + J_i'' + J_i'''$$

en divisant le contour k_i en trois parties comme il a été dit plus haut, et de plus:

$$\lim x^q e^{-a_i x}(J_i' + J_i''') = 0.$$

Soit

$$\psi = C_0(z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i + 1} + \ldots$$

une série que nous supposerons convergente tout le long du petit cercle.

Nous aurons alors:

$$x^q e^{-a_i x} J_i'' = \sum C_k \int (z - a_i)^{\beta_i + k} e^{zx} \log(z - a_i) e^{-a_i x} x^q dz$$

l'intégrale étant prise le long du petit cercle. La série du second membre sera uniformément convergente quel que soit x, ainsi qu'il a été dit plus haut. Il reste donc à trouver la valeur asymptotique de l'intégrale:

$$j_{i,k} = \int (z - a_i)^{\beta_i + k} e^{zx} \log(z - a_i)\,dz$$

prise le long du petit cercle. D'autre part appelons j_{ik} la même intégrale prise le long du contour k_i tout entier et décomposons-la en trois parties:

$$j_{ik} = j'_{ik} + j''_{ik} + j'''_{ik}$$

comme l'intégrale J_i elle même. Nous aurons encore:

$$\lim x^q e^{-a_i x}(j'_{ik} + j'''_{ik}) = 0$$

et par conséquent la valeur asymptotique de j''_{ik} sera la même que celle de j_{ik}.

Calculons donc j_{ik}. Il vient:

$$\int (z - a_i)^h e^{zx} dz = (e^{2i\pi h} - 1)\Gamma(h + 1)x^{-h-1}e^{a_i x}$$

lorsque l'intégrale est prise le long du contour k_i. En différentiant par rapport à h il vient:

$$\int (z - a_i)^h e^{zx} \log(z - a_i)\, dz = 2i\pi e^{2i\pi h}\Gamma(h + 1)x^{-h-1}e^{a_i x} + (e^{2i\pi h} - 1)\,\mathbf{D}$$

$\mathbf{D}$ désignant la dérivée de $\Gamma(h + 1)x^{-h-1}e^{a_i x}$ par rapport à h. Si l'on fait $h = \beta_i + k$ et si l'on tient compte de ce fait que β_i est entier, il viendra:

$$j_{ik} = 2i\pi\Gamma(\beta_i + k + 1)x^{-\beta_i - k - 1}e^{a_i x}.$$

Il résulte de là que J_i est représenté asymptotiquement par la série:

$$\Sigma C_k j_{ik} = 2i\pi\Sigma C_k\Gamma(\beta_i + k + 1)x^{-\beta_i - k - 1}e^{a_i x}$$

qui est précisément la série normale:

$$e^{a_i x}x^{\alpha_i}\varphi_i.$$

Le théorème démontré plus haut subsiste donc encore dans ce cas.

La formule qui donne J_i quand on connaît v_i devient illusoire quand β_i est entier positif et qu'il n'y a pas de logarithme dans l'intégrale v_i; car alors l'intégrale

$$\int v_i e^{zx} dz$$

prise le long du contour k_i est nulle. Il convient alors de remplacer le contour k_i par un chemin d'intégration différent. On prendra pour ce chemin une droite menée à partir de a_i parallèlement à l'axe des quantités réelles et prolongée indéfiniment dans la direction des quantités réelles négatives. On verra ainsi que le théorème subsiste encore. Je dois ajouter que si β_i est entier positif sans que v_i contienne de logarithme, β_i devra être supérieur à $m - 1$.

Considérons par exemple l'équation suivante

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = (\alpha^2 x^2 + 2) y$$

qui admet pour intégrales

$$e^{\alpha x}\left(\frac{1}{x} - \alpha\right) \quad \text{et} \quad e^{-\alpha x}\left(\frac{1}{x} + \alpha\right)$$

et dont la transformée de LAPLACE est:

$$(z^2 - \alpha^2)\frac{d^2 v}{dz^2} + 4z\frac{dv}{dz} = 0$$

et admet pour intégrales:

$$v_0 = 1 \quad \text{et} \quad v_1 = \int \frac{dz}{(z^2 - a^2)^2} = F + C \log \frac{z - a}{z + a}$$

C étant une constante et F une fonction rationnelle.

Nous considérerons deux contours fermés k et k', formés comme le contour k_i défini plus haut, et enveloppant, le premier le point α, le second le point $-\alpha$. Nous prendrons alors les intégrales:

$$\int_k v_1 e^{zx} dz \quad \text{et} \quad \int_{k'} v_1 e^{zx} dz$$

et nous obtiendrons ainsi deux intégrales de l'équation en y. Or nous avons, à un facteur constant près:

$$v_1 = \log(z - \alpha) - \frac{a}{z - a} + \Phi$$

Φ étant holomorphe dans le voisinage du point $z = \alpha$. On aura donc:

$$\int_k v_1 e^{zx} dz = \int_k e^{zx} dz\left[\log(z - \alpha) - \frac{a}{z - a}\right] = 2i\pi e^{\alpha x}\left(\frac{1}{x} - \alpha\right).$$

La seconde intégrale nous donnerait de même:

$$2i\pi e^{-ax}\left(\frac{1}{x} + a\right).$$

Nous avons ainsi intégré l'équation en y, en nous servant seulement de l'intégrale v_1 et sans employer l'intégrale v_0. Il importe cependant pour notre objet de montrer qu'on pourrait tirer quelque chose de cette dernière intégrale.

Traçons à partir du point α une droite et prolongeons-la indéfiniment dans un sens. Si v_0 s'annulait ainsi que sa dérivée au point α, l'intégrale

$$\int v_0 e^{zx} dz$$

prise le long de cette droite serait une intégrale de l'équation en y et il n'y aurait rien à ajouter. Mais v_0 ne s'annule pas.

Voici donc ce que nous ferons; posons:

$$y' = e^{ax}\frac{d^2}{dx^2}(ye^{-ax});$$

y' satisfera comme y à une équation du 2^{d} ordre facile à former. Pour obtenir la transformée de LAPLACE de cette équation, il suffira de poser dans la transformée de l'équation en y:

$$v' = v(z - \alpha)^2.$$

L'une des intégrales sera donc:

$$v'_0 = v_0(z - \alpha)^2 = (z - \alpha)^2.$$

Comme cette intégrale s'annule au point α ainsi que sa dérivée, l'intégrale

$$\int v'_0 e^{zx} dz = \int (z - \alpha)^2 e^{zx} dz$$

prise le long de la droite qui aboutit au point α satisfera à l'équation en y'; on aura donc:

$$y' = \int (z - \alpha)^2 e^{zx} dz = C\frac{e^{ax}}{x^3}\cdot$$

C étant un facteur constant. On en tire:

$$y = Ce^{ax}\left(\frac{1}{x} + \beta + \gamma x\right)$$

β et γ étant deux constantes d'intégration. On voit qu'il faut prendre:

$$\beta = -\alpha, \qquad \gamma = 0.$$

Si maintenant β_i est entier négatif sans qu'il y ait de logarithme dans v_i, l'intégrale J_i se réduit d'elle-même à $e^{a_i x}$ multiplié par un polynôme entier en x.

Il reste à examiner le cas où deux des racines de l'équation (2) deviennent égales entre elles. L'équation (3) admet alors un point singulier double que j'appellerai a_i. Il peut arriver alors que dans le voisinage de ce point les intégrales de (3) soient irrégulières. C'était impossible au contraire dans le cas des points singuliers simples.

Je reviendrai plus tard sur ce cas, en me bornant pour le moment à faire remarquer que c'est celui où l'équation (1) n'admet pas de séries normales, mais seulement de ces séries anormales dont il a été question plus haut.

