Funktionen von beschränkter Variation in der Theorie der Gleichverteilung.

Memoria di EDMUND HLAWKA (a Vienna, Austria)

Enrico Bompiani zu seinem wissenschaftlichen Jubiläum

Zusammenfassung. - *Ist w eine im s-dimensionalen Einheitswürfel E definierte Funktion von beschränkter Variation, $x_1, \ldots, x_n$ eine Folge von Punkten in E, dann wird der Betrag* $\left| \frac{1}{n}(w(x_1) + \ldots + w(x_n)) - \int_E w dx \right|$ *durch die Diskrepanz der Folge nach oben abgeschätzt.*

Wir betrachten Punkte x mit den Koordinaten $p_j(x)$ $(j = 1, \ldots, s)$ im s-dimensionalen Einheitswürfel $\bar{E} = \bar{E}^s$: $0 \leq \xi_j \leq 1 (j = 1, \ldots s)$ Die Projektion von x auf $\bar{E}^l_{i_1, \ldots, i_l}(\xi)$: $0 \leq \xi_i \leq 1$ $(i = i_1, \ldots, i_l)$, $\xi_i = \xi_i (i \neq i_j, j = 1, \ldots l)$, $l \leq s$, nennen wir $p^{(l)}(x) = p^{(l)}_{i_1, \ldots, i_l}(x)$ Es sei nun ω: $x_1, x_2, \ldots,$ eine unendliche Folge von Punkten im E_s, $0 \leq \xi_i < 1$ $(i = 1, \ldots s)$ ω_n die endliche Folge $x_1, \ldots, x_n (n \geq 1)$. Es sei $Q = Q^s$: $\alpha_j \leq \xi_j < \beta_j (j = 1, \ldots s)$ ein beliebiges Intervall in E^s, $n'(Q)$ die Anzahl der Punkte von ω_n in Q dann ist $\nu_n(Q, \omega) = n'/n$ die relative Häufigkeit mit welcher die Punkte von ω_n in Q auftreten. Wir sagen nun, die Folge ω ist gleichverteilt, wenn für jedes Q, $\lim \nu_n$ existiert und

$$\lim_{n \to \infty} \nu_n(Q, \omega) = \mu(Q) \tag{1}$$

ist, wo $\mu(Q)$ das Volumen von Q ist.

Es sei $w(x)$ im Riemannschen Sinne integrierbar auf E

$$\mu(w) = \int_E w(x) dx \quad (dx = dp_1, \ldots, dp_s), \quad m(w, \omega_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} w(x_k)$$

dann hat H. WEYL gezeigt: Ist die Folge ω gleichverteilt, dann ist für jedes w

$$\lim_{n \to \infty} m(w, \omega_n) = \mu(w) \tag{2}$$

Für $w = \chi_Q(x)$ (charakteristische Funktion von Q) erhalten wir (1) zurück. Man nennt

$$D_n(\omega) = D(\omega_n) = \sup_{Q \in E} | \nu_n(Q, \omega) - \mu(Q) |$$

die Diskrepanz von ω_n und es ist bekannt, dass (1) genau dann gilt, wenn

$$\lim_{n \to \infty} D_n(\omega) = 0.$$

Es ist nun eine wichtige Aufgabe in der Theorie der Gleichverteilung für möglichst umfassende Klassen von Funktionen w die Differenz $m(w, \omega_n) - \mu(w)$ mittels der Diskrepanz $D(\omega_n)$ nach oben abzuschätzen. Im Falle $s = 1$ wurde dies von J. F. KOKSMA [1] durchgefürt und zwar unter der Voraussetzung dass w von beschränkter Variation ist, nach dem spezielle Funktionen bereits früher von H. BEHNKE [2] behandelt wurden. Hier soll nun der mehr-dimensionale Fall behandelt werden. Dazu muss zunächst auseinandergesetzt werden, was unter Funktionen von beschränkter Variation verstanden werden soll

