Über die Rayleighsche Vermutung: Unter allen Platten von gegebener Fläche und konstanter Dichte und Elastizität hat die kreisförmige den tiefsten Grundton (*).

Ernst Mohr (Berlin)

Zusammenfassung. – *Wir beweisen in dieser Arbeit die eine Hälfte der Vermutung von Lord Rayleigh aus dem Jahre 1877, nämlich die Eindeutigkeit: wenn eine Platte mit dem tiefsten Grundton existiert, so ist sie notwendig kreisförmig. Der Beweis beruht auf folgender Überlegung: die zweite Variation des Grundtones dieser Platte gegenüber flächentreuen Gebietsvariationen ist nicht negativ und gleich Null für zwei infinitesimale Translationen in den Achsenrichtungen und eine infinitesimale Drehung um den Ursprung. So ergibt sich ein Eigenwertproblem für den kleinsten Wert jener zweiten Variation, von dem wir wissen, daß er gleich Null ist und von dem wir zeigen, daß er genau zweifach ist. Daraus folgt, daß sich die infinitesimale Drehung aus den zwei infinitesimalen Translationen linear mit konstanten Koeffizienten aufbaut, was bedeutet, daß der Rand kreisförmig ist.*

Einleitung.

1. – G. Szegö hat die Vermutung von Lord Rayleigh ([1], S. 320) unter der Voraussetzung bewiesen, daß die Grundschwingung der Platte vorzeichenfest ist ([7], [8]). Indessen weiß man bis heute noch nicht, ob diese Voraussetzung gemacht werden darf.

Wir beweisen hier die eine Hälfte der Vermutung, nämlich die Eindeutigkeit (sie ist für den Physiker in erster Linie wichtig) d.h. den folgenden Satz von Lord Rayleigh:

Voraussetzung. – Es existiert eine Platte mit dem tiefsten Grundton.

Behauptung. – Die Platte ist kreisförmig.

2. – Beim Beweis dieses Satzes stellen wir uns ganz auf den Standpunkt des mathematischen Physikers, nehmen also an, daß alle die Differenzierbarkeits- bzw. Analyzitätsvoraussetzungen erfüllt sind, die unsere Betrachtung erfordert; es ist beim Beweis ohnehin genug zu tun.

Wir hoffen, auf die analytischen Feinheiten wie auch auf die Frage nach der Existenz einer Platte mit dem tiefsten Grundton in einer späteren Arbeit zurückzukommen.

(*) Entrata in Redazione il 26 giugno 1972.

Als Vorbilder für unsere Einstellung nennen wir: das klassische Werk von R. COURANT und D. HILBERT [2], [3] und [4], die grundlegende Arbeit von K. FRIEDRICHS [5] und das wundervolle Buch von G. PÓLYA und G. SZEGÖ [9].

I. – Vorbereitungen.

3. – G bedeutet ein Gebiet, ∂G seinen Rand $\bar{G} = G + \partial G$ seine Abschließung. Wir setzen voraus: ∂G ist eine mindestens zweimal stetig differenzierbare einfach geschlossene Kurve. Ist $f = f(x, y)$ in G definiert, so bedeutet $f \in C^k$ in G, daß f in G $k =$ mal stetig differenzierbar ist; ebenso $f \in \tilde{C}^k$ in G, daß $f \in C^{k-1}$ in G ist, und daß die k-ten Ableitungen von f als stückweise stetige Funktionen existieren; $f \in C^0$ in G bzw. $f \in \tilde{C}^0$ in G bedeutet, daß f stetig bzw. stückweise stetig in G ist. Analog ist $f \in C^k$ in $\bar{G}$ und $f \in \tilde{C}^k$ in $\bar{G}$ zu verstehen.

$$f_x \ \text{ist} = \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \Delta f = f_{xx} + f_{yy}\,, \ \frac{\partial f}{\partial n}$$

die Ableitung nach der äußeren Normalen (∂G so orientiert, daß das Innere zur Linken liegt). $\iint$ bedeutet eine Integration über das Gebiet, $\int$ bzw. $\oint$ eine Integration über einen Randbogen (derselbe ist stets zusammenhängend und hat eine Länge, die kleiner als die Länge von ∂G ist) bzw. ∂G. Das Integrationselement $dx\,dy$ bzw. ds (s die Bogenlänge, gezählt von einem passenden Punkt) ist i.a. unterdrückt.

Wir erinnern an die quadratischen Integralausdrücke

$$\begin{aligned}
H[f] &= \iint f^2 \\
D[f] &= \iint (f_x^2 + f_y^2) \\
P[f] &= \iint (\Delta f)^2 \\
J[f] &= \iint \{f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2\} \\
d[f] &= \oint \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2
\end{aligned}$$

mit den entsprechenden bilinearen Formen, z.B.

$$J[f, g] = \iint \{f_{xx}g_{xx} + 2f_{xy}g_{xy} + f_{yy}g_{xx}\},\ d[f, g] = \oint \frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial g}{\partial n};$$

dabei ist $J[f, f] = J[f]$, $d[f, f] = d[f], \ldots$. Es ist

$$P[f] = J[f] + \oint \left\{f_x \frac{\partial f_y}{\partial s} - f_y \frac{\partial f_x}{\partial s}\right\}. \tag{1}$$

C, C_1, C_2, ... bedeuten positive Konstante, die (je nach Lage, ein Mißverständnis ist ausgeschlossen) noch vom Gebiet abhängen können.

Es gelten die Ungleichungen

$$(2)\qquad \begin{cases} H[f] \leqq C\{D[f] + \oint f^2\} \\ \oint f^2 \leqq C\{\sqrt{D[f]H[f]} + H[f]\} \\ D[f] \leqq C\{J[f] + \oint (f_x^2 + f_y^2)\} \\ \oint (f_x^2 + f_y^2) \leqq C\{\sqrt{J[f]D[f]} + D[f]\}; \end{cases}$$

später ist stets $f = 0$ auf ∂G; dann lauten die erste und letzte Ungleichung

$$(2^*)\qquad \begin{cases} H[f] \leqq CD[f] \\ d[f] \leqq C\{\sqrt{J[f]D[f]} + D[f]\}. \end{cases}$$

Tritt z.B. $J[f]$ auf, so ist angenommen, daß $f \in \tilde{C}^2$ in G und $J[f] < \infty$ ist.

4. – Später treten Variationsaufgaben mit dem «Führungsglied» $P[f]$ auf. Für die Abschätzungen ersetzt man nach dem Vorbild von K. FRIEDRICHS [5] $P[f]$ durch $J[f]$. Z ist die jeweilige Menge der zugelassenen Funktionen f. Die an f zu stellenden Differenzierbarkeitseigenschaften ergeben sich jeweils aus der gestellten Aufgabe und werden von uns nicht explizit formuliert. Wir verweisen hierfür ein- für alle Mal auf [4] S. 476-523 und speziell S. 528-530. Als Beispiel für eine solche Variationsaufgabe nennen wir schon hier:

$$\inf_{f \in Z} E[f] = \varrho \qquad \text{bei} \qquad d[f] = 1$$

mit dem «Energieausdruck»

$$(3)\qquad E(f) = J[f] - \lambda H[f] - \oint \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial n^3},$$

$\lambda > 0$ eine Konstante, $\partial^3 u / \partial n^3 \in C^0$ auf ∂G vorgegeben. Die Lage wird dann stets diese sein: entweder es steht schon fest oder es wird mittels der obigen Ungleichungen bewiesen, daß für die Funktionen $f \in Z$ eine Aussage

$$(4)\qquad H[f] \leqq C_1, \quad D[f] \leqq C_2, \quad J[f] \leqq C_3$$

gilt; insbesondere gilt dann diese Aussage für eine Folge $f = f_i$ von minimierenden Funktionen. Ist (4) gesichert, so bezeichnen wir die Variationsaufgabe als sinnvoll. Auf Grund von (4) schließt man auf der Linie der Überlegungen von *R.* Courant und K. Friedrichs: für jede minimierende Folge f_i gelten die Beziehungen ($i \to \infty$, $k \to \infty$)

$$E[f_i - f_k] \to 0\,, \quad J[f_i - f_k] \to 0\,, \quad D[f_i - f_k] \to 0 \quad H[f_i - f_k] \to 0\,, \quad d[f_i - f_k] \to 0\,;$$

ferner existiert eine Funktion $\varphi \in C^2$ in G mit den Eigenschaften

$$E[f_i - \varphi] \to 0\,, \quad J[f_i - \varphi] \to 0\,, \quad D[f_i - \varphi] \to 0\,, \quad H[f_i - \varphi] \to 0\,, \quad d[f_i - \varphi] \to 0\,;$$

φ erweist sich als eine minimierende Funktion, $\varphi \in Z$; darüber hinaus ist $\varphi \in C^4$ in G und genügt dort der zugehörigen Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung; ferner gelten die Limes-Aussagen

$$\lim f_i = \varphi$$

$$\lim \frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \lim \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

gleichmäßig in $\bar{G}$. Wir drücken diesen ganzen Tatbestand im folgenden durch die Aussage

$$\text{«} \lim f_i = \varphi \text{»} \tag{5}$$

aus; die Anführungszeichen sollen daran erinnern, wie diese Aussage zu verstehen ist.

Auf dem Rand $\Gamma = \partial G$ genügt φ i.a. nicht streng den Randbedingungen. Im obigen Beispiel ergibt sich

$$\oint \frac{\partial \zeta}{\partial n} \left[\Delta\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right] = 0 \qquad \text{bei} \qquad \oint \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0\,,$$

$\partial\zeta/\partial n$ sonst beliebig, also formal die «natürliche» Randbedingung

$$\left[\Delta\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right] = \text{const auf } \Gamma. \tag{6}$$

Im allgemeinen ist jedoch diese Aussage durch die «Grenzgleichung» (Γ_δ die in G verlaufende Parallelkurve zu Γ im Abstand $\delta > 0$)

$$\lim_{\delta \to 0} \left\{ \oint_{\Gamma_\delta} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \left[\Delta\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right] \right\} = 0 \quad \text{bei } \lim_{\delta \to 0} \oint_{\Gamma_\delta} \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0 \tag{7}$$

zu ersetzen; dabei treten die zweiten Ableitungen auf dem Rand nur bei einer natürlichen Randbedingung und immer in der Kombination $\Delta\varphi$ auf. Wir nehmen im folgenden stets an, daß in solchen Fällen die Randbedingung streng erfüllt ist, also hier, daß (6) gilt. Wir erwähnen noch, daß hinter vielen Umformungen die später vorkommen, eine Limesbetrachtung im Stile von (7) steht, ohne daß wir darauf eingehen.

5. – Wir erinnern an eine wichtige Formel von F. Rellich für die eingespannte Membran [6]; sie läßt sich sinngemäß auf die eingespannte Platte übertragen mit dem Ergebnis: aus den Beziehungen (σ eine Parameter)

$$\Delta\Delta f - \sigma f = 0 \quad \text{in einem Gebiet } G$$

$$f = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \quad \text{auf dem Rand } \partial G$$

folgt

$$\sigma = \frac{1}{8}\oint (\Delta f)^2 \frac{\partial r^2}{\partial n} \qquad \text{bei } H[f] = 1\,, \tag{8}$$

$r^2 = x^2 + y^2$; dabei kann σ irgend ein Eigenwert sein.

6. – Für die Platte mit dem tiefsten Grundton benutzen wir von jetzt ab die Bezeichnungen: G das optimale Gebiet, $\partial G = \Gamma$, F die vorgeschriebene Fläche, $\lambda > 0$ der (nach Voraussetzung) tiefste Grundton und $u = u(x, y)$ eine Grundschwingung. $f \in Z$ verlangt: $f = 0$, $\partial f/\partial n = 0$ auf Γ. Wir notieren die Formeln

$$\lambda = \min_{f\in Z}\left\{\frac{P[f]}{H[f]}\right\} = \left\{\frac{P[u]}{H[u]}\right\}, \qquad H[u] = 1 \tag{9}$$

$$P[u, \zeta] - \lambda H[u, \zeta] = 0\,, \qquad \zeta \in Z, \zeta \text{ beliebig} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \Delta\Delta u - \lambda u = 0 & \text{in } G \\ u = 0\,, \ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \tag{11}$$

$$\lambda = \frac{1}{8}\oint (\Delta u)^2 \frac{\partial r^2}{\partial n}\,, \quad H[u] = 1; \tag{12}$$

die Klammer $\{\,\}$ ist der bekannte Rayleighsche Quotient (Nenner stets > 0), (10) ist die nichtausintegrierte Variationsgleichung, aus der (11) folgt, (12) die Rellichsche Formel.