Mais, à certaines conditions, les intégrales de l'équation (3) pourront être régulières dans le voisinage du point $z = a_i$. Il y aura alors une équation déterminante dont les racines seront:

$$0, 1, 2, \ldots, m-3, \beta_i, \beta_i'.$$

Il existera alors deux intégrales v_i et v_i' que seront de la forme:

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i}\varphi_i$$
$$v_i' = (z - a_i)^{\beta'_i}\varphi_i'$$

φ_i et φ_i' étant holomorphes dans le voisinage de $z = a_i$. Alors les intégrales:

$$J_i = \int v_i e^{zx} dz, \qquad J_i' = \int v_i' e^{zx} dz$$

prises le long du contour k_i seront deux intégrales de l'équation (1), qui seront représentées asymptotiquement par deux séries normales faciles à former.

Dans le cas particulier où β_i et β'_i diffèrent d'un entier, l'une des deux intégrales v_i et v'_i contient un logarithme et par conséquent l'une des deux séries normales qui représentent asymptotiquement J_i et J'_i devient logarithmique.

En résumé lorsque toutes les séries normales sont du 1^er^ ordre, une quelconque d'entre elles représente asymptotiquement l'une des intégrales de l'équation (1). Mais l'intégrale ainsi représentée par une même série normale ne restera pas la même, en général, quel que soit l'argument avec lequel x croît indéfiniment.

§ 4. *Intégrales normales.*

Quand une série normale est convergente, elle représente une intégrale de l'équation (1) et on l'appelle intégrale normale.

Nous nous restreindrons, comme dans le paragraphe précédent, au cas où toutes les séries normales sont du 1^er^ ordre. Soit alors:

$$(2) \qquad v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i + 1} + C_2(z - a_i)^{\beta_i + 2} + \ldots$$

une intégrale de l'équation (3) transformée de LAPLACE de l'équation (1). A cette intégrale correspondra une intégrale J_i de l'équation (1):

$$J_i = A\int v_i e^{zx} dz$$

(A étant un facteur constant) qui sera représentée asymptotiquement comme nous l'avons vu par la série normale:

$$(4) \qquad \frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 1}} + C_1(\beta_i + 1)\frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 2}} + C_2(\beta_i + 1)(\beta_i + 2)\frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 3}} + \ldots .$$

Pour que cette série normale converge pour les valeurs suffisamment grandes de x, il faut et il suffit que l'expression:

$$\sqrt[n]{C_n(\beta_i + 1)(\beta_i + 2)\ldots(\beta_i + n)}$$

tende vers une limite finie pour n infini. Mais d'autre part on a:

$$\lim \sqrt[n]{(\beta_i + 1)(\beta_i + 2)\ldots(\beta_i + n)} = \infty \qquad \text{pour } n = \infty.$$

Donc pour que la série (4) converge, il faut que

$$\lim \sqrt[n]{C_n} = 0$$

et que par conséquent la série (2) converge dans toute l'étendue du plan.

Il faut donc que v_i soit de la forme suivante:

$$(z - a_i)^{\beta_i} \varphi(z)$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans toute l'étendue du plan.

Je dis que cette condition est suffisante.

Si elle est remplie et si on se reporte au mémoire cité, on verra qu'on peut toujours trouver 3 nombres positifs b, c et h tels que:

$$|v_i| < be^{c|z-a_i|}$$

si

$$|z - a_i| > h.$$

Envisageons ensuite l'intégrale suivante:

$$J_i = \int v_i e^{zx} dz$$

cette intégrale étant prise le long d'une droite menée à partir du point i et prolongée indéfiniment avec un argument $\omega + \pi$, ω étant l'argument de x. Cette intégrale sera toujours finie et ce sera une fonction de x qui sera holomorphe pour toutes les valeurs très grandes de x. De plus $J_i x^{\beta_i}$ sera uniforme et se reproduira quand on fera décrire à x un contour fermé infiniment grand.

Je décomposerai cette intégrale en deux parties: J_i' prise le long d'une partie de la droite définie plus haut depuis le point $z = a_i$ jusqu'au point

$$z = a_i - he^{i\omega}$$

et J_i'' prise le long de la seconde partie de cette droite depuis ce dernier point jusqu'à l'infini.

Il vient alors, en posant $z = a_i + t$:

$$|J_i'' e^{-a_i x}| < \int_h^\infty be^{[c-|x|]t} dt$$

d'où l'on déduit aisément que *quel que soit l'argument de* x, l'expression

$$x^{\beta_i+2}J_i''e^{-a_i x}$$

tend uniformément vers o.

Quant à J_i', il est aisé de l'évaluer; soit:

$$v_i = (z-a_i)^{\beta_i} + C_1(z-a_i)^{\beta_i+1} + w_i$$

w_i désignant une suite de termes dont le premier est $C_2(z-a_i)^{\beta_i+2}$.

On a:

$$J_i' = \int[(z-a_i)^{\beta_i} + C_1(z-a_i)^{\beta_i+1}]e^{zx}dz + \int w_i e^{zx}dz.$$

On démontre que:

$$x^{\beta_i+2}J_i'e^{-a_i x}$$

tend uniformément vers o. De même en posant:

$$J_i''' = \int[(z-a_i)^{\beta_i} + C_1(z-a_i)^{\beta_i+1}]\,dz$$

et si les deux premiers termes de la série normale qui représente asymptotiquement J_i sont

$$Ae^{a_i x}x^{-\beta_i-1} + Be^{a_i x}x^{-\beta_i-2} = H$$

on verrait que

$$x^{\beta_i+3}e^{-a_i x}(J_i''' - H)$$

tend uniformément vers o.

Posons donc:

$$x = \frac{1}{t}; \qquad L_i = J_i e^{-a_i x}x^{\beta_i+1}$$

on trouvera, en regardant L_i comme une fonction de t

$$L_i = A + (B+\varepsilon)t$$

où ε tend vers o quand t tend vers o et cela uniformément quel que soit l'argument de t. De plus, ce sera une fonction uniforme de t. Ce sera donc une fonction holomorphe de t dans le voisinage de $t=$ o. Donc L_i pourra se développer en série convergente suivant les puissances de t.

C. Q. F. D.

Ce raisonnement suppose implicitement que β_i est positif et plus grand que n, puisque ce n'est que dans ce cas que l'intégrale J_i est finie et appartient à l'équation (1) quand on la prend le long de la droite dont nous nous sommes servis et qui aboutit au point a_i. Si cela n'avait pas lieu, on remplacerait cette droite par un contour fermé, analogue au contour k_i du paragraphe précédent et formé d'un petit cercle et d'une droite parcourue deux fois en sens contraire. Cette droite devra avoir l'argument $\omega + \pi$, ω étant celui de x. Le raisonnement serait du reste absolument le même.

Il faut observer encore que dans le raisonnement qui précède nous n'avons pas été obligés de nous appuyer sur ce fait que v_i était une intégrale d'une équation linéaire, ou plutôt nous ne nous en sommes servis que pour établir l'existence des trois nombres positifs b, c et h tels que

$$|v_i| < be^{c|z-a_i|} \qquad \text{si} \qquad |z - a_i| > h.$$

En d'autres termes nous avons eu seulement à supposer que la dérivée logarithmique de v_i tend uniformément vers une limite finie quand z croît indéfiniment avec un argument donné.

Soit donc une fonction entière quelconque $\varphi(z)$ jouissant de cette propriété. Soit

$$\varphi(z) = C_0 + C_1 z + C_1 z^2 + \ldots.$$

Nous supposons que quand z croît indéfiniment avec un argument donné, la dérivée logarithmique de φ tend vers une limite finie et déterminée, qui peut d'ailleurs varier quand l'argument de z varie.

Formons l'intégrale

$$J = \int \varphi(z) e^{zx} dz$$

prise le long d'une droite partant du point o et s'étendant indéfiniment avec l'argument $\omega + \pi$, ω étant l'argument de x.

