Limitazioni per soluzioni di equazioni ellittiche.

CARLO PUCCI (Genova)

Sunto. - *Si stabilisce una limitazione puntuale per soluzioni di una equazione ellittica, a coefficienti misurabili, in m variabili, in dipendenza della norma L_m del secondo membro della equazione. Le ipotesi sono discusse mediante la costruzione di alcuni esempi.*

Summary. - *We consider an elliptic equation of the second order, with measurable coefficients, in m variables, not homogeneous; a solution, equal zero on the boundary, is bounded with the norm L_m of the second member of the equation. Some examples are constructed to discuss the hypothesis.*

Sia Ω un insieme aperto limitato dello spazio euclideo R^m ad m dimensioni. Sia L un operatore uniformemente ellittico:

$$L = \sum_{i,j}^{1,m} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

con a_{ij} misurabili in Ω. Si prova che esiste una costante k, dipendente solo da Ω e dalla costante di ellitticità, tale che se $u \in H^{2,m}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ (1), $f \in L_m(\Omega)$ e

$$(*) \qquad Lu = f \text{ in } \Omega, \; u = 0 \text{ su } \partial\Omega,$$

risulta

$$|u(x)| \leq k \|f\|_{L_m(\Omega)}; \; x \in \Omega.$$

L'interesse della maggiorazione consiste principalmente nel fatto che k non dipende dalla eventuale regolarità dei coefficienti a_{ij}. Infatti se i coefficienti soddisfano a certe ipotesi di regolarità è stato provato che la "soluzione" di (*) soddisfa alla limitazione:

$$(\substack{*\\*}) \quad |u(x)| \leq k_1 \|f\|_{Lp(\Omega)}, \; x \in \Omega, \; p > \frac{m}{2},$$

(1) $H^{2,m}(\Omega)$ è il completamento dello spazio Γ delle funzioni ν:

$$\nu \in C^2(\Omega), \; \|\nu\|_{H^{2,m}(\Omega)} = \{\int_\Omega (\nu^2 + \sum_{i=1}^{m} \nu_i^2 + \sum_{i,j}^{1,m} \nu_{ij}^2)^{\frac{m}{2}}\}^{\frac{1}{m}} < +\infty,$$

completamento effettuato secondo la norma $\| \; \|_{H^{2,m}(\Omega)}$.

con k_1 dipendente, oltre che da Ω e dalla costante di ellitticità, da p e da detta regolarità dei coefficienti. Precisamente ciò è stato provato da R. CACCIOPPOLI in [2] per $p = 2$, $m = 2$, 3 ed a_{ij} lipschitziani, da D. GRECO in [3] per a_{ij} hölderiani, da A. KOŠELEV in [4] per a_{ij} continui, da C. MIRANDA in [5] per $a_{ij} \in H^{1,m}(\Omega)$. Un esempio dato in [7] mostra che la limitazione $(\overset{*}{*})$, con $p < m$ e k_1, dipendente solo da Ω e dalla costante di ellitticità non sussiste per soluzioni di (*) se la costante di ellitticità è abbastanza piccola.

Si ricordi che, anche per quanto riguarda questo tipo di limitazioni, il comportamento delle equazioni ellittiche variazionali è assai diverso. G. STAMPACCHIA ha provato in [8] che se u è "soluzione" di

$$\sum_{i,j}^{1,m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega,$$

allora soddisfa alla $(\overset{*}{*})$ con k_1 dipendente solo da Ω, da p e dalla costante di ellitticità.

Una diversa maggiorazione puntuale della soluzione di (*) mediante una certa norma integrale di f è data in [7] senza ipotesi di regolarità sui cofficienti.

Nel presente lavoro si ottiene qualche risultato più generale di quello indicato; ad esempio se b_i, c, $f \in L_m(\Omega)$, $c \leq 0$, $u \in H^{2,m}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e

$$Lu + \sum_{i=1}^{m} b_i\, u_i + cu \geq f \quad \text{in } \Omega, \quad u \leq 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

risulta

$$u(x) \leq k_3 \, \|f^-\|_{L_m(\Omega)} \quad (^2),$$

con k_3 dipendete solo da Ω, $\|b_i\|_{L_m(\Omega)}$ e dalla costante di ellitticità.

Per $f = 0$ si riottiene il principio di massimo già provato da A. D. ALEXANDROV in [1] sotto ipotesi più generali per u.

Nel §1 si premettono alcuni risultati su gli inviluppi convessi di una funzione e si considera una particolare trasformazione di Ω in un insieme che è imparentato con l'insieme dei valori assunti in Ω dal gradiente di una qualsiasi funzione positiva differenziabile in Ω e nulla su $\partial\Omega$. Nel §2 si stabiliscono limitazioni nel caso $Lu + cu \geq f$; nel §3 si tratta il caso $Lu + \Sigma\, b_i u_i + cu \geq f$ e la presenza dei b_i complica la dimostrazione.
Infine nel §4 si svolgono alcune osservazioni riguardanti l'accuratezza qualitativa e quantitativa delle limitazioni stabilite, il principio di massimo forte ed il primo autovalore per il problema di DIRICHLET e gli operatori ellittici considerati.

---

(2) $2f^- = f - |f|$.

§1. - Preliminari su gli inviluppi convessi.