Es sei $Z = Z^l(\xi)$ irgendeine Zerlegung von $\bar{E}^l(\xi) = \bar{E}^l_{i_1,\dots,i_l}$ $(l \leq s)$ in achsenparallele Intervalle q: $\alpha_j \leq \xi_j \leq \beta_j$ $(j = i_1, \dots, i_l)$, $\xi_i = \xi_i$ $(i \neq i_j)$. Ist dann $f(\xi)$ eine auf $\bar{E}^l$ definierte Funktion, dann sei

$$(I) \qquad V_l(\xi;\ f) = V_l(\bar{E}^l_{i_1,\dots,i_l}(\xi);\ f) = \sup_Z \sum_{q \in Z} |\Delta^{(l)}_q f|$$

erstreckt über alle Zerlegungen von $\bar{E}^l(\xi)$. Dabei ist

$$\Delta^{(l)}_q f(q) = \sum_{e \in q} (-1)^{\varepsilon(e)} f(e)$$

woealle Eckpunkte von q durchläuft und $\varepsilon(e)$ die Anzahl der α in den Koordinaten von e ist. Ist nun $V_l(f) < \infty$ dann heisst f von beschränkter Variation im Sinne von VITALI.

Es sei nun $l = s$ Jede Zerlegung Z von $\bar{E}^s$ bedingt eine Zerlegung Z^l aller $\bar{E}^l_{i_1,\dots,i_l}(0)$ für alle l mit $1 \leq l \leq s$. Ist dann $f(x)$ auf $\bar{E}^s$ und allen $\bar{E}^l$ von beschränkter Variation, dann heisst f auf E^s von beschränkter Variation im Sinne von HARDY und KRAUSE. Diese Definition der beschränkten Variation wollen wir zugrunde legen.

Wir wollen nun zeigen [3], $w(x)$ auf den ganzen R^s periodisch mit der Periode 1 fortgesetzt,

SATZ 1. - Ist $w(x)$ von beschränkter Variation, dann ist

$$(3) \qquad |m(w) - \mu(w)| \leq V(w) D(\omega_n)$$

(1) «Mathematica B», Zutphen 11, 7-11.

(2) Vgl. KOKSMA, *Diophantische Approximationen*, Kap. 7.

(3) Vorgetragen im Institute for Advanced Study November 1959.

wo

$$V(w) = \sum_{l=1}^{s} \sum_{i_1,\dots,i_l} V(E^l_{i_1,\dots,i_l}(1)\,;\ w) \leqq \sum_{l=1}^{s} \binom{s}{l} K_l$$

wo $K_l = \text{Max}\ V_l(w)$ über alle E^l.

Dabei ist ω_n: $x_1, \dots, x_n$ eine ganz beliebige Folge.

Zum Beweis von (3) wollen wir zunächst einige einfache Eigenschaften von

$$\Delta f = \sum_{e \in q} (-1)^{\varepsilon(e)} f(e)$$

feststellen, wo wir $s = l$ annehmen wollen. Für beliebige nicht negative ganze Zahlen mit $m + n = s$ ist E^s das cartesische Produkt von E^m und E^n, also q das Produkt von Intervallen q_1, q_2 aus E^m und E^n. Dann ist sofort klar, dass $\Delta_q f = \Delta_{q_1}(\Delta_{q_2} f) = \Delta_{q_2}(\Delta_{q_1} f)$, $f(x) = f(x_1, x_2)$ wo $x_1 \in E^m$, $x_2 \in E^n$, denn es ist

$$\sum_{e \in q} (-1)^{\varepsilon(e)} f(e) = \sum_{e_1, e_2} (-1)^{\varepsilon_1(e_1) + \varepsilon_2(e_2)} f(e_1, e_2).$$

Es liege nun eine Zerlegung $\tilde{Z}$ des ganzen s-dimensionalen R^s in achsenparallele Intervalle q: $\alpha_j \leqq \xi_j \leqq \beta_j$ vor, $a(x)$, $b(x)$ Funktionen auf R^s, welche ausserhalb eines Würfels verschwinden, dann ist

$$\sum_q a(0(q)) \Delta_q b = (-1)^s \sum_q b(u(q)) \Delta_q a. \tag{4}$$

Dabei bezeichne stets $u(q)$ den untersten «Eckpunkt» $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ ebenso $0(q)$ den obersten «Eckpunkt» $(\beta_1, \dots, \beta_s)$ von q.