J sera représenté asymptotiquement par la série

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{2C_2}{x^3} + \ldots + \frac{C_n \underline{|n}}{x^n} + \ldots.$$

D'après le raisonnement précédent, cette série devra converger pour les grandes valeurs de x. Donc:

$$\sqrt[n]{\underline{|n} C_n}$$

tend vers une limite finie quand n croît indéfiniment. Cette propriété appartient à toutes les fonctions entières $\varphi(z)$ qui satisfont à la condition énoncée plus haut.

Ce résultat doit être rapproché de celui que j'ai obtenu dans une note intitulée: *Sur les fonctions entières* (Bulletin de la Société Mathématique de France, T. 11, 1883, n° 4, p. 136—144).

De cette analyse, il suit que pour qu'une série normale converge, il faut et il suffit que l'intégrale v_i qui lui correspond dans la transformée de LAPLACE soit égale à une fonction holomorphe multipliée par une puissance de $z - a_i$.

Mais il convient d'ajouter que nous avons laissé de côté le cas où v_i contient des logarithmes et où β_i est entier.

Soit donc:

$$v_i = v_i' + w_i' \log(z - a_i)$$

v_i' sera holomorphe ou méromorphe dans le voisinage du point $z = a_i$. S'il est méromorphe, nous écrirons:

$$v_i' = v_i'' + w_i'' = v_i'' + \frac{G_1}{z - a_i} + \frac{G_2}{(z - a_i)^2} + \ldots + \frac{G_r}{(z - a_i)^r}.$$

Quant à w_i' nous l'écrirons

$$w_i' = C_0 + C_1(z - a_i) + C_2(z - a_i)^2 + \ldots.$$

Nous aurons alors:

$$J_i = \int v_i'' e^{zx} dz + \int w_i'' e^{zx} dz + \int w_i' \log(z - a_i) e^{zx} dz.$$

La première intégrale est nulle; la seconde est égale à $e^{a_i x}$ multiplié par un polynôme entier de degré $r - 1$ en x; quant à la troisième elle est représentée asymptotiquement par la série

$$e^{a_i x} 2i\pi (C_0 \Gamma(1) x^{-1} + C_1 \Gamma(2) x^{-2} + C_2 \Gamma(3) x^{-3} + \ldots).$$

Pour que cette série soit convergente, il faut évidemment que

$$\lim \sqrt[n]{C_n} = 0$$

et par conséquent que w_i' soit une fonction holomorphe dans tout le plan, v_i' pouvant d'ailleurs être quelconque.

Cette condition est d'ailleurs suffissante; on a en effet, quel que soit l'argument de x

$$J_i = \int v_i'' e^{zx} dz + \int w_i' \log(z - a_i) e^{zx} dz.$$

La première intégrale étant égale à $e^{a_i x}$ multiplié par un polynôme entier en x, nous n'avons pas à nous en occuper. Quant à la seconde, si w_i' est holomorphe dans tout le plan, elle sera toujours représentée asymptotiquement par la même série normale, et si on fait varier l'argument de x, elle représentera une même fonction de x, uniforme et continue. En raisonnant encore comme plus haut, on verrait donc que la série normale correspondante doit être convergente.

C. Q. F. D.

Si β_i est entier positif sans qu'il y ait de logarithme dans v_i, ce qui exige que

$$\beta_i > m - 1$$

alors la condition nécessaire et suffisante pour que la série normale correspondante converge, c'est que v_i soit holomorphe dans tout le plan.

Si enfin β_i est entier négatif sans qu'il y ait de logarithme dans v_i, la série normale correspondante convergera toujours, car elle se réduira à un polynôme entier multiplié par une exponentielle.

J'ai peu de chose à ajouter sur le cas où deux points singuliers simples a_i et a_j se confondent en un seul point singulier double a_i. Si les intégrales sont irrégulières, il n'y a pas de série normale et nous devons laisser ce cas de côté. Si les intégrales sont régulières, il y a une équation déterminante qui aura pour racines

$$0, 1, 2, \ldots, m - 3, \beta_i, \beta_i'.$$

Si β_i et β_i' ne diffèrent pas d'un entier, il n'y a rien à changer à ce qui précède; si β_i et β_i' diffèrent d'un entier, il arrivera en général qu'une intégrale v_i sera de la forme suivante:

$$(z - a_i)^{\beta_i}[\varphi + \varphi' \log(z - a_i)]$$

φ et φ' étant holomorphes dans le voisinage du point $z = a_i$. Pour que la série normale correspondante converge, il faut et il suffit que φ et φ' soient holomorphes dans tout le plan.

Considérons maintenant une équation (1) et sa transformée (3); supposons que cette dernière n'ait que des points singuliers simples et qu'aucun des β_i ne soit entier. Alors nous aurons n séries normales à chacune desquelles correspondra une fonction:

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i} \varphi_i$$

φ_i holomorphe pour $z = a_i$.

Une série normale sera convergente si la fonction φ_i correspondante est une fonction entière; l'équation (1) aura précisément autant d'intégrales normales que l'équation (3) aura d'intégrales égales à une fonction entière multipliée par une puissance de $z - a$.

A une même intégrale de (3) ne pourront pas correspondre plusieurs intégrales normales de (1). Il n'en sera plus de même si plusieurs des β_i sont entiers et s'il y a des logarithmes. Supposons par exemple que l'on ait pour une intégrale de (3):

$$v_i = \varphi + \psi \log(z - a) + \theta \log(z - b)$$

ψ et θ étant holomorphes dans tout le plan et φ étant holomorphe dans le voisinage des points a et b, mais d'ailleurs quelconques.

Les deux intégrales

$$\int_k v_i e^{zx} dz \quad \text{et} \quad \int_{k'} v_i e^{zx} dz$$

(k et k' étant deux contours analogues à k_i et enveloppant le premier le point a, le second le point b) seront deux intégrales normales de l'équation (1).

Envisageons par exemple l'équation suivante:

$$(1') \qquad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = (\alpha^2 x^2 + \beta) y$$

dont la transformée de Laplace sera:

$$(3') \qquad (z^2 - \alpha^2) \frac{d^2 v}{dz^2} + 4z \frac{dv}{dz} + (2 - \beta) v = 0.$$

C'est une équation hypergéométrique, dont les points singuliers sont

$$\alpha, \quad -\alpha, \quad \infty$$

avec des équations déterminantes, dont les points singuliers sont respectivement:

$$0, \quad -1; \quad 0, \quad -1; -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \beta}.$$

Pour que dans le voisinage du point singulier α par exemple, une intégrale prenne la forme:

$$\psi + \varphi \log(z - \alpha)$$

φ étant holomorphe dans tout le plan, il faut que l'une des racines de l'équation déterminante relative au point $z = \infty$ soit entière. Cela n'arrive que si

$$\beta = n(n + 1)$$

n étant entier. Supposons donc $\beta = n(n + 1)$. Alors l'équation (3') admet pour intégrale un polynôme entier P en z. Une seconde intégrale sera de la forme:

$$v = P \log \frac{z - \alpha}{z + \alpha} + Q$$

Q étant méromorphe dans le voisinage des points $z = \alpha$, $z = -\alpha$. Donc l'intégrale:

$$\int v e^{zx} dz$$

prise successivement le long de deux contours analogues à k_i et enveloppant respectivement le point $z = \alpha$ et le point $z = -\alpha$, nous donnera deux intégrales normales de l'équation (1). Nous retrouvons ainsi un résultat donné autrefois par Liouville et qui, depuis les travaux de M. Halphen, n'est plus qu'un cas particulier d'une théorie plus générale.

Comme second exemple, nous choisirons l'équation suivante considérée par M. Halphen (*Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables*, p. 180)

$$(1'') \qquad x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + (1 - n^2) x \frac{dy}{dx} - \left(1 - n^2 + \frac{1}{2} m x^3\right) y = 0.$$

Formons la transformée de LAPLACE, il viendra:

$$(3'') \qquad \left(z^3 - \frac{1}{2}m\right)\frac{d^3v}{dz^3} + 9z^2\frac{d^2v}{dz^2} + (19 - n^2)z\frac{dv}{dz} + v(8 - 2n^2) = 0.$$

Posons

$$\frac{1}{2}m = +\alpha^3$$

et soit j une racine cubique de l'unité.

