# Intégration analytique d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier, I.

Par MASAHIRO IWANO (à Hirosima, Japon).

**Résumé.** - *Notre but est à rechercher, d'après la méthode de M. le Prof.* MASUO HUKUHARA, *la signification analytique de la solution formelle, de* (1.1), *dépendant de quelconques constantes arbitraires.*

## Introduction.

1. Nous considérons un système d'équations différentielles non linéaires

$$(1.1) \qquad x^{\sigma+1}\frac{dy_j}{dx} = f_j(x,\ y_1, \dots ,\ y_n) \qquad (j = 1, \dots , n),$$

où les $f_j(x, y_1, \dots , y_n)$ $(j = 1, \dots , n)$ sont des fonctions holomorphes de $x, y_1, \dots , y_n$ dans le domaine

$$|x| < r,\ |y_1| < \eta, \dots ,\ |y_n| < \eta\,.$$

L'étude de ces équations se compose de deux parties; le premier problème est la recherche d'une solution développable asymptotiquement en séries entières formelles de $x$ et le deuxieme problème est la recherche des conditions pour la convergence de la solution formelle dépendant de quelconques constantes arbitraires.

Sur ce sujet nous devons citer les mémoires de MM. les Professeurs MASUO HUKUHARA [1], [2], [3], [4], J. MALMQUIST [1], [2], [3], [4] et J. TRJITZINSKY [1], [2].

2. Considérons d'abord le cas où les équations (1.1) sont linéaires. Il est bien connu que les séries entières formelles de $x$ qui satisfont formellement aux équations données, si l'origine est un point singulier irrégulier, ne sont pas convergentes en général. Pourtant elles représentent toujours asymptotiquement des solutions des équations données.

M. J. TRJITZINSKY [1] est le premier qui l'a établi sans aucune restriction sur les racines de l'équation caractéristique. J. MALMQUIST [2], [3] a montré, en 1941, que le domaine où les développements asymptotiques des solutions sont valables est plus étendu que celui de M. J. TRJITZINSKY, tandis que ce problème a été complètement résolu, en 1942, par M. M. HUKUHARA dans son beau mémoire [3]. On peut appliquer sans aucune modification essentielle la méthode de M. M. HUKUHARA aux équations non linéaires. Et, en ce qui concerne le premier problème, l'extension est immédiate. Ce résultat donne la réponse au premier problème et joue un rôle fondamental dans l'étude du deuxième problème que nous voulons étudier.

**3.** Rappelons les résultats connus concernant le deuxième problème. Nous considérons une équation différentielle non linéaire du premier ordre

$$x^{\sigma+1}\frac{dy}{dx} = yf(x, y), \tag{3.1}$$

dont le second membre est une fonction holomorphe de $x$, $y$ pour

$$\Theta_- < \arg x < \Theta_+ \quad , \quad |x| < r \quad , \quad |y| < \eta \ , \tag{3.2}$$

de sorte que le développement suivant les puissances de $y$

$$f(x, y) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{\sigma-1}x^{\sigma-1} + a_\sigma x^\sigma + \dots + y \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) y^k \qquad (a_0 \neq 0)$$

est absolument et uniformément convergent pour (3.2). Posons

$$\Lambda(x) = \int_\infty^x \frac{a_0 + \dots + a_{\sigma-1}x^{\sigma-1}}{x^{\sigma+1}}\, dx\,.$$

Supposons que dans le secteur $\Theta_- < \varphi < \Theta_+$ se trouve un secteur dans lequel la fonction $\exp\Lambda(x)$ tend vers 0 pour $x \to 0$.

M. M. HUKUHARA [4] a obtenu, en 1949, le résultat suivant.

*Il y a une solution développable en série*

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)[C\, e^{\Lambda(x)} x^{a_\sigma}]^k \tag{3.3}$$

*qui est absolument et uniformément convergente pour*

$$\max\left[\frac{1}{\sigma}\left(-\frac{3\pi}{2}+\omega\right),\ \Theta_-\right] < \arg x < \min\left[\frac{1}{\sigma}\left(\frac{3\pi}{2}+\omega\right),\ \Theta_+\right] \tag{3.4}$$
$$|x| < r', \qquad |C\, e^{\Lambda(x)} x^{a_\sigma}| < \xi\,,$$

*où* $\omega$ *est l'argument de* $a_0$*; les coefficients* $\varphi_k(x)$ *sont des fonctions holomorphes pour*

$$\max\left[\frac{1}{\sigma}\left(-\frac{3\pi}{2}+\omega\right),\ \Theta_-\right] < \arg x < \min\left[\frac{1}{\sigma}\left(\frac{3\pi}{2}+\omega\right),\ \Theta_+\right],\ |x| < r' \tag{3.5}$$

*et développables asymptotiquement en séries*

$$\varphi_k(x) \approx \sum \varphi_{km} x^m \tag{3.6}$$

*pour* (3.5).

J. MALMQUIST [1] a obtenu aussi un résultat analogue, en 1921, en supposant que le second membre de (3.1) soit une fonction holomorphe pour $|x| < r$, $|y| < \eta$. M. J. TRJITZINSKY [2] n'a obtenu, en 1938, qu'une solution développable asymptotiquement en série

$$y \approx \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) C^k \tag{3.7}$$

dans un domaine moins étendu que le domaine (3.5). Cette série coïncide formellement avec la série $\sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k(x)\ e^{k\Lambda(x)} x^{k\alpha_\sigma}] C^k$.

**4.** J. MALMQUIST a étendu son résultat à un système d'équations différentielles non linéaires et a obtenu le résultat suivant, en 1941, dans ses mémoires [2], [3] et [4].

Désignons par $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) y_k$ les termes du premier degré en $y_1, \dots, y_n$ qui se trouvent dans $f_j(x, y_1, \dots, y_n)$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines de l'équation caractéristique

$$|a_{jk}(0) - \lambda\delta_{jk}| = 0. \tag{4.1}$$

*Supposons que $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ se trouvent d'un côté d'une ligne droite passant par l'origine et $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n$ sur cette ligne ou de l'autre côté. Alors il existe une solution contenant s constantes arbitraires $C_1, \dots, C_s$ et développable en séries*

$$y_j = \sum \varphi_{jp_1 \dots p_s}(x) z_1^{p_1} \dots z_s^{p_s} \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{4.2}$$

*qui sont absolument et uniformément convergentes pour des valeurs de $x$, $z_1, \dots, z_s$, considérées comme des variables indépendantes, telles que*

$$\omega_- < \arg x < \omega_+, \qquad |x| < r', \qquad |z_1| < \zeta', \dots, \qquad |z_s| < \zeta'; \tag{4.3}$$

*les coefficients $\varphi_{jp_1 \dots p_s}(x)$ sont des fonctions holomorphes pour*

$$\omega_- < \arg x < \omega_+, \qquad |x| < r' \tag{4.4}$$

*et développables asymptotiquement en séries*

$$\varphi_{jp_1 \dots p_s}(x) \approx \sum \varphi_{jmp_1 \dots p_s} x^m \tag{4.5}$$

*pour* (4.4) *et les $z_k$ $(k = 1, \dots, s)$ sont des fonctions holomorphes dans le domaine angulaire donné et admettent le développement de la forme*

$$z_k = e^{\Lambda_k(x)} x^{\lambda_{k\sigma}} [C_k + g_k(C_1, \dots, C_{k-1}, \log x)] \qquad (j = 1, \dots, s),$$

*où $\Lambda_k(x)$ sont des polynomes d'une certaine puissance fractionnaire de $x^{-1}$ de degré $\sigma$ et $g_k(c_1, \dots, c_{k-1}, \log x)$ $(k = 1, \dots, s)$ sont des fonctions entières et rationnelles de $c_1, \dots, c_{k-1}$, $\log x$.*

Voici la définition des angles $\omega_-$ et $\omega_+$ due à lui. Soient $\varphi_0$ et $\varphi_0 + \frac{\pi}{\sigma}$ des directions différentes des directions singulières de $\Lambda_{j\mathfrak{g}}(x) = \Lambda_j(x) - \sum_{k=1}^{\alpha_1} p_k \Lambda_k(x)$ (voir n. 7). Partons d'un secteur $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \frac{\pi}{\sigma}$ qui contient un secteur $\varphi' \leqq \varphi \leqq \varphi''$ dans lequel toutes les fonctions $\exp \Lambda_k(x)$ $(k = 1, \dots, s)$ tendent vers 0 pour $x \to 0$. Le secteur $\omega_- < \arg x < \omega_+$ est alors le plus grand que l'on obtient en agrandissant le secteur $\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + \frac{\pi}{\sigma}$ dans deux directions sans rencontrer aucune direction singulière des $\Lambda_{j\mathfrak{g}}(x)$.

Ici, il est à remarquer que *tous les* $\Lambda_k(x)$ $(k = 1, \dots, s)$ *sont des polynomes de* $x^{-1}$ *du degré le plus élevé* $\sigma$ *parmi ceux des* $n$ *polynomes* $\Lambda_1(x), \dots, \Lambda_n(x)$. *Par suite, J. Malmquist n'a étudié point la convergence d'une solution formelle qui correspond aux polynomes* $\Lambda_{k'}(x)$ *dont les degrés* $\sigma_{k'}$ *en* $x^{-1}$ *sont moindres que* $\sigma$.

Avant cela, M. J. TRJITZINSKY aussi a étudié les équations (1.1), en supposant que les seconds membres du système (1.1) s'annulent pour $y_1 = 0, \dots \dots, y_n = 0$. Mais il a démontré seulement la développabilité asymptotique en la solution formelle, tandis que J. MALMQUIST en a démontré la convergence. M. J. TRJITZINSKY [2] a obtenu, en 1938, un résultat concernant la développabilité asymptotique en séries de puissances de $C_1, \dots, C_{s'}$

$$y_j \approx \sum \psi_{jp_1 \dots p_{s'}}(x) C_1^{p_1} \dots C_{s'}^{p_{s'}} \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{4.6}$$

dans un domaine

$$\omega'_- < \arg x < \omega'_+, \qquad |x| < r'', \qquad |C_1| < \zeta'', \dots, |C_{s'}| < \zeta''.$$

Le secteur $\omega'_- \leqq \varphi \leqq \omega'_+$ de M. J. TRJITZINSKY est contenu en général dans le secteur $\omega_- \leqq \varphi \leqq \omega_+$ de J. MALMQUIST et le nombre $s'$ est en général moindre que $s$.

Voici la définition de $s'$:

$$\Lambda_1(x) \equiv \dots \equiv \Lambda_{s'}(x), \quad \Re\Lambda_1(x) < \Re\Lambda_k(x) < 0 \qquad (k = s'+1, \dots, s)$$

pour $\omega'_- \leqq \varphi \leqq \omega'_+$.

Si l'on pose $z_k = 0$ pour $k = s'+1, \dots, s$ dans les séries (4.2) et si l'on ordonne ces séries suivant les puissances de $C_1, \dots, C_{s'}$, on retrouve les séries (4.6) de M. J. TRJITZINSKY. Les séries ainsi obtenues sont évidemment convergentes d'après le résultat de J. MALMQUIST.

5. M. M. HUKUHARA [2] a obtenu, en 1940, un résultat d'après lequel les équations (1.1) se changent par une transformation formelle en un système réduit qui se résout par quadratures, en intégrant successivement des équations différentielles linéaires du premier ordre. On aura donc une solution formelle du système (1.1) en portant dans la transformation formelle une

solution du système réduit. Notre but est la recherche de la signification analytique de la solution formelle dont l'étude il a laissée de côté jusqu'à présent. Le problème dont nous nous occupons maintenant se pose comme il suit: *chercher les conditions pour la convergence de la solution formelle sans aucune restriction sur les degrés des polynomes* $\Lambda_j(x)$ *dont dépend la solution formelle.*

La solution formelle n'est pas convergente en général. On rencontre de grande difficulté, quand on veut en étudier la convergence. Mais on verra que le dernier résultat (Théorème 2) de J. MALMQUIST [4] se déduit du notre théorème (voir **n. 27**) comme un corollaire. Dans le cas général il me semble très difficile de chercher les conditions nécessaires pour la convergence. Il m'a fallu me contenter de donner seulement des conditions suffisantes. Le point essentiel de notre méthode est à déterminer les chemins d'intégration les plus favorables.

J. MALMQUIST a employé la méthode d'approximation successive pour le premier problème et la méthode des fonctions majorantes pour le deuxième problème. Nous employons le théorème d'existence des points fixes dans l'espace fonctionnel.

**6.** Dans le chapitre I, nous rappelons les résultats obtenus par M. M. HUKUHARA, [1], [2] et [3]. Dans la section I, nous exposons quelques définitions dues à M. M. HUKUHARA, concernant un polynome $\Lambda(x)$ de $x^{-1}$ et puis sans démonstration l'énoncé du théorème d'existence répondant au premier problème. Les sections II et III sont consacrées à l'étude d'une transformation du système (1.1). Dans le chapitre II, nous donnons la démonstration de la convergence de la solution formelle (4.2) où l'on annule certains des $z_1, \ldots, z_s$. Le résultat obtenu dans ce chapitre entraîne celui de J. MALMQUIST comme un corollaire. Dans un autre mémoire, nous traiterons un cas plus général.

En terminant cette introduction, l'auteur se fait un honneur d'exprimer ses remercîments les plus vifs à Monsieur MASUO HUKUHARA, Professeur à l'Université de Tokyo, pour l'intérêt qu'il m'a témoigné et pour les conseils qu'il m'a donnés au cours de la préparation de ce Mémoire. L'auteur remercie aussi Monsieur YASUTAKA SIBUYA à l'Université de Tokyo de la bienveillance sincère en me donnant de diverses suggestions profitables.