Für $s = 1$ ist (4) richtig, denn ist $\tilde{Z}$ die Zerlegung des R^1 in Intervalle dann ist der obere Eckpunkt β gleich dem unteren Eckpunkt α' des nachfolgenden Intervalls und es ist die linke Seite von (4) (Abelsche Umformung)

$$\sum_q a(\beta)\ (b(\beta) - b(\alpha)) = -\sum_q b(\alpha)\ (a(\beta) - a(\alpha)).$$

Jetzt nehmen wir an, dass (4) im R^{s-1} $(\xi_2, \dots, \xi_s)$ bereits richtigist, dann kann man jedes Intervall q im R^s als Produkt von Intervallen q_1 in R^{s-1}, q_2 in R^1 auffassen und die linke Seite von (4) wird

$$\sum_{q_1, q_2} a(0(q_1), 0(q_2)) \Delta_{q_1}(\Delta_{q_2} b(q_1, q_2)) = (-1)^{s-1} \sum_{q_1, q_2} \Delta_{q_2} b' u(q_1), q_2) \Delta_{q_1} a(q_1, 0(q_2)) =$$

$$= (-1)^s \sum_{q_1, q_2} b(u(q_1), u(q_2)) \Delta_{q_2}(\Delta_{q_1} a).$$

Es liege nun eine Zerlegung Z des $\bar{E}^s$: $0 \leqq \xi_j \leqq 1$ $(j = 1, \dots, s)$ in Intervalle q: $\alpha_j \leqq \xi_j \leqq \beta_j$ vor. Die Zerlegung Z bewirkt auf den $\bar{E}^{l}_{i_1,\dots,i_l}{}^{(1)}$: $0 \leqq \xi_i \leqq 1$ $(i = i_j)$, $\xi_i = 1$ $(i \neq i_j)$ Zerlegungen $\bar{Z}^l$ in Intervalle $\bar{q}^l$. Die Projektionen eines Punktes x in $\bar{E}^s$ auf einen $\bar{E}^{l}_{i_1,\dots,i_l}{}^{(1)}$ bezeichnen wir mit $\bar{p}^{(l)}(x) = \bar{p}^{(l)}_{i_1,\dots,i_l}(x)$. Es seien nun $a(x)$, $b(x)$ Funktionen auf $\bar{E}^s$, $b(x) = 0$ wenn eine Koordinate von x Null ist. Dann gilt

$$\sum_Z a(0(q))\Delta_q b = \sum_{l=0}^{s} (-1)^l \sum_{\bar{E}^l(1)} \sum_{\bar{q}^l \in \bar{Z}^l} \bar{b}(u(\bar{q}))\Delta^{(l)}_{\bar{q}_l} a(\bar{q}^l) \tag{5}$$

wo rechts über alle $\binom{s}{l}$ Intervalle $\bar{E}^l$ (1) summiert ird.