Le notazioni introdotte in questo paragrafo sono mantenute nei paragrafi seguenti. Ω è un insieme limitato aperto di punti di R^m; $\widehat{\Omega}$ è l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti Ω. Indicata con λ una costante positiva, $\Omega[x, \lambda]$ è l'insieme dei punti y di R^m tali che

$$\sum_{i=1}^{m} y_i(\xi_i - x_i) + \lambda > 0 \quad \text{per} \quad \xi \in \overline{\widehat{\Omega}};$$

cioè $\Omega[x, \lambda]$ è l'insieme dei gradienti delle funzioni lineari che valgono λ nel punto x e sono positive nella chiusura di $\widehat{\Omega}$.

Osserviamo le seguenti proprietà elementari di $\Omega[x, \lambda]$:

I. - $\Omega[x, \lambda]$ *è aperto e limitato.*

II. - $\Omega[x, \lambda]$ *è ottenuto dall'insieme* $\Omega[x, 1]$ *mediante una omotetia con centro nell'origine e rapporto* λ;

$$\text{mis } \Omega[x, \lambda] = \lambda^m \text{ mis } \Omega[x, 1].$$

III. - *Se* $\Omega \subset A$ *risulta* $\Omega[x, \lambda] \supset A[x, \lambda]$.

Proviamo la seguente proprietà:

IV. - *Sia d il diametro di* Ω ed x^0 *un punto di* $\partial\widehat{\Omega}$; *si ha*:

$$\text{mis } \Omega[x, 1] > \frac{2^m}{m!} \frac{d^{2-m}|x - x^0|^{-1}}{2d - |x - x^0|} > \frac{2^m}{m!} d^{-m} \quad per \quad x \in \Omega.$$

Basta provare la disuguaglianza nel caso che x^0 sia un punto di $\partial\widehat{\Omega}$ di minima distanza da x.

Assumiamo x come origine, $x^0 \equiv (\delta, 0, \ldots, 0)$. Il cubo $Q \equiv \{x: \delta - 2d < x_1 < \delta, |x_i| < d, i = 2, \ldots m\}$ contiene Ω e quindi $\Omega[0, 1] \supset Q[0, 1]$; $Q[0, 1]$ è il luogo dei punti y per i quali

$$\min_{\xi \in \overline{Q}} \sum_{i=1}^{m} y_i \xi_i + 1 > 0.$$

Il minimo è assunto ai vertici di Q e pertanto $Q[0, 1]$ è il luogo dei punti y per i quali

$$y_1 \delta \pm dy_2 \pm \ldots \pm dy_m + 1 > 0, \quad (\delta - 2d)y_1 \pm dy_2 \pm \ldots dy_m + 1 > 0;$$

$Q[0, 1]$ è quindi un poliedro con i vertici su gli assi coordinati, sull'asse x_1 i due vertici hanno ascissa δ^{-1} e $(\delta - 2d)^{-1}$, sull'asse x_i i due vertici hanno ascissa $\pm d^{-1}$, $i = 2, \ldots, m$. Pertanto

$$\text{mis } Q[0, 1] = \frac{2^m}{m!} \frac{d^{2-m} |x - x^0|^{-1}}{2d - |x - x^0|}.$$

Per completare la dimostrazione si nota che

$$\frac{d^{2-m} |x - x^0|^{-1}}{2d - |x - x^0|} \geq d^{-m} \quad \text{per} \quad |x - x^0| \leq d.$$

Una funzione v si dice convessa in Ω se fissato comunque x ed y in Ω per $z \in \Omega$ e $z = tx + (1 - t)y$ con $0 < t < 1$ risulta

$$v(z) \leq tv(x) + (1 - t)v(y).$$

Sia u una funzione limitata in Ω; nella classe Γ delle funzioni v definite in $\widehat{\Omega}$, con $v \geq u$ in Ω e $-v$ convessa in $\widehat{\Omega}$, ne esiste una, $\widehat{u}$, più piccola:

$$\widehat{u} \in \Gamma, \quad \widehat{u}(x) \leq v(x) \quad \text{per} \quad v \in \Gamma, \; x \in \widehat{\Omega}.$$

Diciamo che $\widehat{u}$ è l'inviluppo convesso superiore di u. Indichiamo con Ω_u l'insieme dei punti di Ω nei quali $\widehat{u} = u$.

Se u è differenziabile in Ω indichiamo con $\nabla u(\Omega)$ l'insieme dei valori assunti in Ω dal gradiente di u. Evidentemente:

Se u è differenziabile in Ω, $\widehat{u}$ è differenziabile in Ω_u e $\nabla u(\Omega_u) = \nabla \widehat{u}(\Omega_u)$.

Proviamo:

V. - *Sia u continua in $\overline{\Omega}$, differenziabile in Ω ed $u \leq 0$ su $\partial\Omega$. Se $x \in \Omega$ e $u(x) > 0$ si ha:*

$$\Omega[x, u(x)] \subset \nabla u(\Omega_u), \tag{1}$$

$$u(x) \leq \left\{ \frac{\text{mis } \nabla u(\Omega_u)}{\text{mis } \Omega[x, 1]} \right\}^{\frac{1}{m}}. \tag{2}$$

Sia $y \in \Omega[x, u(x)]$ cioè

$$\sum_{i=1}^{m} y_i(\xi_i - x_i) + u(x) > 0 \quad \text{per} \quad \xi \in \overline{\widehat{\Omega}}. \tag{3}$$

Indichiamo con λ_0 il minimo dei numeri reali λ per i quali

$$\lambda + \sum_{i=1}^{m} y_i(\xi_i - x_i) \geq u(\xi) \quad \text{per} \quad \xi \in \overline{\Omega}.$$

Si ha quindi

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^{m} y_i(\xi_i - x_i) \geq u(\xi) \quad \text{per} \quad \xi \in \bar{\Omega}, \tag{4}$$

e vi è almeno un punto $\bar{\xi}$ in $\bar{\Omega}$ tale che per $\xi = \bar{\xi}$ sussiste l'uguaglianza. Se $\bar{\xi} \in \Omega$ si ha

$$\nabla u(\bar{\xi}) = y, \ \bar{\xi} \in \Omega_u,$$

e quindi $y \in \nabla u(\Omega_u)$ come si vuole dimostrare per provare la (1). Per la (4) è $\lambda_0 \geq u(x)$ e per la (3)

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^{m} y_i(\xi_i - x_i) > 0 \quad \text{per} \quad x \in \bar{\Omega};$$

pertanto $\bar{\xi} \in \Omega$ essendo $u \leq 0$ su $\partial\Omega$.