Les points singuliers seront:

$$\alpha,\ \alpha j,\ \alpha j^2 \quad \text{et} \quad \infty.$$

Les racines de l'équation déterminante seront pour les points singuliers à distance finie:

$$1,\ 0 \quad \text{et} \quad -1.$$

Pour le point singulier ∞ elles seront données par:

$$\rho(\rho - 1)(\rho - 2) + 9\rho(\rho - 1) + (19 - n^2)\rho + 8 - 2n^2 = 0$$

ou

$$\rho^3 + 6\rho^2 + (12 - n^2)\rho + 8 - 2n^2 = 0.$$

Cette équation admet la racine -2; en la faisant disparaître, il reste:

$$\rho^2 + 4\rho + 4 - n^2 = 0$$

dont les racines sont $-2 \pm n$.

Dans le voisinage du point $z = \alpha$, l'intégrale logarithmique v peut se mettre sous la forme:

$$\varphi + \psi \log(z - \alpha)$$

φ étant méromorphe et ψ holomorphe dans le domaine de ce point.

Pour que la série normale correspondante converge, il faut et il suffit que ψ soit holomorphe dans tout le plan. Alors ψ doit correspondre à la racine $-2 + n$ de la troisième équation déterminante et être un polynôme entier de degré $n - 2$. Il faut alors que n soit entier. De plus ψ doit être une intégrale de l'équation (3).

D'ailleurs tout se passe de même dans le voisinage des points $z = \alpha j$, $z = \alpha j^2$, de sorte que, pour que l'équation (1) admette une intégrale normale, il faut que l'équation (3) admette comme intégrale un polynôme entier.

Posons donc:

$$\phi = \Sigma A_i z^i$$

il viendra:

$$(i + 2)(i + n + 2)(i - n + 2)A_i = \alpha^3 i(i - 1)(i - 2)A_{i+3}.$$

Nous prendrons le polynôme de degré $n - 2$; nous prendrons:

$$i \equiv n - 2 \pmod 3$$

et cette équation nous permettra de calculer par récurrence tous les coëfficients du polynôme ϕ, à moins que l'un des facteurs

$$i + 2, \qquad i + n + 2, \qquad i - n + 2$$

ne s'annule, ce qui ne pourra avoir lieu puisque

$$i > 0, \qquad i < n - 2.$$

Donc il existera toujours si n est entier et plus grand que 2 un polynôme entier satisfaisant à l'équation (3).

Pour aller plus loin, posons $z^3 = t$; l'équation (3) deviendra:

$$27(t - \alpha^3)t^2\frac{d^3 v}{dt^3} + 54t(t - \alpha^3)\frac{d^2 v}{dt^2} + 6(t - \alpha^3)\frac{dv}{dt}$$

$$+ 81 t^2\frac{d^2 v}{dt^2} + 54t\frac{dv}{dt} + 3t(19 - n^2)\frac{dv}{dt} + (8 - 2n^2)v = 0.$$

Il n'y a plus que trois points singuliers:

$$0, \quad 1, \quad \text{et} \quad \infty$$

et les racines des équations déterminantes sont respectivement

$$0, \qquad \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{3};$$

$$0, \qquad 1, \qquad -1;$$

$$-\frac{2}{3}, \quad -\frac{2}{3} + \frac{n}{3}, \quad -\frac{2}{3} - \frac{n}{3};$$

Supposons que n ne soit pas divisible par 3 et pour fixer davantage les idées soit

$$n \equiv 1 \pmod 3.$$

Soient X, Y, Z trois intégrales de l'équation en t, la seconde se réduisant à ϕ. Je choisirai ces trois intégrales de telle façon que quand le point t tournera autour du point 0, elles subissent la substitution linéaire:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{vmatrix}.$$

Quand on tournera autour du point 1, nos intégrales subiront la substitution linéaire:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

Les racines de l'équation déterminante étant 0, 1 et -1; on devra avoir identiquement par rapport à S:

$$\begin{vmatrix} a - S & b & c \\ 0 & 1 - S & 0 \\ a' & b' & c' - S \end{vmatrix} = (1 - S)^3.$$

De plus comme une seule intégrale est logarithmique, il faut que:

$$ab' - ba' = b'; \qquad cb' - c'b = -b.$$

Quand le point t décrira un contour de rayon très grand, les trois intégrales subiront la substitution linéaire:

$$\begin{vmatrix} a & bj & cj^2 \\ 0 & j & 0 \\ a' & b'j & c'j^2 \end{vmatrix}.$$

Mais en ce qui concerne le point $t = \infty$, les racines de l'équation déterminante sont $-\frac{2}{3}$, $\frac{n-2}{3}$, $\frac{-n-2}{3}$ et par conséquent sont égales, *à des entiers près,* à 0, $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Il en résulte que l'on a identiquement:

$$\begin{vmatrix} a - S & bj & cj^2 \\ 0 & j - S & 0 \\ a' & b'j & c'j^2 - S \end{vmatrix} = 1 - S^3.$$

Ces conditions suffisant pour montrer que

$$a = c = 1, \qquad a'c = 0$$

ceci nous conduirait aux hypothèses suivantes:

1° $\qquad a' = c = 0$

2° $\qquad a' = 1, \quad c = 0, \quad b = 0$

3° $\qquad c = 1, \quad a' = 0, \quad b' = 0.$

Les deux dernières hypothèses sont inacceptables, car elles conduiraient à admettre que l'équation (3'') a une seconde intégrale holomorphe dans tout le plan et qui ne pourrait être qu'un polynôme entier. Or cela est manifestement impossible.

Nous devons donc adopter la première hypothèse, et nous pouvons conclure que l'équation (3'') a une intégrale de la forme:

$$v = \phi \log(z^3 - \alpha^3) + M$$

ϕ étant le polynôme défini plus haut et M étant méromorphe dans tout le plan.

On arriverait au même résultat si on avait

$$n \equiv 2 \pmod 3.$$

On conclut de là que l'intégrale:

$$\int v e^{zx} dz$$

prise successivement le long de trois contours analogues à k_i et enveloppant respectivement le point α, le point αj et le point αj^2 nous fournira trois intégrales normales de l'équation (1).

Si β_i est entier négatif et si l'intégrale v_i correspondante n'est pas logarithmique, l'intégrale J_i correspondante sera toujours normale. Reprenons par exemple les équations (1″) et (3″) et faisons-y $n = 1$. La théorie précédente semble alors en défaut, car l'équation (3″) n'admet plus comme intégrale un polynôme entier. L'intégrale générale de l'équation (3″) est alors:

$$v = \frac{A + Bz + Cz^2}{z^3 - \alpha^3}$$

A, B et C étant des constantes arbitraires. Nous n'avons plus alors ni intégrale entière, ni intégrale logarithmique, mais les intégrales sont méromorphes dans le voisinage des trois points singuliers. L'équation (1″) doit donc encore admettre trois intégrales normales, ce qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier.

Dans le cas où β_i est entier positif, et où l'intégrale v_i n'est pas logarithmique, une même intégrale de (3), holomorphe dans tout le plan, peut fournir plusieurs intégrales normales de (1). Ainsi si l'équation (3) admet une intégrale holomorphe dans tout le plan et s'annulant ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées en k points différents (qui doivent être alors des points à apparence singulière), l'équation (1) admettra k intégrales normales.

Dans les exemples que nous avons considérés plus haut (équations (1′) et (1″) les transformées de LAPLACE (3′) et (3″) avaient toutes leurs intégrales régulières. Cela arrivera toutes les fois que P_n sera de degré n et divisible par x^n, P_{n-1} divisible par x^{n-1}, P_{n-2} divisible par x^{n-2}, ..., P_1 divisible par x.