Beweis: Wir erweitern Z zu einer Zerlegung $\tilde{Z}$ des R^s und definieren $a(x) = b(x) = 0$ wenn x nicht in $\bar{E}^s$ dann können wir (4) anwenden. Man braucht dabei nur jene Glieder in (4) berücksichtigen, welche von q in $\tilde{Z}$ stammen, welche entweder zu Z gehören oder mit $\bar{E}$ Randpunkte gemeinsam haben. Ist q ein Quader $\alpha_j \leqq \xi_i \leqq \beta_j$ wo $0(q)$ nicht in $\bar{E}^s$, dann ist $a(0(q)) = 0$. Wenn $0(q)$ in $\bar{E}^s$, aber nicht $u(q)$ dann ist ein $\beta_j = 0$; dann ist aber $b(q) = 0$ für alle Eckpunkte von q, also ist die Summe links in (4) gleich der linken Seite von (5). Nun betrachten wir die rechte Seite in (4)! Wenn $u(q)$ nicht in $\bar{E}$ so ist $b(u(q)) = 0$. Es liege jetzt $u(q)$ auf dem Rande von $\bar{E}$ also seien die Koordinaten von $u(q)$ für ein l: $0 \leqq \alpha_i < 1$ $(i = i_1, \dots, i_l)$, und sonst $\alpha_i = 1$ $(i \neq i_j)$. Die Projektion von q auf $\bar{E}^l$ ist dann das Intervall $\bar{q}^l$: $\alpha_i \leqq \xi_i < \beta_i$ $(i = i_1, \dots, i_l)$, $\xi_i = 1$ $(i \neq i_j)$. In $\Delta_q a(q) = \Sigma (-1)^{\varepsilon(e)} a(e)$ sind alle Glieder Null, wo e nicht auf $\bar{E}^l$ liegt. Wenn aber e auf $\bar{E}^l$ liegt, dann ist $\varepsilon(e) = s - l + \varepsilon(\bar{e})$ wenn $e(\bar{q}^l) = \bar{e}$ ein Eckpunkt von $\bar{q}^l$ ist, denn e enthält ja dann $(s-l)$-mal die Koordinate $\alpha_i = 1$. Damit ist (5) bewiesen.

Nun kann der Beweis von (3) leicht geführt werden. Wir wollen noch für $m(w, \omega_n) = m(w)$ setzen. Wir denken uns die auf E^s definierte Funktion w auf den ganzen R^s periodisch mit der Periode 1 fortgesetzt, damit ist w auch auf $\bar{E}^s$ definiert und es besitzt also w auf einen $\bar{E}^{l}_{i_1,\dots,i_l}(1)$ den gleichen Wert wie auf $E^{l}_{i_1,\dots,i_l}{}^{(0)}$ Es sei nun Z eine Zerlegung $\bar{E}^s$ inIntervalle q. Es sei

$$G(q) = \sup_q w \qquad g(q) = \inf_q w(x).$$

Ist $\overset{*}{\chi}_q(\xi)$ die charakteristische Funktion von $\overset{*}{q}$, $\alpha_j < \xi_j \leqq \beta_j$dann ist für alle x in $0 < \xi_j \leqq 1$

$$\sum_q \chi_q(x) = 1$$

also ist

$$l(w) = m(w) - \mu(w) = l(w \sum_q \overset{*}{\chi}_q) = \sum_q l(w \overset{*}{\chi}_q).$$

Es ist $w(x) = w_1^*(x) - w_2^*(x) - (-1)^s w(0)$, *wo* die w^* monoton nicht ab nehmend in jedem q und $V(w) = V(w_1^*) + V(w_2^*)$, also genügt es (3) für ein w^* zu zeigen. Es ist $G^*(q) = w^*(o(q))$, $g^*(q) = w^*(u(q))$. Es sei

$$f_1(x) = \Sigma\, w^*(o(q))\, \chi_q^*(x),\ f_2(x) = \Sigma\, w^*(u(q))\, \chi_q^*(x).$$

Es ist

$$V(f_i) \leqq V(w^*),\ l(f_i) = \Sigma\, f_i(o(q)) l(\chi_q^*).$$

Nun ist

$$m(f_1) \leqq m(w^*) \leqq m(f_2)$$

Dabei haben wir benützt, das $m(f)$, $\mu(f)$ linear homogene, nicht negative Funktionale in f sind, und dass $m(1) = \mu(1) = 1$, also für $0 \leqq f \leqq 1$, $m(f) \leqq 1$.