La (2) è una immediata conseguenza della proposizione II. Notiamo altre due proposizioni elementari.

VI. - *Sia u di classe $C^2(\bar{\Omega})$; indicato con H il determinante hessiano di u risulta*

$$\int_{\Omega_u} |H(x)| \, dx \geq \text{mis } \nabla u(\Omega_u).$$

Infatti ad ogni punto di $\nabla u(\Omega_u)$ corrisponde uno o più punti di Ω_u ed H è l'jacobiano della trasformazione.

VII. - *Sia Ω convesso u differenziabile e positiva in Ω, e $-u$ sia convessa in Ω; indicato con $d(x)$ la distanza di x da $\partial\Omega$ si ha*

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{u(x)}{d(x)}, \ x \in \Omega.$$

Il piano tangente al grafico di u nel punto $[x_1, \ldots, x_m, u(x)]$ incontra il piano $u = 0$ in punti aventi distanza da x maggiore o uguale a $d(x)$.

§2 - **Una prima limitazione.**

Indichiamo con $\mathfrak{L}_\alpha$ la classe degli operatori ellittici

$$L \equiv \sum_{i,j}^{1,m} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{8}$$

con a_{ij} misurabili in Ω e

(9) $$\sum_{i=1}^{m} a_{ii}(x) = 1, \sum_{i,j}^{i,m} a_{ij}(x)\,\lambda_i\,\lambda_j \geq \alpha\,||\lambda||^2, \text{ per } x \in \Omega,\ \lambda \in R^m,$$

essendo α una costante positiva. Proviamo il seguente:

LEMMA - *Sia* $L \in \mathfrak{L}_\alpha$, $f \in L_m(\Omega)$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ *e*

(10) $$Lu \geq f \text{ in } \Omega,\ u \leq 0 \text{ su } \partial\Omega.$$

Si ha

(11) $$u(x) \leq g(x)\,||f^-||_{L_m(\Omega_u)},\ x \in \Omega,$$

con

(12) $$g(x) = \frac{1}{m\alpha}\left\{\frac{\alpha}{1-(m-1)\alpha}\right\}^{\frac{1}{m}}\{\text{mis }\Omega[x,\,1]\}^{-\frac{1}{m}}.$$

Se $u \leq 0$ in Ω la (11) è soddisfatta. Se u è maggiore di zero in qualche punto, Ω_u non è vuoto; consideriamo questo caso.

Indichiamo con $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ gli autovalori della matrice hessiana di u, con la convenzione $\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2 \leq \ldots \leq \mathcal{C}_m$.

Si ha

$$Lu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathcal{C}_i,$$

con α_i misurabili in Ω e

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq \alpha \quad \text{in} \quad \Omega \ (^3).$$

In Ω_u le funzioni $\mathcal{C}_i$ sono non positive, pertanto

$$|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathcal{C}_i|^m \geq |\alpha \sum_{i=1}^{m-1} \mathcal{C}_i + [1-(m-1)\alpha]\,\mathcal{C}_m|^m;$$

si ha inoltre

$$|\alpha \sum_{i=1}^{m-1} \mathcal{C}_i + [1-(m-1)\alpha]\,\mathcal{C}_m|^m \geq m^m \alpha^{m-1}[1-(m-1)\alpha]\,|\mathcal{C}_1 \,..\, \mathcal{C}_m|,$$

perchè il minimo del rapporto fra il primo ed il secondo membro al variare dei $\mathcal{C}_i$ non positivi si ottiene per

$$\alpha\mathcal{C}_i = [1-(m-1)\alpha]\ \mathcal{C}_m,\ i = 1, \ldots, m-1.$$

---

(3) La dimostrazione è in [7] pg. 144.

Siccome $H = \mathcal{C}_1 \ldots \mathcal{C}_m$ si ha

$$|Lu|^m \geq m^m \alpha^{m-1}[1-(m-1)\alpha]\,|H| \quad \text{in} \quad \Omega_u,$$

e, siccome $Lu \leq 0$ in Ω_u,

$$m^m \alpha^{m-1}[1-(m-1)\alpha] \int_{\Omega u} |H(x)|\,dx \leq \int_{\Omega u} |f^-(x)|^m\,dx,$$

e dal teorema V e IV del paragrafo precedente segue la tesi.