Supposons que l'équation (1) satisfasse à ces conditions. Alors l'équation (3) aura toutes ses intégrales régulières tant à distance finie que dans le domaine du point $z = \infty$. Si donc elle admet une intégrale égale à une fonction entière multipliée par une puissance de $z - a_i$, cette fonction entière ne pourra être qu'un polynôme.

D'où, cette conclusion, que si l'équation (1) satisfait aux conditions énoncées, une série normale ne pourra converger qu'à la condition d'être limitée.

Il est aisé de former des équations admettant un nombre déterminé d'intégrales normales.

Soit une équation linéaire:

$$Q_n \frac{d^n u}{dz^n} + Q_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + \ldots + Q_1 \frac{du}{dz} + Q_0 u = 0$$

où les polynômes Q sont de degré $m < n$. Cette équation admettra $n - m$ intégrales holomorphes dans tout le plan. Posons ensuite

$$u = v(z - a)^a.$$

Alors v satisfera aussi à une équation linéaire (3''') facile à former. La transformée de LAPLACE de (3''') aura alors évidemment $n - m$ intégrales normales.

§ 5. *Cas du second ordre.*

Nous allons chercher maintenant à étendre au cas général les résultats qui n'ont été jusqu'ici obtenus qu'en supposant que toutes les séries normales sont du 1^er^ ordre et par conséquent que tous les polynômes P sont de degré égal ou inférieur à celui de P_n.

Considérons une équation:

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0$$

où les degrés des polynômes P_n vont en croissant, mais de la manière suivante: P_n sera par exemple de degré m; P_{n-1} sera de degré $m + 1$ au plus; P_{n-2} de degré $m + 2$ au plus; ...; P_1 de degré $m + n - 1$ au plus, et P_0 de degré $m + n$ au plus. Il arrivera alors en général que l'équation (1) admettra n séries normales du 2^d^ ordre:

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x).$$

On aura d'ailleurs:

$$\varphi_i(x) = e^{a_i x^2 + b_i x} x^{a_i} \phi\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\phi\left(\frac{1}{x}\right)$ étant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, mais généralement divergentes.

Soit $y = f(x)$ une intégrale quelconque de l'équation (1). Posons:

$$u = f(x)f(-x).$$

Il est aisé de voir que u satisfait à une équation linéaire d'ordre n^2:

$$Q_{n^2}\frac{d^{n^2}u}{dx^{n^2}} + Q_{n^2-1}\frac{d^{n^2-1}u}{dx^{n^2-1}} + \dots + Q_1\frac{du}{dx} + Q_0 u = 0 \tag{2}$$

où les coëfficients Q sont des polynômes entiers en x.

Cette équation admettra les n^2 séries normales suivantes:

$$\begin{array}{l}
\varphi_1(x)\varphi_1(-x),\ \varphi_2(x)\varphi_1(-x),\ \dots,\ \varphi_n(x)\varphi_1(-x);\\
\varphi_1(x)\varphi_2(-x),\ \varphi_2(x)\varphi_2(-x),\ \dots,\ \varphi_n(x)\varphi_2(-x);\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\
\varphi_1(x)\varphi_n(-x),\ \varphi_2(x)\varphi_n(-x),\ \dots,\ \varphi_n(x)\varphi_n(-x);
\end{array}$$

qui sont toutes du 2$^{\text{d}}$ ordre. Donc les degrés des polynômes Q iront en croissant de telle façon que le degré de Q_{n^2-h} ne puisse dépasser celui de Q_{n^2} de plus de h unités.

De plus cette équation (2), d'après son mode de formation, ne devra pas changer quand on changera x en $-x$; d'où il résulte qu'un même polynôme Q ne pourra contenir que des puissances de x d'une même parité. Chacun des polynômes Q sera ou une fonction paire ou une fonction impaire; si Q_{n^2} est pair, Q_{n^2-1} sera impair, Q_{n^2-2} sera pair et ainsi de suite; ce sera le contraire si Q_{n^2} est impair.

Posons maintenant:

$$x^2 = t$$

nous aurons:

$$\frac{d^p u}{dx^p} = \sum \frac{\lfloor p}{\lfloor p-q \lfloor 2q-p}(2x)^{2q-p}\frac{d^q u}{dt^q} \qquad (q \leqq p;\ p \leqq 2q)$$

L'équation (2) qu'on peut écrire:

$$\sum Q_p \frac{d^p u}{dx^p} = 0, \qquad (p \geqq 0;\ p \leqq n^2)$$

deviendra donc:

$$\sum\sum Q_p (2x)^{2q-p}\frac{\lfloor p}{\lfloor p-q \lfloor 2q-p}\frac{d^q u}{dt^q} = 0$$

ou bien:

$$\sum R_q \frac{d^q u}{dt^q} = 0$$

les R_q étant des polynômes définis par la manière suivante:

$$R_q = \sum Q_p (2x)^{2q-p} \frac{\lfloor p}{\lfloor p-q \lfloor 2q-p} \qquad (p \geqq q;\ p \leqq 2q;\ p \leqq n^2)$$

Nous aurons en particulier:

$$R_{n^2} = Q_{n^2}(2x)^{n^2}.$$

Soit m le degré de Q_{n^2}; celui de Q_p sera au plus égal à $m + n^2 - p$. Le degré de R_{n^2} (en x) sera égal à $m + n^2$. Le degré de $Q_p(2x)^{2q-p}$ sera au plus égal à $m + n^2 + 2q - 2p$; mais si l'on observe que $q - p$ est au plus égal à 0, on verra que le degré de $Q_p(2x)^{2q-p}$ et par conséquent celui de R_q est au plus égal à $m + n^2$.

Donc le degré d'un quelconque des polynômes R_q est au plus égal au degré de R_{n^2}.

Nous pouvons toujours supposer que $m + n^2$ est pair. Car si cela n'était pas nous multiplierions l'équation (2) par x, augmentant ainsi m d'une unité. Alors Q_{n^2} sera une fonction paire ou impaire selon que m sera pair ou impair, et par conséquent selon que n^2 sera pair ou impair. De plus les polynômes Q_p devront être alternativement des fonctions paires ou impaires, d'où il suit que $Q_p(2x)^{2q-p}$ et par conséquent R_q est toujours pair.

Si donc on remplace x^2 par t, R_q est un polynôme entier en t.

L'équation (3) est alors une équation de même forme que (1), mais qui sera de rang 1 et non plus de rang 2, pour employer l'expression du paragraphe 2.

Soit par exemple l'équation:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (x^3 + 1)y = 0. \tag{1'}$$

Soit y_1 ce qu'on obtient en changeant x en $-x$ dans y; on aura:

$$x\frac{d^2y_1}{dx^2} - (x^3 - 1)y_1 = 0.$$

Soit $u = yy_1$; nous désignerons par y, y'_1, u', y'', etc. les dérivées successives de y, y_1 et u. On obtiendra en tenant compte des équations différentielles:

$$
(5')\qquad
\begin{aligned}
u &= yy_1\\
u' &= y'y_1 + yy'_1\\
u'' &= 2x^2yy_1 + 2y'y'_1\\
u''' &= 4xyy_1 + \left(4x^2 + \frac{2}{x}\right)yy'_1 + \left(4x^2 - \frac{2}{x}\right)y'y_1
\end{aligned}
$$

$$u^{\mathrm{IV}} = \left(8x^4 + 4 - \frac{4}{x^2}\right)yy_1 + \left(12x - \frac{2}{x^2}\right)yy'_1 + \left(12 + \frac{2}{x^2}\right)y'y_1 + 8x^2y'y'_1.$$

En éliminant entre ces cinq équations $(5')$ les quatre quantités yy_1, $y'y_1$, yy'_1, $y'y'_1$, on arrive à l'équation:

$$(2')\qquad x^2\frac{d^4u}{dx^4} + x\frac{d^3u}{dx^3} - 4x^4\frac{d^2u}{dx^2} - 16x^3\frac{du}{dx} - (8x^2 - 4)u = 0.$$

Il est aisé de vérifier que cette équation est de rang 2.