Es ist also, wenn wir die analoge Überlegung für μ machen

$$(6) \qquad |\, l(w^*)\, | \leqq \operatorname*{Max}_i\, |\, l(f_i)\, | + \sum_q (G^*(q) - g^*(q)) \mu(\chi_q^*).$$

Es sein nun $z(x;\, \xi)$ bei festen ξ die Funktion $\chi_x(\xi)$, wo χ_x die charakteristische Funktion des Intervalls $0 \leqq \xi_i \leqq x_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ wenn alle $x_i > 0$ und $= 0$ wenn ein $x_i = 0$. Diese Funktion ist auf E^s definiert. Es ist, wenn $q \in Z$, $\Delta_q z = \chi_q(\xi)$. Dies ist für $s = 1$ richtig, denn $\chi_\beta(\xi) - \chi_\alpha(\xi) = \chi_q(\xi)$ $(q\colon\ \alpha < x \leqq \beta)$ allgemein folgt es durch vollständige Induktion: Es ist ja, wenn q wieder ein Produkt von $q_1 \subset E^1$, $q_2 \subset E^{s-1}$ ist, $\Delta_q z(q_1, q_2) = \Delta_{q1}(\Delta_{q2}\chi_{x_1, x_2}) = \Delta_{q1}\chi_{x_1, q_2} = \chi_{q_1, q_2}$ Es ist also

$$(7) \qquad \sum_q f_i(0(q)) l(\chi_q) = \sum_q f_i(0(q)) \Delta_q(l(\chi_x)).$$

Wir können jetzt (5) mit $a = f_i$, $b = l(\chi_x)$ anwenden und erhalten für die linke Seite von (7), (es ist $l(1) = 0$)

$$(8) \qquad \sum_{l=1}^{s} (-1)^l \sum_{\bar{E}^l} \sum_{q_l \subset \bar{Z}^l} l(\chi_{u(\bar{q}_l)}) \Delta_{ql} f_i(q^l).$$

Beachten wir nun, dass $l(\chi_{u(q)}) = m(\chi_u) - \mu(\chi_u)$ dem Betrage nach $\leqq D(\omega_n)$ ist, so folgt sofort, dass (8) dem Betrage nach höchstens gleich der rechten Seite von (3) ist. Lassen wir jetzt Z eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge durchlaufen, so folgt die Behauptung; denn $\Sigma\, (\overset{*}{G}(q) - \overset{*}{g}(q))\, \mu(\chi_q)$ geht dabei gegen 0, da w im Riemannschen Sinne integrierbar ist. Ordnen wir der Folge $\omega_n\colon\ x_1, \ldots, x_n$ die Folge $\omega^l_{n(i_1, \ldots, i_l)}\colon\ \bar{p}^l_{i_1, \ldots, i_l}(x_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ zu mit den Diskrepanzen $D^l_{i_1, \ldots, i_l}$ für alle l dann sehen wir, dass wir die rechte Seite von (3) ersetzen können, durch die Schranke

$$(3') \qquad \sum_l \sum_{i_1, \ldots, i_l} D^l_{i_1, \ldots, i_l} V^{(l)}_{i_1, \ldots, i_l}(w).$$

Nehmen wir an $w(x)$ in E^s besitze alle stetigen Ableitungen

$$\frac{\partial^l w}{\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_l}} \tag{9}$$

($i_1, \ldots, i_l$ alle voneinander verschieden), dann folgt sofort, dass (3″) gleich

$$\sum_l \sum_{i,\ldots,i_l} D^l_{i_1,\ldots,i_l} \int \cdots \int_{E^l_{i_1,\ldots,i_l}} \left| \frac{\partial^l w(p^l(x))}{\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_l}} \right| dp^l(x) \tag{10}$$

wo $dp^l(x) = d\xi_{i_1}, \ldots, d\xi_{i_l}$ ist. Es sind die Formeln (3), (3′) auch dann anwendbar, wenn w nicht die Voraussetzungen von (9) erfüllt, z. B auf $w(x_1, \ldots, x_n) = | x_1, \ldots, x_n |$, da $| \Delta_Q w(x) | \leqq (\beta_1 - \alpha_1) \ldots (\beta_s - \alpha_s)$ ist.