Wir setzen, wie das auch G. PÓLYA und G. SZEGÖ in [9] tun, voraus: die Randkurve Γ des optimalen Gebietes G ist eine einfach geschlossene analytische Kurve. An einigen Stellen lassen wir vorübergehend zu, daß Γ nur stückweise analytisch, jedoch ohne Spitzen, ist; die Betrachtung ändert sich dadurch nur unwesentlich.

s ist die Bogenlänge, $\varkappa$ die Krümmung. Γ ist durch $x = x(s)$, $y = y(s)$ gegeben; $\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ ist die äußere Normale, $\alpha = \alpha(s)$ und $\varkappa = \alpha' = d\alpha/ds$. Für alle Betrachtungen in der Nähe des Randes Γ benutzen wir anstelle der kartesischen Koordinaten x, y die krummlinigen Koordinaten n, s (in dieser Reihenfolge), die durch das System der Parallelkurven zu Γ und das System der dazu orthogonalen (geradlinigen) Normalen gegeben sind. Wir unterdrücken die Umrechnungen der Ableitungen einer Funktion $f(x, y)$ nach x und y auf die nach n und s. Als Beispiele nennen wir

$$(13)\qquad \begin{cases} \Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial n^2} + \varkappa \dfrac{\partial f}{\partial n} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2} & \text{auf } \Gamma(n = 0) \\ \left\{f_x \dfrac{\partial f_y}{\partial s} - f_y \dfrac{\partial f_x}{\partial s}\right\} = \varkappa \left(\dfrac{\partial f}{\partial n}\right)^2 & \text{auf } \Gamma, \text{ falls } f = 0 \text{ auf } \Gamma . \end{cases}$$

7. – $K(x, y; \xi, \eta)$ bedeutet die Greensche Funktion für $\Delta\Delta w = 0$. Wir benutzen in einem solchen Fall die kürzere Schreibung: $K(P; Q)$ wo $P = (x, y)$, $Q = (\xi, \eta)$; entsprechend $\Delta_P K(P; Q)$ für $K_{xx} + K_{yy}$, $\Delta_Q(P; Q)$ für $K_{\xi\xi} + K_{\eta\eta}$; $d\sigma_Q$ für das flächenhafte Integrationselement. Mit r = Abstand $\overline{PQ}$ ist

$$K(P; Q] = \frac{1}{8\pi} r^2 \log r + \tilde{K}(P; Q) ;$$

$\tilde{K}(P; Q)$ ist biharmonisch sowohl in bezug auf P, als auch in bezug auf Q; ferner ist $K(P; Q) = K(Q; P)$. Auf Γ ist für $P \in G$, P fest und Q variabel

$$\Gamma\colon K = 0 , \quad \frac{\partial K}{\partial n} = 0 .$$

Die Aufgabe

$$(14)\qquad \begin{cases} \Delta\Delta f = \varrho & \text{in } G \\ f = 0 , \quad \dfrac{\partial f}{\partial n} = g & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

hat dann die Lösung ([10], S. 858)

$$(15)\qquad f(P) = \int_G d\sigma_Q K(P; Q)\, \varrho(Q) - \oint_\Gamma ds\, g(s)\, \Delta_R K(P; R(s)) ;$$

$\Delta_R K(P; R(s))$ bedeutet: man bildet für $P \in G$, P fest und R variabel zunächst $\Delta_R K(P; R)$ und ersetzt anschließend R durch den zu s gehörigen Randpunkt $R = R(s)$.

8. – Sei jetzt $Q \in G$, Q fest, P variabel und P bereits in der Nähe von Γ, kurz in einem (genügend schmalen) Randstreifen S. Als Funktion von P genügt dort

$$K(P; Q) = g(P)$$

den Beziehungen

$$\Delta\Delta g = 0 \quad \text{in } S$$

$$g = 0\,, \quad \frac{\partial g}{\partial n} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma\,.$$

Wir nutzen jetzt aus, daß Γ analytisch ist und folgen den Überlegungen, die R. COURANT in [2] S. 395 anstellt bzw. andeuted und die man sinngemäß auf den vorliegenden Fall auszudehnen hat. (bei Courant handelt es sich um die Gleichung

$$\Delta g + \mu g = 0\,, \quad g = 0 \text{ auf } \Gamma,\ \mu$$

ein Parameter; hier um die Gleichung

$$\Delta\Delta g - \mu g = 0\,, \quad g = 0\,, \quad \frac{\partial g}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma\,,$$

μ ein Parameter, wobei im obigen Fall speziell $\mu = 0$ ist). Wir spiegeln den Punkt P an Γ, was den Spiegelpunkt P^* ergibt und dehnen $g = g(P)$ zu einer Funktion g^* durch die Vorschrift $g^*(P^*) = g(P)$, $P \in S$ aus; P^* bewegt sich im Spiegelbild S^* von S. Dann gilt für die dadurch in $S + S^*$ erklärte Gesamtfunktion $\tilde{g}$ Folgendes: es ist wieder $\Delta\Delta\tilde{g} = 0$ in $S + S^*$ über den Rand Γ hinweg ($\Delta\Delta\tilde{g} - \mu\tilde{g} = 0$, falls $\mu \neq 0$ ist) und es ist $\tilde{g}$ als Funktion von x, y im reellen Sinne analytisch in den reellen Variablen x und y. Für $K(P; Q)$ bedeutet das: für $Q \in G$, Q fest, P variabel und $P \neq Q$ ist $K(P; Q)$ über den Rand Γ hinaus analytisch in P d.h. in x, y.

II. – Eigenschaften einer Grundschwingung $u = u(x, y)$ für das optimale Gebiet G.

9. – Nach Voraussetzung ist der Grundton λ in (9) auch dann noch ein Minimum, wenn das Gebiet G mit dem Rand Γ in ein flächentreues Gebiet $G(\varepsilon)$ mit dem Rand $\Gamma(\varepsilon)$ variiert wird, ε ein Parameter, $G(0) = G$, $\Gamma(0) = \Gamma$. Die Gebietsvariation, im folgenden kurz G = Variation genannt, nehmen wir mittels der Normalverschiebung (dieselbe stets analytisch in ε angenommen)

$$V(s; \varepsilon) = v(s)\varepsilon + w(s)\frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots \tag{16}$$

vor. Dabei ist notwendig

$$\oint v = 0\,;$$

diese Beziehung drückt, aus, daß die $G =$ Variation in erster Ordnung bezüglich ε flächentreu ist. Mithilfe von $V(s;\varepsilon)$ gelangen wir von Γ zu den neuen Rand $\Gamma(\varepsilon)$

$$\Gamma(\varepsilon): \begin{cases} \xi = \xi(s;\varepsilon) = x(s) + V(s;\varepsilon)\cos\alpha \\ \eta = \eta(s;\varepsilon) = y(s) + V(s;\varepsilon)\sin\alpha\,. \end{cases} \tag{17}$$

Wir verabreden bei $G =$ Variationen: (x, y) ist ein Punkt von G bzw. $\bar{G}$, (ξ, η) ein Punkt von $G(\varepsilon)$ bzw. $\bar{G}(\varepsilon)$. Ist $f(\xi, \eta)$ in $\bar{G}(\varepsilon)$ gegeben, so schreiben wir, wenn es die Klarheit erfordert

$$f_{\Gamma(\varepsilon)} \quad \text{für} \quad f \quad \text{auf } \Gamma(\varepsilon)\,. \tag{18}$$

10. – Wir betten $u(x, y)$ in eine Schar von zulässigen Funktionen $u^*(\xi, \eta; \varepsilon)$ für $\bar{G}(\varepsilon)$ ein mit den Randbedingungen

$$\left.\begin{cases} u^*(\xi,\eta;\varepsilon) = 0 & \\ u^*_\xi(\xi,\eta;\varepsilon) = 0\,, & u^*_\eta(\xi,\eta;\varepsilon) = 0 \end{cases}\right\} \quad \text{auf } \Gamma(\varepsilon)\,. \tag{19}$$

Für $(x, y) \in G$ setzen wir

$$\{u^*_\varepsilon(x, y; \varepsilon)\}_{\varepsilon=0} = Z(x, y)\;; \qquad (x, y) \in G\,.$$

Wir denken uns für den Argumentpunkt (17) die Randbedingungen (19) angeschrieben, differenzieren nach ε und setzen $\varepsilon = 0$. Wegen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\,, \quad \frac{\partial u_x}{\partial n} = \Delta u \cdot \cos\alpha\,, \qquad \frac{\partial u_y}{\partial n} = \Delta u \cdot \sin\alpha \qquad \text{auf } \Gamma$$

ergeben sich für Z die Randbedingungen

$$\Gamma\colon Z = 0\,, \quad \frac{\partial Z}{\partial n} = -v \cdot \Delta u\,.$$

Der Rayleighsche Quotient

$$\iint\limits_{G(\varepsilon)} \{u^*_{\xi\xi} + u^*_{\eta\eta}\}^2 : \iint\limits_{G(\varepsilon)} (u^*)^2$$

hat als Funktion von ε die Ableitung Null für $\varepsilon = 0$. Eine bekannte Rechnung ([2], S. 260-262) liefert, daß notwendig

$$\oint v(\Delta u)^2 = 0 \qquad \text{bei} \qquad \oint v = 0\,,$$

also

$$(\Delta u)^2 = \text{const.} = c^2 \qquad \text{auf } \Gamma$$

ist. Die Rellichsche Formel liefert

$$\lambda = c^2 \cdot \frac{1}{2} F \,, \qquad c^2 = \frac{2\lambda}{F} > 0 \,.$$

Wir dürfen also setzen:

$$\Delta u = c > 0 \quad \text{auf } \Gamma \qquad \text{bei} \qquad H[u] = 1 \,; \tag{20}$$

wegen $\Delta u = \partial^2 u / \partial n^2$ auf Γ heißt das: es ist $u > 0$ in einem Randstreifen von Γ.

11. – Dieses Ergebnis gilt für jede normierte Grundschwingung u und zwar mit derselben Konstanten $c > 0$ (u eventuell durch $-u$ ersetzt). Daraus folgt:

Der Eigenwert λ für das optimale Gebiet G ist einfach.

BEWEIS INDIREKT. – Es existiert dann eine Grundschwingung $\tilde{u}$ mit $H[u, \tilde{u}] = 0$, $H[\tilde{u}] = 1$, $\Delta \tilde{u} = c$ auf Γ. Für die Grundschwingung $U = (1/\sqrt{2})(u - \tilde{u})$ ist $H[U] = 1$, $\Delta U = 0$ auf Γ im Widerspruch zu (20).