TEOREMA I. - *Sia* $L \in \mathfrak{L}_\alpha$, $c \in L_m(\Omega)$, $\|c^+ g\|_{L_m(\Omega)} < 1$ (4), $f \in L_m(\Omega)$, $u \in H^{2,m}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ (5),

$$Lu + cu \geq f \ \textit{in}\ \Omega \ (^6), \quad u \leq 0 \ \textit{su}\ \partial\Omega.$$

Ne segue

$$u(x) \leq \frac{g(x)}{1 - \|c^+ g\|_{L_m(\Omega)}} \|f^-\|_{L_m(\Omega_u)} \ \textit{per}\ x \in \Omega. \tag{13}$$

Proviamo prima il teorema supponendo $u = 0$ su $\partial\Omega$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$. La funzione u è positiva su Ω_u e quindi

$$|(f - cu)^-| \leq |f^-| + |c^+ u| \ \text{in}\ \Omega_u.$$

Dal lemma precedente

$$u(x) \leq g(x)\,\|(f - cu)^-\|_{L_m(\Omega_u)} \ \text{per}\ x \in \Omega;$$

pertanto

$$u(x) \leq g(x)\,\|f^-\|_{L_m(\Omega_u)} + g(x)\,\|c^+ u\|_{L_m(\Omega_u)} \ \text{in}\ \Omega \quad (^7);$$

da questa si ottiene

$$\|c^+ u\|_{L_m(\Omega_u)} \leq \frac{\|c^+ g\|_{L_m(\Omega)}}{1 - \|c^+ g\|_{L_m(\Omega)}} \|f^-\|_{L_m(\Omega_u)},$$

e quindi la (13).

(4) $2c^+ = c + |c|$.

(5) Se $\partial\Omega$ è lipschitziana $H^{2,m}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) = H^{2,m}(\Omega)$; vedere GAGLIARDO E. *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili* "Ricerche di Matematica" vol. VII (1958), 102-137.

(6) Le relazioni differenziali per funzioni in $H^{2,m}(\Omega)$ si intendono soddisfatte a meno di un insieme di misura nulla.

(7) Si può provare che questa limitazione sussiste nelle ipotesi del teorema prescindendo dalla condizione $\|c^+ g\|_{L_m(\Omega)} < 1$.

Consideriamo ora il caso $u \in H^{2,m}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ supponendo sempre $u = 0$ su $\partial\Omega$. Poniamo

$$v(x) = u(x) \quad \text{per } x \in \Omega, \quad v(x) = 0 \quad \text{per } x \notin \Omega,$$

$$v_n(x) = \frac{1}{h_n} \int\limits_{|y-x|<\frac{1}{n}} v(y) \; \exp \left\{ \frac{n^2|x-y|^2}{n^2|x-y|^2 - 1} \right\} dy, \; n = 1, 2, \ldots,$$

$$h_n = \int\limits_{|\eta|<\frac{1}{n}} \exp \left\{ \frac{n^2|\eta|^2}{n^2|\eta|^2 - 1} \right\} d\eta, \; u_n(x) = v_n(x) - \max_{y \in \partial\Omega} v_n(y);$$

la successione $\{u_n\}$ converge uniformemente ad u in $\bar{\Omega}$ e le successioni delle derivate prime e seconde convergono in $L_m(\Omega)$ alle corrispondenti derivate di u ([8]). Posto

$$f_n = Lu_n + cu_n,$$

$\{f_n^-\}$ converge in $L_m(\Omega)$ ad f^-. Siccome $u_n \in C^2(\bar{\Omega})$, $u_n \leq 0$ su $\partial\Omega$ per quanto si è già provato si ha

$$u_n(x) \leq \frac{g(x)}{1 - \|c^+g\|_{L_m(\Omega)}} \|f_n^-\|_{L_m(\Omega)},$$

e passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene la limitazione per u.

Consideriamo infine il caso $u \leq 0$ su $\partial\Omega$. Indichiamo con Ω^* l'insieme dei punti di Ω ove $u > 0$; se Ω^* è vuoto la (13) sussiste; in caso diverso $u = 0$ su $\partial\Omega^*$ e quindi, per quanto provato, sussiste la (13) relativamente all'insieme Ω^*. Per la III del §1 la g relativa ad Ω^* è minore della g relativa ad Ω.

TEOREMA II. - *Sia* $L \in \mathfrak{L}_\alpha$, c ed $f \in L_m(\Omega)$; *supponiamo* $\|c^+g\|_{L_m(\Omega)} < 1$ *con* g *data dalla* (12). *Se* $u \in H^{2,m}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

$$Lu + cu = f \quad in \quad \Omega, \quad u = 0 \quad su \ \partial\Omega,$$

risulta in Ω

$$-\frac{g(x)}{1 - \|c^+g\|_{L_m(\Omega)}} \|f^+\|_{L_m(\Omega)} \leq u(x) \leq \frac{g(x)}{1 - \|c^+g\|_{L_m(\Omega)}} \|f^-\|_{L_m(\Omega)}.$$

Si tratta di un immediato corollario del teorema precedente; la limitazione si ottiene enunciando il teorema precedente per $-u$ invece che per u.

([8]) S. L. SOBOLEV, *Applications of Functionals Analysis in Mathematical Phisics*, «Am. Math. Soc.», Providence 1963, pg. 36.

Si noti che per la (12) e la IV del §1 g è limitata in Ω. Inoltre g tende a zero per x tendente ad un punto x^0 di $\partial\widehat{\Omega}$; pertanto la limitazione assicura anche una uniforme continuità della soluzione su parte della frontiera di Ω.

§3. - La limitazione per l'equazione completa.

Ci occorre per il seguito questo riadattamento di un noto lemma di GRONWALL (9).