Wir haben beim Beweis der vorher abgeleiteten Formeln nur benützt, dass $m(w)$, $\mu(w)$ nicht negative, lineare und homogene Funktionale mit $m(1) = \mu(1)$ ist, μ total stetig mit beschränkter Dichte. Setzen wir also

$$D = \sup_Q | m(\chi_Q) - \mu(\chi_Q))$$

über alle Intervalle Q in E so bleibt alles richtig.

Ein wichtiger Spezialfall: Es sei $x(t)$ eine reelle integrierbare Funktion definiert für $0 \leqq t \leqq T$ mit Werten in E^s, dann sei

$$m(w) = \frac{1}{T} \int_0^T w(x(t))dt, \quad \mu(w) = \int_{E^s} w(\xi) d\xi$$

und wir kommen zum Fall der C-Gleichverteilung.

Es soll nun eine Anwendung von (3) gemacht werden: Es sei B eine quadrierbare Menge in E^s, w aber nun eine Funktion von beschränkter Variation auf B, d. h. es seien nun alle

$$V_l(B, w) = \sup_\xi V(B, w, \xi), \quad V(B, w, \xi) = \sup \sum_{q \in Z^l(\xi)}^{*} | \Delta_q^{(l)}(w) |$$

beschränkt, wo jetzt nur die q von $Z^l(\xi)$ berücksichtigt werden, die ganz in B liegen. Dann soll $| m(w\chi_B) - \mu(w\chi_B) |$ abgeschätzt werden. Dabei setzen wir voraus, dass B und alle seine Projectionen $B^l_{i_1,\ldots,i_l}$ von jeder Geraden parallel zu den Koordinatenachsen in höchstens h Intervallen geschnitten wird. Ist B konvex, so ist dies mit $h = 1$ erfüllt.

Es sei Z_0 eine Zerlegung von E^s, in Würfeln mit Kantenlänge

$$\rho = \frac{1}{r}(r \geqq 1, \text{ natürliche Zahl}).$$

Es sei A die Vereiniguugsmenge der Quader, welche ganz in int B liegen, C die Vereinigungsmenge der Quader, welche einen Punkt des Randes ∂B von B enthalten. Dann ist Funktion $v(x) = w(x)\chi_A(x)$ in E^s definiert. Wir wenden nun die früheren Uberlegungen auf $v(x)$ an, Dann erhalten wir (3) mit v statt w. Die Summe in (I) für $s = l$, wo$Z$ aus Z_0 durch Verfeinerung hervorgeht, zerlegt sich in 3 Teile, entsprechend den drei Klassen, in welche die q von Z zerfallen: 1. Die q welche nicht in $A \cup C$ liegen. Die zugehörigen Summanden sind Null. 2. Die q welche in A liegen. Der Betrag der Summe über jene q ist

$$\leqq \sum_{q \in Z}{}^{*} \ | \Delta_q w(q) | \tag{3*}$$

3. Die q welche in C liegen. Ist $G = \sup\limits_B w$, dann ist die Summe über jene q

$$2^s GN(C) + 2h \sum_{l=1}^{s} \sum_{i_1,\ldots,i_l} V_{i_1,\ldots,i_l}(B, w)$$

wo N die Anzahl der Quader Q von Z_0 in C ist, also

$$| m(v) - \mu(v) | \leqq (4^s GN(C) + 2h \Sigma)D \tag{11}$$

wo Σ der Ausdruck $\sum\limits_{l=1} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_l} V_{i_1,\ldots,i_l}(B, w)$.