12. – Durch eine affine Dehnung und Multiplikation von u mit einem passenden Faktor erreichen wir, daß $c = 1$ wird. Wir bezeichnen die neue Fläche wieder mit F, die neue normierte Grundschwingung wieder mit u und notieren

$$\Delta u = 1 \quad \text{auf } \Gamma, \qquad \lambda = \tfrac{1}{2} F \,, \quad H[u] = 1 \,.$$

Ist $K(x, y; \xi, \eta)$ die Greensche Funktion für $\Delta w = 0$, so ist

$$\Delta u(x, y) - 1 = \lambda \iint d\xi \, d\eta \, K(x, y; \xi, \eta) \, u(\xi, \eta) \,.$$

Aus den Eigenschaften von u schließen wir daraus (vergl. [2] S. 365-366): $\Delta u \in C^2$ in $\overline{G}$, und daraus weiter nach [2] S. 395: u ist über Γ hinaus (mittels Spiegelung wie in **8.**) analytisch fortsetzbar, in Übereinstimmung mit der Formel

$$u(P) = \lambda \int_G d\sigma_Q \, K(P; Q) \, u(Q)$$

und der Analyzität von $K(P; Q)$ in bezug auf P (auf Γ). Speziell ist

$$\frac{\partial^3 u}{\partial n^3} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \varkappa \in C^0 \qquad \text{auf } \Gamma \,. \tag{21}$$

Die Eigenschaft $\Delta u = 1$ auf Γ zieht nach sich, daß die Variationsgleichung (10) schon für solche ζ gilt, für die anstelle von $\partial\zeta/\partial n = 0$ auf Γ nur $\oint(\partial\zeta/\partial n) = 0$ verlangt wird:

$$\text{(22)} \qquad \begin{cases} P[u, \zeta] - \lambda H[u, \zeta] = 0 \\ \zeta \text{ beliebig}, \quad \zeta = 0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad \oint\limits_{\Gamma} \dfrac{\partial\zeta}{\partial n} = 0 . \end{cases}$$

13. – Es sei $\lambda(\varepsilon)$ der Grundton für das variierte Gebiet $G(\varepsilon)$, $\lambda(0) = \lambda$. Da das Gebiet G optimal ist, so ist notwendig

$$\dot{\lambda}_0 = \left(\frac{d\lambda(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 , \qquad \ddot{\lambda}_0 = \left(\frac{d^2\lambda(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} \geqq 0 .$$

$\lambda(\varepsilon)$ ist für $G(\varepsilon)$ ebenfalls einfach: es hat daher Sinn, von *der* Grundschwingung

$$\chi(\xi, \eta; \varepsilon) \qquad \text{für } G(\varepsilon)$$

zu sprechen, wenn wir χ analog zu u, durch die Forderung

$$\{\chi_{\xi\xi} + \chi_{\eta\eta}\}_{\Gamma(\varepsilon)} > 0$$

auch dem Vorzeichen nach festlegen.

Für $(x, y) \in G$ ist

$$\{\chi(x, y; \varepsilon)\}_{\varepsilon=0} = u(x, y) , \qquad (x, y) \in G.$$

Wit schreiben im selben Sinne

$$\{\chi_\varepsilon(x, y; \varepsilon)\}_{\varepsilon=0} = \omega(x, y) , \qquad (x, y) \in G$$

$$\{\chi_{\varepsilon\varepsilon}(x, y; \varepsilon)\}_{\varepsilon=0} = \psi(x, y) , \qquad (x, y) \in G .$$

Für $(x, y) \in G$ lautet die Differentialgleichung für χ

$$\Delta\Delta\chi(x, y; \varepsilon) - \lambda(\varepsilon)\, \chi(x, y; \varepsilon) = 0 .$$

Wir differenzieren ein- bzw. zweimal nach ε, setzen $\varepsilon = 0$ und erhalten mit den obigen Abkürzungen

$$\Delta\Delta\omega - \lambda\omega = 0 \qquad \text{in } G$$

$$\Delta\Delta\psi - \lambda\psi - \ddot{\lambda}_0 u = 0 \qquad \text{in } G.$$

Aus der Normierung

$$1 = \iint\limits_{G(\varepsilon)} d\xi\, d\eta \{\chi(\xi, \eta; \varepsilon)\}^2$$

ergeben sich durch Differentiation nach ε für $\varepsilon = 0$ die Beziehungen

$$0 = \iint\limits_{G} u\omega$$

$$0 = \iint\limits_{G} \omega^2 + \iint\limits_{G} u\psi \, .$$

Die Randbedingungen für ω sind diesselben wie für das frühere Z, wobei aber jetzt $\varDelta u = 1$ ist:

$$\varGamma\colon \omega = 0\,, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial n} = -v\,, \qquad \oint \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0\,.$$

Aus den angegebenen Beziehungen folgen die Aussagen (eine Greensche Formel wird benutzt, ferner $u = 0$, $\partial u/\partial n = 0$ auf $\varGamma$)

$$\oint\limits_{\varGamma} \frac{\partial \omega}{\partial n} \varDelta\omega = \iint\limits_{G} (\varDelta\omega)^2 - \lambda \iint\limits_{G} \omega^2 = P]\omega] - \lambda H[\omega] \tag{23}$$

$$\ddot{\lambda}_0 = \oint\limits_{\varGamma} ds \frac{\partial \psi}{\partial n} - \oint\limits_{\varGamma} ds\, \psi \frac{\partial \varDelta u}{\partial n}\,. \tag{24}$$

14. – Wir schreiben für die Grundschwingung $\chi(\xi, \eta; \varepsilon)$ noch die Rellichsche Formel an. Mit den Bezeichnungen: dS das Bogenelement von $\varGamma(\varepsilon)$, $R^2 = \xi^2 + \eta^2$ und $\partial R^2/\partial N$ die neue normale Ableitung kommt

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{1}{8} \oint\limits_{\varGamma(\varepsilon)} dS \Big[\{\chi_{\xi\xi} + \chi_{\eta\eta}\}^2\Big]_{\varGamma(\varepsilon)} \cdot \frac{\partial R^2}{\partial N}\,. \tag{25}$$

III. – Die Randbedingungen für ψ und der Ausdruck für $\ddot{\lambda}_0$.

15. – Im Weiteren benötigen wir in allen Taylorentwicklungen nach ε nur die Terme bis ε^2 inklusive. Durch die Festsetzung

$$w = -\varkappa v^2$$

in der Entwicklung (16) für $V(s;\varepsilon)$ erreichen wir, daß für die Fläche $F(\varepsilon)$ von $G(\varepsilon)$

$$F(\varepsilon) = F + 0\cdot\varepsilon + \sigma\cdot\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \tag{26}$$

wird, $F(0) = F$. Wir bilden mit diesem $V(s;\varepsilon)$ den Argumentpunkt (17) und schreiben für ihn die Randbedingungen für χ an (beachte die Schreibung (18)):

$$\{\chi\}_{\Gamma(\varepsilon)} = 0\,, \qquad \{\chi_\xi\}_{\Gamma(\varepsilon)} = 0\,, \qquad \{\chi_\eta\}_{\Gamma(\varepsilon)} = 0\,.$$

Wir differenzieren zweimal nach ε und setzen $\varepsilon = 0$. Die erste Beziehung liefert $\psi = v^2$ auf Γ; die beiden andern ergeben

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = -v^2\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} - 2v\Delta\omega\,.$$

Da $\partial\omega/\partial n = -v$ ist, so kommt auf Γ

$$\psi = \left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)^2$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 2\frac{\partial\omega}{\partial n}\Delta\omega - \left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)^2\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}\,.$$

16. – Wir tragen diese Werte in (24) ein und erhalten, wenn wir noch (23) beachten

$$\frac{\ddot{\lambda}_0}{2} = \oint\frac{\partial\omega}{\partial n}\left[\Delta\omega - \frac{\partial\omega}{\partial n}\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}\right] \tag{27}$$

$$\frac{\ddot{\lambda}_0}{2} = P[\omega] - \lambda H[\omega] - \oint\left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)^2\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}\,, \tag{28}$$

Diese Formeln zeigen: $\ddot{\lambda}_0$ hängt nur von der ersten Variation ω (von u) ab.

Die Funktion ω genügt den Beziehungen

$$\Delta\Delta\omega - \lambda\omega = 0 \quad \text{in } G$$

$$\omega = 0\,, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial n} = -v\,, \qquad \oint\frac{\partial\omega}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

$$\iint u\omega = 0\,.$$

Ist $v = 0$ so ist nach **11.** $\omega = 0$ in G; ist also $\omega \not\equiv 0$, so ist im Sinne der d-Metrik

$$d[\omega] = \oint\left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)^2 > 0\,.$$

Da $\omega = 0$ auf Γ, so ist nach einer früheren Umformung (13) und wegen (1) und (21)

$$\frac{\ddot{\lambda}_0}{2} = J[\omega] - \lambda H[\omega] - \oint \left(\frac{\partial \omega}{\partial n}\right)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}. \tag{28*}$$

Die rechte Seite ist der in (3) angegebene Energieausdruck $E[f]$ für $f = \omega$. Da $\ddot{\lambda}_0 \geqq 0$ ist, so gilt

$$E[\omega] \geqq 0 \tag{29}$$

für jede Funktion ω, die aus einer G = Variation mit $v = -\partial\omega/\partial n$, $\oint v = 0$ entspringt; nach **11.** ist ω durch v eindeutig bestimmt.

17. – Der Ausdruck in der eckigen Klammer in (27) ergibt sich noch auf eine zweite Weise: es gilt nämlich eine Entwicklung ($\Gamma(0) = \Gamma$, die Schreibung nach (18))

$$\left\{(\chi_{\xi\xi} + \chi_{\eta\eta})^2\right\}_{\Gamma(\varepsilon)} = 1 + 2\left[\Delta\omega - \frac{\partial \omega}{\partial n}\frac{\partial \Delta\omega}{\partial n}\right]_{\Gamma} \cdot \varepsilon + \dots . \tag{30}$$

In der folgenden Betrachtung benötigen wir in allen Entwicklungen nach ε nur die Terme bis ε^1 inklusive. Für die Terme dS und $\partial R^2/\partial N$ in der Rellichschen Formel (25) gilt

$$dS = ds + *\varepsilon + \dots$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial N} = \frac{\partial r^2}{\partial n} + *\,\varepsilon + \dots ,$$

worin die durch $*$ angedeuteten Koeffizienten sich als wirkungslos erweisen werden.

Wir tragen in (25) zunächst das erste Glied 1 (in (30) rechts) ein und erhalten als Beitrag nach (26)

$$\frac{1}{2}\oint_{\Gamma(\varepsilon)} dS \frac{\partial R^2}{\partial N} = \frac{1}{2} F(\varepsilon) = \frac{1}{2} F + 0 \cdot \varepsilon + \dots .$$

Das zweite Glied in (30) rechts liefert als Beitrag für ε^1

$$\frac{1}{4}\oint_{\Gamma} ds \left[\Delta\omega - \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right] \cdot \frac{\partial r^2}{\partial n}.$$

Da $\dot{\lambda}_0 = 0$ ist, so ergibt sich als weitere Eigenschaft von ω

$$\oint_{\Gamma} ds \left[\Delta\omega - \frac{\partial\omega}{\partial n}\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right] \cdot \frac{\partial r^2}{\partial n} = 0 . \tag{31}$$

18. – Spezielle Funktionen ω, für die $\lambda(\varepsilon)\equiv\lambda$, $F(\varepsilon)\equiv F$ ist, erhalten wir so: wir unterwerfen das Gebiet G einer infinitesimalen Translation in der $x =$ und $y =$ Richtung, sowie einer infinitesimalen Drehung um den Ursprung. Das liefert die folgenden drei Funktionen

$$\omega = u_x\,,\qquad \omega = u_y\,,\qquad \omega = yu_x - xu_y\;;$$

für jede dieser drei Funktionen ist

$$E[\omega] = 0\;.$$

Weiter ist für sie auf Γ

$$(32)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial\omega}{\partial n} = \frac{\partial u_x}{\partial n} = \cos\alpha \\ &\frac{\partial\omega}{\partial n} = \frac{\partial u_y}{\partial n} = \sin\alpha \\ &\frac{\partial\omega}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}(yu_x - xu_y) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha\;. \end{aligned}$$

Ferner ergibt aber eine kurze Rechnung, daß für jede dieser drei Funktionen

$$(33)\qquad \left[\Delta\omega - \frac{\partial\omega}{\partial n}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right] = 0 \qquad \text{auf } \Gamma \text{ ist.}$$

ist.