LEMMA. - *Siano* θ, γ, $y_1, \dots, y_\nu$ *costanti positive. Se*

$$\theta < \nu, \; y_h \leq \frac{\theta}{\nu}\left(\gamma + \sum_{i=1}^{h} y_i\right) \quad \text{per} \quad h = 1, \dots, \nu,$$

si ha

$$\sum_{i=1}^{\nu} y_i \leq (e^{\frac{\theta\nu}{\nu-\theta}} - 1)\gamma .$$

Poniamo

$$z_i = e^{-\frac{i\theta}{\nu-\theta}} y_i, \; i = 1, \dots, \nu,$$

e sia z_h il massimo degli z_i per $i = 1, \dots, \nu$. Si ha quindi

$$e^{\frac{h\theta}{\nu-\theta}} z_h \leq \frac{\theta}{\nu}\left(\gamma + z_h \sum_{i=1}^{h} e^{\frac{i\theta}{\nu-\theta}}\right).$$

Siccome

$$1 - \frac{\theta}{\nu} e^{\frac{\theta}{\nu-\theta}} \left\{e^{\frac{\theta}{\nu-\theta}} - 1\right\}^{-1} > 0,$$

risulta

$$z_h \leq \left(e^{\frac{\theta}{\nu-\theta}} - 1\right) e^{-\frac{\theta}{\nu-\theta}} \gamma,$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} y_i \leq \left(e^{\frac{\theta}{\nu-\theta}} - 1\right) e^{-\frac{\theta}{\nu-\theta}} \gamma \sum_{i=1}^{\nu} e^{\frac{i\theta}{\nu-\theta}},$$

e quindi il lemma.

TEOREMA I. - *Sia* $L \in \mathfrak{L}_\alpha$ *e siano* b_i, c, $f \in L_m(\Omega)$, $c \leq 0$ *in* Ω. *Sia* d *il diametro di* Ω e

$$h = \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{\alpha}{1-(m-1)\alpha}\right\}^{\frac{1}{m}}, \; k = \frac{h}{2} d \exp. \left\{h^m \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{m} b_i^2(x)\right]^{\frac{m}{2}} dx\right\}. \tag{14}$$

(9) Vedere ad es. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, I, pg. 30, Zanichelli, Bologna 1965.

Se $u \in H^{2,m}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *e*

$$Lu + \sum_{i=1}^{m} b_i u_i + cu \geq f \quad \text{in } \Omega, \quad u \leq 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \tag{15}$$

risulta

$$u(x) \leq k \, \| f^- \|_{L_m(\Omega)}, \quad x \in \Omega. \tag{16}$$

Sia B l'insieme dei punti aventi una distanza da $\widehat{\Omega}$ maggiore di $\frac{1}{4} d$ e minore di $\frac{1}{2} d$, sia $\Omega^* = \Omega \cup B$. Sia u una funzione di classe $H^{2,m}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ soddisfacente alle (15). Posto

$$\mu = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x),$$

notiamo che se $\mu \leq 0$ la (16) è soddisfatta; consideriamo quindi il caso $\mu > 0$. Indicata con s una costante, $0 \leq s < \mu$, poniamo

$$u_s(x) = u(x) - s \quad \text{per } x \in \bar{\Omega}, \quad u_s(x) = 0 \quad \text{per } x \in \bar{B},$$

$$L_1 = L \quad \text{per } x \in \Omega, \quad L_1 = \frac{1}{m} \triangle \quad \text{per } x \in B.$$

Si ha $u_s \in H^{2,m}(\Omega^*) \cap C^0(\bar{\Omega}^*)$, $u_s \leq 0$ su $\partial\Omega^*$,

$$L_1 u_s \geq f - \sum_{i=1}^{m} b_i u_i - cu \ \text{ in } \Omega, \quad L_1 u_s = 0 \ \text{ in } B.$$

Indichiamo con I_s, $0 \leq s < \mu$, l'insieme dei punti di Ω^* ove $u_s = \widehat{u_s}$; notiamo che $I_s \subset \Omega$. L'operatore L_1 appartiene alla classe $\mathfrak{L}_\alpha$ relativa all'insieme Ω^* e quindi per il teorema I. del §2

$$u_s(x) \leq g^*(x) \, \| (f - \sum_{i=1}^{m} b_i u_i - cu)^- \|_{L_m(I_s)}, \quad x \in \Omega^*,$$

con

$$g^*(x) = \frac{h}{m} \left\{ \text{mis } \Omega^*[x, 1] \right\}^{-\frac{1}{m}}.$$

Il diametro di Ω^* è $2d$; per la IV del §1

$$\text{mis } \Omega^*[x, 1] > \frac{1}{m!} d^{-m}.$$

Si ha $cu \leq 0$ in I_s perchè ivi è $u > 0$, quindi

$$u_s(x) \leq \frac{h}{2} d \, \| (f + \sum_{i=1}^{m} b_i u_i)^- \|_{L_m(I_s)} \ \text{ in } \Omega^*. \tag{17}$$

I punti di Ω hanno distanza da $\partial\widehat{\Omega}^*$ non inferiore a $\frac{1}{2}d$ e $\partial\widehat{\Omega}^*$ coincide con l'insieme dei punti di ∂B aventi distanza $\frac{1}{2}d$ da $\widehat{\Omega}$. Per la VII del §1 risulta

$$|\nabla \widehat{u}_s(x)| < 2\ d^{-1}u_s(x),\ x \in I_s,$$

e siccome $\nabla\widehat{u}_s = \nabla u_s = \nabla u$ in I_s si ha

$$|\nabla u(x)| < 2d^{-1}u_s(x) \quad \text{per } x \in I_s.$$

Pertanto per la (17)

$$|\nabla u(x)|^m \leq h^m \left\{\| f^- \|^m_{L_m(I_s)} + \| \sum_{i=1}^m b_i u_i \|^m_{L_m(I_s)}\right\},\ x \in I_s. \tag{18}$$