## CHAPITRE I. - RÉDUCTION FORMELLE.

### I. Préliminaires.

**7.** Soit $\Lambda(x)$ un polynome de $x^{-1}$ de degré $\sigma$:

$$\Lambda(x) = -\frac{1}{\sigma}\frac{\lambda_0}{x^\sigma} - \ldots - \frac{\lambda_{\sigma-1}}{x} \qquad (\lambda_0 \neq 0). \tag{7.1}$$

Le plan de nombres complexes se partage en $2\sigma$ régions: les $\sigma$ d'entre elles sont les régions, appelées ***régions à partie réelle négative*** par rapport à $\Lambda(x)$, où l'on a $\mathfrak{R}(-\lambda_0 x^{-\sigma}) < 0$ et les autres sont les régions, appelées ***régions à partie réelle non négative*** par rapport à $\Lambda(x)$, où l'on a $\mathfrak{R}(-\lambda_0 x^{-\sigma}) \geqq 0$. Si $\Lambda(x) \equiv 0$, le plan entier est une région à partie réelle non négative.

Soit $r(\varphi)$ une fonction continue et positive d'une variable réelle $\varphi$ dans l'intervalle $\theta \leqq \varphi \leqq \theta'$. Pour les domaines angulaires

$$\mathfrak{D}(\theta,\ \theta',\ r(\varphi)): \quad \theta < \arg x < \theta', \quad |x| < r(\arg x),$$
$$\mathfrak{D}[\theta,\ \theta',\ r(\varphi)]: \quad \theta \leqq \arg x \leqq \theta', \quad |x| \leqq r(\arg x),$$

nous appelons $\theta$, $\theta'$ et $r(\arg x)$ leurs ***extrémités inférieure, supérieure*** et ***radiale*** respectivement.

Si la région $\mathfrak{D}[\theta, \theta', \infty]$ ne contient pas une des régions à partie réelle négative par rapport à $\Lambda(x)$ tout entière, le domaine $\mathfrak{D}[\theta, \theta', r(\varphi)]$ est appelé ***région propre*** par rapport à $\Lambda(x)$.

Une direction $(\varphi)$ est appelée *direction singulière* de $\Lambda(x)$, si le degré du polynome en $r^{-1}$: $\mathfrak{R}\Lambda(re^{i\varphi})$ est moindre que celui du polynome en $x^{-1}$: $\Lambda(x)$. Nous appellerons *direction singulière ascendante* une direction singulière $(\varphi)$ qui est l'extrémité supérieure d'une région à partie réelle négative par rapport à $\Lambda(x)$. Nous la désignerons par $(\theta_+)$. On définit, de même, *direction singulière descendante* que nous désignerons par $(\theta_-)$. On aura alors

$$\sigma\theta_+ - \arg\lambda_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \sigma\theta_- - \arg\lambda_0 = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

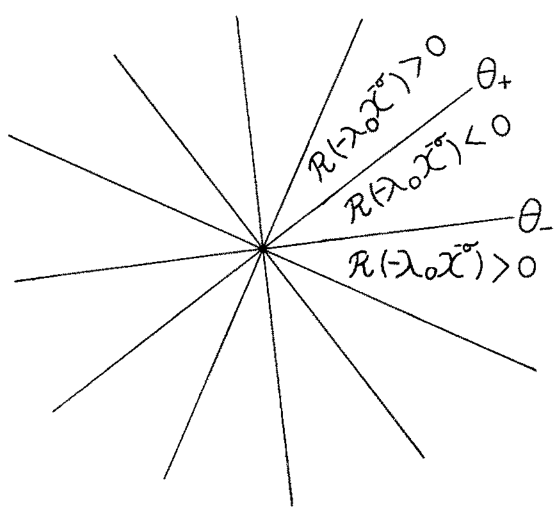


Fig. 1

Si le domaine $\mathfrak{D}[\theta, \theta', r(\varphi)]$ est une région propre par rapport à $\Lambda(x)$, il existe dans l'intervalle $\theta \leqq \varphi \leqq \theta'$ au plus deux directions singulières l'une ascendante et l'autre descendante.

Soient donnés en général $n$ polynomes $\Lambda_1(x), \dots, \Lambda_n(x)$ de $x^{-1}$. Si le domaine $\mathfrak{D}[\theta, \theta', r(\varphi)]$ est une intersection des régions à parties réelles négatives par rapport aux $\Lambda_j(x)$, le domaine $\mathfrak{D}[\theta, \theta', r(\varphi)]$ est appelé *région à partie réelle négative* par rapport aux $\Lambda_1(x), \dots, \Lambda_n(x)$. On définit de même *région à partie réelle non négative* et *région propre* par rapport aux $\Lambda_1(x), \dots, \Lambda_n(x)$.

**8.** Supposons d'abord que les seconds membres $f_j(x, y_1, \dots, y_n)$ du système (1.1) s'annulent pour $y_1 = 0, \dots, y_n = 0$. Si l'on fait comme d'habitude un changement convenable de variables

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(x) z_k \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{8.1}$$

où les $p_{jk}(x)$ sont des polynomes d'une certaine puissance fractionnaire de $x^{-1}$, le système (1.1) se réduit à la forme suivante

$$\begin{aligned} x^{\sigma+1} \frac{dz_j}{dx} &= \lambda_j(x) z_j + x^{\sigma}(\lambda_{j\sigma} z_j + \varepsilon_j z_{j+1}) + \\ &+ x^{\sigma+1} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) z_k + x^{\sigma+1} \Sigma'' a_{j\mathfrak{K}}(x) z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \qquad (j = 1, \dots, n), \end{aligned} \tag{8.2}$$

$\Sigma''$ désignant la sommation étendue à tous les arrangements $(k_1, \dots, k_n)$ tels que $k_1 + \dots + k_n \geqq 2$. En remplaçant, s'il est nécessaire, $x$ par une certaine puissance fractionnaire de $x$, on peut supposer que les seconds membres de (8.2) soient assujettis aux conditions suivantes:

1. *Les $\lambda_j(x)$ sont des polynomes de $x$ de degrés au plus égaux à $\sigma - 1$; l'une au moins des $\lambda_1(0), \dots, \lambda_n(0)$ est différente de zéro et $\lambda_{j\sigma}$ sont des constantes* [1];

2. *Les $a_{jk}(x)$ et $a_{j\mathfrak{K}}(x)$ sont des fonctions holomorphes dans le domaine $|x| < r_0'(< r_0)$ et les séries, qui se trouvent dans les seconds membres de (8.2), sont convergentes uniformément dans le domaine*

$$|x| < r'_0, \qquad |z_1| < \eta'_0, \dots, |z_n| < \eta'_0; \tag{8.3}$$

3. *Si l'on a à la fois $\lambda_j(x) = \lambda_k(x)$ et $\lambda_{j\sigma} \equiv \lambda_{k\sigma}$ (mod. 1), on a $\lambda_{j\sigma} = \lambda_{k\sigma}$; d'autre part, l'inégalité $\varepsilon_j \neq 0$ entraîne*

$$\lambda_j(x) = \lambda_{j+1}(x) \quad et \quad \lambda_{j\sigma} = \lambda_{j+1\sigma}.$$

On peut donner à $\varepsilon_j$ $(j = 1, \dots, n-1)$ une valeur non négative aussi petite que l'on veut.

---

[1] Nous ne traiterons pas le cas déjà étudié : $\lambda_1(x) \equiv \dots \equiv \lambda_n(x) \equiv 0$.

Posons

$$(8.4)\qquad \Lambda_j(x)=\int_\infty^x \frac{\lambda_j(x)}{x^{\sigma+1}}\,dx=-\frac{1}{\sigma}\frac{\lambda_{j0}}{x^\sigma}-\dots-\frac{\lambda_{j\sigma-1}}{x}\qquad (j=1,\dots,n).$$

Nous désignons $\lambda_{j\sigma-\sigma_j}(\neq 0)$ par $\lambda_j$, $\sigma_j$ étant le degré de $\Lambda_j(x)$ en $x^{-1}$.

**9.** On sait que par un changement linéaire formel

$$(9.1)\qquad z_j=u_j+\sum_{k=1}^n q_{jk}(x)u_k\qquad (j=1,\dots,n),$$

où

$$(9.2)\qquad q_{jk}(x)\approx\sum_{m=1}^\infty q_{jkm}x^m\qquad (j,\ k=1,\dots,n),$$

le système (8.2) se transforme formellement à un système de la forme

$$(9.3)\qquad x^{\sigma+1}\frac{du_j}{dx}=\lambda_j(x)u_j+x^\sigma(\lambda_{j\sigma}u_j+\varepsilon_j u_{j+1})+$$
$$+x^{\sigma+1}\Sigma''\, b_{j\mathfrak{K}}(x)u_1^{k_1}\dots u_n^{k_n}\qquad (j=1,\dots,n).$$

Concernant l'analyticité de telles transformations formelles, M. M. HUKUHARA [3] a démontré le théorème suivant:

*Si* $\mathfrak{D}[\theta,\ \theta'\ r_0'']$ *est une région propre par rapport aux* $\Lambda_{jk}(x)=\Lambda_j(x)-\Lambda_k(x)\ (j,\ k=1,\dots,n)$, *le système* (8.2) *se change en* (9.3) *par une transformation linéaire* (9.1) *dont les coefficients* $q_{jk}(x)$ *sont des fonctions holomorphes dans le domaine* $\mathfrak{D}[\theta,\ \theta',\ r_0'']$ *et développables asymptotiquement en séries* (9.2) *dans le domaine* $\mathfrak{D}[\theta,\ \theta',\ r_0'']$.

On voit d'après ce théorème que les seconds membres du système (9.3) sont des séries de puissances de $u_1,\dots,u_n$ convergentes uniformément dans le domaine

$$(9.4)\qquad x\in\mathfrak{D}[\theta,\ \theta',\ r_0''],\ |u_1|<\eta_0'',\dots,\ |u_n|<\eta_0''\qquad (\eta_0''<\eta_0'<\eta_0,\ r_0''<r_0'<r_0)$$

et les $b_{j\mathfrak{K}}(x)$ sont des fonctions holomorphes dans le domaine $\mathfrak{D}[\theta,\ \theta',\ r_0'']$ et développables asymptotiquement en des séries entières de $x$.

**10.** Considérons maintenant le cas où les $f_j(x,\ y_1,\dots,\ y_n)\ (j=1,\dots,n)$ s'annulent pour $x=0,\ y_1=0,\dots,\ y_n=0$, tandis qu'une au moins des fonctions $f_j(x,\ 0,\dots,\ 0)$ ne s'annule pas identiquement.

Si l'on fait une transformation convenable

$$(10.1)\qquad y_j=\sum_{k=1}^n \tilde p_{jk}(x)\Big(u_k+\sum_{h=1}^n \tilde q_{kh}(x)u_h\Big)\qquad (j=1,\dots,n),$$

dont les coefficients $\tilde p_{jk}(x)$ et $\tilde q_{kh}(x)$ admettent la signification analogue à celle des $p_{jk}(x)$ et $q_{kh}(x)$, on aura les égalités suivantes

$$(10.2) \qquad x^{\sigma+1}\frac{du_j}{dx} = b_j(x) + \lambda_j(x)u_j + x^{\sigma}(\lambda_{j\sigma}u_j + \varepsilon_j u_{j+1}) + \\ + x^{\sigma+1}\Sigma'' d_{j\mathfrak{K}}(x)u_1^{k_1}\dots u_n^{k_n} \qquad (j=1,\dots,n),$$

les $b_j(x)$ et $d_{j\mathfrak{K}}(x)$ admettant la signification analogue à celle des $b_{j\mathfrak{K}}(x)$. Les seconds membres du système (10.2) sont des séries de puissances de $u_1, \dots, u_n$ convergentes uniformément pour (9.4).

Or, il existe en général une solution formelle de (10.2) développable formellement en séries entières formelles de $x$

$$(10.3) \qquad u_j \approx \sum_{m=1}^{\infty} d_{jm}x^m \qquad (j=1,\dots,n).$$

Il en est certainement ainsi si $\lambda_j(x) \not\equiv 0$ $(j=1,\dots,n)$.

On peut généraliser, sans aucune modification essentielle dans la démonstration, le théorème de M. M. HUKUHARA [3] aux équations non linéaires comme il suit.

**Théorème d'existence.** *Soit $\mathfrak{D}[\Theta, \Theta', r_0'']$ la région propre par rapport aux polynomes $\Lambda_j(x)$, $\Lambda_{jk}(x)$ $(j, k=1,\dots,n)$. Il existe une solution développable asymptotiquement en séries* (10.3) *dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta, \Theta', r_0'']$. Le degré de liberté de la solution est égal au nombre des indices $j$ tels que la région $\mathfrak{D}[\Theta, \Theta', \infty]$ soit contenue dans une des régions à partie réelle négative par rapport à $\Lambda_j(x)$.*

Soient $u_j = \varphi_j(x)$ une de ces solutions, et faisons le changement des variables

$$(10.4) \qquad v_j = u_j - \varphi_j(x) \qquad (j=1,\dots,n).$$

Puisque le système transformé admet une solution particulière $v_1 = 0, \dots, v_n = 0$, les seconds membres du système transformé doivent s'annuler identiquement pour $v_1 = 0, \dots, v_n = 0$. Par suite, le système transformé prend la forme des équations en $u_1, \dots, u_n$ au n. 8.