Man überzeugt sich von der Tatsache

$$\{u_x,\, u_y \text{ sind linear unabhängig in } G\}\;.$$

Wir notieren für diese zwei Funktionen

$$(34)\qquad E[u_x] = 0\,,\qquad E[u_y] = 0\;.$$

IV. – Die Eigenwertaufgabe für $\ddot{\lambda}_0$.

19. – Die bisherigen Ergebnisse führen zu der folgenden Eigenwertaufgabe. Von der Menge Z der zugelassenen Funktionen f verlangen wir

$$Z:\left|\begin{array}{l} 1)\ f = 0\,,\qquad \oint\frac{\partial f}{\partial n} = 0 \qquad \text{auf } \Gamma \\ 2)\ \oint\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2 > 0 \\ 3)\ \iint uf = 0\;. \end{array}\right.$$

Wenn wir die Bedingung 2) unterdrücken, so heiße die neue Menge Z^*; wenn wir die Bedingungen 2) und 3) unterdrücken, so heiße die neue Menge Z^{**}. Mit

$$d[f] = \oint \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2$$

und dem Energieausdruck

$$E[f] = J[f] - \lambda H[f] - \oint \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}$$

stellen wir die Variationsaufgabe

$$\inf_{f \in Z} \left\{\frac{E[f]}{d[f]}\right\} = \varrho\,, \qquad d[f] > 0\,. \tag{35}$$

f_p $(p = 1, 2, \ldots)$ sei eine minimierende Folge mit

$$E[f_p] \downarrow \varrho\,, \qquad d[f_p] = 1\,.$$

20. – Angenommen, es ist $\varrho = -\infty$. Dann ist notwendig $H[f_p] \to \infty$, also nach (2) auch $D[f_p] \to \infty$. Wir bilden die neue Folge

$$f_p^* = \frac{f_p}{\sqrt{D[f_p]}}\,, \quad D[f_p^*] = 1;$$

für sie bestätigt man, daß sie einer Aussage (4) genügt. Ferner ist $d[f_p^*] \to 0$. Wir schließen im Sinne von **4.** auf die Limesaussage

$$\text{«} \lim f_p^* = f^* \text{»}\,;$$

f^* genügt den Bedingungen

$$f^* = 0\,, \qquad \frac{\partial f^*}{\partial n} = 0\,, \qquad \iint u f^* = 0\,, \qquad D[f^*] = 1$$

auf Γ und in G; ferner ist

$$E[f^*] = P[f^*] - \lambda H[f^*] \leqq 0$$

im Widerspruch zu **11.** ϱ ist also endlich.

Angenommen, es ist $D[f_p] \to \infty$ für eine Teilfolge von p. Dann ergibt sich ähnlich wie vorhin derselbe Widerspruch zu **11.** Es folgt: $D[f_p] \leqq C_2$.

Von da aus schließt man mittels der Ungleichungen (2), daß für die Folge der f_ν eine Aussage (4) gilt. Die Aufgabe ist also sinnvoll und es ist im Sinne von **4.**

$$«\lim f_\nu = \varphi» , \qquad \varphi \in Z ,$$

φ eine minimierende Funktion. Nachdem das gesichert ist, dürfen wir wieder mit dem alten Führungsglied $P[f]$ anstelle von $J[f]$ arbeiten. Wir notieren

$$E[\varphi] = P[\varphi] - \lambda H[\varphi] - \oint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^2 \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = \varrho$$

$$d[\varphi] = \oint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^2 = 1 , \qquad \iint u\varphi = 0$$

$$\varphi = 0 , \qquad \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \qquad \text{auf } \Gamma .$$

21. – Für $\zeta \in Z^*$ ist $\varphi + \varepsilon\zeta \in Z$ und es gilt die Variationsgleichung

$$E[\varphi, \zeta] - \varrho d[\varphi, \zeta] = 0 , \qquad \zeta \in Z^*. \tag{36}$$

Für $\eta \in Z^{**}$ ist

$$\zeta = \eta - H[u, \eta]\, u = \eta - \gamma u \in Z^*$$

und es liefert (36) für dieses ζ, weil $E[\varphi, u] = 0$ ist (nach (22))

$$E[\varphi, \eta] - \varrho d[\varphi, \eta] = 0 , \qquad \eta \in Z^{**}.$$

Daraus folgen die Beziehungen

$$\begin{cases} \Delta\Delta\varphi - \lambda\varphi = 0 & \text{in } G \\ \Delta\varphi - \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\dfrac{\partial \Delta u}{\partial n} - \varrho\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = \text{const.} = \beta & \text{auf } \Gamma . \end{cases} \tag{37}$$

Wir setzen für unser φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -v , \qquad \oint v = 0$$

und denken uns für dieses v die frühere G = Variation durchgeführt. Ihr entspringt eine Funktion ω, die nach **16.** durch v eindeutig bestimmt ist. Es folgt: φ ist gleich diesem ω, also nach (29)

$$\varrho = E[\varphi] = E[\omega] \geqq 0 . \tag{38}$$

Anderseits zeigt (34), daß $\varrho = 0$ ist für $\varphi = u_x$, $\varphi = u_y$.

22. – Wir schreiben jetzt $\varphi_1 = \varphi$, $\varrho_1 = \varrho$ $(\varrho_1 = 0)$ $\beta_1 = \beta$ und bestimmen die nächste Eigenfunktion φ_2 mit dem Eigenwert ϱ_2 wie üblich unter der zusätzlichen Bedingung für f

$$d[\varphi_1, f] = \oint \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \frac{\partial f}{\partial n} = 0 .$$

Ähnlich wie oben ergibt sich

$$E[\varphi_2, \eta] - \varrho_2 d[\varphi_2, \eta] = 0 , \qquad \eta \in Z^{**}$$

und daraus (β_2 eine Konstante)

$$\Delta \Delta \varphi_2 - \lambda \varphi_2 = 0 \quad \text{in } G$$

$$\Delta \varphi_2 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \varrho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \beta_2 \quad \text{auf } \Gamma .$$

Nach (34) ist auch $\varrho_2 = 0$ d.h. der Eigenwert Null ist mindestens zweifach.

23. – Das Verfahren bricht nicht ab, und wir erhalten ein Spektrum plus zugehörigen Eigenfunktionen

$$\begin{cases} 0 \leqq \varrho_1 \leqq \varrho_2 \leqq \ldots \leqq \varrho_i \leqq \ldots \\ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i, \ldots . \end{cases}$$

Als φ_1, φ_2 wählen wir die aus u_x, u_y durch Orthogonalisierung und Normierung hervorgehenden Funktionen

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = c_{11} u_x && d[\varphi_1] = d[\varphi_2] = 1 , \\ &\varphi_2 = c_{21} u_x + c_{22} u_y , && d[\varphi_1, \varphi_2] = 0 . \end{aligned}$$

Wir notieren die Beziehungen (β_i Konstante)

$$E[\varphi_i, \eta] - \varrho_i d[\varphi_i, \eta] = 0 , \qquad \eta \in Z^{**} \tag{39}$$

$$\Delta \Delta \varphi_i - \lambda \varphi_i = 0 \quad \text{in } G \tag{40}$$

$$\left[\Delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right] - \varrho_i \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \beta_i \quad \text{auf } \Gamma \tag{41}$$

$$d[\varphi_i, \varphi_k] = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

$$E[\varphi_i, \varphi_k] = \begin{cases} \varrho_i & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

$$\iint u\varphi_i = 0$$

$$\Gamma\colon \varphi_i = 0\,, \qquad \oint \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = 0\,.$$

24. – Der Eigenwert Null hat eine endliche Vielfachheit q, $q \geqq 2$. In der Tat: solange $\varrho = 0$ ist, ist es gleichgültig, ob wir eine Eigenfunktion durch $d[\varphi] = 1$ wie bisher, oder durch $H[\varphi] = 1$, wie im allgemeinen üblich, normieren. Wir können also in (35) den Nenner $d[f]$ durch $H[f]$, $H[f] > 0$, ersetzen. Man überzeugt sich: linear unabhängig im Sinne der d = Metrik auf Γ ist gleichbedeutend mit linear unabhängig im Sinne der H = Metrik in G (immer für den Eigenwert Null). In der H = Metrik weiß man aber, daß der Eigenwert Null eine endliche Vielfachheit q hat. Damit wissen wir:

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_q = 0\,, \qquad 0 < \varrho_{q+1}\,, \qquad q \geqq 2. \tag{42}$$

Man kann zeigen, daß $\lim \varrho_\nu = \infty$ für $\nu \to \infty$ ist; darin ist (42) enthalten.

25. – Für die ersten q Eigenfunktionen

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q (\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_q = 0)$$

ist nach (41)

$$\left[\Delta\varphi_i - \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right] = \beta_i \qquad \text{auf } \Gamma\,.$$

Da jedes φ_i eine spezielle ω = Funktion ist, für welche die Formel (31) gilt, so folgt:

$$\beta_i = 0,$$

also

$$\left[\Delta\varphi_i - \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right] = 0 \qquad \text{auf } \Gamma \qquad i = 1, 2, \ldots, q\,. \tag{43}$$

Ein Teil davon wurde schon durch (33) bewiesen.

26. – Wir bezeichnen die durch $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ bestimmte lineare Schar mit $[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q]$. Dann gelten für jede Eigenfunktion φ zum Eigenwert Null

$$\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2, \ldots_q]\,, \qquad \varphi \not\equiv 0$$

nach **23.** ((39) und (41)) die Beziehungen.

(44) $$E[\varphi, \eta] = 0\ , \qquad \eta \in Z^{**}$$

(45) $$\left[\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right] = 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

$$\Delta\Delta\varphi - \lambda\varphi = 0 \quad \text{in } G$$

$$\iint u\varphi = 0;\ \Gamma\colon \varphi = 0\ , \quad \oint \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0\ .$$

Eine partielle Integration bezüglich η in $E[\varphi, \eta] = 0$ ergibt

$$\oint \frac{\partial\eta}{\partial n}\left[\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right] = 0\ , \qquad \eta \in Z^{**}\ .$$

Nach (45) ist die eckige Klammer gleich Null, d.h. (44) gilt bereits für ein beliebiges η mit $\eta = 0$ auf Γ; $\oint(\partial\eta/\partial n) = 0$ wird nicht mehr verlangt. Wir schreiben daher Z anstelle von η und notieren

$$E[\varphi, \mathrm{Z}] = 0\ , \quad \mathrm{Z} \text{ beliebig, } \mathrm{Z} = 0 \text{ auf } \Gamma.$$

Eine partielle Integration bezüglich φ liefert daraus

(46) $$\oint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\left[\Delta \mathrm{Z} - \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial n}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right] + \iint \varphi\{\Delta\Delta \mathrm{Z} - \lambda \mathrm{Z}\} = 0$$

$$\mathrm{Z} \text{ beliebig, } \mathrm{Z} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma\ .$$

27. – Sei $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\alpha]$, $\varphi \not\equiv 0$. φ genügt den Bedingungen

$$G\colon \Delta\Delta\varphi - \lambda\varphi = 0$$

$$\Gamma\colon \varphi = 0, \quad \left[\Delta\varphi - \frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right] = 0\ .$$

Wir nehmen jetzt umgekehrt an: $h = h(P)$, $h \not\equiv 0$ sei eine Funktion, welche diesen Bediungungen genügt; es gilt also

(47) $$G\colon \Delta\Delta h - \lambda h = 0$$

(48) $$\left\{\begin{array}{ll} \Gamma\colon & 1)\ h = 0 \\ & 2)\ \left[\Delta h - \dfrac{\partial h}{\partial n}\dfrac{\partial\Delta u}{\partial n}\right] = 0\ . \end{array}\right.$$

Es ist

$$E[h,u]=\iint \Delta h\cdot\Delta u-\lambda\iint hu$$

$$\iint \Delta h\cdot \Delta u=\iint \Delta\Delta h\cdot u$$

d.h. wegen (47)

$$E[h,u]=0.$$

Auf Grund der Randbedingung 1) ist

$$\iint \Delta h\cdot\Delta u=\iint h\cdot\Delta\Delta u+\oint \Delta u\cdot\frac{\partial h}{\partial n}$$

und daher auch (beachte $\Delta\Delta u-\lambda u=0$ und $\Delta u=1$ auf Γ)

$$E[h,u]=\oint\frac{\partial h}{\partial u}\,.$$

Es ergibt sich also $\oint(\partial h/\partial n)=0$.