Notiamo che $I_s \subset I_t$ per $0 \leq t \leq s < \mu$ e che $I_0 = \Omega_u$; indichiamo con I_μ l'insieme dei punti di Ω ove $u = \mu$. Fissato un intero positivo ν esistono $\nu + 1$ costanti $s_0, s_1, \dots, s_\nu$ con $\mu = s_0 > s_1 > \dots > s_\nu = 0$ tali che, posto $E_h = I_{s_h} - I_{s_{h-1}}$,

$$\int_{E_h} \left[\sum_{i=1}^m b_i^2(x)\right]^{\frac{m}{2}} dx = \frac{1}{\nu}\int_{\Omega_u - I_\mu} \left[\sum_{i=1}^m b_i^2(x)\right]^{\frac{m}{2}} dx,\ h = 1, \dots, \nu. \tag{19}$$

Posto

$$y_h = \int_{E_h} \left[\sum_{i=1}^m b_i(x)u_i(x)\right]^m dx,$$

tenuto conto che $\nabla u = 0$ in I_μ si ha

$$\sum_{j=1}^h y_j = \int_{I_{s_h}} \left[\sum_{i=1}^m b_i(x)u_i(x)\right]^m dx;$$

dalla (18) calcolata per $s = s_h$, moltiplicando primo e secondo membro per $\left(\sum_{i=1}^m b_i^2\right)^{\frac{m}{2}}$ ed integrando in E_h si ottiene per le (14), (19)

$$y_h \leq \frac{\theta}{\nu}\left\{\| f^- \|^m_{L_m(\Omega_u)} + \sum_{i=1}^m y_i\right\},$$

avendo posto

$$\theta = h^m \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^m b_i^2(x)\right]^{\frac{m}{2}} dx. \tag{20}$$

Per il lemma si ha

$$\int_{I_0} \left[\sum_{i=1}^m b_i(x)u_i(x)\right]^m dx \leq \left(e^{\frac{\nu\theta}{\nu-\theta}} - 1\right)\| f^- \|^m_{L_m(\Omega_u)};$$

facendo tendere ν a $+\infty$, ricordando che $I_0 = \Omega_u$, si ottiene

$$\int_{\Omega_u} \left[\sum_{i=1}^{m} b_i(x) u_i(x) \right]^m dx \leq \left(e^{\theta} - 1 \right) \| f^- \|^m_{L_m(\Omega_u)} .$$

Dalla (17) per $s = 0$ si ottiene

$$[u(x)]^m \leq 2^{-m} h^m d^m \{ \| f^- \|^m_{L_m(\Omega)} + \| \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \|^m_{L_m(\Omega_u)} \} \text{ in } \Omega ,$$

e quindi il teorema è provato, tenuto conto dell'espressione di θ data dalla (20).

TEOREMA II. - *Sia* $L \in \mathfrak{L}_\alpha$, *siano* b_i, c, $f \in L_m(\Omega)$ *e* $k \| c^+ \|_{L_m(\Omega)} < 1$, *con* k *dato dalla* (14). *Se* $u \in H^{2,m}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e

$$Lu + \sum_{i=1}^{m} b_i u_i + cu = f \text{ in } \Omega , \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega ,$$

si ha in Ω

$$- \frac{k}{1 - k \| c^+ \|_{L_m(\Omega)}} \| f^+ \|_{L_m(\Omega)} \leq u(x) \leq \frac{k}{1 - k \| c^+ \|_{L_m(\Omega)}} \| f^- \|_{L_m(\Omega)} .$$

Il teorema è una immediata conseguenza del teorema precedente.

TEOREMA III. - *Sia:* $L \in \mathfrak{L}_\alpha$; b_i, c *ed* $f \in L_m(\Omega)$ *e* $k \| c^+ \|_{L_m(\Omega)} < 1$; $\mu \in C^0(\Omega)$ $u \in H^{2,m}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *ed inoltre*

$$Ku \equiv Lu + \sum_{i=1}^{m} b_i u_i + cu \geq f \text{ in } \Omega , \ u \leq \varphi \text{ su } \partial\Omega .$$

Indicata con Γ *la classe delle funzioni* v *tali che*

$$v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H^{2,m}(\Omega), \ Kv \leq 0 \text{ in } \Omega , \ v \geq \varphi \text{ su } \partial\Omega ,$$

e posto

$$\tilde{\varphi}(x) = \inf_{v \in \Gamma} v(x),$$

si ha in Ω

$$u(x) \leq \tilde{\varphi}(x) + \frac{k}{1 - k \| c^+ \|_{L_m(\Omega)}} \| f^- \|_{L_m(\Omega)} .$$

Infatti se $v \in \Gamma$

$$K(u - v) \geq f \text{ in } \Omega , \quad u - v \leq 0 \text{ su } \partial\Omega ,$$

e per il teorema I

$$u(x) \leq v\,x) + \frac{k}{1 - k \| c^+ \|_{L_m(\Omega)}} \| f^- \|_{L_m(\Omega)} .$$

Si ottiene come immediato corollario il seguente principio di massimo, già provato da A. D. ALEXANDROV in [13] per una più generale classe di soluzioni u.

Siano verificate le ipotesi del teorema III *ed inoltre sia* $f \geq 0$, $\varphi \leq 0$, $c \leq 0$. *Risulta* $u \leq 0$ *in* Ω.

Infatti in queste ipotesi $\tilde{\varphi} \leq 0$ perchè la funzione identicamente uguale a zero appartiene alla classe Γ.