## II. Réduction formelle.

**11.** Considérons maintenant le système suivant

$$(11.1) \qquad x^{\sigma+1}\frac{dy_j}{dx} = \lambda_j(x)y_j + x^{\sigma}h_j(x, y_1, \dots, y_n) \qquad (j=1,\dots,n),$$

où les $h_j(x, y_1, \dots, y_n)$ $(j=1,\dots,n)$ sont des fonctions holomorphes pour

$$(11.2) \qquad x \in \mathfrak{D}[\Theta, \Theta', r], \ |y_1| < \eta, \dots, |y_n| < \eta,$$

de sorte que l'on a les développements

$$h_j(x,\ y_1, \dots,\ y_n) = \lambda_{j\sigma} y_j + \varepsilon_j y_{j+1} + x\,\Sigma''\, a_{j\mathfrak{K}}(x) y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

où les $a_{j\mathfrak{K}}(x)$ sont des fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}[\Theta,\ \Theta',\ r]$ et développables asymptotiquement en séries entières de $x$:

$$a_{j\mathfrak{K}}(x) \approx \sum_{m=0}^{\infty} a_{jm\mathfrak{K}} x^m$$

$\lambda_j(x)$ et $\lambda_{j\sigma}$ $(j = 1, \dots, n)$ ayant la même signification qu'au **n. 8.**

**12. Hypothèses.** Soit $(\theta_0)$ une direction quelconque non singulière des $\Lambda_j(x)$ et des $\Lambda_{jk}(x)$ se trouvant entre $(\Theta)$ et $(\Theta')$. On peut alors supposer que l'on ait les inégalités

$$(\mathrm{H}_1)\quad \left\{\begin{array}{l} \Re\Lambda_1(x) \leqq \dots \leqq \Re\Lambda_\alpha(x) < 0 < \Re\Lambda_{\gamma+1}(x) \leqq \dots \leqq \Re\Lambda_n(x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad \arg x = \theta_0,\ |x| \leqq \delta_0 \\ \Re\lambda_{\alpha+1\sigma} \geqq \dots \geqq \Re\lambda_{\beta\sigma} > 0 \geqq \Re\lambda_{\beta+1\sigma} \geqq \dots \geqq \Re\lambda_{\gamma\sigma} \quad \text{et} \\ \qquad \Lambda_j(x) \equiv 0 \quad (j = \alpha + 1, \dots, \gamma) \end{array}\right.$$

et que les degrés $\sigma_j$ de polynomes $\Lambda_j(x)$ satisfassent aux inégalités

$$(\mathrm{H}_2)\qquad \sigma_1 = \dots = \sigma_{\alpha_1} > \sigma_{\alpha_1+1} = \dots = \sigma_{\alpha_2} > \dots > \sigma_{\alpha_{h-1}+1} = \dots = \sigma_{\alpha_h} \qquad (\alpha_h = \alpha)$$

Nous écrivons brièvement $\sigma_k^* = \sigma_{\alpha_{k-1}+1} = \dots = \sigma_{\alpha_k}$ $\quad (k = 1, \dots, h\,;\ \alpha_0 = 0)$.

**13. Transformation formelle de M. M. Hukuhara.**

Faisons maintenant une transformation formelle

$$(13.1)\qquad y_j = z_j + \Sigma_N P_{jp'_0\mathfrak{P}} x^{p'_0} z_1^{p_1} \dots z_n^{p_n} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

où $\Sigma_N$ désigne la sommation étendue à tous les arrangements des $n+1$ entiers non négatifs $(p'_0,\ p_1, \dots,\ p_n)$ tels que $p_1 + \dots + p_n = N$. Soit

$$x^{\sigma+1}\frac{dz_j}{dx} = \lambda_j(x) z_j + x^\sigma(\lambda_{j\sigma} z_j + \varepsilon_j z_{j+1}) + x^{\sigma+1}\,\Sigma''\, b_{jp_0\mathfrak{P}} x^{p_0} z_1^{p_1} \dots z_n^{p_n} \quad (j = 1, \dots, n)$$

le système transformé de (11.1). On obtient sans peine

$$b_{jp_0\mathfrak{P}} = a_{jp_0\mathfrak{P}} \qquad \text{pour} \qquad p_1 + \dots + p_n < N.$$

D'autre part on peut déterminer les coefficients $P_{jp'_0\mathfrak{P}}$ des séries (13.1) de manière que l'on ait

$$b_{jp_0\mathfrak{P}} = 0 \qquad \text{pour} \qquad p_1 + \dots + p_n = N,$$

lorsque l'on n'a pas en même temps les relations

$$(\mathrm{R}_\sigma)\qquad \Lambda_j(x) = p_1\Lambda_1(x) + \dots + p_n\Lambda_n(x),$$

$$(\mathrm{R}_0)\qquad \lambda_{j\sigma} = p_0 + 1 + p_1\lambda_{1\sigma} + \dots + p_n\lambda_{n\sigma} \quad (p_0 = p'_0 - \sigma - 1).$$

Ensuite, faisons successivement les changements de variables

$$y_j = z_{j:1} \qquad (j=1,\dots,n),$$

$$z_{j:1} = z_{j:2} + \Sigma_2 P_{jp'_0\mathfrak{P}} x^{p'_0} z_{1:2}^{p_1} \dots z_{n:2}^{p_n} \qquad (j=1,\dots,n),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

(13.2) $$z_{j:N-1} = z_{j:N} + \Sigma_N P_{jp'_0\mathfrak{P}} x^{p'_0} z_{1:N}^{p_1} \dots z_{n:N}^{p_n} \qquad (j=1,\dots,n)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

En faisant tendre $N$ vers l'infini, on obtient la

**Proposition.** *Il existe une transformation formelle*

(13.3) $$y_j \approx z_j + \Sigma'' P_{jp'_0\mathfrak{P}} x^{p'_0} z_1^{p_1} \dots z_n^{p_n} \qquad (j=1,\dots,n)$$

*par laquelle le système* (11.1) *se réduit à la forme*

(13.4) $$x^{\sigma+1}\frac{dz_j}{dx} \approx \lambda_j(x) z_j + x^\sigma(\lambda_{j\sigma} z_j + \varepsilon_j z_{j+1}) + $$
$$+ x^{\sigma+1}\Sigma'' c_{jp_0\mathfrak{P}} x^{p_0} z_1^{p_1} \dots z_n^{p_n} \qquad (j=1,\dots,n),$$

*où les coefficients constants* $c_{jp_0\mathfrak{P}}$ *sont nuls sauf au cas où l'on a* $(\mathrm{R}_\sigma)$ *et* $(\mathrm{R}_0)$, *c'est-à-dire* $c_{jp_0\mathfrak{P}} \neq 0$ *entraîne* $(\mathrm{R}_\sigma)$ *et* $(\mathrm{R}_0)$.

## III. Solutions formelles.

**14. Remarque sur le système** (13.4).

On voit sans peine que si l'on a $(\mathrm{R}_\sigma)$, $(\mathrm{R}_0)$ et $j > \beta$, l'un au moins des $p_{\beta+1}, \dots, p_n$ est positif. Les $(n-\beta)$ dernières des équations (13.4) sont donc satisfaites si l'on y pose

(14.1) $$z_{\beta+1} = \dots = z_n = 0.$$

Les $\beta$ premières des équations (13.4) deviennent

(E) $$x^{\sigma+1}\frac{dz_j}{dx} \approx \lambda_j(x) z_j + x^\sigma(\lambda_{j\sigma} z_j + \varepsilon_j z_{j+1}) + $$
$$+ x^{\sigma+1}\Sigma'' c_{jp_0\mathfrak{P}} x^{p_0} z_1^{p_1} \dots z_\beta^{p_\beta} \qquad (j=1,\dots,\beta)$$

où

$$c_{jp_0\mathfrak{P}} = c_{jp_0p_1\dots p_\beta 0\dots 0}.$$

Si

$$c_{jp_0\mathfrak{P}} \neq 0, \quad p_1 + \dots + p_\beta \geqq 2 \quad \text{et} \quad j \leqq \beta,$$

on a nécessairement

$(\mathrm{R}'_\sigma)$ $$\Lambda_j(x) = p_1\Lambda_1(x) + \dots + p_\beta\Lambda_\beta(x),$$

$(\mathrm{R}'_0)$ $$\lambda_{j\sigma} = p_0 + 1 + p_1\lambda_{1\sigma} + \dots + p_\beta\lambda_{\beta\sigma}.$$

Les arrangements $(j;\, p_0,\, p_1, \dots,\, p_\beta)$ pour lesquels on a $(\mathrm{R}_\sigma')$ et $(\mathrm{R}_0')$, sont en nombre fini ; c'est ce que l'on voit sans peine en vertu de $(\mathrm{H}_1)$. Par conséquent les seconds membres des équations (E) sont des polynomes en $x, z_1, \dots, z_\beta$. On déduit de $(\mathrm{R}_\sigma')$ et $(\mathrm{R}_0')$ les relations

$$\mathfrak{R}\Lambda_j(x) = p_1\mathfrak{R}\Lambda_1(x) + \dots + p_\beta\mathfrak{R}\Lambda_\beta(x)\,,$$
$$\mathfrak{R}\lambda_{j\sigma} = p_0 + 1 + p_1\mathfrak{R}\lambda_{1\sigma} + \dots + p_\beta\mathfrak{R}\lambda_{\beta\sigma}\,,$$

d'où, en tenant compte des $(\mathrm{H}_1)$ et $(\mathrm{H}_2)$,

$$p_1 = \dots = p_j = 0\,.$$

On peut donc résoudre le système (E) par quadratures, en intégrant successivement les équations différentielles linéaires du premier ordre. Soit

$$\text{(14.2)}\qquad \left\{\begin{array}{l} z_\beta = \varphi_\beta(x,\ C_\beta) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ z_1 = \varphi_1(x,\ C_\beta, \dots,\ C_1) \end{array}\right.$$

la solution générale du système (E). La fonction $\varphi_j(x,\ C_\beta, \dots,\ C_j)$ est un polynome en $C_\beta, \dots,\ C_j$, ou plus précisément elle a la forme

$$\text{(14.3)}\quad \varphi_j(x,\ C_\beta, \dots,\ C_j) = e^{\Lambda_j(x)}x^{\lambda_{j\sigma}}[C_j + (\text{polynome en } C_\beta, \dots,\ C_{j+1},\ \log x)] \qquad (j = 1, \dots,\ \beta)\,.$$

Par suite, elle est holomorphe dans le domaine angulaire donné. Si $c_{jp_0\mathfrak{P}} \neq 0$ pour les $j$ tels que $\alpha_\nu + 1 \leqq j \leqq \alpha_{\nu+1}$, l'un au moins des nombres $p_{\alpha_{\nu+1}}, \dots, p_{j+1}$ est positif et par suite si l'on pose $z_{\alpha_{\nu+1}} = \dots = z_j = 0$, la $\mathrm{j}^{\text{ième}}$ des équations (E) est satisfaite. Par conséquent, la fonction $\varphi_j(x,\ C_\beta, \dots,\ C_j)$ s'annule si l'on y pose $C_{\alpha_{\nu+1}} = 0, \dots,\ C_j = 0$.

### 15. Solutions formelles.

Désignons par $Z_j(x,\ x_0,\ z_j^0)$ la solution de (E) répondant aux valeurs initiales $x_0,\ z_j^0$. Si $C_1^0, \dots,\ C_\beta^0$ sont les valeurs de $C_1, \dots,\ C_\beta$ définies par les relations $z_j^0 = \varphi_j(x_0,\ C_\beta^0, \dots,\ C_j^0)\ (j = 1, \dots,\ \beta)$, on a

$$Z_j(x,\ x_0,\ z_j^0) = \varphi_j(x,\ C_\beta^0, \dots,\ C_j^0) \qquad (j = 1, \dots,\ \beta)\,.$$

Ainsi nous arrivons à la conclusion suivante.

**Théorème I.** *En portant les expressions* (14.1) *et* (14.2) *dans la transformation formelle* (13.3), *nous obtenons une solution formelle du système* (11.1) *contenant* $\beta$ *constantes arbitraires. La solution formelle ainsi trouvée a la forme*

$$\text{(F)}\qquad y_j \approx \delta_j Z_j(x,\ x_0,\ z_j^0) + \Sigma''\, P_{j\mathfrak{P}}(x) Z_1^{p_1} \dots Z_\beta^{p_\beta} \qquad (j = 1,\ \dots,\ n),$$

*où* $\delta_j$ *est égal à* 1 *pour* $j = 1, \dots, \beta$ *et à* 0 *pour* $j = \beta + 1, \dots, n$ *et* $Z_j$ *désigne* $Z_j(x,\ x_0,\ z_j^0)\ (j = 1,\ \dots,\ \beta)$.

## CHAPITRE II. - LA DÉMONSTRATION DE LA CONVERGENCE.

**16.** Nous considérons d'abord la solution formelle (F) où l'on pose $C_{\alpha_1+1} = .. = C_\beta = 0$. Le problème que nous allons résoudre dans ce chapitre est le suivant: *chercher le domaine aussi grand que possible où la solution formelle ainsi définie converge.* D'une manière plus générale, on peut se poser le problème: *chercher les conditions pour que la solution formelle* (F) *où l'on pose* $z_1 = ... = z_{\alpha_\nu} = z_{\alpha_{\nu+1}+1} = ... = z_\beta = 0$ *soit convergente.* Mais, on rencontre une difficulté nouvelle, quand on veut étudier le cas général dont la discussion sera renvoyée dans un autre article. On y verra que le raisonnement que nous allons faire dans ce chapitre joue un rôle fondamental.

**17. Solution formelle.** D'après la remarque faite au **n. 14**, les $(\beta - \alpha_1)$ dernières des équations (E) sont satisfaites si l'on y pose

$$z_{\alpha_1+1} = ... = z_\beta = 0. \tag{17.1}$$

En portant les expressions $z_j = 0$ $(j \neq 1, ..., \alpha_1)$ et $z_j = Z_j(x, x_0, z_j^0)$ $(j = 1, ..., \alpha_1)$ dans (13.3), nous obtenons une solution formelle $(F_1)$ du système (11.1) contenant $\alpha_1$ constantes arbitraires $C_1, ..., C_{\alpha_1}$ qui peut s'écrire sous la forme

$$y_j \approx \delta_j Z_j + \Sigma'' P_{j\mathfrak{P}}(x) Z_1^{p_1} \dots Z_{\alpha_1}^{p_{\alpha_1}} \qquad (j = 1, ..., n) \tag{$F_1$}$$

$$P_{j\mathfrak{P}}(x) \approx \Sigma P_{jp_0\mathfrak{P}} x^{p_0}, \tag{17.2}$$

où

$$\delta_j = \begin{cases} 0 & (j \neq 1, ..., \alpha_1) \\ 1 & (j = 1, ..., \alpha_1) \end{cases}$$

$$\mathfrak{P} = (p_1, ..., p_{\alpha_1}).$$

*Soit* $\mathfrak{D}[\Delta_-, \Delta_+, r]$ *un domaine angulaire contenant la direction* $(\theta_0)$ *où ne se trouve aucune direction singulière des* $\Lambda_j(x)$ *et des* $\Lambda_j(x) - \Lambda_k(x)$ $(j, k = 1, ..., n)$.