Angenommen, es ist

(49) $$\gamma=\iint uh\neq 0\,.$$

Wir bilden dann

$$H=h-\gamma u\,,\qquad \iint uH=0\,.$$

Es ist $H\not\equiv 0$; sonst wäre $h=\gamma u$ und

$$\left[\Delta h-\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right]=\gamma\cdot\Delta u=\gamma\neq 0\qquad\text{auf }\Gamma$$

im Widerspruch zu der Bedingung 2) in (48). H genügt den Bedingungen

(50) $$\begin{cases}\Delta\Delta H-\lambda H=0\\ \iint uH=0;\ H=0\,,\ \oint\dfrac{\partial H}{\partial n}=0\qquad\text{auf }\Gamma\end{cases}$$

$$\left[\Delta H-\frac{\partial H}{\partial n}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right]=-\gamma\neq 0\qquad\text{auf }\Gamma\,.$$

(50) zeigt: H ist eine $\omega=$ Funktion, $H\not\equiv 0$, für welche die Beziehung (31) gilt, die $\gamma=0$ liefert, im Widerspruch zur Annhme (49). Es ist also $\gamma=0$ d.h. $\iint uh=0$.

Jede Lösung h von (47) und (48) genügt also von selbst den Bedingungen

$$\oint \frac{\partial h}{\partial n} = 0\,, \quad \int\!\!\int uh = 0\,,$$

das heißt, jedes solche h ist von selbst eine ω = Funktion. Da

$$E[h] = \int\!\!\int h\{\Delta\,\Delta h - \lambda h\} + \oint \frac{\partial h}{\partial n}\left[\Delta h - \frac{\partial h}{\partial n}\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right]$$

nach (47) und (48) verschwindet, so folgt weiter: h ist eine Eigenfunktion ($h \not\equiv 0$). Jede Lösung h ($h \not\equiv 0$) von (47) und (48) ist also eine Eigenfunktion.

Wir beachten jetzt: nach **12.** ist $\partial\Delta u/\partial n$ auf Γ analytisch. Die Bestimmung von φ ist dann gleichbedeutend mit der folgenden Aufgabe für zwei Funktionen, von denen die erste gleich diesem φ ist (ψ hat hier eine andere Bedeutung, $\sqrt{\lambda} > 0$)

$$\Delta\varphi = \sqrt{\lambda}\,\psi \qquad \Gamma\colon \varphi = 0$$

$$\Delta\psi = \sqrt{\lambda}\,\varphi \qquad \Gamma\colon \psi = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\,.$$

Indem wir die Betrachtungen in [3] S. 505 auf dieses System ausdehnen, schließen wir: jede Eigenfunktion φ (Eigenwert = 0) ist über Γ hinaus analytisch. Für die Eigenwertaufgabe (35) mit $\varrho = 0$ bedeutet das: wir dürfen uns bei der Bestimmung des Minimums nachträglich auf solche G = Variationen beschränken, für welche $\Gamma(\varepsilon)$ ebenso wie Γ eine einfach geschlossene analytische Kurve ist.

28. – Wir nehmen an: für eine Eigenfunktion

$$\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\alpha]\,, \qquad \varphi \not\equiv 0 \quad \text{ist } \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$$

auf einem Bogen B; A sei der verbleibende Bogen. Dann gilt nach **7.**

$$\varphi(P) = \lambda \int_G d\sigma_Q\, K(P;Q)\varphi(Q) - \int_A ds \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Delta_R K(P;R(s))\,. \tag{51}$$

Rechts tritt der Bogen B nicht auf; unabhängig von der Betrachtung in **27.** folgt aus (51), daß $\varphi(P)$ über Γ hinaus analytisch fortsetzbar ist. Wegen (45) ist auf B auch $\Delta\varphi = \partial^2\varphi/\partial n^2 = 0$.

Wir nehmen hier an, daß Γ stückweise analytisch ist, und weiter, daß B speziell geradlinig ist; dann ist von selbst für die durch Spiegelung an B (im Sinne von **7.** fortgesetzte Funktion $\partial^3\varphi/\partial n^3 = 0$ auf Γ, woraus zusammen mit der Differentialgleichung $\varphi \equiv 0$ folgt.

Ist B nicht geradlinig, so wird durch eine konforme Abbildung (Spiegelung an Γ) B im Bilde geradlinig und es ergibt sich dort $\varphi \equiv 0$.

In jedem Fall ergibt sich also der Widerspruch $\varphi \equiv 0$ und wir notieren: auf keinem Bogen ist $\partial\varphi/\partial n = 0$.

Zusatz. – Lassen wir wie oben vorübergehend zu, daß Γ stückweise analytisch ist, so folgt: Γ enthält keinen geradlinigen Bogen.

Beweis indirekt. – Ohne Einschränkung sei dieser Bogen parallel zur $x =$ Achse. Da $\varphi = u_x$ eine Eigenfunktion mit $\partial\varphi/\partial n = \cos\alpha$ ist, so ist für dieses φ: $\partial\varphi/\partial n = 0$ auf jenem Bogen, was ein Widerspruch ist. Anders formuliert: $\varkappa = 0$ auf einem Bogen ist unmöglich.

V. – Aus $q = 2$ folgt: Γ ist kreisförmig; der weitere Beweisgang.

29. – Alles hängt jetzt davon ab, daß wir einsehen:

Der Eigenwert Null in (42) ist genau zweifach, d.h. es ist $q = 2$.

Den Beweis tragen wir, um den jetzigen Gedankengang nicht zu unterbrechen, nach.

Aus $q = 2$ folgt in wenigen Zeilen, daß Γ kreisförmig ist. Nach **18.** sind $\varphi = u_x$, $\varphi = u_y$ zwei linear unabhängige Eigenfunktionen (Eigenwert $= 0$). Nach **18.** ist ferner $\omega = yu_x - xu_y$ entweder eine Eigenfunktion oder ist $\omega \equiv 0$. Da $q = 2$ ist, so gilt in jedem Falle eine Beziehung

$$yu_x - xu_y = bu_x - au_y\,,$$

a, b zwei Konstante, die auch verschwinden können. Wir wählen den Punkt (a, b) als neuen Ursprung, bezeichnen anschließend die Koordinaten wieder mit x, y und erhalten

$$\omega \equiv yu_x - xu_y = 0 \quad \text{in } G.$$

Es ist dann $\partial\omega/\partial n = 0$ auf Γ, also nach (32)

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0 \quad \text{auf } \Gamma,$$

in Worten: der Radiusvektor $\{x, y\}$ vom Ursprung zu einem Punkt auf Γ steht senkrecht auf dem dortigen Tangentenvektor $\{-\sin\alpha, \cos\alpha\}$, das heißt: Γ ist ein Kreis.

30. – Den Beweis, daß $q = 2$ ist, führen wir indirekt. Wir nehmen also $q \geqq 3$ an, und leiten daraus einen Widerspruch ab. Wir stellen einige Bemerkungen zusammen, durch welche die weiteren Ausführungen vorbereitet werden.

1) Ist φ eine Eigenfunktion, $\varphi \not\equiv 0$, so bezeichnen wir jede Nullstelle von $\partial\varphi/\partial n$ als einen Knoten von φ; ist die Nullstelle (genau) k = fach, so sprechen wir von einem k = fachen Knoten oder von einem Knoten von der Ordnung k.

2) Wir setzen für die q Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ $(q \geqq 3)$ abkürzend

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = -v_i\,, \qquad v_i = v_i(s)\,, \qquad 1 \leqq i \leqq q\,.$$

Wir wählen einen Bogen, auf dem die Krümmung $\varkappa$ positiv ist und beachten, daß auf keinem Teilbogen davon $\partial\varphi/\partial n = 0$ ist (φ eine Eigenfunktion, $\varphi \not\equiv 0$). Daraus folgt: die Wronskische Determinante von irgend m Funktionen

$$v_{\nu_1}, v_{\nu_2}, \ldots, v_{\nu_m}, \qquad 1 \leqq \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_m \leqq q$$

ist auf keinem solchem Teilbogen identisch Null; wir schreiben für diese Determinante

$$W_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}(s, s, \ldots, s)$$

wo die Variable s m = mal gesetzt ist. Ist diese Funktion für ein festes s nicht Null, so ist auch

$$W_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}(s_1, s_2, \ldots, s_m) \neq 0\,, \tag{52}$$

wenn $s_1, s_2, \ldots, s_m$ unabhängig voneinander in einer Umgebung von s variieren.

3) Es folgt jetzt: wir können den Ausgangsbogen bereits so wählen, daß auf ihm die Beziehungen (52) für alle $2^q - 1$ Wronski-Determinanten gelten. Nach einem bekannten Mittelwertsatz von H. A. SCHWARZ folgt: für irgend q verschiedene Stellen $s_1 < s_2 < \ldots < s_q$ auf jenem Bogen ist die folgende Determinante verschieden von Null (sie ist nämlich bis auf einen Zahlfaktor $\neq 0$ gleich dem Differenzenprodukt der $s_1, s_2, \ldots, s_q$, multipliziert mit $W_{12\ldots q}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q)$; $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$ passende Mittelwerte von $s_1, \ldots, s_q$):

$$\begin{vmatrix} v_1(s_1) & v_2(s_1) & \ldots & v_q(s_1) \\ v_1(s_2) & v_2(s_2) & \ldots & v_q(s_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1(s_{q-1}) & v_2(s_{q-1}) & \ldots & v_q(s_{q-1}) \\ v_1(s_q) & v_2(s_q) & \ldots & v_q(s_q) \end{vmatrix} \neq 0$$

und diese Eigenschaft gilt unverändert auch dann noch, wenn z.B. s_2 nach s_1 rückt, in der folgenden Form

$$\begin{vmatrix} v_1(s_1) & v_2(s_1) & \dots & v_q(s_1) \\ v_1'(s_1) & v_2'(s_1) & \dots & v_q'(s_1) \\ v_1(s_3) & v_2(s_3) & \dots & v_q(s_3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1(s_q) & v_2(s_q) & \dots & v_q(s_q) \end{vmatrix} \neq 0;$$

wird auch $s_3 = s_1$, so ist die dritte Zeile durch $v_1''(s_1), \dots, v_q''(s_1)$ zu ersetzen und es ist ist wieder die betr. Determinante $\neq 0$. Analog, wenn das Zusammenrücken an mehreren verschiedenen Stellen geschieht.

4) Es folgt: eine Eigenfunktion $\varphi = c_1\varphi_1 + \dots + c_q\varphi_q$, $\varphi \not\equiv 0$ hat auf jenem Bogen höchstens $q-1$ Knoten $s_1 < s_2 < \dots < s_{q-1}$, und von selbst ist jeder dieser Knoten einfach. Nach Konstruktion des Bogens existiert auch eine solche Eigenfunktion φ und es ist φ bis auf einen Faktor ($\neq 0$) eindeutig bestimmt: φ ist gegeben durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} v_1(s_1) & v_2(s_1) & \dots & v_q(s_1) \\ v_1(s_2) & v_2(s_2) & \dots & v_q(s_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1(s_{q-1}) & v_2(s_{q-1}) & \dots & v_q(s_{q-1}) \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_q \end{vmatrix} = \sum_{\nu=1}^{q} c_\nu^* \varphi_\nu\,,$$

wobei nach Konstruktion jedes $c_\nu^* \neq 0$ ist ($\nu = 1, \dots, q$).

5) Das Ergebnis unter 4) gilt auch dann noch, venn $s_2 = s_1$ wird; in neuer Schreibung ist dann

$$\begin{vmatrix} v_1(s_0) & v_2(s_0) & \dots & v_q(s_0) \\ v_1'(s_0) & v_2'(s_0) & \dots & v_q'(s_0) \\ v_1(s_1) & v_2(s_1) & \dots & v_q(s_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1(s_{q-3}) & v_2(s_{q-3}) & \dots & v_q(s_{q-3}) \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_q \end{vmatrix} = \sum_{\nu=1}^{q} c_\nu \varphi_\nu = \varphi \tag{53}$$

bis auf einen Faktor ($\neq 0$) die einzige Eigenfunktion mit den $q-3$ Knoten in $s_1, \dots, s_{q-3}$ (von denen jeder einfach ist) und einem (genau) zweifachen Knoten in s_0; wieder ist $c_\nu \neq 0$ ($\nu = 1, \dots, q$).