On trouve ensuite:

$$
\begin{aligned}
R_4 &= Q_4(2x)^4 = 16x^6\\
R_3 &= Q_4(2x)^2.12 + Q_3(2x)^3 = 56x^4\\
R_2 &= Q_4.12 + Q_3(2x).6 + Q_2(2x)^2 = -16x^6 + 24x^2\\
R_1 &= Q_2.2 + Q_1(2x) = -40x^4\\
R_0 &= Q_0 = -8x^2 + 4
\end{aligned}
$$

d'où enfin l'équation:

$$(3')\qquad 4t^3\frac{d^4u}{dt^4} + 14t^2\frac{d^3u}{dt^3} - (4t^3 + 6t)\frac{d^2u}{dt^2} - 10t^2\frac{du}{dt} - (2t - 1)u = 0$$

qui, comme on le voit est de rang 1.

L'intégration de l'équation (1) est ainsi ramenée à celle de l'équation (3) qui est de rang 1. On formera donc la transformée de Laplace (4) de cette équation (3) et on obtiendra ainsi u sous la forme d'une intégrale définie.

Comment lorsqu'on connaîtra u pourra-t-on obtenir y?

Appelons y_1 ce que devient y quand on y change x en $-x$. On trouvera n^2+1 équations de la forme suivante:

$$\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = \sum\nolimits_{\beta\gamma} F_{\alpha\beta\gamma} \frac{d^\beta y}{dx^\beta} \frac{d^\gamma y_1}{dx^\gamma}. \qquad \begin{pmatrix} \alpha=0,1,2,\ldots,n^2 \\ \beta=0,1,2,\ldots,n-1 \\ \gamma=0,1,2,\ldots,n-1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Dans ces équations $F_{\alpha\beta\gamma}$ désigne une série de fonctions rationnelles en x.

D'ailleurs naturellement $\frac{d^0 u}{dx^0}$ représente u. Ces équations sont analogues aux équations (5') écrites plus haut.

Si l'on élimine par un déterminant, entre ces n^2+1 équations les n^2 produits

$$\frac{d^\beta y}{dx^\beta} \frac{d^\gamma y}{dx^\gamma} \tag{6}$$

on obtiendra l'équation (2). Ne retenons plus maintenant que les n^2 premières équations (5), celles où l'on a pour α successivement les valeurs:

$$\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n^2-1.$$

On pourra alors résoudre les n^2 équations par rapport aux n^2 produits (6) (comme si ces n^2 produits étaient des variables indépendantes) pourvu toutefois que le déterminant correspondant ne soit pas nul, ce que nous supposerons. Nous nous réservons d'ailleurs de revenir plus loin sur le cas particulier où ce déterminant est nul.

On tirera en particulier:

$$yy_1 \quad \text{et} \quad y_1\frac{dy}{dx}$$

sous la forme suivante:

$$yy_1 = \Phi_0 u + \Phi_1 \frac{du}{dx} + \Phi_2 \frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + \Phi_{n^2-1} \frac{d^{n^2-1}u}{dx^{n^2-1}}$$

$$y_1\frac{dy}{dx} = \Phi'_0 u + \Phi'_1 \frac{du}{dx} + \ldots + \Phi'_{n^2-1} \frac{d^{n^2-1}u}{dx^{n^2-1}}$$

ce qui donnera enfin:

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{\sum \Phi'_p \frac{d^p u}{dx^p}}{\sum \Phi_p \frac{d^p u}{dx^p}}.$$

Si u est connu, cette équation donnera y par une simple quadrature.

On peut d'ailleurs obtenir ce résultat d'une infinité de manières; en calculant:

$$y\frac{d^a y_1}{dx^a} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx}\frac{d^a y_1}{dx^a}.$$

Il n'arrivera pas que toutes ces quantités soient nulles à la fois.

Voyons maintenant ce qu'il faudrait faire si le déterminant était nul et si par conséquent on ne pouvait pas résoudre les équations (5) par rapport aux n^2 produits (6).

Pour le voir, faisons $n = 2$ et écrivons les équations (5) en reprenant la notation de Lagrange

$$(5'') \qquad \begin{aligned} u &= yy_1 \\ u' &= y'y_1 + yy_1' \\ u'' &= Ayy_1 + Byy_1' + Cy'y_1 + Dy'y_1' \\ u''' &= A'yy_1 + B'yy_1' + C'y'y_1 + D'y'y_1' \end{aligned}$$

$A, B, C, D, A', B', C', D'$ seront des fonctions rationnelles de x telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix}$$

soit nul. Nous supposerons toutefois que les mineurs du 1^er ordre ne soient pas tous nuls à la fois. Nous pourrons alors écrire:

$$\begin{aligned} yy' &= u \\ yy_1' &= \alpha u + \beta u' + \gamma u'' + \delta u''' + \varepsilon y'y_1' \\ y'y_1 &= \alpha' u + \beta' u' + \gamma' u'' + \delta' u''' + \varepsilon' y'y_1' \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma,$ etc. étant rationnels en x. En faisant le produit des deux dernières équations et en y remplaçant yy_1 par u, on obtient une équation du second degré en $y'y_1'$. Il en résulte que $y'y_1'$ et par conséquent yy_1, yy_1', $y'y_1$ et enfin $\frac{y'}{y}$ sont des fonctions algébriques de x, u, u', u'' et u'''.

Toutes les fois donc que le déterminant:

$$\Sigma \pm F_{\alpha\beta\gamma} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n^2-1 \\ \beta = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ \gamma = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

sera nul, l'expression

$$\frac{dy}{ydx}$$

sera non plus une fonction rationnelle, mais une fonction algébrique de x, de u et de ces dérivées. Donc quand on connaîtra u, on en déduira y par une simple quadrature.

Il est facile maintenant d'étendre au cas général ce que nous venons de dire des équations de rang 2. Supposons que (1) soit une équation de rang p et soit satisfaite par n séries normales d'ordre p. Soit:

$$y = f(x)$$

une intégrale quelconque de l'équation (1). Posons:

$$u = f(x) f(\alpha x) f(\alpha^2 x) \ldots f(\alpha^{p-1} x)$$

α étant une des racines p^{es} primitives de l'unité.

Il arrivera alors que u satisfera à une équation différentielle linéaire (2) de rang p et d'ordre n^p dont les coëfficients seront des polynômes en x. L'équation ne devra pas changer si l'on change x en αx. Il en résulte que si l'on écrit cette équation sous la forme:

$$(2) \qquad \sum Q_n \frac{d^h u}{dx^h} = \sum A_{hk} x^k \frac{d^h u}{dx^h}$$

on devra avoir

$$k - h \equiv \text{ une constante } (\mathrm{mod}\, p).$$

En multipliant l'équation par une puissance convenablement choisie de x, on aura alors:

$$k \equiv h \ (\mathrm{mod}\, p).$$

Faisons maintenant

$$x^p = t.$$

L'équation (2) deviendra par ce changement de variable

$$(3) \qquad \sum R_q \frac{d^q u}{dt^q} = 0$$

les R_q étant des polynômes entiers en t. Cette équation (3) sera de rang 1.

Supposons qu'on en tire u; comment obtiendra-t-on y? On obtiendra $n^p + 1$ équations

$$\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = \sum F_{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda} \frac{d^\beta y}{dx^\beta} \frac{d^\gamma y_1}{dx^\gamma} \cdots \frac{d^\lambda y_{p-1}}{dx^\lambda} \tag{5}$$

$$(\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n^p;\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \lambda = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Dans ces équations les F sont des fonctions rationnelles de x et y_q désigne la fonction $f(\alpha^q x)$.