*Alors la solution formelle* $(F_1)$ *converge toujours dans le domaine*

$$x \in \mathfrak{D}(\Delta_-, \Delta_+, r_0), \qquad \max_{k=1}^{\alpha_1} |Z_k|^{1/\mu_k} < \zeta_0,$$

*où les* $\mu_k$ *désignent* $-\Re\Lambda_k(\delta_0 e^{i\theta_0})$ $(k = 1, ..., \alpha_1)$.

C'est ce que l'on voit d'après le résultat de J. MALMQUIST, pourvu que le plus grand des degrés des $\Lambda_j(x)$ $(j = 1, ..., n)$ soit égal à $\sigma_1^*$ [2]. Mais cette conclusion reste encore vraie sans cette restriction. Plus précisément, nous

---

[2] Les degrés des $\Lambda_j(x)$ $(j = 1, ..., \alpha_1)$ sont tous égaux à $\sigma_1^*$, mais cela n'implique pas que les degrés de $\Lambda_j(x)$ pour $j = 1, ..., \alpha_1$ sont les plus grands parmi ceux des $\Lambda_j(x)$ $(j = 1, ..., n)$.

montrerons dans ce chapitre que le domaine $\mathfrak{D}(\Delta_-^*, \Delta_+^*, r)$ où la solution formelle est convergente est plus grand que $\mathfrak{D}(\Delta_-, \Delta_+, r)$.

**18. Le domaine où les développements asymptotiques des coefficients $P_{j\mathfrak{P}}(x)$ sont valables.**

Désignons par $\mathfrak{P}$ l'arrangement $(p_1, \dots, p_{\alpha_1})$ et par $|\mathfrak{P}|$ la somme $p_1 + \dots + p_{\alpha_1}$. Nous ordonnons l'ensemble des arrangements comme il suit: Si l'on a

$$p_1 + \dots + p_{\alpha_1} < q_1 + \dots + q_{\alpha_1}$$

ou

$$p_1 + \dots + p_{\alpha_1} = q_1 + \dots + q_{\alpha_1}, \quad p_k = q_k \ (j < k \leqq \alpha_1), \quad p_j < q_j,$$

nous dirons que l'arrangement $(p_1, \dots, p_{\alpha_1})$ antécède l'arrangement $(q_1, \dots q_{\alpha_1})$ et nous écrirons

$$(p_1, \dots, p_{\alpha_1}) \prec (q_1, \dots, q_{\alpha_1}).$$

Si l'on a

$$(p_1, \dots, p_{\alpha_1}) \prec (q_1, \dots, q_{\alpha_1})$$

ou

$$p_1 = q_1, \dots, p_{\alpha_1} = q_{\alpha_1}, \ j > k,$$

nous dirons que l'arrangement $(j; p_1, \dots, p_{\alpha_1})$ antécède l'arrangement $(k; q_1, \dots, q_{\alpha_1})$ et nous écrirons

$$(j; p_1, \dots, p_{\alpha_1}) \prec (k; q_1, \dots, q_{\alpha_1}).$$

Supposons déjà déterminés tous les coefficients $P_{k\mathfrak{Q}}(x)$ tels que $q_1 + \dots + q_{\alpha_1} < N$ comme des fonctions holomorphes et développables asymptotiquement en les séries (17.2) dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-^*, \Theta_+^*, r]$ dont la définition sera précisée plus tard. Bien entendu, on suppose qu'il soit contenu dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta, \Theta', r]$ où les $a_{jk_1\dots k_n}(x)$ sont holomorphes. Les $P_{j\mathfrak{P}}(x)$ tels que $|\mathfrak{P}| = N$ seront calculés de la manière suivante. Les séries $(\mathrm{F}_1)$ satisfont formellement au système (11.1) quelles que soient les constantes d'intégration qui entrent dans $Z_1, \dots, Z_{\alpha_1}$. En portant dans (11.1) les séries $(\mathrm{F}_1)$, on a les équations différentielles linéaires

$$(18.1) \qquad x^{\sigma+1} \frac{dP_{j\mathfrak{P}}}{dx} = (\lambda_j(x) - \sum_{k=1}^{\alpha_1} p_k \lambda_k(x) + x^\sigma(\lambda_{j\sigma} - \sum_{k=1}^{\alpha_1} p_k \lambda_{k\sigma}))P_{j\mathfrak{P}} + x^\sigma Q_{j\mathfrak{P}}(x),$$

où $Q_{j\mathfrak{P}}(x)$ est un polynome des $P_{k\mathfrak{Q}}(x)$ tels que $(k; \mathfrak{Q}) \prec (j; \mathfrak{P})$, à coefficients entiers et rationnels des $a_{kq_1\dots q_n}(x)$ tels que $q_1 + \dots + q_n \leqq N$. Par suite, on peut considérer $Q_{j\mathfrak{P}}(x)$ comme une fonction connue qui est holomorphe et développable asymptotiquement en série entière de $x$ dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-^*, \Theta_+^*, r]$. Nous supposons donc que le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-^*, \Theta_+^*, r]$ est propre par rapport à $\Lambda_{j\mathfrak{P}}(x) = \Lambda_j(x) - \sum_{k=1}^{\alpha_1} p_k \Lambda_k(x)$. On peut alors définir les $P_{j\mathfrak{P}}(x)$

de manière qu'ils soient développables asymptotiquement en les séries (17.2) dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_{-}^{*}, \Theta_{+}^{*}, r]$, c'est ce que l'on voit facilement d'après le résultat de M. M. HUKUHARA [3], cité au **n. 10.**

**1.** Pour les $j$ tels que $\sigma_j > \sigma_1^*$, une région propre par rapport à $\Lambda_j(x)$ l'est aussi par rapport à $\Lambda_{j\mathfrak{F}}(x)$. Nous désignons par $\mathfrak{D}_1$ l'intersection des régions propres maximales par rapport aux $\Lambda_j(x)$ $(\sigma_j > \sigma_1^*)$ contenant la direction $(\theta_0)$. Elle est contenue dans une des régions à partie réelle non négative par rapport à $\Lambda_j(x)$, car, dans notre présent cas, on a nécessairement $j \geqq \gamma + 1$. Par suite $\exp \Lambda_{j\mathfrak{F}}(x)$ tend vers l'infini pour $\arg x = \theta_0$, $x \to 0$.

**2.** Considérons les indices $j$ tels que $\sigma_j \leqq \sigma_1^*$. Si $\sigma_j = \sigma_1^*$, nous supposons de plus $|\mathfrak{F}| \geqq N_0$, $N_0$ étan un entier positif assez grand. Désignons par $\mathfrak{D}_2$ l'intersection des régions propres maximales par rapport à $-\Lambda_1(x), \ldots, -\Lambda_{\alpha_1}(x)$ contenant la direction $(\theta_0)$. La fonction $\exp \Lambda_{j\mathfrak{F}}(x)$ tend vers l'infini pour $\arg x = \theta_0$, $x \to 0$, et $\mathfrak{D}_2$ est propre par rapport à $\Lambda_{j\mathfrak{F}}(x)$.

**3.** Considérons enfin le cas où l'on a $\sigma_j = \sigma_1^*$, $|\mathfrak{F}| < N_0$. Désignons par $\mathfrak{D}_3$ l'intersection des régions propres maximales par rapport aux $\Lambda_{j\mathfrak{F}}(x)$ $(|\mathfrak{F}| < N_0)$ contenant la direction $(\theta_0)$.

$\mathfrak{D}[\Theta_{-}^{*}, \Theta_{+}^{*}, r] = \mathfrak{D}^*$ est alors un domaine angulaire fermé quelconque contenu dans l'intersection des régions $\mathfrak{D}[\Theta, \Theta', r]$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$. La série (17.2) étant la solution formelle de (18.1), il existe au moins une solution de (18.1) développable asymptotiquement en la série (17.2) dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_{-}^{*}, \Theta_{+}^{*}, r]$. Dans les cas **1** et **2**, elle se détermine d'une seule manière par la formule

$$(18.2) \qquad P_{j\mathfrak{F}}(x) = e^{\Lambda_{j\mathfrak{F}}(x)} x^{\lambda_{j\mathfrak{F}\sigma}} \int_0^x x^{-1} Q_{j\mathfrak{F}}(x) e^{-\Lambda_{j\mathfrak{F}}(x)} x^{-\lambda_{j\mathfrak{F}\sigma}} dx\,,$$

où $\lambda_{j\mathfrak{F}\sigma}$ désigne $\lambda_{j\sigma} - \sum_{k=1}^{\alpha_1} p_k \lambda_{k\sigma}$. Il en est de même du cas **3** si le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_{-}^{*}, \Theta_{+}^{*}, r]$ contient une direction suivant laquelle $\exp \Lambda_{j\mathfrak{F}}(x)$ tend vers l'infini. Dans le cas contraire, on doit définir la solution $P_{j\mathfrak{F}}(x)$ de (18.1) par

$$(18.3) \qquad P_{j\mathfrak{F}}(x) = e^{\Lambda_{j\mathfrak{F}}(x)} x^{\lambda_{j\mathfrak{F}\sigma}} \Big\{ p^0_{j\mathfrak{F}} + \int_{x^0_{j\mathfrak{F}}}^x x^{-1} Q_{j\mathfrak{F}}(x) e^{-\Lambda_{j\mathfrak{F}}(x)} x^{-\lambda_{j\mathfrak{F}\sigma}} dx \Big\},$$

$x^0_{j\mathfrak{F}}$ désignant un point convenable sur l'extrémité radiale et $p^0_{j\mathfrak{F}} e^{\Lambda_{j\mathfrak{F}}(x^0_{j\mathfrak{F}})} (x^0_{j\mathfrak{F}})^{\lambda_{j\mathfrak{F}\sigma}}$ une valeur quelconque assez petite d'après le résultat de M. M. HUKUHARA [3].

On a donc la

**Proposition.** *On peut définir les* $P_{j\mathfrak{F}}(x)$ *de proche en proche d'une seule manière à partir d'un certain rang comme solutions de* (18.1) *développables asymptotiquement en séries* (17.2) *dans le domaine* $\mathfrak{D}[\Theta_{-}^{*}, \Theta_{+}^{*}, r]$.

**19. Inégalités.** Posons

$$P_{jN}(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1}) = \delta_j z_j + \Sigma_{(N)} P_{j\mathfrak{p}}(x) z_1^{p_1} \dots z_{\alpha_1}^{p_{\alpha_1}} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

où $\Sigma_{(N)}$ désigne la sommation étendue à tous les arrangements $(p_1, \dots, p_{\alpha_1})$ tels que $p_1\mu_1 + \dots + p_{\alpha_1}\mu_{\alpha_1} < N$. Les $P_{jN}(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})$ $(j = 1, \dots, n)$ étant des polynomes en $z_1, \dots, z_{\alpha_1}$ dont les coefficients $P_{j\mathfrak{p}}(x)$ sont des fonctions holomorphes dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-^*, \Theta_+^*, r]$, on peut choisir les nombres positifs $\delta$, $r_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ de manière que l'on ait

$$|P_{jN}(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})| + \delta < \eta_0 \qquad (j = 1, \dots, n)$$

pour

$$x \in \mathfrak{D}[\Theta_-^*, \Theta_+^*, r_0], \quad \max_{k=1}^{\alpha_1} |z_k|^{1/\mu_k} \leqq \zeta_0,$$

et que les $h_j(x, y_1, \dots, y_n)$ $(j = 1, \dots, n)$ soient holomorphes pour

$$x \in \mathfrak{D}[\Theta_-^*, \Theta_+^*, r_0], \quad |y_1| < \eta_0, \dots, |y_n| < \eta_0.$$

Si le système (11.1) devient

$$x^{\sigma+1}\frac{dv_j}{dx} = \lambda_j(x)v_j + x^\sigma g_j(x, Z_1, \dots, Z_{\alpha_1}, v_1, \dots, v_n) \quad (j = 1, \dots, n) \tag{19.1}$$

par le changement des variables

$$y_j = P_{jN}(x, Z_1, \dots, Z_{\alpha_1}) + v_j \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{19.2}$$

on aura

$$\begin{aligned} &x^\sigma g_j(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1}, v_1, \dots, v_n) = \\ &= \lambda_j(x)[P_{jN}(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1}) - \delta_j z_j] + \\ &+ x^\sigma h_j(x, P_{1N} + v_1, \dots, P_{nN} + v_n) - x^{\sigma+1}\frac{\partial P_{jN}}{\partial x} + \\ &+ \left[\delta_j\lambda_j(x)z_j - \sum_{k=1}^{\alpha_1}\delta_{jk}x^{\sigma+1}\frac{dz_k}{dx}\right] - \sum_{k=1}^{\alpha_1}\left[\frac{\partial P_{jN}}{\partial z_k} - \delta_{jk}\right]x^{\sigma+1}\frac{dz_k}{dx} \\ &\qquad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \tag{19.3}$$

Alors on voit sans peine que dans le second membre de l'équation (19.3) tous les termes contiennent $x^\sigma$ comme facteur. Par suite, les $g_j(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1}, v_1, \dots, v_n)$ $(j = 1, \dots, n)$ sont des fonctions holomorphes de $(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1}, v_1, \dots, v_n$ dans le domaine

$$x \in \mathfrak{D}[\Theta_-^*, \Theta_+^*, r_0], \quad \max_{k=1}^{\alpha_1} |z_k|^{1/\mu_k} \leqq \zeta_0, \quad |v_1| \leqq \delta, \dots, |v \quad| \leqq \delta. \tag{19.4}$$

Ensuite, si l'on pose

$$v_j = e^{\Lambda_j(x)}u_j \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{19.5}$$

les équations (19.1) se changent en

$$(19.6) \qquad x\frac{du_j}{dx} = g_j(x, Z_1, \dots, Z_{\alpha_1}, e^{\Lambda_1(x)}u_1, \dots, e^{\Lambda_n(x)}u_n)e^{-\Lambda_j(x)} \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Puisque les séries

$$(\mathrm{F}_{1N}) \qquad v_j \approx \Sigma P_{j\mathfrak{P}}(x)Z_1^{p_1}\dots Z_{\alpha_1}^{p_{\alpha_1}} \qquad (j = 1, \dots, n)$$
$$p_1\mu_1 + \dots + p_{\alpha_1}\mu_{\alpha_1} \geqq N$$

représentent la solution formelle de (19.1), les termes indépendants de $v_1, \dots, v_n$ ne peuvent contenir aucun terme de degrés moindres que N par rapport à $Z_1^{1/\mu_1}, \dots, Z_{\alpha_1}^{1/\mu_{\alpha_1}}$. Par suite, les seconds membres de ces équations satisfont aux inégalités

$$(19.7) \qquad |g_j(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1}, v_1, \dots, v_n)| \leqq A\sum_{k=1}^{n}|v_k| + B_N\max_{k=1}^{\alpha_1}|z_k|^{N/\mu_k} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

dans le domaine (19.4). On peut prendre pour $A$ une constante quelconque telle que $A > |\lambda_{j\sigma}| + \varepsilon_j$ $(j = 1, \dots, n)$.