Wir nehmen $s_0 = 0$ und halten die $s_1, \ldots, s_{q-3}$ fest: $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{q-3}$; die betr. Stellen bezeichnen wir mit $P_0(s = s_0 = 0)$ und $K_\nu(s = s_\nu, 1 \leqq \nu \leqq q-3)$; ist $q = 3$ so treten die K_ν nicht auf.

6) Indem wir die Eigenfunktion (53) noch normieren und auch dem Vorzeichen nach festlegen, sehen wir: es gibt genau eine Eigenfunktion $\Phi = \gamma\varphi$ mit den Eigenschaften

$$1)\quad d[\Phi] = \oint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2 = 1;$$

$$2)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = a \cdot s^2 + \ldots \ (a > 0)$$

in der Nähe von $s = 0$;

$$3)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{in } s = s_1, \ldots, s_{q-3},$$

wobei jeder dieser Knoten (genau) einfach ist;

4) $\partial\Phi/\partial n \neq 0$, auf dem betr. Bogen für alle s mit $s \neq 0$, $s \neq s_1, \ldots, s_{q-3}$.

Auf $0 < s < s_1$ ist $\partial\Phi/\partial n > 0$; wir wählen irgend einen solchen Punkt, den wir mit $\hat{P}$ bezeichmen und notieren

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} > 0 \quad \text{in } \hat{P}(s = \hat{s},\ 0 < s < s_1)\,. \tag{54}$$

Offenbar ist das normierte Φ auch durch diese Eigenschaft dem Vorzeichen nach eindeutig festgelegt.

7) Jede Eigenfunktion φ $(\varphi \neq 0)$ mit den Eigenschaften:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{in } K_1, \ldots, K_{q-3}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{in } P_0$$

ist gegeben durch $\varphi = C \cdot \Phi$, wo $C \neq 0$ ist. Die dadurch gegebene eindimensionale Schar von Eigenfunktionen φ bezeichnen wir mit $[\Phi]$. Es ist also

$$\varphi \in [\Phi]\,. \tag{55}$$

8) Wir ersetzen die Funktion (53) durch die folgende, wobei $0 < h < \hat{s}$ ist:

$$\frac{1}{2h}\begin{vmatrix} v_1(-h) & v_2(-h) & \dots & v_q(-h) \\ v_1(h) & v_2(h) & \dots & v_q(h) \\ v_1(s_1) & v_2(s_1) & \dots & v_q(s_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1(s_{q-3}) & v_2(s_{q-3}) & \dots & v_q(s_{q-3}) \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_q \end{vmatrix} = \varphi^*;$$

im Limes $h \to 0$ geht sie in die Funktion (53) über. $\Phi^* = \gamma \cdot \varphi^*$ liefert dann eine Eigenfunktion Φ^*, die von h abhängt, $\Phi^* = \Phi^*(h) = \Phi^*(P; h)$ (P der variable Punkt) mit den Eigenschaften:

1) Φ^* besitzt die Knoten $K_1, \dots, K_{q-3}$ sowie $Q_1(s = -h)$ und $Q_2(s = h)$; jeder dieser Knoten ist einfach;

2) $\partial\Phi^*/\partial n > 0$ in $\hat{P}$;

3) es ist in erster Näherung

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} = a(s^2 - h^2) + \dots \text{auf} -h \leqq s \leqq h;$$

4) $\lim\limits_{h \to 0} \Phi^*(h) = \Phi$.

Den Bogen $-h \leqq s \leqq h$ mit dem Mittelpunkt P_0 und den Randpunkten Q_1, Q_2 bezeichnen wir mit $\mathrm{B} = \mathrm{B}(h)$, den verbleibenden Bogen mit $\mathrm{A} = \mathrm{A}(h)$.

9) Die durch Φ und Φ^* gegebenen $G =$ Variationen haben die gemeinsame Eigenschaft: sie besitzen die Knoten $K_1, \dots, K_{q-3}$ auf $\mathrm{A}(h)$. Sie unterscheiden sich in der Nähe von P_0: dort ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = as^2 + \dots, \qquad a > 0 \tag{56}$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} = a(s^2 - h^2) + \dots \qquad \text{auf } \mathrm{B}(h)\,. \tag{57}$$

Die Eigenschaft (56) drücken wir dahin aus, daß wir sagen: die durch Φ gegebene $G =$ Variation ist in P_0 « lokal starr »; analog drücken wir (57) dahin aus: die durch Φ^* gegebene $G =$ Variation ist auf dem Bogen $\mathrm{B}(h)$ »nahezu starr ».

10) Das führt zu der Aufgabe: solche $G =$ Variationen durch $\omega =$ Funktionen zu betrachten, die $K_1, \dots, K_{q-3}$ zu Knoten haben und für die der Bogen $\mathrm{B}(h)$ starr

ist, also $\partial\omega/\partial n = 0$ auf $\mathrm{B}(h)$ ist. Wir deuten diese Variationen und Funktionen im folgenden durch einen darüber gesetzten Akzent an. Jeder $\hat{G}$ = Variation entspringt also eine (eindeutig bestimmte) $\hat{\omega}$ Funktion mit den Eigenschaften:

$$\frac{\partial\hat{\omega}}{\partial n} = 0 \qquad \text{in } K_1, \ldots, K_{q-3}$$

$$\frac{\partial\hat{\omega}}{\partial n} = 0 \qquad \text{auf } \mathrm{B} = \mathrm{B}(h)\,.$$

$\hat{\omega}$ hängt von h ab: $\hat{\omega} = \hat{\omega}(h) = \hat{\omega}(P; h)$. $K_1, \ldots K_{q-3}$ liegen ein- für alle Mal fest; wir bezeichnen daher die betr. $\hat{G}$ = Variation kurz als eine Gebietsvariation, für welche der Bogen $\mathrm{B} = \mathrm{B}(h)$ starr bleibt.

VI. – Gebietsvariationen, bei denen der Bogen $B = B(h)$ starr bleibt.

31. – Wir beachten: jede $\hat{G}$ = Variation ist eine spezielle G = Variation, für welche die Normalverschiebung $\hat{V}(s, \varepsilon)$ (vergl. (16)) die Eigenschaften hat:

$$\text{(58)} \qquad \begin{cases} \hat{V}(s;\varepsilon) = 0 & \text{in } K_1, \ldots, K_{q-3} \ (\varepsilon \text{ beliebig}) \\ \hat{V}(s;\varepsilon) = 0 & \text{auf B } (\varepsilon \text{ beliebig}) \end{cases}$$

Und es ist klar, daß auch gegenüber solchen $\hat{G}$ = Variationen $G \to \hat{G}(\varepsilon)$, $\hat{G}(0) = G$, unser Gebiet G optimal ist.

Mit der einzigen Abänderung (58) gelten die früheren Überlegungen unverändert; anstelle der Größen $\chi, \omega, \psi, \lambda(\varepsilon), \ldots$ treten die entsprechenden Größen $\hat{\chi}, \hat{\omega}, \hat{\psi}, \hat{\lambda}(\varepsilon), \ldots$. Aus A wird durch die $\hat{G}$ = Variation der Bogen $\mathrm{A}(\varepsilon)$, wobei die Knoten $K_1, \ldots, K_{q-3}$ festbleiben; $\mathrm{A}(0) = \mathrm{A}$. Auf $\mathrm{A} = \mathrm{A}(0)$ gelten dieselben Randbedingungen wie früher auf $\Gamma = \Gamma(0)$. Auf B ergeben sich die Randbedingungen

$$\begin{cases} \hat{\omega} = 0\,, & \dfrac{\partial\hat{\omega}}{\partial n} = 0 \\ \hat{\psi} = 0\,, & \dfrac{\partial\hat{\psi}}{bn} = 0\,. \end{cases}$$

Zum Beispiel lautet (28*) jetzt so:

$$\text{(59)} \qquad \frac{1}{2}(\ddot{\hat{\lambda}})_0 = J[\hat{\omega}] - \lambda H(\hat{\omega}] - \int_{\mathrm{A}} \left(\frac{\partial\hat{\omega}}{\partial n}\right)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\,,$$

und die Formel (31) wie folgt:

$$\text{(60)} \qquad \int_{\mathrm{A}} \left[\Delta\hat{\omega} - \frac{\partial\hat{\omega}}{\partial n}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right] \cdot \frac{\partial r^2}{\partial n} + \int_{\mathrm{B}} \Delta\hat{\omega} \cdot \frac{\partial r^2}{\partial n} = 0\,.$$

Jeder $\hat{G}$ = Variation entspringt eine Funktion $\hat{\omega}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
&G:\ \Delta\Delta\hat{\omega}-\lambda\hat{\omega}=0\,, && \iint u\hat{\omega}=0\\
&A:\ \hat{\omega}=0\,, \quad \frac{\partial\hat{\omega}}{\partial n}=-\hat{v}\,, && \int\limits_A \frac{\partial\hat{\omega}}{\partial n}=0\\
&\mathrm{B}:\ \hat{\omega}=0\,, \quad \frac{\partial\hat{\omega}}{\partial n}=0 &&\\
&K_\nu:\ \hat{\omega}=0\,, \quad \frac{\partial\hat{\omega}}{\partial n}=0 && (\nu=1,\dots,q-3);
\end{aligned}$$

genau dann ist $\hat{\omega}\not\equiv 0$, wenn

$$d[\hat{\omega}]=\int\limits_A\left(\frac{\partial\hat{\omega}}{\partial n}\right)^2>0$$

ist.

32. – In gleicher Weise übertragen sich die früheren Überlegungen in IV auf die neue Eigenwertaufgabe für $(\ddot{\lambda})_0$ mit der einzigen Abänderung: den Funktionen $f\in Z$ in **19.** sind noch die Bedingungen

$$\frac{\partial f}{\partial n}=0 \quad \text{auf B}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial n}=0 \quad \text{in } K_1,\dots,K_{q-3} \tag{61}$$

aufzuerlegen. Aus den Mengen Z, Z^*, Z^{**} werden dadurch die Teilmengen $\hat{Z}$, $\hat{Z}^*$, $\hat{Z}^{**}$. Die Verschärfung (61) zieht nach sich, daß in der jetzigen Eigenwertaufgabe das $\hat{\varrho}$, das an die Stelle des ϱ in (35) tritt, positiv ist: denn sonst wäre die erste (oder eine erste) Eigenfunktion $\hat{\varphi}$ gleich einer Eigenfunktion φ (mit $\varrho=0$) von früher mit $\partial\hat{\varphi}/\partial n=\partial\varphi/\partial n=0$ auf B, im Widerspruch zu **28.** Dem Ergebnis (37) entspricht jetzt dieses

$$\left\{\begin{aligned}
&\Delta\Delta\hat{\varphi}-\lambda\hat{\varphi}=0 \quad \text{in } G\\
&\Delta\hat{\varphi}-\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial n}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}-\hat{\varrho}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial n}=\text{const}=\hat{\beta} \quad \text{auf A}\\
&\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial n}=0 \quad \text{auf B}\,, \qquad \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial n}=0 \quad \text{in } K_1,\dots,K_{q-3}
\end{aligned}\right. \tag{62}$$

und der Beziehung (38) die folgende

$$\hat{\varrho}=E[\hat{\varphi}]=E[\hat{\omega}]>0\,.$$

33. – Mit $\hat{\varphi}_1=\hat{\varphi}$, $\hat{\varrho}_1=\hat{\varrho}$, $\hat{\beta}_1=\hat{\beta}$ ergibt sich analog zu früher: das Verfahren zur Bestimmung von weiteren Eigenwerten $\hat{\varrho}_i$ und zugehörigen Eigenfunktionen $\hat{\varphi}_i$ bricht nicht ab und liefert ein Spektrum plus zugehörigen Eigenfunktionen

$$0 < \hat{\varrho}_1 \leqq \hat{\varrho}_2 \leqq \ldots \leqq \hat{\varrho}_i \leqq \ldots$$

$$\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \ldots, \hat{\varphi}_i, \ldots .$$