Des n^p premières équations (5) on tirera les n^p produits:

$$\frac{d^\beta y}{dx^\beta} \frac{d^\gamma y}{dx^\gamma} \cdots \frac{d^\lambda y_{p-1}}{dx^\lambda}.$$

Si on considère en effet ces n^p produits comme des variables indépendantes, les n_p premières équations (5) seront linéaires par rapport à ces n^p variables. On pourra donc les résoudre, pourvu que leur déterminant ne soit pas nul.

On obtiendra ainsi:

$$yy_1y_2 \cdots y_{p-1} = \sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}$$

$$\frac{dy}{dx} y_1 y_2 \cdots y_{p-1} = \sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q} \qquad (q=0, 1, 2, \ldots, n^p-1)$$

les Φ étant rationnelles en x. On en tirera:

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{\sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}}$$

de sorte que la dérivée logarithmique de y est une fonction rationnelle de x, de u et de ses dérivées.

Si le déterminant des équations (5) était nul, cette dérivée logarithmique ne serait plus une fonction rationnelle, mais algébrique de x, de u et de ses dérivées.

Dans tous les cas, si l'on suppose u connu, y s'obtiendra par une simple quadrature.

§ 6. *Généralisation des* §§ 3 *et* 4.

Quelle est la condition pour que l'équation (1) envisagée dans le paragraphe précédent, ait une intégrale normale, c'est à dire pour que l'une des séries normales qui y satisfont converge?

Supposons pour fixer les idées que cette équation

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_0 y = 0$$

soit de rang 2 et soit

$$e^{ax^2+bx}\varphi(x)$$

une série normale qui y satisfasse; nous allons chercher la condition pour que cette série converge. Si elle converge, il en sera de même de

$$e^{ax^2-bx}\varphi(x)$$

ou encore du produit:

$$S = e^{2at}\varphi(\sqrt{t})\varphi(-\sqrt{t})$$

où l'on a posé:

$$t = x^2.$$

Mais cette série normale S qui est du 1^er ordre, satisfera formellement à l'équation:

$$(3) \qquad \sum R_q \frac{d^q u}{dt^q} = 0$$

que l'on formera comme dans le paragraphe précédent, en appelant y_1 ce que devient y quand on change x en $-x$, et en faisant $u = yy_1$ et $t = x^2$.

Mais cette équation (3) est de rang 1; pour qu'elle admette une intégrale normale, il faut donc et il suffit que sa transformée de Laplace (4) admette une intégrale de la forme suivante:

$$v = (z-a)^a G(z)$$

$G(z)$ étant une fonction entière de z.

Cette condition est donc aussi nécessaire pour que l'équation (1) ait une intégrale normale.

Je dis qu'elle est également suffisante. Supposons en effet qu'elle soit remplie; alors on pourra trouver une intégrale de l'équation (3) qui soit de la forme:

$$u = e^{2at} t^{\lambda} \varphi(t) = e^{2ax^2} x^{2\lambda} \varphi(x^2) \tag{6}$$

φ désignant une fonction holomorphe en $\frac{1}{t}$ pour $t = \infty$.

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'en supposant que le déterminant des équations (5) ne soit pas nul, on aura:

$$yy_1 = \sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}$$

$$\frac{dy}{dx} y_1 = \sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}$$

les Φ et les Φ' étant rationnels en x. Si dans ces équations nous remplaçons u par sa valeur (6), puis que nous les divisions l'une par l'autre, il vient:

$$\frac{dy}{ydx} = 2ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{e}{x^3} + \ldots.$$

Car on voit aisément que:

$$\frac{\sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}}$$

peut se développer en série suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$.

On en déduit aisément:

$$y = e^{ax^2+bx} \psi(x) x^c$$

ψ étant une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$. La condition énoncée plus haut comme nécessaire est donc aussi suffisante.

Elle l'est encore si le déterminant des équations (5) est nul. Il arrive alors que l'on a:

$$\frac{dy}{ydx} = F\left(x,\ u,\ \frac{du}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^{n^2-1} u}{dx^{n^2-1}}\right)$$

F étant l'algorithme d'une fonction algébrique. De plus la fonction F est homogène et de degré 0 par rapport à u, $\frac{du}{dx}$, ..., $\frac{d^{n^2-1}u}{dx^{n^2-1}}$.

Si donc on y remplace u par son expression (6), l'exponentielle e^{2ax^2} qui entre dans cette expression disparaîtra, ce qui montre qu'après cette substitution le point $x = \infty$ sera pour la fonction F (qui ne dépend plus maintenant que de x puisqu'on a remplacé u par une fonction connue de x) un point singulier algébrique.

On pourra donc développer F suivant les puissances décroissantes (entières ou fractionnaires) de x. Si l'on n'a que des puissances entières, il viendra

$$\frac{dy}{ydx} = 2ax + b + \frac{c}{x} + \ldots$$

et on retombera sur le cas précédent. Si au contraire on avait des puissances fractionnaires, on trouverait

$$y = e^{\varphi\left(x^{\frac{1}{p}}\right)} x^c \psi\left(x^{-\frac{1}{p}}\right)$$

φ étant l'algorithme d'un polynôme entier et ψ celui d'une fonction holomorphe.

L'équation (1) devrait donc être satisfaite par une série anormale, ce que nous n'avons pas supposé.

On doit donc conclure que la condition énoncée est dans tous les cas nécessaire et suffisante pour qu'une équation de rang 2 ait une intégrale normale et on verrait de la même manière qu'il en est de même pour une équation de rang quelconque.

Supposons maintenant que la série normale que nous envisageons et qui satisfait à l'équation (1) ne soit pas convergente. Soit:

$$S = e^{ax^2+bx} x^\lambda \varphi(x)$$

cette série normale divergente; formons la série:

$$S_1 = e^{ax^2-bx} x^\lambda \varphi(-x)$$

et multiplions ces deux séries membre à membre, nous trouverons:

$$S' = SS_1 = e^{2at} t^\lambda \varphi(\sqrt{t})\varphi(-\sqrt{t}) \qquad (t = x^2)$$

et S' sera une série normale du 1[er] ordre en t et qui satisfera formellement à l'équation (3) qui est de rang 1. Cette série S' représentera alors asymptotiquement une certaine intégrale u de cette équation d'après ce que nous avons démontré au § 3.

Si l'on pose ensuite:

$$\frac{dy}{y dx} = \frac{\sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}}$$

(les Φ et les Φ' ayant même signification que plus haut) y sera une intégrale de l'équation (1).

Je dis que y sera représenté asymptotiquement par la série S.

En effet, on pourra former d'après les règles ordinaires du calcul, les séries suivantes:

$$\sum \Phi'_q \frac{d^q S}{dx^q} \quad \text{et} \quad \sum \Phi_q \frac{d^q S'}{dx^q}.$$

On obtiendra ainsi deux séries divergentes qui représenteront asymptotiquement

$$\sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q} \quad \text{et} \quad \sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}.$$

Cela demande un mot d'explication; pour établir les égalités asymptotiques:

$$\sum \Phi'_q \frac{d^q S'}{dx^q} = \sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}; \qquad \sum \Phi_q \frac{d^q S'}{dx^q} = \sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q} \tag{7}$$

il faut admettre que $\frac{d^q u}{dx^q}$ est représenté asymptotiquement par $\frac{d^q S'}{dx^q}$, de la même manière que u est représenté par S'. Or les principes du § 1 ne permettent pas en général de différentier une égalité asymptotique comme une égalité ordinaire.