§4. - Osservazioni su le ipotesi e le limitazioni.

a) Sia $\Omega \equiv \{x : |x| < 1\}$, $L \in \mathfrak{L}_\alpha$; fissato ρ, $\rho > 1$, ci si chiede se esiste una costante k tale che per qualunque u, con $u \in C^2(\bar{\Omega})$ e $u = 0$ su $\partial\Omega$, risulti

$$u(x) \leq k \| Lu \|_{L_\rho(\Omega)} \text{ in } \Omega . \tag{21}$$

Per $\rho = m$ la risposta affermativa è data dal teorema del §2. In [7] è provato che fissato ρ, $\rho < m$, esiste una costante α e una successione di operatori L_n e di funzioni u_n con $L_n \mathfrak{L} \in {}_\alpha$, $u_n \in C^2(\bar{\Omega})$, $u_n = 0$ su $\partial\Omega$, tali che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n(0)}{\| L_n u_n \|_{L_\rho(\Omega)}} = +\infty .$$

Pertanto la limitazione (21) non sussiste per $\rho < m$ se non si aggiungono altre ipotesi ad esempio relative alla regolarità dei coefficienti come è fatto da CACCIOPPOLI [2], GRECO [3], KOŠELEV [4], C. MIRANDA [5], oppure relative alla costante di ellitticità. In [7] è provato che la limitazione non sussiste per $\rho \leq \max \left\{ \frac{m}{2}, m[1 - (m-1)\alpha] \right\}$, ed è formulata la seguente congettura: fissato ρ, $\rho > \max \left\{ \frac{m}{2}, m[1 - (m-1)\alpha] \right\}$, esiste una costante k dipendente solo da Ω, da ρ e da α tale che per $L \in \mathfrak{L}_\alpha$ e per $u \in C^2(\bar{\Omega})$ con $u = 0$ su $\partial\Omega$, la (21) è soddisfatta.

b) Sia $\Omega \equiv \{x : |x| < 1\}$, $L \in \mathfrak{L}_\alpha$; se $u \in H^{2,m}(\Omega)$,

$$Lu = 0 \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega, \tag{22}$$

si è provato che $u \equiv 0$. Ci si chiede se lo stesso risultato sussiste nell'ipotesi $u \in H^{2,\rho}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ con $\rho < m$ invece di $\rho = m$. Proviamo che fissato ρ,

$\rho < m$, esiste un operatore ellittico L ed una funzione u tali che

$$u \in H^{2,\rho}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}),\ Lu = 0 \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega,\ u > 0 \text{ in } \Omega. \tag{23}$$

Si fissi infatti la costante α con

$$0 < \alpha \leq \frac{m-\rho}{m-1},\ \alpha < \frac{1}{2(m-1)},$$

e si ponga

$$L = \sum_{i,j}^{1,m} \left[\alpha\delta_{ij} + (1-m\alpha)\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right]\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{24}$$

$$u = 1 - |x|^{\frac{1-2(m-1)\alpha}{1-(m-1)\alpha}} \quad (^{10});$$

risulta $L \in \mathfrak{L}_\alpha$ e la (23) è soddisfatta.

L'esempio costruito mostra che se $u \in H^{2,\rho}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ ed è soddisfatta la (22) può non essere $u \equiv 0$ se $\rho \leq m[1-(m-1)\alpha]$; forse se $\rho > m[1-(m-1)\alpha]$ la (22) implica $u \equiv 0$. Ricordiamo che nella ipotesi di continuità dei coefficienti a_{ij} KOŠELEV ha provato in [4] che se $u \in H^{2,\rho}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $\rho > 1$, ed è soddisfatta la (22) allora $u \equiv 0$. Risultato analogo è stato provato da C. MIRANDA per $\rho = 2$ ed $a_{ij} \in H^{1,m}(\Omega)$ e da TALENTI in [9] per $\rho = 2$ ed $\alpha > \frac{m-2}{m(m-1)}$.

c) La ipotesi $b_i \in L_m(\Omega)$ che appare nei teoremi del §3 non può essere sostituita dalla ipotesi $b_i \in L_\rho(\Omega)$ con $\rho < m$. Basta considerare il seguente esempio:

$$\Omega \equiv \{x : |x| < 1\},\ b_i = -m\frac{x_i}{|x|^2},\ b_i \in L_\rho(\Omega) \text{ per } \rho < m,$$

$$u = 1 - |x|^2,\ \triangle u + \sum_{i=1}^{m} b_i u_i = 0 \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega.$$

d) Notiamo che le limitazioni stabilite per u possono essere quantitativamente accurate pure non essendo le migliori possibili per la classe di operatori e soluzioni presa in esame. Consideriamo il seguente esempio:

$$\Omega \equiv \{x : |x| < 1\},\ u = 1 - |x|^{1+\frac{\alpha}{1-(m-1)\alpha}},\ f = -m\alpha^{\frac{1-(m-2)\alpha}{1-(m-1)\alpha}}|x|^{\frac{\alpha}{1-(m-1)\alpha}-1},$$

per L dato dalla (24) risulta

$$L \in \mathfrak{L}_\alpha,\ Lu = f \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega.$$

Per il lemma del §2 si ha

$$u(x) \leq \frac{1}{m\alpha}\left\{\frac{\alpha}{1-(m-1)\alpha}\right\}^{\frac{1}{m}}\{\text{mis } \Omega[x, 1]\}^{-\frac{1}{m}}\|f\|_{L_m(\Omega)};$$

(10) Notiamo che risulta $M_\alpha u = 0$ in Ω (vedere [7]); partendo da questa equazione ellittica massimante si è costruito L ed u.

risulta

$$\|f\|_{L_m(\Omega)} = m\alpha \frac{1-(m-2)\alpha}{1-(m-1)\alpha} (\omega_m)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{1-(m-1)\alpha}{m\alpha}\right)^{\frac{1}{m}} \text{ [11]},$$

$$\text{mis } \Omega[0, 1] = \frac{\omega_m}{m},$$

e pertanto in base alla limitazione stabilita

$$u(0) \leq \frac{1-(m-2)\alpha}{1-(m-1)\alpha},$$

ed in questo caso è $u(0) = 1$ e $\dfrac{1-(m-2)\alpha}{1-(m-1)\alpha}$ minore o uguale a 2 e prossimo ad 1 per α piccolo.

e) Dalle limitazioni precedentemente provate segue una forma forte del principio di massimo.