**20. Famille $\mathfrak{F}$ et Transformation $\mathfrak{T}$.** Le domaine où la solution formelle converge, contient en général, comme on le verra plus tard, le domaine $\mathfrak{D}(\Delta_-, \Delta_+, r)$ et celui de J. MALMQUIST que nous avons expliqué dans l'introduction.

Nous considérons la famille $\mathfrak{F}$ des systèmes de $n$ fonctions $\{\psi_1(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1}), \dots, \psi_n(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})\}$ satisfaisant à la condition suivante:

*Les $\psi_j(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})$ $(j = 1, \dots, n)$ sont des fonctions holomorphes de $(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})$ pour*

$$(20.1) \qquad x \in \mathfrak{D}(\Delta_-^*, \Delta_+^*, r_0), \quad \max_{k=1}^{\alpha_1}|z_k|^{1/\mu_k} < \zeta_0$$

*et satisfont aux inégalités*

$$(20.2) \qquad |\psi_j(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})| \leqq K\max_{k=1}^{\alpha_1}|z_k|^{N/\mu_k}e^{-\Re\Lambda_j(x)} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

*$K$ étant un nombre suffisamment grand, où $K\zeta_0^N < \delta$.*

La famille $\mathfrak{F}$ n'est pas vide, car le système $(0, \dots, 0)$ appartient à $\mathfrak{F}$. Posons

$$(20.3) \qquad \Psi_j(x, x_0, z^0) \equiv \Psi_j(x, x_0, z_1^0, \dots, z_{\alpha_1}^0) =$$
$$= \psi_j(x, Z_1(x, x_0, z_1^0), \dots, Z_{\alpha_1}(x, x_0, z_{\alpha_1}^0)) \qquad (j = 1, \dots, n)$$

et

$$(20.4) \qquad G_j(x, x_0, z^0) \equiv G_j(x, x_0, z_1^0, \dots, z_{\alpha_1}^0) =$$
$$= g_j(x, Z_1, \dots, Z_{\alpha_1}, e^{\Lambda_1(x)}\Psi_1, \dots, e^{\Lambda_n(x)}\Psi_n) \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Nous définissons les $\bar{\psi}_j(x_0, z_1^0, \dots, z_{\alpha_1}^0)$ $(j = 1, \dots, n)$ par

$$\bar{\psi}_j(x_0, z_1^0, \dots, z_{\alpha_1}^0) = \int_0^{x_0} x^{-1} G_j(x, x_0, z^0)\, e^{-\Lambda_j(x)} dx \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{20.5}$$

Nous démontrons plus tard que les intégrales (20.5) convergent en choisissant convenablement les chemins d'intégration $\Gamma_{jx_0}$.

$\mathfrak{T}$ est alors la transformation qui fait correspondre au système des fonctions $\{\psi_1(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1}), \dots, \psi_n(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})\}$ le système des fonctions $\{\bar{\psi}_1(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1}), \dots, \bar{\psi}_n(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})\}$.

**21. La démonstration de la convergence de la solution formelle $(F_1)$.**

Nous allons établir la convergence de la solution formelle $(F_1)$ de la manière suivante.

Nous démontrons d'abord les quatre propositions suivantes:

**I.** *Les intégrales* (20.5) *sont convergentes.*

**II.** *La famille $\mathfrak{F}$ est fermée, convexe et normale.*

**III.** *Le système* $\{\bar{\psi}_1(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1}), \dots, \bar{\psi}_n(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})\}$ *appartient à* $\mathfrak{F}$, *c' est-à-dire*

**III'.** *On a les inégalités*

$$|\bar{\psi}_j(x_0, z_1^0, \dots, z_{\alpha_1}^0)| \leqq K e^{-\Re\Lambda_j(x_0)} \max_{k=1}^{\alpha_1} |z_k^0|^{N/\mu_k} \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{21.1}$$

*et*

**III''.** *Les* $\bar{\psi}_j(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})$ $(j = 1, \dots, n)$ *sont holomorphes dans le domaine* (20.1).

**IV.** *La transformation $\mathfrak{T}$ est continue.*

Si l'on suppose ces quatre propositions démontrées, on sait, d'après le théorème d'existence des points fixes (voir M. M. HUKUHARA [5]), qu'il existe un système de $n$ fonctions tel que l'on ait

$$\{\psi_1(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1}), \dots, \psi_n(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})\} =$$
$$= \{\bar{\psi}_1(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1}), \dots, \bar{\psi}_n(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})\}.$$

Puis nous démontrons la proposition suivante:

**V.** *Les* $\bar{\psi}_j(x, Z_1(x, x_0, z_1^0), \dots, Z_{\alpha_1}(x, x_0, z_{\alpha_1}^0))$ $(j = 1, \dots, n)$ *représentent une solution des équations* (19.6). Nous la désignons par $\bar{\psi}_{jN}(x, Z)$ $(j = 1, \dots, n)$.

Alors on a une solution des équations (11.1)

$$y_j = \mathfrak{S}_{jN}(x, Z) \equiv P_{jN}(x, Z_1, \dots, Z_{\alpha_1}) + \bar{\psi}_{jN}(x, Z)\, e^{\Lambda_j(x)} \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Si l'on démontre que ces fonctions $\mathfrak{S}_{jN}(x, Z)$ $(j = 1, \dots, n)$ sont indépendantes de $N$, on voit que la solution formelle $(F_1)$ est convergente. Pour cela, il suffit de démontrer la proposition suivante:

**VI.** *La solution du système différentiel* (19.6) *telle que l'on ait*

$$u_j = O\left(e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=1}^{\alpha_1} |Z_k(x,\ x_0,\ z_k^0)|^{N/\mu_k}\right) \tag{21.2}$$

*est unique pourvu que $N$ soit assez grand.*

En effet, cette proposition entraîne que, si $N' > N$, on a

$$\mathfrak{S}_{jN'}(x,\ Z) = \mathfrak{S}_{jN}(x,\ Z) \qquad (j = 1, \dots, n)$$

pour $N$ assez grand. Car

$$u_j = (P_{jN'}(x,\ Z) - P_{jN}(x,\ Z) + \psi_{jN'}(x,\ Z)\ e^{\Lambda_j(x)})\, e^{-\Lambda_j(x)} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

est une solution des équations (19.6), satisfaisant aux relations (21.2), $P_{jN}(x,\ Z)$ désignant $P_{jN}(x,\ Z_1, \dots, Z_{\alpha_1})$.

La proposition II étant évidente, il suffit de démontrer les cinq propositions I, III, IV, V et VI.

**22. Conditions imposées aux chemins d'intégration et Détermination du domaine $\mathfrak{D}(\Delta_-^*,\ \Delta_+^*,\ r_0)$.**

Nous voulons déterminer le domaine angulaire $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}(\Delta_-^*,\ \Delta_+^*,\ r_0)$ de manière que l'on puisse choisir les chemins d'intégration $\Gamma_{jx_0}$ satisfaisant aux trois conditions suivantes.

(i) *Soient $x_0,\ z_1^0, \dots,\ z_{\alpha_1}^0$ des valeurs quelconques appartenant au domaine* (20.1). *Alors les fonctions $x^{-1}G_j(x,\ x_0,\ z^0)e^{-\Lambda_j(x)}$ $(j = 1, \dots, n)$ sont définies sur les chemins $\Gamma_{jx_0}$ contenus dans $\mathfrak{D}^*$.*

(ii) *L'intégrale*

$$\int_0^{x_0} x^{-1} G_j(x,\ x_0,\ z^0)\, e^{-\Lambda_j(x)}\, dx \tag{22.1}$$

*prise le long de $\Gamma_{jx_0}$ converge.*

(iii) *Les inégalités* (21.1) *sont remplies.*

Soient $(\theta_{k-})$ et $(\theta_{k+})$ $(1 \leq k \leq \alpha_1)$ les directions singulières de $\Lambda_k(x)$ $(1 \leq k \leq \alpha_1)$ immédiatement inférieure et supérieure à la direction $(\theta_0)$. $(\theta_{k-})$ et $(\theta_{k+})$ sont des directions singulières descendante et ascendante de $\Lambda_k(x)$ respectivement, car on a $(H_1)$. Posons

$$\theta_+ = \min_{k=1}^{\alpha_1} \theta_{k+} \quad , \quad \theta_- = \max_{k=1}^{\alpha_1} \theta_{k-} .$$

Pour les $j$ tels que $\sigma_j \leqq \sigma_1^*$, nous prenons $\Delta_j$ et $\Delta_j'$ égaux à $\max(\Theta_-^*, \theta_-)$ et à $\min(\Theta_+^*, \theta_+)$ respectivement.

Pour les $j$ tels que $\sigma_j > \sigma_1^*$, nous désignons par $(\theta_{j+})$ et $(\theta_{j-})$ les directions singulières de $\Lambda_j(x)$ immédiatement inférieure et supérieure à la direction $(\theta_0)$. Ces directions $(\theta_{j+})$ et $(\theta_{j-})$ sont des directions singulières ascendante et descendante de $\Lambda_j(x)$ respectivement, car on a $(\mathrm{H}_1)$ et $(\mathrm{H}_2)$. Nous prenons alors $\Delta_j$ et $\Delta_j'$ égaux à $\max(\Theta_-^*, \theta_-, \theta_{j+})$ et à $\min(\Theta_+^*, \theta_+, \theta_{j-})$ respectivement.

Considérons les inégalités

$$\max(\sigma_1^*(\varphi - \theta_+), 0) < \min(\sigma_1^*(\varphi - \theta_-), \pi) \tag{22.2}$$

et

$$\max(\sigma_1^*(\varphi - \theta_+), \sigma_j(\varphi - \theta_{j-}), 0) < \min(\sigma_1^*(\varphi - \theta_-), \sigma_j(\varphi - \theta_{j+}), \pi) \tag{22.3}$$

pour les $j$ tels que $\sigma_j > \sigma_1^*$.

Il est claire que l'on a

$$\sigma_1^*(\varphi - \theta_+) < \sigma_1^*(\varphi - \theta_-), \quad \sigma_j(\varphi - \theta_{j-}) < \sigma_j(\varphi - \theta_{j+}).$$

Les inégalités

$$\begin{gathered} 0 < \sigma_1^*(\varphi - \theta_-) \quad , \quad \sigma_1^*(\varphi - \theta_+) < \pi , \\ 0 < \sigma_j(\varphi - \theta_{j+}) \quad , \quad \sigma_j(\varphi - \theta_{j-}) < \pi , \\ \sigma_1^*(\varphi - \theta_+) < \sigma_j(\varphi - \theta_{j+}) \quad , \quad \sigma_j(\varphi - \theta_{j-}) < \sigma_1^*(\varphi - \theta_-) \end{gathered}$$

sont équivalentes respectivement à

$$\begin{gathered} \theta_- < \varphi \quad , \quad \varphi < \theta_+ + \pi/\sigma_1^* , \\ \theta_{j+} < \varphi \quad , \quad \varphi < \theta_{j-} + \pi/\sigma_j , \\ \frac{\sigma_j\theta_{j+} - \sigma_1^*\theta_+}{\sigma_j - \sigma_1^*} < \varphi, \ \varphi < \frac{\sigma_j\theta_{j-} - \sigma_1^*\theta_-}{\sigma_j - \sigma_1^*} \end{gathered}$$

Posons $\Theta_j' = \theta_+ + \pi/\sigma_1^*$ pour les $j$ tels que $\sigma_j \leqq \sigma_1^*$ et $\Theta_j' = \min(\theta_+ + \pi/\sigma_1^*, \theta_{j-} + \pi/\sigma_j, (\sigma_j\theta_{j-} - \sigma_1^*\theta_-)/(\sigma_j - \sigma_1^*))$ pour les $j$ tels que $\sigma_j > \sigma_1^*$. On aura sans peine que l'on a

$$\max(\theta_-, \theta_{j+}, \frac{\sigma_j\theta_{j+} - \sigma_1^*\theta_+}{\sigma_j - \sigma_1^*}) = \max(\theta_-, \theta_{j+}) < \theta_0 < \Delta_j' < \Theta_j' \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Les inégalités (22.2) et (22.3) sont donc remplies dans l'intervalle $[\Delta_j' - 2\beta, \Delta_+^*)$, en posant

$$\Delta_+^* = \min(\Theta_+^*, \min_{j=1}^{n} \Theta_j'),$$

pourvu que $\beta$ soit un nombre positif assez petit.