Mais ici cette difficulté ne peut nous arrêter. En effet u satisfait à une équation linéaire d'ordre n^2 et de rang 1, qui est l'équation (3). Il en résulte immédiatement que $\frac{d^q u}{dt^q}$ doit satisfaire à une équation linéaire (8) qui sera comme l'équation (3) d'ordre n^2 et de rang 1. En raisonnant sur l'équation (8) comme sur l'équation (3), on verrait que cette équation est satisfaite formellement par une série normale et que cette série représente asymptotiquement une des intégrales de l'équation. On vérifierait ensuite sans peine que cette intégrale est $\frac{d^q u}{dt^q}$ et que cette série est $\frac{d^q S'}{dt^q}$. On a donc asymptotiquement

$$\frac{d^q u}{dt^q} = \frac{d^q S'}{dt^q}$$

et par conséquent:

$$\frac{d^q u}{dx^q} = \frac{d^q S'}{dx^q}.$$

On a donc aussi asymptotiquement

$$yy_1 = \sum \Phi_q \frac{d^q S'}{dx^q} = e^{2ax^2}(\alpha_0 x^\lambda + \alpha_1 x^{\lambda-1} + \alpha_2 x^{\lambda-2} + \ldots)$$

$$\frac{dy}{dx} y_1 = \sum \Phi'_q \frac{d^q S'}{dx^q} = e^{2ax^2}(\beta_0 x^{\lambda+1} + \beta_1 x^\lambda + \beta_2 x^{\lambda-1} + \ldots).$$

Il est d'ailleurs aisé de vérifier que:

$$\beta_0 = a\alpha_0.$$

On aura donc asymptotiquement:

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} yy_1 = 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} x^{-1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} x^{-2} + \ldots = 1 + \Sigma_1$$

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} \frac{dy}{dx} y_1 = ax + \frac{\beta_1}{\beta_0} + \frac{\beta_2}{\beta_0} x^{-1} + \ldots = \Sigma_2.$$

Si donc nous posons:

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} yy_1 = 1 + \omega_1$$

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} \frac{dy}{dx} y_1 = \omega_2$$

les fonctions ω_1 et ω_2 seront représentées asymptotiquement par les séries Σ_1 et Σ_2, et on aura:

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{\omega_2}{1 + \omega_1}.$$

Mais

$$\frac{1}{1+\omega_1} = 1 - \omega_1 + \omega_1^2 - \ldots$$

est une fonction holomorphe de ω_1 pour $\omega_1 = 0$. On peut donc, d'après les principes du § 1 y substituer son expression asymptotique Σ_1 d'après les règles ordinaires du calcul; on obtiendra une série divergente Σ_3 qui représentera asymptotiquement $\frac{1}{1+\omega_1}$.

Mais d'après les principes du même paragraphe, nous avons le droit de multiplier les deux égalités asymptotiques:

$$\omega_2 = \Sigma_2$$

$$\frac{1}{1+\omega_1} = \Sigma_3$$

d'après les règles ordinaires du calcul, ce qui nous donne asymptotiquement

$$\frac{dy}{y} = dx\Sigma_3\Sigma_2.$$

Si je rappelle en outre que les principes du § 1 nous permettent d'intégrer les égalités asymptotiques comme les égalités ordinaires, j'écrirai:

$$\log y = \int dx\Sigma_3\Sigma_2$$

ce qui montre que $\log y$ peut être représenté asymptotiquement par une certaine série que l'on peut former aisément et que nous écrirons:

$$ax^2 + bx + \lambda \log x + \frac{\gamma_1}{x} + \frac{\gamma_2}{x^2} + \ldots = ax + b + \lambda \log x + \Sigma_4.$$

Posons alors:

$$y = e^{ax^2+bx}x^\lambda e^\eta$$

η sera représenté asymptotiquement par Σ_4. Mais e^η est une fonction holomorphe de η pour $\eta = 0$; j'y puis donc substituer à la place de η son expression asymptotique Σ_4, ce qui donne asymptotiquement

$$y = e^{ax^2+bx}x^\lambda e^{\Sigma_4}.$$

Il en résulte que y est représenté asymptotiquement par une série de forme normale qui ne peut être différente de S.

L'égalité asymptotique

$$y = S$$

est donc démontrée.

Mais il convient d'observer que toutes les intégrales de l'équation linéaire (2) ne peuvent pas être regardées comme le produit d'une intégrale y de l'équation (1) par ce que devient cette même intégrale lorsqu'on change x en $-x$, ni même comme le produit d'une intégrale y de l'équation (1) par une intégrale y_1 de l'équation (1') obtenue en changeant x en $-x$ dans l'équation (1). Cette propriété n'appartient qu'à certaines intégrales particulières de l'équation (2).

Il résulte de là que si l'on tire y de l'égalité:

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{\sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}} \tag{8}$$

la valeur de y ainsi obtenue ne sera une intégrale de l'équation (1) que si l'on a choisi pour u certaines intégrales particulières de l'équation (2). Parmi ces intégrales particulières on peut toutefois en trouver n^2 qui sont linéairement indépendantes.

Il est aisé de voir que parmi les intégrales de l'équation (2) il y en a une (que j'appellerai u_1), qui est représentée asymptotiquement par une série normale S_1, (en supposant par exemple, pour fixer les idées, que x croisse indéfiniment par valeurs réelles positives) et qui est telle qu'on en puisse trouver $n^2 - 1$ autres dont le rapport à u_1 tende vers 0 quand x croît indéfiniment.

En appelant $u_2, u_3, \ldots, u_{n^2}$ ces $n^2 - 1$ intégrales, on aura:

$$\lim \frac{u_2}{u_1} = 0, \qquad \lim \frac{u_3}{u_1} = 0, \quad \ldots, \quad \lim \frac{u_{n^2}}{u_1} = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation (2) sera alors de la forme:

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_{n^2} u_{n^2}$$

et elle sera représentée asymptotiquement par la série $A_1 S_1$ pourvu que A_1 ne soit pas nul. Ainsi l'intégrale la plus générale de l'équation (2) sera représentée asymptotiquement par une série normale.

Considérons maintenant, non plus l'intégrale la plus générale de l'équation (2), mais la plus générale parmi celles qui substituées à u dans l'équation (8) donnent pour y une intégrale de l'équation (1). Si l'on veut qu'il en soit ainsi, on ne peut pas choisir les constantes d'intégration $A_1, A_2, \ldots, A_{n^2}$ d'une façon arbitraire; il faut qu'il y ait entre elles certaines relations quadratiques (9). Mais quand même on suppose que ces équations quadratiques (9) sont satisfaites, A_1 ne sera pas nul en général. Donc l'intégrale de l'équation (2) la plus générale parmi celles qui satisfont aux relations (9) est encore représentée asymptotiquement par une série normale.

Il suit de là et des raisonnements développés plus haut, que l'intégrale *la plus générale* de l'équation (1) sera représentée asymptotiquement par une série normale.

C'est dans ce sens que les résultats du § 3 peuvent être regardés comme généralisés.

Le raisonnement qui précède s'applique encore si, le déterminant des équations (5) étant nul, l'expression $\frac{dy}{ydx}$ n'est plus une fonction rationnelle mais algébrique de x, de u et de ses dérivées. Ce raisonnement est fondé en effet sur ce principe, démontré au § 1, que toutes les opérations du calcul sont applicables aux égalités asymptotiques, si l'on excepte la différentiation. Il n'est pas permis en général de différentier une égalité asymptotique. Mais d'après ce que nous avons vu plus haut, dans le cas particulier où u est une intégrale d'une équation linéaire, il est permis de différentier l'égalité asymptotique

$$u = S'.$$

Il ne se présente donc aucune difficulté.

Il n'y aurait rien à changer aux développements qui précèdent, si l'équation (1) au lieu d'être de rang 2 était de rang quelconque.

Les résultats des §§ 3 et 4 peuvent donc s'étendre au cas le plus général, avec les restrictions énoncées plus haut.

Je puis donc énoncer le résultat suivant qui sera la conclusion de ce mémoire.

L'intégrale la plus générale d'une équation de rang quelconque est représentée asymptotiquement par une des séries normales qui satisfont formellement à cette même équation.

Il peut y avoir exception si l'équation admet des séries anormales.

Paris, 7 Février 1886.