Wir notieren die Beziehungen

$$E[\hat{\varphi}_i, \hat{\eta}] - \hat{\varrho}_i d[\hat{\varphi}_i, \hat{\eta}] = 0 , \qquad \hat{\eta} \in Z^{**}$$

$$\Delta\Delta\hat{\varphi}_i - \lambda\hat{\varphi}_i = 0 \quad \text{in } G$$

$$\left[\Delta\hat{\varphi}_i - \frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial n}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right] - \hat{\varrho}_i \frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial n} = \hat{\beta}_i \qquad \text{auf A}$$

$$d[\hat{\varphi}_i, \hat{\varphi}_k] = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

$$E[\hat{\varphi}_i, \hat{\varphi}_k] = \begin{cases} \hat{\varrho}_i & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

$$\iint u\hat{\varphi}_i = 0$$

$$\text{A}: \hat{\varphi}_i = 0 , \qquad \int\limits_{\text{A}} \frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial n} = 0 , \quad \frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial n} = 0 \quad \text{in } K_1, \ldots, K_{q-3}$$

$$\text{B}: \hat{\varphi}_i = 0 , \qquad \frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial n} = 0 .$$

34. – Die Eigenwertaufgabe für $(\ddot{\hat{\lambda}})_0$ geht durch die Verschärfung (61) aus der früheren Eigenwertaufgabe für $\ddot{\lambda}_0$ hervor, Daraus folgt nach dem Maximum-Minimum-Prinzip von R. COURANT in [2] S. 405-407 (dort in § 2 unter 1. ein weiteres Prinzip formuliert), daß

$$\varrho_i \leqq \hat{\varrho}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{63}$$

ist; speziell ist nach (42)

$$0 < \varrho_{q+1} \leqq \hat{\varrho}_{q+1} . \tag{64}$$

35. – Für eine Eigenfunktion $\hat{\varphi}_i$ gilt die zu (51) analoge Formel

$$\hat{\varphi}_i(P) = \lambda \int\limits_{G} d\sigma_Q\, K(P; Q)\hat{\varphi}_i(Q) - \int\limits_{\text{A}} ds\, \frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial n} \Delta_R K(P; R(s)) ; \tag{65}$$

da rechts der Bogen B nicht auftritt, so folgt: $\hat{\varphi}_i(P)$ ist über B hinaus fortsetzbar, genügt dort ebenfalls der Differentialgleichung $\Delta\Delta\hat{\varphi}_i - \lambda\hat{\varphi}_i = 0$ und ist analytisch in x, y.

VII. – Ein erster Grenzübergang.

36. – P_0 und die Knoten $K_1, \dots, K_{q-3}$ sind fest. Die Eigenwerte $\hat{\varrho}_i$ und Eigenfunktionen $\hat{\varphi}_i$ hängen von h ($h > 0$) ab, ebenso die Konstanten $\hat{\beta}_i$. Wir drücken diese Abhängigkeit immer dann, wenn es die Genauigkeit erfordert, durch die Schreibung

$$\hat{\varrho}_i = \hat{\varrho}_i(h)\,, \qquad \hat{\varphi}_i = \hat{\varphi}_i(h)\,, \qquad \hat{\beta}_i = \hat{\beta}_i(h)$$

aus; interessiert bei $\hat{\varphi}_i(h)$ auch die Abhängigkeit von der Stelle P, so schreiben wir $\hat{\varphi}_i(P; h)$. Es interessiert uns jetzt der Limes

$$\lim h = 0 \qquad (h > 0).$$

1° Wir betrachten $\hat{\varrho}_1 = \hat{\varrho}_1(h)$. Verkleinert man h, so bedeutet das eine Lockerung in der betreffenden Variationsaufgabe; daraus folgt

$$0 < \hat{\varrho}_1(h_2) \leqq \hat{\varrho}_1(h_1)\,, \qquad 0 < h_2 < h_1\,.$$

Nach dem Maximum-Minimum-Prinzip überträgt sich diese Monotonie auf jedes $\hat{\varrho}_i(h)$ und es folgt: $\hat{\varrho}_i(h)$ hat für $h \downarrow 0$ einen Limes $\hat{\mathrm{P}}_i \geqq 0$. Wir notieren

$$\hat{\varrho}_i(h) \downarrow \hat{\mathrm{P}}_i \qquad \text{für } h \downarrow 0 \tag{66}$$
$$0 \leqq \hat{\mathrm{P}}_1 \leqq \hat{\mathrm{P}}_2 \leqq \dots \leqq \hat{\mathrm{P}}_i \leqq \dots\,.$$

Nach (63) ist $\varrho_i \leqq \hat{\mathrm{P}}_i$, also auch $\lim \hat{\mathrm{P}}_i = \infty$; nach (64) ist $0 < \varrho_{q+1} \leqq \hat{\mathrm{P}}_{q+1}$. Unter den Zahlen $\hat{\mathrm{P}}_1, \dots, \hat{\mathrm{P}}_q$ seien genau p gleich Null

$$0 = \hat{\mathrm{P}}_1 = \hat{\mathrm{P}}_2 = \dots = \hat{\mathrm{P}}_p < \hat{\mathrm{P}}_{p+1} \leqq \dots\,; \tag{67}$$

ist $p = 0$, so treten gar keine solche Zahlen auf. Die Beziehung (60) ergibt für $\hat{\omega} = \hat{\varphi}_i$ $(1 \leqq i \leqq p)$, daß $\lim \hat{\beta}_i(h) = 0$ ist.

2° Wir nehmen $p \geqq 1$ an und interessieren uns im weiteren nur für die p ersten Eigenfunktionen $\hat{\varphi}_1(h), \dots, \hat{\varphi}_p(h)$. Es ist

$$E[\hat{\varphi}_1(h)] = \hat{\varrho}(h) \downarrow 0 \qquad (h \downarrow 0)$$
$$d[\hat{\varphi}_1(h)] = 1\,.$$

Daraus folgt nach einer schon geläufigen Schlußweise: es existiert eine Teilfolge $h = h_\nu$, $h_\nu \downarrow 0$ derart, daß

$$\text{«} \lim \varphi_1(h) = \Phi_1 \text{»} \tag{68}$$

ist, wo

$$E[\hat{\Phi}_1] = 0$$

ist; $\hat{\Phi}_1$ ist also eine Eigenfunktion aus $[\varphi_1, \ldots, \varphi_q]$. Wenn wir die Folge $h = h_\nu$ endlich oft sieben und wieder mit h_ν bezeichnen, so folgt auf diese Weise: es existiert eine Folge $h = h_\nu$, $h_\nu \downarrow 0$, für welche

$$\lim \hat{\varphi}_i(h) = \hat{\Phi}_i \text{»}, \qquad \hat{\Phi}_i \in [\varphi_1, \ldots, \varphi_q], \qquad 1 \leqq i \leqq p$$

gilt. Die $\hat{\Phi}_i$ sind auf Γ orthonormiert

$$d[\hat{\Phi}_i, \hat{\Phi}_k] = \oint \frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial n} \frac{\partial \hat{\Phi}_k}{\partial n} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k)\,. \end{cases} \tag{69}$$

Wir betrachten in Randnähe in den Koordinaten n, s den Graphen für $\partial \hat{\varphi}_i(h)/\partial n$ auf $n = -\delta$, $\delta > 0$ und genügend klein, als Funktion von s und sehen daraus:

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial n} = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial n} = 0 \qquad \text{in } s = 0\,.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial n} = 0 \qquad \text{in } K_1, \ldots, K_{q-3}\,.$$

Nach **30.** 7) folgt $\hat{\Phi}_i = C \cdot \Phi$, $C = \pm 1$, Φ die dortige Funktion. Daraus und aus (69) folgt dann: $p \leqq 1$, also $p = 1$.

3° In jedem Fall (ob $p = 0$ oder $p = 1$ ist) folgt

$$0 < \hat{\mathrm{P}}_2 \leqq \hat{\varrho}_2(h)$$

für genügend kleines h.

4° Wir nehmen wieder $p = 1$, also $\hat{\mathrm{P}}_1 = 0$ an. Dann folgt, daß über (68) hinaus

$$\text{«} \lim \hat{\varphi}_1(h) = \hat{\Phi}_1 \text{»} \qquad \text{für } h \downarrow 0$$

ist (nicht nur für eine Teilfolge h_ν). Legen wir noch $\hat{\varphi}_1(h)$ durch (vergl. (54))

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_1(h)}{\partial n} > 0 \qquad \text{in } \hat{P}$$

dem Vorzeichen nach fest, so haben wir das Ergebnis:

1) $\hat{\varrho}_1(h)$ ist stets ein einfacher Eigenwert;

2) für *die* zugehörige Eigenfunktion $\hat{\varphi}_1(h)$ gilt

$$\text{«}\lim \hat{\varphi}_1(h) = \Phi\text{»} \qquad \text{für } h \downarrow 0,$$

Φ die Eigenfunktion aus (55).

VIII. – Ein zweiter Grenzübergang.

37. – Wir benutzen die zu der Funktion Φ in **30.** 8) gehörige Funktion Φ^*, die ebenso wie Φ eine Eigenfunktion mit dem Eigenwert 0 ist. Wir schreiben je nach Lage $\Phi^* = \Phi^*(h) = \Phi^*(P; h)$. Mittels Φ^* definieren wir auf Γ eine Funktion $V^* = V^*[s; h]$, die außer von s noch von h abhängt, wie folgt; zunächst sei

$$V^*[s; h] = -\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \qquad \text{auf B;}$$

$$V^*[s; h] = 0 \qquad \text{in } K_1, \ldots, K_{q-3}\,.$$

Alsdann denken wir uns dieses $V^*[s; h]$ genügend glatt (mindestens zweimal stetig differenzierbar) auf ganz Γ so fortgesetzt, daß

$$\lim V^*[s; h] = 0\,, \qquad \lim \frac{\partial}{\partial s} V^*[s; h] = 0$$

gleichmäßig für $h \downarrow 0$ gilt; ferner so, daß auch

$$\lim \frac{\partial^2}{\partial s^2} V^*[s; h] = 0$$

gleichmäßig außerhalb jeder Umgebung vom $s = 0$ gilt, und schließlich so, daß für alle $h > 0$

$$\oint V^*[s; h] = 0$$

ist.

Jetzt identifizieren wir dieses $V^*[s; h]$ mit dem $v(s)$ in **15.** ($h > 0$ beliebig und dann fest) und führen damit die dort geschilderte Gebietsvariation aus:

$$V[s; h; \varepsilon] = V^*[s; h]\cdot\varepsilon + \{-\varkappa(V^*[s; h])^2\}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots\,.$$

Der neue Rand hängt jetzt außer von ε auch von dem Parameter h ab. Entsprechend der Grundton λ von h und ε und es ist (der Punkt bedeutet die Ableitung nach ε)

$$\lambda[h;\varepsilon] = \lambda + \ddot{\lambda}[h;0]\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots .$$

Der G = Variation entspringt eine ω = Funktion $\omega = \omega(P; h)$.