On pose

$$A(\varphi)=\begin{cases}\min(\sigma_1^*(\varphi-\theta_--2\beta),\ \pi-\beta) & \varphi_+\leqq\varphi\leqq\Delta_+^*\\ \pi/2 & \varphi_-\leqq\varphi\leqq\varphi_+\\ \max(\sigma_1^*(\varphi-\theta_++2\beta)+\pi,\ \beta) & \Delta_-^*\leqq\varphi\leqq\varphi_-\end{cases}$$

et

$$A_j(\varphi)=\begin{cases}\min(\sigma_1^*(\varphi-\theta_--2\beta),\ \pi-\beta) & \text{pour } \sigma_j\leqq\sigma_1^*\\ \min(\sigma_1^*(\varphi-\theta_--2\beta),\ \sigma_j(\varphi-\theta_{j+}-2\beta),\ \pi-\beta) & \text{pour } \sigma_j>\sigma_1^*\end{cases}$$

dans l'intervalle $[\Delta_j'-2\beta,\ \Delta_+^*]$, $\varphi_+$ et $\varphi_-$ désignant les racines des équations $\sigma_1^*(\varphi-\theta_--2\beta)=\pi/2$ et $\sigma_1^*(\varphi-\theta_++2\beta)=-\pi/2$ respectivement. $A(\varphi)$ et $A_j(\varphi)$ sont continues dans $[\Delta_j'-2\beta,\ \Delta_+^*]$ et, $\beta$ étant assez petit, on a $A_j(\varphi)\leqq\leqq A(\varphi)$ et

$$\max(\sigma_1^*(\varphi-\theta_+),\ 0)<A_j(\varphi)<\min(\sigma_1^*(\varphi-\theta_-),\ \pi) \tag{22.4}$$

pour $\sigma_j\leqq\sigma_1^*$ et

$$\begin{aligned}\max(\sigma_1^*(\varphi-\theta_+),\ \sigma_j(\varphi-\theta_{j-}),\ 0)<A_j(\varphi)<\\ <\min(\sigma_1^*(\varphi-\theta_-),\ \sigma_j(\varphi-\theta_{j+}),\ \pi)\end{aligned} \tag{22.5}$$

pour $\sigma_j>\sigma_1^*$.

Puis nous considérons les inégalités

$$\max(\sigma_1^*(\varphi-\theta_+)+\pi,\ 0)<\min(\sigma_1^*(\varphi-\theta_-)+\pi,\ \pi) \tag{22.2'}$$

et

$$\begin{aligned}\max(\sigma_1^*(\varphi-\theta_+)+\pi,\ \sigma_j(\varphi-\theta_{j-})+\pi,\ 0)<\\ <\min(\sigma_1^*(\varphi-\theta_-)+\pi,\ \sigma_j(\varphi-\theta_{j+})+\pi,\ \pi)\end{aligned} \tag{22.3'}$$

pour les $j$ tels que $\sigma_j>\sigma_1^*$.

Nous prenons $\Theta_j$ égal à $\theta_--\pi/\sigma_1^*$ pour les $j$ tels que $\sigma_j\leqq\sigma_1^*$ et à $\max(\theta_--\pi/\sigma_1^*,\ \theta_{j+}-\pi/\sigma_j,\ (\sigma_j\theta_{j+}-\sigma_1^*\theta_+)/(\sigma_j-\sigma_1^*))$ pour les $j$ tels que $\sigma_j>\sigma_1^*$.

On verra de même que les inégalités (22.2') et (22.3') sont remplies respectivement dans les intervalles $(\Theta_j,\ \theta_+)$ et $(\Theta_j,\ \min(\theta_+,\ \theta_{j-}))$. Posons

$$\Delta_-^*=\max(\Theta_-^*,\ \max_{j=1}^{n}\ \Theta_j).$$

Alors on a (22.2') et (22.3') dans l'intervalle $(\Delta_-^*,\ \Delta_j+2\beta]$.

On peut définir les valeurs des fonctions $A_j(\varphi)$ dans l'intervalle $(\Delta_-^*,\ \Delta_j+2\beta]$ de manière qu'elles soient continues et satisfassent dans $(\Delta_-^*,\ \Delta_j+2\beta]$ à $A(\varphi)\leqq A_j(\varphi)$ et à

$$\max(\sigma_1^*(\varphi-\theta_+)+\pi,\ 0)<A_j(\varphi)<\min(\sigma_1^*(\varphi-\theta_-)+\pi,\ \pi) \tag{22.4'}$$

pour $\sigma_j \leqq \sigma_1^*$ et à

$$\max(\sigma_1^*(\varphi - \theta_+) + \pi,\ \sigma_j(\varphi - \theta_{j-}) + \pi,\ 0) < A_j(\varphi) < \\ < \min(\sigma_1^*(\varphi - \theta_-) + \pi,\ \sigma_j(\varphi - \theta_{j+}) + \pi,\ \pi) \tag{22.5'}$$

pour $\sigma_j > \sigma_1^*$. On voit d'après la définition que $A(\varphi)$ est continue dans $[\Delta_-^*, \Delta_+^*]$.

Cela posé, $\mathfrak{D}(\Delta_-^*, \Delta_+^*, r_0)$ est le domaine limité par la courbe

$$\rho = r' \exp \int_{\theta'}^{\varphi} \cot A(\varphi) d\varphi, \qquad \Delta_-^* \leqq \varphi \leqq \Delta_+^*$$

et les deux segments

$$\rho \leqq r' \exp \int_{\theta'}^{\Delta_+^*} \cot A(\varphi) d\varphi, \qquad \varphi = \Delta_+^*$$

et

$$\rho \leqq r' \exp \int_{\theta'}^{\Delta_-^*} \cot A(\varphi)\, d\varphi, \qquad \varphi = \Delta_-^*.$$

**23. Lemme fondamental.** Nous désignons par $\rho$ et $\varphi$ les coordonnées polaires du point variable $x$ sur $\Gamma_{jx_0}$, par $r$ et $\theta$ ceux du point $x_0$ et par $s$ la longueur de l'arc de la courbe $\Gamma_{jx_0}$ mesuré de l'origine jusqu'au point $x$.

**Lemme.** *Supposons* (i') *qu'un point quelconque* $x_0 \in \mathfrak{D}(\Delta_-^*, \Delta_+^*, r_0)$ *donné, les chemins* $\Gamma_{jx_0}$ *contenus dans* $\mathfrak{D}(\Delta_-^*, \Delta_+^*, r_0)$ *soient déterminés de manière que, pour les* $j$ *tels que* $\sigma_j \leqq \sigma_1^*$, *on ait*

$$\frac{d}{ds} e^{\Re \Lambda_k(x)} \geqq e^{\Re \Lambda_k(x)} \cdot \frac{|\lambda_k|}{\rho^{\sigma_1^*+1}} \cdot \sin \sigma_1^* \beta \qquad (k = 1, \dots, \alpha_1) \tag{23.1}$$

*sur* $\Gamma_{jx_0}$ *et que, pour les* $j$ *tels que* $\sigma_j > \sigma_1^*$, *on ait en outre*

$$\frac{d}{ds} e^{-\Re \Lambda_j(x)} \geqq e^{-\Re \Lambda_j(x)} \cdot \frac{|\lambda_j|}{\rho^{\sigma_j+1}} \cdot \sin \sigma_j \beta \tag{23.2}$$

*sur* $\Gamma_{jx_0}$.

*Alors, les trois conditions* (i), (ii) *et* (iii) *sont toutes remplies.*

D'après (23.1), on voit que, lorsque le point variable $x$ tend vers l'origine sur $\Gamma_{jx_0}$, la valeur $\max\limits_{k=1}^{\alpha_1} |Z_k|^{1/\mu_k}$ tend vers 0 en décroissant monotonement. On en conclut que les fonctions $x^{-1} G_j(x, x_0, z^0) e^{-\Lambda_j(x)}$ $(j = 1, \dots, n)$ sont définies sur $\Gamma_{jx_0}$, ce qui établit (i).

En tenant compte des inégalités (19.7), on a les inégalités

$$|x^{-1}G_j(x,\ x_0,\ z')| \leqq (nAK + B_N)\,|x^{-1}|\,\max_{k=1}^{\alpha_1}|Z_k|^{N/\mu_k} \qquad (j=1,\dots,\ n)\,.$$

Par suite, pour démontrer la convergence de l'intégrale (22.1), il suffit de démontrer (ii′) que *l'intégrale*

$$(23.3)\qquad \int_0^{s_0} |x^{-1}|\,\max_{k=1}^{\alpha_1}|Z_k|^{N/\mu_k}\,e^{-\Re\Lambda_j(x)}\,ds$$

*converge,* $s_0$ *désignant la longueur de la courbe* $\Gamma_{jx_0}$.

Pour que la condition (iii) soit satisfaite, il suffit (iii′) que *l'on ait l'inégalité*

$$(23.4)\qquad (nAK+B_N)\int_0^{s_0}|x^{-1}|\,\max_{k=1}^{\alpha_1}|Z_k|^{N/\mu_k}\,e^{-\Re\Lambda_j(x)}\,ds \leqq$$

$$\leqq K\max_{k=1}^{\alpha_1}|z_k{}^0|^{N/\mu_k}\,e^{-\Re\Lambda_j(x_0)}\,.$$

Pour que l'on l'obtienne, il suffit que *l'on ait*

$$(23.4')\qquad (nAK+B_N)\rho^{-1}\max_{k=1}^{\alpha_1}|Z_k|^{N/\mu_k}\,e^{-\Re\Lambda_j(x)} \leqq$$

$$\leqq K\,\frac{d}{ds}\left(\max_{k=1}^{\alpha_1}|Z_k|^{N/\mu_k}\,e^{-\Re\Lambda_j(x)}\right)$$

*sur* $\Gamma_{jx_0}$ *pour les* $j$ *tels que* $\sigma_j \leqq \sigma_1{}^*$.

Pour les $j$ tels que $\sigma_j \leqq \sigma_1{}^*$, (23.1) entraîne (ii′) et (iii′). En effet, après un calcul élémentaire, on a

$$(23.5)\quad \frac{d}{ds}|Z_k|^{N/\mu_k} > \frac{N}{\mu_k}|Z_k|^{N/\mu_k}\frac{d}{ds}(\Re\Lambda_k(x)) - o\left(\frac{d}{ds}\,\Re\Lambda_k(x)\right)\max_{k=1}^{\alpha_1}|Z_k|^{N/\mu_k}$$

$$(23.6)\qquad \frac{d}{ds}\,e^{-\Re\Lambda_j(x)} = e^{-\Re\Lambda_j(x)}\,\frac{d}{ds}\,(-\,\Re\Lambda_j(x))\,.$$

Puisque l'on a $\sigma_j \leqq \sigma_1{}^*$, on peut choisir un nombre $N$ assez grand de manière que l'on ait

$$(23.7)\qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{N}{\mu_k}\,\Re\Lambda_k(x) - \Re\Lambda_j(x)\right) > \frac{N}{2\mu_k}\,\frac{d}{ds}\,(\Re\Lambda_k(x))$$

$$(k=1,\dots,\ \alpha_1\,;\ \sigma_j \leqq \sigma_1{}^*)\,.$$

Alors on a

$$\frac{d}{ds}\left(\max_{k=1}^{\alpha_1}|Z_k|^{N/\mu_k}e^{-\Re\Lambda_j(x)}\right)=$$

$$=e^{-\Re\Lambda_j(x)}\frac{d}{ds}\left(\max_{k=1}^{\alpha_1}|Z_k|^{N/\mu_k}\right)+\max_{k=1}^{\alpha_1}|Z_k|^{N/\mu_k}\frac{d}{ds}(e^{-\Re\Lambda_j(x)})>$$

$$>\max_{k=1}^{\alpha_1}Z_k|^{N/\mu_k}\cdot e^{-\Re\Lambda_j(x)}\left\{\frac{N}{\mu_k}\frac{d}{ds}\Re\Lambda_k(x)-\frac{d}{ds}\Re\Lambda_j(x)-o\left(\frac{d}{ds}\Re\Lambda_k(x)\right)\right\}$$

$$>\max_{k=1}^{\alpha_1}|Z_k|^{N/\mu_k}e^{-\Re\Lambda_j(x)}\cdot\frac{N}{3\rho^{\sigma_1*+1}}\cdot\min_{k=1}^{\alpha_1}\frac{|\lambda_k|}{\mu_k}\cdot\sin\sigma_1{}^*\beta,$$

d'après (23.1), (23.5) et (23.7). Pour que l'inégalité (23.4′) soit remplie, il suffit donc que l'on ait

$$nAK+B_N<\frac{KN}{3}\frac{\sin\sigma_1{}^*\beta}{\rho^{\sigma_1*}}\min_{k=1}^{\alpha_1}\frac{|\lambda_k|}{\mu_k}. \tag{23.8}$$

L'inégalité que l'on obtient en posant $B_N=0$ dans (23.8) sera satisfaite si l'on prend $N$ suffisamment grand. On peut alors satisfaire à (23.8) en prenant $K$ suffisamment grand, ce qui montre la vérité de (23.4′).

Démontrons la convergence de l'intégrale (23.3). On a évidemment

$$\frac{N}{2\mu_k}\Re\Lambda_k(x)-\Re\Lambda_j(x)<0 \qquad (k=1,\dots,\alpha_1;\ \sigma_j\leqq\sigma_1{}^*)$$

lorsque $x$ s'approche de l'origine suivant une direction $(\varphi)$ telle que $\Delta_j+2\beta\leqq\leqq\varphi\leqq\Delta_j'-2\beta$. On a alors

$$|x^{-1}|\max_{k=1}^{\alpha_1}|Z_k|^{N/\mu_k}e^{-\Re\Lambda_j(x)}=O\left(x^\nu\max_{k=1}^{\alpha_1}e^{\frac{N}{2\mu_k}\Re\Lambda_k(x)}\right)\to 0,$$

$\nu$ étant un certain entier. On a donc (ii′).