Supponiamo: Ω connesso, $L \in \mathfrak{L}_\alpha$, $b_i \in L_\infty(\Omega)$, $c \in L_m(\Omega)$, $c \leq 0$, $u \in H^{2,m}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

$$Lu + \sum_{i=1}^{m} b_i u_i + cu \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad u \leq 0 \text{ su } \partial\Omega.$$

Se u si annulla in un punto di Ω è nulla in tutto Ω.

Non si da la dimostrazione di questo teorema perchè può essere svolta a partire dal teorema III del §3 come è fatto per il caso $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ in [6]. Si noti che si è supposto $b_i \in L_\infty(\Omega)$ invece $b_i \in L_m(\Omega)$. Questa ipotesi serve per la costruzione della solita supersoluzione; forse il teorema sussiste nell'ipotesi più generale $b_i \in L_m(\Omega)$.

f) I precedenti teoremi forniscono una limitazione per il primo autovalore [12]. Si ha ad esempio.

Sia $L \in \mathfrak{L}_\alpha$, c e $z \in L_m(\Omega)$, $\|c^+ g\|_{L_m(\Omega)} < 1$. Se esiste una costante reale λ e una funzione u, $u \in H^{2,m}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $u \not\equiv 0$, tali che

$$Lu + (c + \lambda z)u = 0 \text{ in } \Omega, \; u = 0 \text{ su } \partial\Omega,$$

deve essere

$$\lambda \geq \frac{1 - \|c^+ g\|_{L_m(\Omega)}}{\|z^+ g\|_{L_m(\Omega)}} \text{ oppure } \lambda \leq -\frac{1 - \|c^+ g\|_{L_m(\Omega)}}{\|z^- g\|_{L_m(\Omega)}}.$$

Si tratta di una immediata conseguenza del teorema I del §2; per esso se $\|(c + \lambda z)^+ g\|_{L_m(\Omega)} < 1$ si ha $u \equiv 0$. Pertanto deve essere $\|(c + \lambda z)^+ g\|_{L_m(\Omega)} \geq 1$

---

(11) ω_m è l'area della superficie di una sfera di raggio 1 in R^m.

(12) Si tratta di limitazioni non accurate mumericamente.

e le limitazioni per λ seguono dall'osservare che

$$|(c+\lambda z)^+ g| \leq |c^+ g| + \lambda |z^+ g| \quad \text{se } \lambda > 0,$$

$$|(c+\lambda z)^+ g| \leq |c^+ g| + |\lambda| |z^- g| \quad \text{se } \lambda < 0.$$

Aggiunta nelle bozze. – Sono venuto a conoscenza durante il congresso di matematica svoltosi a Mosca di alcune pubblicazioni, riguardanti limitazioni del tipo considerato nel presente lavoro, di A. D. Alexadrov [Dokl. Akad. Nauk USSR, N° 5, (1960) pp. 1001-1004; Vestnik Leningrad Univ., N° 13, (1963), pp. 5-29; Sibirsk Mat. VII, N° 3, (1966) pp. 486-498; Vestnik Leningrad Univ. N° 1 (1966) pp. 5-25 e N° 7 (1966) pp. 5-20] e di Bakel'man [Sibirsk Mat. II, (1961) pp. 179-186]. I teoremi del §2 e del §3 sono contenuti come casi particolari in teoremi provati nelle due ultime ricerche di Alexandrov.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. D. Alexandrov, *Ricerche sul principio di massimo* (in russo). «Izv. Vysš. Ucebn. Zaned. Matematika», 1958 n. 5, 1959 n. 3 e 5, 1960 n. 3 e 5, 1961 n. 1.

[2] R. Caccioppoli, *Limitazioni integrali per le soluzioni di una equazione lineare ellittica a derivate parziali*, «Giorn. Mat. Battaglini», (4) 4 (80) (1951), 181-212.

[3] D. Greco, *Nuove formole integrali di maggiorazione per le soluzioni di un'equazione lineare di tipo ellittico ed applicazioni alla teoria del potenziale*, «Ricerche di Mat.», 5, (1956) pp. 126-149.

[4] A. I. Košelev, *A priori estimate in L_p and generalized solutions of elliptic equations and systems*, «Uspehi Mat. Nauk», 13 (1958) n. 4 (82) 29-88.

[5] C. Miranda, *Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale a coefficienti discontinui*, «Ann. Mat. pura appl.» 53, (1963) 353-386.

[6] C. Pucci, *Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico*, «Rend. Acc. Naz. Lincei» I, 23 (1957); II, 24 (1958).

[7] — —, *Operatori ellittici estremanti*, «Ann. Mat. pura appl.», 61, (1966) pp. 141-170.

[8] G. Stampacchia, *Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellittiche*, «Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa», 3, 12, (1958) pp. 223-245.

[9] G. Talenti, *Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili*, «Ann. Mat. pura appl.» 4, 59, (1965) 285-304.