ω genügt den in **16.** angebenen Bedingungen und speziell den Randbedingungen

$$\Gamma: \omega = 0\,, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial n} = -V^*[s; h]$$

und es ist

$$\tfrac{1}{2}\ddot{\lambda}[h; 0] = E[\omega(P; h)]\,. \tag{70}$$

Nach Konstruktion ist für $h = 0$: $\lambda[0;\varepsilon] \equiv \lambda$ (ε beliebig); die obige Entwicklung für $\lambda[h;\varepsilon]$ lautet dann

$$\lambda[0;\varepsilon] = \lambda + 0\cdot\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots .$$

Wir beachten jetzt: der Grundton einer eingespannten Platte ändert sich stetig mit dem Gebiet (vergleiche dazu die Ausführungen von R. Courant in [2], S. 419-421, die man sinngemäß auf den Fall der Platte zu übertragen hat), und schliessen, daß

$$\lim \ddot{\lambda}[h, 0] = 0 \qquad \text{für } h\downarrow 0$$

ist. Nach (70) bedeutet das

$$E[\omega(P; h)] \to 0 \qquad \text{für } h\downarrow 0\,;$$

ferner ist trivialerweise hier

$$d[\omega(P; h)] \to 0 \qquad \text{für } h\downarrow 0,$$

und es gilt somit auch

$$J[\omega(P; h)] - \lambda H[\omega(P; h)] \to 0\,.$$

38. – Ähnlich wie in **20.** überzeugt man sich, daß $H[\omega(P; h)] \leqq C_1$ ist. Aus der für $\omega(P; h)$ gültigen Beziehung — wir unterdrücken dabei das h —

$$\omega(P) = \lambda \int_G d\sigma_Q\, K(P; Q)\,\omega(Q) - \oint_\Gamma ds \frac{\partial\omega}{\partial n} \Delta_R K(P; R(s))$$

schließt man auf $H[\omega(P; h)] \to 0$. Alsdann folgt $J[\omega(P; h)] \to 0$ und weiter mithilfe von (2) auch $D[\omega(P;h)]\to 0$. Zusammen ergibt sich für $\omega=\omega(P;h)$

$$E[\omega]\to 0\,,\qquad J[\omega]\to 0\,,\qquad D[\omega]\to 0\,,\qquad H[\omega]\to 0\,,\qquad d[\omega]\to 0\;;$$

d.h. im Sinne von **4.** (dort $\varphi\equiv 0$ zu setzen)

$$\text{«}\lim \omega(P;h)=0\text{»}\,.$$

39. – Wir kürzen ohne Mißverständnis jetzt wie folgt ab:

$$\Phi^*(P;h)=\Phi^*(h)\,,\qquad \omega(P;h)=\omega(h)$$

und bilden

$$\hat{\omega}(h)=\Phi^*(h)-\omega(h)\;;$$

für die durch $\hat{\omega}$ gegebene Gebietsvariation ist der Bogen $\mathrm{B}=\mathrm{B}(h)$ nach Konstruktion starr, d.h. die durch $\hat{\omega}$ gegebene Gebietsvariation ist eine $\hat{G}$ = Variation mit der Eigenschaft

$$d[\hat{\omega}]\to 1\qquad (h\downarrow 0). \tag{71}$$

Es ist

$$E[\hat{\omega}]=E[\Phi^*]-2E[\Phi^*,\omega]+E[\omega]\;;$$

der erste Term rechts ist Null, da Φ^* eine Eigenfunktion ist; der zweite ist Null nach (44), da $\oint(\partial\omega/\partial n)=0$ ist. Da $E[\omega]\to 0$ ist, so folgt

$$E[\hat{\omega}]\to 0\qquad \text{für } h\downarrow 0. \tag{72}$$

Angenommen, es ist $\hat{\mathrm{P}}_1>0$ (vergl. (67)). Dann folgt aus der Minimumseigenschaft von $\hat{\varrho}_1(h)$

$$E[\hat{\omega}(h)]\geqq\hat{\varrho}_1(h)\cdot d[\hat{\omega}(h)]\geqq\hat{\mathrm{P}}_1\cdot d[\hat{\omega}(h)]$$

und daraus und aus (72), daß $d[\hat{\omega}]\to 0$ ist im Widerspruch zu (71). Es ist also $\hat{\mathrm{P}}_1=0$ d.h. $p=1$ in (67) und es gelten die in **36.** 4° angegebenen Feststellungen.

Da im weiteren nur $\hat{\varrho}_1(h)$ und $\hat{\varphi}_1(h)$ auftreten, so unterdrücken wir den unteren Zeiger 1 und notieren:

$$\lim\hat{\varrho}(h)=0\qquad (h\downarrow 0)$$

$$\lim\hat{\varphi}(h)=\Phi\qquad (h\downarrow 0)\,.$$

Ferner ist nach **36.** 1° Schluß auch

$$\lim \hat{\beta}(h) = 0 \qquad (h \downarrow 0) .$$

Für $\hat{\varphi}(h)$ gelten die Beziehungen (62).

Die Beziehung (46) liefert für $\varphi = \Phi$ und $Z = \hat{\varphi}(h)$, wenn man noch $\oint(\partial\Phi/\partial n) = 0$ berücksichtigt:

$$\hat{\varrho}(h) \int\limits_{A(h)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial \hat{\varphi}(h)}{\partial n} = \int\limits_{B(h)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} [\hat{\beta}(h) - \Delta \hat{\varphi}(h)] .$$

Das Integral links strebt nach 1 für $h\downarrow 0$, das Integral rechts ist absolut $\leqq \text{const}\cdot h^3$ d.h. $\hat{\varrho}(h)$ hat eine Entwicklung um $h = 0$, die so anfängt:

$$\hat{\varrho}(h) = 0 + 0\cdot h + 0\cdot\frac{h^2}{2} + \dots .$$

IX. – Die Annahme $q \geqq 3$ führt zu einem Widerspruch.

40. – Nach dem zuletzt gewonnenen Ergebnis setzen wir die in h analytischen Entwicklungen an:

$$\hat{\varrho}(h) = a_m \frac{h^m}{m!} + a_{m+1} \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} + \dots ; \; a_m > 0 , \qquad m \geqslant 3 \tag{73}$$

$$\hat{\beta}(h) = b_1 h + b_2 \frac{h^2}{2!} + \dots \tag{74}$$

und im selben Sinne

$$\hat{\varphi}(h) = \Phi + \Psi_1 h + \Psi_2 \frac{h^2}{2!} + \dots , \tag{75}$$

worin die Funktionen $\Psi_1, \Psi_2, \dots$ von h nicht abhängen. Aus den Eigenschaften für $\hat{\varphi}(h)$ ergeben sich daraus die folgenden für die Ψ_ν:

$$\Delta\Delta\Psi_\nu - \lambda\Psi_\nu = 0 , \qquad \iint u\Psi_\nu = 0$$

$$\Psi_\nu = 0 \text{ auf } \Gamma , \qquad \frac{\partial \Psi_\nu}{\partial n} = 0 \text{ in } K_1, \dots, K_{q-3}$$

$$\oint \frac{\partial \Psi_\nu}{\partial n} = 0 ;$$

jedes Ψ_ν ist also eine $\omega =$ Funktion mit den Knoten $K_1, \dots, K_{q-3}$, oder es ist $\Psi_\nu \equiv 0$.

Wir betrachten jetzt die Randbedingung für $\varphi(h)$ in einem inneren Punkt P von $\mathrm{A}(h)$, $P \neq K_1, \ldots, K_{q-3}$;

$$\Delta\varphi(h) - \frac{\partial\varphi(h)}{\partial n}\frac{\partial\Delta u}{\partial n} - \varrho(h)\frac{\partial\varphi(h)}{\partial n} = \beta(h)\,. \tag{76}$$

Für $h\downarrow 0$ wird daraus die bekannte Randbedingung für Φ

$$\left[\Delta\Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial n}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right] = 0\,.$$

Wir differenzieren (76) nach h einmal und erhalten für $h\downarrow 0$

$$\Delta\Psi_1 - \frac{\partial\Psi_1}{\partial n}\frac{\partial\Delta u}{\partial n} = b_1\,,$$

nachträglich gültig auf ganz Γ; da Ψ_1 eine ω = Funktion oder $\Psi_1 \equiv 0$ ist, so ist $b_1 = 0$ und weiter $E[\Psi_1] = 0$ d.h. Ψ_1 ist eine Eigenfunktion der ersten Variationsaufgabe oder $\Psi_1 \equiv 0$; Ψ_1 hat die Knoten $K_1, \ldots, K_{q-3}$, falls $\Psi_1 \not\equiv 0$.

Wir differenzieren zweimal nach h und erhalten für $h\downarrow 0$ analog: Ψ_2 ist eine Funktion wie Ψ_1 und es ist auch $b_2 = 0$.

Fahren wir so fort, so erhalten wir: $\Psi_1, \ldots, \Psi_{m-1}$ sind Funktionen wie Ψ_1 und Ψ_2 und es ist $b_3 = \ldots = b_{m-1} = 0$.

Erst wenn wir m = mal differenzieren, ergibt sich für $h\downarrow 0$ ein anderes Ergebnis:

$$\left[\Delta\Psi_m - \frac{\partial\Psi_m}{\partial n}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right] - a_m\frac{\partial\Phi}{\partial n} = b_m \qquad \text{auf } \Gamma;$$

hier ist die eckige Klammer $\not\equiv 0$ auf Γ, d.h. Ψ_m ist keine Eigenfunktion der ersten Variationsaufgabe: sonst wäre $\partial\Phi/\partial n = \text{const.}$ auf Γ d.h. $\partial\Phi/\partial n = 0$ auf Γ wegen $(\oint \partial\Phi/\partial n) = 0$.

41. – Damit erhalten wir für die Entwicklung (75)

$$\varphi(h) = \left\{\Phi + \Psi_1\cdot h + \ldots + \Psi_{m-1}\cdot\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}\right\} + \theta(h)\cdot\frac{h^m}{m!}; \tag{77}$$

hier ist die geschweifte Klammer eine Eigenfunktion der ersten Variationsaufgabe (mit den Knoten $K_1, \ldots, K_{q-3}$) und $\theta = \theta(h)$ sicher keine solche Eigenfunktion; jedoch gilt für $\theta(h)$

$$\oint\frac{\partial\theta(h)}{\partial n} = 0\,.$$

Wir berechnen jetzt in leichtwerständlicher Schreibung

$$\hat{\varrho}(h) = E[\hat{\varphi}(h), \hat{\varphi}(h)] = E[\{\ \}, \hat{\varphi}(h)] + E[\theta(h), \hat{\varphi}(h)] \frac{h^m}{m!}.$$

Der erste Summand rechts verschwindet gemäß (44): dort für φ die geschweifte Klammer eingesetzt. Somit ergibt sich wegen (73) nach Division durch $h^m/m!$

$$a_m + a_{m+1} \frac{h}{m+1} + \ldots = E[\hat{\varphi}(h), \theta(h)].$$

Nach (77) ist weiter die rechte Seite gleich

$$E[\{\ \}, \theta(h)] + E[\theta(h), \theta(h)] \frac{h^m}{m!};$$

wieder verschwindet der erste Summand aus demselben Grund wie oben, und es ergibt sich

$$a_m + \ldots = E[\theta(h), \theta(h)] \frac{h^m}{m!}; \qquad m \geqslant 3.$$

Diese Aussage widerspricht der Tatsache, daß $a_m > 0$ ist.

Die am Anfang von **30.** gemachte Annahme, daß $q \geqq 3$ ist, hat also auf einen Widerspruch geführt. Somit ist $q = 2$.

LITERATUR

[1] J. W. S. RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, vol. I, London, Macmillan and Co., 1877, S. 320.

[2] R. COURANT - D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. I, Interscience Publishers Inc., New York, 1953.

[3] R. COURANT - D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II: *Partial Differential Equations* by R. COURANT, Interscience Publishers, 1962.

[4] R. COURANT - M. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, Zweiter Band, Berlin, Julius Springer, 1937, speziell das siebente Kapitel: Lösung der Rand- und Eigenwertprobleme auf Grund der Variationsrechnung.

[5] K. FRIEDRICHS, *Die Rand- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten* (*Anwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung*), Math. Annalen, **98** (1928), S. 205-247.

[6] F. RELLICH, *Darstellung der Eigenwerte von $\Delta u + \lambda u = 0$ durch ein Randintegral*, Math. Zeitschr., **46** (1940), S. 635-636.

[7] G. SZEGÖ, *On membranes and plates*, National Academy of Science, **36** (1950), pp. 210-216.

[8] G. SZEGÖ, *Note to my paper « On membranes and plates »*, National Academy of Science, **44** (1958), pp. 314-316.
[9] G. PÓLYA - G. SZEGÖ, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton, Princeton University Press, 1951, Note F: *On membranes and plates*, pp. 230-238; in F 5 p. 235 ist [8] zu berücksichtigen.
[10] P. FRANK - D. VON MISES, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, I Mathematischer Teil, Dover Publications, Inc., New York, Friedrich Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1961.