Considérons les $j$ tels que $\sigma_j>\sigma_1{}^*$. Puisque (i′) entraîne

$$\max(\max_{k=1}^{\alpha_1}|Z_k|^{N/\mu_k})=\max_{k=1}^{\alpha_1}|z_k{}^0|^{N/\mu_k} \qquad \text{sur } \Gamma_{jx_0},$$

(23.4) est une conséquence immédiate de

$$nAK+B_N\leqq K\frac{|\lambda_j|}{2}\frac{\sin\sigma_j\beta}{\rho^{\sigma_j}} \qquad (\rho<r_0). \tag{23.9}$$

Or, on peut satisfaire à l'inégalité

$$nA<\frac{|\lambda_j|}{2}\frac{\sin\sigma_j\beta}{\rho^{\sigma_j}} \qquad (\rho<r_0)$$

en prenant $r_0$ suffisamment petit. L'inégalité (23.9) est alors satisfaite si l'on prend $K$ suffisamment grand.

Lorsque $x$ s'approche de l'origine suivant une direction $(\varphi)$ telle que $\Delta_j+2\beta \leqq \varphi \leqq \Delta_j'-2\beta$, la fonction $e^{-\Lambda_j(x)}$ tend vers 0. $x^{-1}G_j(x, x_0, z^0)$ convergeant aussi vers 0, on a (ii').

### 24. Vérification de l'hypothèse du lemme fondamental.

Les chemins $\Gamma_{jx_0}$ $(j=1, \dots, n)$ seront définis comme il suit.

Si l'on a $\Delta_j+2\beta \leqq \arg x_0 \leqq \Delta_j'-2\beta$, le chemin. $\Gamma_{jx_0}$ est le segment joignant $x_0$ à l'origine.

Si l'on a $\Delta_j'-2\beta < \arg x_0 < \Theta_j'$, le chemin $\Gamma_{jx_0}$ est formé de la courbe $\Gamma_j$

$$\rho = r \exp \int_\theta^\varphi \cot A_j(\varphi) d\varphi\,, \qquad \Delta_j'-2\beta \leqq \varphi \leqq \theta \tag{24.1}$$

et du segment $\Gamma_j''$:

$$\rho \leqq r \exp \int_\theta^{\Delta_j'-2\beta} \cot A_j(\varphi) d\varphi\,, \qquad \varphi = \Delta_j'-2\beta\,.$$

Si l'on a $\Theta_j < \arg x_0 < \Delta_j+2\beta$, le chemin $\Gamma_{jx_0}$ est formé de la courbe $\Gamma_j'$:

$$\rho = r \exp \int_\theta^\varphi \cot A_j(\varphi) d\varphi\,, \qquad \theta \leqq \varphi \leqq \Delta_j+2\beta \tag{24.2}$$

et du segment $\Gamma_j''$:

$$\rho \leqq r \exp \int_\theta^{\Delta_j+2\beta} \cot A_j(\varphi) d\varphi\,, \qquad \varphi = \Delta_j+2\beta\,.$$

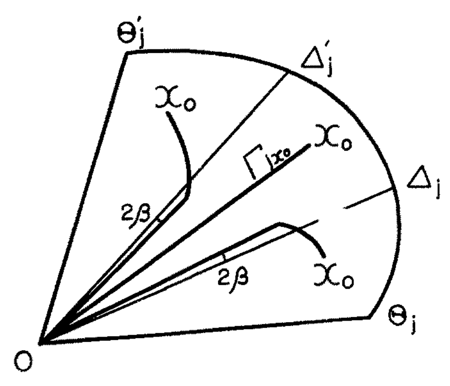


Fig. 2

$\beta$ est supposé assez petit.

On a évidemment

$$\Re\Lambda_k(\rho e^{i\varphi}) = -\frac{|\lambda_k|}{\sigma_k}\,\frac{\cos(\omega_k - \sigma_k\varphi)}{\rho^{\sigma_k}} + o\left(\frac{1}{\rho^{\sigma_k}}\right). \tag{24.3}$$

Sur la partie rectiligne de $\Gamma_{jx_0}$, on a $\Delta_j + 2\beta \leqq \varphi \leqq \Delta_j' - 2\beta$, d'où $|\omega_k - \sigma_k\varphi| \leqq$ $\leqq \pi/2 - 2\beta\sigma_1{}^* \, (1 \leqq k \leqq \alpha_1)$ et $|\omega_j - \sigma_j\varphi - \pi| \leqq \pi/2 - 2\beta\sigma_j \, (\sigma_j > \sigma_1{}^*)$. On a donc (23.1) pour tous les $j$ et en outre (23.2) pour $\sigma_k > \sigma_1{}^*$, puisque $s = \rho$.

Sur la partie curviligne de $\Gamma_{jx_0}$, $\rho$ est une fonction de $\varphi$ donnée par (24.1) ou (24.2). En différentiant (24.3) par $\varphi$, on obtient

$$\frac{d}{d\varphi}\,\Re\Lambda_k(\rho e^{i\varphi}) = \frac{|\lambda_k|}{\rho^{\sigma_k}}\,\frac{\cos(A_j(\varphi) + \omega_k - \sigma_k\varphi)}{\sin A_j(\varphi)} + o\left(\frac{1}{\rho^{\sigma_k}}\right), \tag{24.4}$$

où $\omega_k$ est l'argument du coefficient $\lambda_k$. Or on a

$$ds = \sqrt{\cot^2 A_j(\varphi) + 1}\cdot\rho\cdot d\varphi \qquad \text{ou} \qquad -\sqrt{\cot^2 A_j(\varphi) + 1}\cdot\rho\cdot d\varphi$$

suivant que l'on a (24.1) ou (24.2). La partie principale de $\dfrac{d}{ds}\,\Re\Lambda_k(\varphi e^{i\varphi})$ est

$$\frac{|\lambda_k|}{\rho^{\sigma_k+1}}\cos(A_j(\varphi) + \omega_k - \sigma_k\varphi) \qquad \text{pour (24.1)} \tag{24.5}$$

$$-\frac{|\lambda_k|}{\rho^{\sigma_k+1}}\cos(A_j(\varphi) + \omega_k - \sigma_k\varphi) \qquad \text{pour (24.2)}. \tag{24.5'}$$

Nous distinguons deux cas suivant que l'on a $\sigma_j \leqq \sigma_1{}^*$ ou $\sigma_j > \sigma_1{}^*$.

Dans le premier cas, il suffit de considérer (23.1) seulement. Sur la courbe (24.1), (23.1) est une conséquence de

$$\cos(A_j(\varphi) + \omega_k - \sigma_k\varphi) \geqq \sin 2\sigma_1{}^*\beta \qquad (k = 1, \dots, \alpha_1). \tag{24.6}$$

Alors la condition, à laquelle doit satisfaire la fonction $A_j(\varphi)$, peut s'écrire

$$\max(\sigma_1{}^*(\varphi - \theta_+ + 2\beta),\ 0) \leqq A_j(\varphi) \leqq \min(\sigma_1{}^*(\varphi - \theta_- - 2\beta),\ \pi). \tag{24.7}$$

D'autre part, d'après la définition de fonctions $A_j(\varphi)$, si $\beta$ est suffisamment petit, l'inégalité (24.7) est évidemment remplie dans l'intervalle $[\Delta_j' - 2\beta,\ \Theta_j')$ et à fortiori dans l'intervalle $[\Delta_j' - 2\beta,\ \Delta_+^*)$.

Sur la courbe (24.2), (23.1) est une conséquence de

$$-\cos(A_j(\varphi) + \omega_k - \sigma_k\varphi) \geqq \sin 2\sigma_1{}^*\beta \qquad (k = 1, \dots, \alpha_1). \tag{24.6'}$$

La condition, à laquelle doit satisfaire la fonction $A_j(\varphi)$, peut s'écrire

$$\begin{aligned} \max(\sigma_1{}^*(\varphi - \theta_+ + 2\beta) + \pi,\ 0) &\leqq A_j(\varphi) \leqq \\ &\leqq \min(\sigma_1{}^*(\varphi - \theta_- - 2\beta) + \pi,\ \pi). \end{aligned} \tag{24.7'}$$

Cette inégalité est évidemment remplie, si $\beta$ est suffisamment petit, dans l'intervalle $(\Theta_j, \Delta_j + 2\beta]$ et à fortiori dans l'intervalle $(\Delta_-^*, \Delta_j + 2\beta]$.

Nous passons à l'étude du cas où $\sigma_j > \sigma_1^*$. Dans ce cas, on doit considérer en outre (23.2).

Sur la courbe (24.1), la condition (23.2) est une conséquence de

$$-\cos(A_j(\varphi) + \omega_j - \sigma_j\varphi) \geqq \sin 2\sigma_j\beta . \tag{24.8}$$

Par suite, la condition, à laquelle doit satisfaire la fonction $A_j(\varphi)$, peut s'écrire

$$\begin{aligned}\max(\sigma_j(\varphi - \theta_{j-} + 2\beta), 0) \leqq A_j(\varphi) \leqq \\ \leqq \min(\sigma_j(\varphi - \theta_{j+} - 2\beta), \pi) .\end{aligned} \tag{24.9}$$

D'autre part, d'après la définition de $A_j(\varphi)$, l'inégalité (24.9) est remplie dans l'intervalle $[\Delta_j' - 2\beta, \Theta_j')$ et à fortiori dans l'intervalle $[\Delta_j' - 2\beta, \Delta_+^*)$, pourvu que $\beta$ soit assez petit.

Sur la courbe (24.2), la condition (23.2) est une conséquence de

$$\cos(A_j(\varphi) + \omega_j - \sigma_j\varphi) \geqq \sin 2\sigma_j\beta . \tag{24.8'}$$

Par suite, la condition, à laquelle doit satisfaire la fonction $A_j(\varphi)$, peut s'écrire

$$\begin{aligned}\max(\sigma_j(\varphi - \theta_{j-} + 2\beta) + \pi, 0) \leqq A_j(\varphi) \leqq \\ \leqq \min(\sigma_j(\varphi - \theta_{j+} - 2\beta) + \pi, \pi) .\end{aligned} \tag{24.9'}$$

Cette inégalité est évidemment remplie dans l'intervalle $(\Theta_j, \Delta_j + 2\beta]$ et à fortiori dans l'intervalle $(\Delta_-^*, \Delta_j + 2\beta]$, si $\beta$ est suffisamment petit.

**25. Lemmes.** Avant de démontrer les propositions III'' et V, démontrons deux lemmes.

**Hypothèse.** Soient $f_k(x, z_1, \dots, z_m)$ $(k = 1, \dots, m)$ et $h_j(x, y_1, \dots, y_n)$ $(j = 1, \dots, n)$ des fonctions holomorphes de $(x, z_1, \dots, z_m)$ et $(x, y_1, \dots, y_n)$ pour $x \in \mathfrak{D}$, $(z_1, \dots, z_m) \in \mathfrak{D}_m$ et $x \in \mathfrak{D}$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathfrak{D}_n$ respectivement, où $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_m$ et $\mathfrak{D}_n$ désignent des domaines ouverts simplement connexes, l'origine étant un point frontière de $\mathfrak{D}$.

Soit $z_k = Z_k(x, x_0, z_k^0)$ $(k = 1, \dots, m)$ une solution du système différentiel

$$\frac{dz_k}{dx} = f_k(x, z_1, \dots, z_m) \qquad (k = 1, \dots, m) \tag{25.1}$$

telle que $Z_k(x_0, x_0, z_k^0) = z_k^0$ $(k = 1, \dots, m)$, $x_0$ et $(z_1^0, \dots, z_m^0)$ étant des points quelconques appartenant à $\mathfrak{D}$ et à $\mathfrak{D}_m$ respectivement. Posons

$$\begin{aligned}H_j(x, x_0, z^0) \equiv H_j(x, x_0, z_1^0, \dots, z_m^0) = \\ = h_j(x, Z_1(x, x_0, z_1^0), \dots, Z_m(x, x_0, z_m^0)) \qquad (j = 1, \dots, n) .\end{aligned} \tag{25.2}$$

*Les* $\Gamma_{jx_0}$ *sont des courbes joignant un point quelconque* $x_0$ *de* $\mathfrak{D}$ *à l'origine* O *et telles que l'on ait* $x \in \mathfrak{D}$ *et* $(Z_1, \dots, Z_m) \in \mathfrak{D}_m$ *lorsque* $x$ *est sur* $\Gamma_{jx_0}$.

Supposons que *les intégrales*

$$\psi_j(x_0, z^0) \equiv \psi_j(x_0, z_1^0, \dots, z_m^0) = \int_{\Gamma_{jx_0}} H_j(x, x_0, z^0)dx \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{25.3}$$

*soient convergentes et que l'on ait*

$$\psi_j(x_0, z^0) = \int_{\Gamma_{jx}} H_j(x, x_0, z^0)dx + \int_x^{x_0} H_j(x, x_0, z^0)dx \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{25.4}$$

*pour* $x$ *assez proche de* $x_0$, *où la deuxième intégrale dans le second membre est prise le long du segment joignant* $x$ *à* $x_0$.

**Lemme 1.** *Si l'on pose*

$$\Psi_j(x, x_0, z^0) \equiv \psi_j(x, Z_1, \dots, Z_m) \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{25.5}$$

*on a*

$$\frac{d}{dx} \Psi_j(x, x_0, z^0) = H_j(x, x_0, z_1^0, \dots, z_m^0) \qquad (j = 1, \dots, n).$$

**Lemme 2.** *Si les intégrales* (25.3) *sont convergentes uniformément par rapport à* $(z_1^0, \dots, z_m^0)$ *pour chaque valeur de* $x_0$, *les* $\psi_j(x, z_1, \dots, z_m)$ $(j = 1, \dots, n)$ *sont des fonctions holomorphes de* $(x, z_1, \dots, z_m)$ *pour* $x \in \mathfrak{D}$, $(z_1, \dots, z_m) \in \mathfrak{D}_m$.