Wir haben nun $m(w\chi_B) - m(v) \leqq m(w(\chi_B - \chi_A)) \leqq Gm(\chi_C)$
Nun ist $m(\chi_C) = m(\chi_C) - \mu(\chi_C) + \mu(\chi_C) \leqq N(C)D + \mu(\chi_C)$
Weiter ist $\mu(w\chi_B) - \mu(v) \leqq G\mu(\chi_C)$ also ist, da $\mu(\chi_C) = N(C)\rho^s$

$$| m(w\chi_B) - \mu(w\chi_B) | \leqq GN(C)(5^s D + \rho^s) + 2hD\, \Sigma.$$

Es ist also nur notwendig noch $N(C)$ abzuschätzen.

Die Würfel von Z_0 haben die Gestalt

$$\frac{h_i}{r} \leqq \xi_i < \frac{h_i + 1}{r} \quad (i = 1, \dots, s)$$

wo $h_1, \dots, h_s$ nicht negative ganze Zahlen sind. Wir fügen zur Menge ∂B noch die Menge aller Punkte $\xi_i = \frac{h_i}{r}$ $(i \neq i_j)$, $\xi_i = x_i (i = i_1, \dots, i_l)$ hinzu, wenn die Menge: $\xi_i = x_i (i = i_j)$, $\frac{h_i}{r} \leqq \xi_i < \frac{h_i + 1}{r} (i \neq i_j)$ einen Punkt von ∂B enthält wo $0 \leqq l \leqq s$, $i_1, \dots, i_l$ beliebig ($l = 0$ die leere Menge). Die so entstandene Menge bezeichnen wir mit F. Sie und jede Projektion von F wird von jeder Geraden parallel zu den Achsen in höchstens $2h$ Intervallen geschnitten, denn zu jedem Intervall, welche von diesen Geraden aus der Projektion von ∂B auf diesen Geraden ausgeschnitten werden, kommt höchstens ein Punkt hinzu. Dann ist

$$N(C) = \sum_{h_1, \dots, h_s} \chi_F(h_1 \rho, \dots, h_s \rho)$$

nach einer Formel von Davenport ([4])

$$| N(C) - l^s \mu(F) | \leqq \sum_{m=0}^{s-1} (2rh)^m \mu^l_{i_1, \dots, i_l}(F).$$

Es ist $\mu(F) = 0$, $\mu^{(l)}(F) = \mu^l(B^{(l)})$) also haben wir (dabei ist $\mu^0 = 1$ definiert)

$$(12) \qquad | m(w\chi_B) - \mu(w\chi_B)) \leqq G \sum_{m=0}^{s-1} (2rh) \mu^l_{i_1, \dots, i_l}(B)(5^s D + r^{-s}) + 2hD\,\Sigma\,.$$

Wir wählen jetzt $r = [D^{-\frac{1}{s}}]$ also, da $D < 1$, so ist die rechte Seite von (12)

$$(13) \quad | m(w\chi_B) - \int_B w dx | \leqq 12\, G D^{\frac{1}{s}} \sum_{m=0}^{s-1} (2h)^m \mu^{(l)}_{i_1, \dots, i_l}(B) + 2hD \sum_{l=1}^{s} \sum_{i_1, \dots, i_l} V_{i_1, \dots, i_l}(B, w)$$

([4]) Journal London 26 (1951) 179-183.

und dies wollten wir zeigen. Berücksichtigt man noch, dass ja alle $\mu^l \leqq 1$ so folgt

$$(14) \qquad \left| m(w\chi_B) - \int\limits_B w dx \right| < (12h)^s \bigl(G + \sum_l \sum_{i_1, \ldots, i_l} V_{i_1, \ldots, i_l}(B, w)\bigr) D^{\frac{1}{s}}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist $w = \chi_B$, dann ist $\Sigma = 0$ und wir erhalten

$$(15) \qquad \left| m(\chi_B) - \int\limits_B dx \right| < (12h)^s D^{\frac{1}{s}}$$

und diese Schranke gilt gleichmässig für alle B, welche mit allen ihren Projektionen von jeder achsenparallelen Geraden in höchstens h Intervallen geschnitten werden.

In den abgeleiteten Formeln kann m ein beliebiges Funktional sein, dagegen muss $\mu(f) = \int f dx$ sein.