Les fonctions $Z_k(x, x_0, z_k^0)$ $(k = 1, \dots, m)$ sont des fonctions holomorphes de $x$ pour $x = x_0$. Si $\delta'$ est un nombre positif suffisamment petit, on a $Z_k(x, x_0, z_k^0) = Z_k(x, x_1, z_k^1)$ $(k = 1, \dots, m)$ et puis, d'après (25.2),

$$H_j(x, x_0, z^0) = H_j(x, x_1, z^1) \qquad (j = 1, \dots, n)$$

pour $|x_1 - x_0| < \delta'$, les $z_k^1$ désignant les valeurs $Z_k(x_1, x_0, z_k^0)$. On a par suite

$$\psi_j(x_1, z^1) = \int_{\Gamma_{jx_1}} H_j(x, x_0, z^0)dx =$$

$$= \int_{\Gamma_{jx_0}} H_j(x, x_0, z^0)dx + \int_{x_0}^{x_1} H_j(x, x_0, z^0)dx \qquad (j = 1, \dots, n)$$

en tenant compte de (25.3). Par conséquent, les fonctions $\psi_j(x_1, z^1)$ $(j = 1, \dots, n)$ coïncident avec les fonctions $\Psi_j(x_1, x_0, z^0)$ $(j = 1, \dots, n)$, car on a les relations

$$\psi_j(x_1, z^1) = \psi_j(x_1, Z_1(x_1, x_0, z_1^0), \dots, Z_m(x_1, x_0, z_m^0)) \quad (j = 1, \dots, n). \tag{25.6}$$

On a donc

$$\Psi_j(x_1, x_0, z^0) = \int_{\Gamma_{jx_0}} H_j(x, x_0, z^0)dx + \int_{x_0}^{x_1} H_j(x, x_0, z^0)dx \tag{25.7}$$

$$(j = 1, \dots, n).$$

Ces relations démontrent le lemme 1.

D'après les relations (25.7), on voit que les fonctions $\Psi_j(x, x_0, z_1^0, \dots, z_m^0)$ $(j = 1, \dots, n)$ sont des fonctions holomorphes de $(x, z_1^0, \dots, z_m^0)$, si $x$ appartient à un voisinage de $x_0$. Les relations $z_h^1 = Z_k(x_1, x_0, z_h^0)$ $(k = 1, \dots, m)$ étant équivalentes à $z_k^0 = Z_k(x_0, x_1, z_k^1)$ $(k = 1, \dots, m)$, on a

$$\Psi_j(x_1, x_0, Z_1(x_0, x_1, z_1^1), \dots, Z_m(x_0, x_1, z_m^1)) \equiv \Psi_j(x_1, x_0, z_1^0, \dots, z_m^0) =$$
$$= \psi_j(x_1, Z_1(x_1, x_0, z_1^0), \dots, Z_m(x_1, x_0, z_m^0)) = \psi_j(x_1, z^1) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Or les fonctions $Z_k(x_0, x_1, z_k^1)$ $(k = 1, \dots, m)$ et $\Psi_j(x_1, x_0, z_1, \dots, z_m)$ $j = 1, \dots, n)$ étant holomorphes en $(x_1, z_1^1, \dots, z_m^1)$ et en $(x_1, z_1, \dots, z_m)$ respectivement, les fonctions $\psi_j(x_1, z_1^1, \dots, z_m^1) \equiv \psi_j(x_1, z^1)$ $(j = 1, \dots, n)$ sont aussi holomorphes en $(x_1, z_1^1, \dots, z_m^1)$. Puisque $(x_1, z_1^1, \dots, z_m^1)$ peut être considéré comme point arbitraire appartenant à $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}_m$, le lemme 2 est établi.

## 26. Démonstration des propositions III″, IV, V et VI.

**Démonstration de la proposition III″.** Nous montrons plus tard que l'hypothèse du **n. 25** est remplie, c'est-à-dire que l'on a les relations (25.4) en prenant pour $H_j$ la fonction $x^{-1}G_j e^{-\Lambda_j(x)}$. Il suffit alors de montrer, d'après le lemme 2, que les intégrales (20.5) sont convergentes uniformément par rapport à $z_1^0, \dots, z_{\alpha_1}^0$, pour $\max_{k=1}^{\alpha_1} |z_k^0|^{1/\mu_k} < \zeta_0$. Or ce fait est la conséquence immédiate des inégalités (23.4).

**Démonstration de la proposition IV.** Pour démontrer cette proposition, il suffit de démontrer que, lorsque les fonctions $\psi_j(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})$ $(j = 1, \dots, n)$ tendent vers 0, les fonctions $\bar{\psi}_j(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})$ $(j = 1, \dots, n)$ correspondant aux $\psi_j(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})$ $(j = 1, \dots, n)$ tendent aussi vers 0.

Soit $\Gamma_\tau$ le segment joignant un point $\tau = t_0 e^{i\theta_0}$ à l'origine. On a les inégalités

$$|\bar{\psi}_j(\tau, z^0)| \leq \left| \int_0^{t_0} (nAK + B_N) |x^{-1}| \max_{k=1}^{\alpha_1} |Z_k|^{N/\mu_k} e^{-\Re\Lambda_j(x)}\, dt \right|.$$

Or on peut déterminer $t_0$ indépendant de $z_1^0, \dots, z_{\alpha_1}^0$ de manière que les seconds membres de ces inégalités prennent des valeurs inférieures à un nombre positif quelconque donné d'avance. Ce fait établit la proposition IV.

**Démonstration de la proposition V.** Nous appliquons au système (19.6) le lemme 1 en prenant pour les équations (25.1), les solutions $Z_k (k=1, \dots, m)$ de (25.1), les fonctions $H_j (j=1, \dots, n)$ et les intégrales (25.3) respectivement les équations (E) qui s'obtiennent en y posant $z_{\alpha_1+1}=\dots=z_\beta=0$, les solutions $Z_k$ $(k=1, \dots, \alpha_1)$ des équations ainsi trouvées, les fonctions $x^{-1}G_j e^{-\Lambda_j(x)}$ $(j=1, \dots, n)$ et les intégrales (20.5). Les relations (25.4) deviennent alors

$$\int_{\Gamma_{jx_0}} x^{-1}G_j(x, x_0, z^0)e^{-\Lambda_j(x)}\,dx = \int_{\Gamma_{jx'_0}} x^{-1}G_j(x, x_0, z^0)e^{-\Lambda_j(x)}\,dx + \int_{x'_0}^{x_0} x^{-1}G_j(x, x_0, z^0)e^{-\Lambda_j(x)}\,dx \qquad (j=1, \dots, n). \tag{26.1}$$

Si l'on suppose ces relations démontrées, on voit que la proposition V est une conséquence immédiate du lemme 1.

Soient $\xi_0$ et $\xi_0'$ les points d'intersection d'un cercle $|x|=\eta$, de rayon

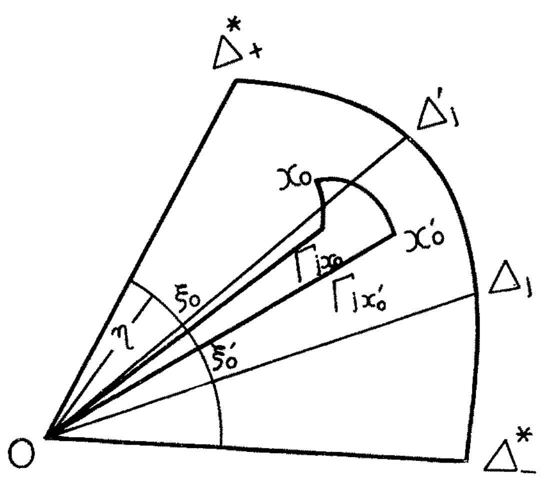

Fig. 3

assez petit, avec les chemins $\Gamma_{jx_0}$ et $\Gamma_{jx'_0}$ respectivement (voir Fig. 3). Pour que l'on ait (26.1), il suffit que l'on ait

$$\left| \int_{\widehat{\xi_0\xi_0'}} x^{-1}G_j(x, x_0, z^0)e^{-\Lambda_j(x)}\,dx \right| \to 0,\ \eta \to 0 \qquad (j=1, \dots, n). \tag{26.2}$$

Or les fonctions $x^{-1}G_j(x, x_0, z^0)e^{-\Lambda_j(x)}$ $(j=1, \dots, n)$ ne surpassent pas en module les expressions

$$(nAK+B_N)\eta^{-1}\max_{k=1}^{\alpha_1} |Z_k|^{N/p_k}e^{-\Re\Lambda_j(x)} \qquad (j=1, \dots, n)$$

sur $\widehat{\xi_0\xi_0'}$. On a donc

$$(26.3)\qquad \left| \int_{\widehat{\xi_0\xi_0'}} x^{-1} G_j(x, x_0, z^0) e^{-\Lambda_j(x)}\, dx \right| \leqq$$
$$\leqq (nAK + B_N) \max_{k=1}^{\alpha_1} | Z_k |^{N/\mu_k} e^{-\Re\Lambda_j(x)} | \arg \xi_0 - \arg \xi_0' | \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Si l'on remarque que les segments $\overline{O\xi_0}$ et $\overline{O\xi_0'}$ sont contenus dans le secteur: $\Delta_j + 2\beta \leqq \varphi \leqq \Delta_j' - 2\beta$ où la fonction $\max_{k=1}^{\alpha_1} |Z_k|^{N/\mu_k} e^{-\Re\Lambda_j(x)}$ tend vers 0 pour $x \to 0$, on voit que le second membre de l'inégalité (26.3) tend vers 0 pour $\eta \to 0$, ce qui établit (26.2). La proposition V est donc démontrée.

**Démonstration de la proposition VI.** Les dérivées partielles des seconds membres de (19.6) par rapport à $u_1, \dots, u_n$ ne surpassent pas en module une certaine constante $A$ sur le segment: $|x| \leqq \delta_0'$, $\arg x = \theta_0$, si $\delta_0'$ est assez petit. La solution telle que $u_j = o(|x|^A)$ sur le segment: $\arg x = \theta_0$, $|x| \leqq \delta_0'$ est donc unique. La condition (21.2) entraîne $u_j = o(|x|^A)$ quelque grand que soit $A$. La proposition VI est donc établie.

**27.** En résumant le résultat obtenu pour le système (11.1), on peut énoncer le

**Théorème 2.** *Sous les hypothèses* $(H_1)$ *et* $(H_2)$, *il existe une solution de la forme* $y_j = \Phi_j(x, Z_1, \dots, Z_{\alpha_1})$ $(j = 1, \dots, n)$ *où les* $\Phi_j(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1})$ $(j = 1, \dots, n)$ *sont des fonctions développables en séries*

$$(\mathrm{F}_1)\qquad \Phi_j(x, z_1, \dots, z_{\alpha_1}) = \delta_j z_j + \Sigma'' P_{j\mathfrak{F}}(x) z_1^{p_1} \dots z_{\alpha_1}^{p_{\alpha_1}} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

*convergentes pour les valeurs de* $x, z_1, \dots, z_{\alpha_1}$ *telles que* (20.1): $x \in \mathfrak{D}(\Delta_-^*, \Delta_+^*, r_0)$, $\max_{k=1}^{\alpha_1} |z_k|^{1/\mu_k} < \zeta_0$, $\delta_j$ *désignant* 1 *ou* 0 *suivant que* $1 \leqq j \leqq \alpha_1$ *ou* $\alpha_1 + 1 \leqq j \leqq n$; *les coefficients* $P_{j\mathfrak{F}}(x)$ *sont des fonctions holomorphes et développables asymptotiquement en séries* (17.2) *dans le domaine* $\mathfrak{D}(\Delta_-^*, \Delta_+^*, r_0)$.

*Si l'on suppose* $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_\beta > \sigma_k$ $(k = \beta + 1, \dots, n)$, *on retrouve le dernier résultat que J. Malmquist a obtenu en 1941.*

Plus précisément, notre domaine de convergence est plus étendu en général que celui de J. MALMQUIST. Si notre domaine contient pour chaque l'arrangement $(j; \mathfrak{F})$ une direction $(\theta_{j\mathfrak{F}})$ telle que la fonction $\exp(\Lambda_j(x) - \sum_{k=1}^{\alpha_1} p_k \Lambda_k(x))$ tende vers l'infini pour $\arg x = \theta_{j\mathfrak{F}}$, $x \to 0$, il coïncide avec le domaine de J. MALMQUIST, et réciproquement. Mais il n'en est pas toujours ainsi. Il pourra arriver qu'il existe un certain arrangement $(j; \mathfrak{F})$ tel que notre domaine $\mathfrak{D}(\Delta_-^*, \Delta_+^*, r_0)$ ne contienne aucune direction $(\theta_{j\mathfrak{F}})$, pour laquelle

$\exp(\Lambda_j(x) - \sum_{k=1}^{\alpha_1} p_k \Lambda_k(x))$ tend vers l'infini pour $x \to 0$. Dans ce cas, le domaine de convergence de J. MALMQUIST est contenu dans le nôtre, mais la réciproque n'est pas vraie.

(à suivre)

## BIBLIOGRAPHIE

M. HUKUHARA

[1] *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires*, II. « Jour. Fac. Sci. Hokkaido Univ. », **5** (1937) 157-166.

[2] *Intégration formelle d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier.* « Annali di Matematica pura ed Applicata », **19** (1940) 35-44.

[3] *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires*, III. « Mem. Fac. Sci. Kyûsyû Univ. », **2** (1942) 125-137.

[4] *Pri singula punkto de la ordinara diferenciala ekvacio de unua ordo.* « Jour. Fac. Sci. Kyûsyû Univ », **3** (1949) 9-21.

[5] *Renzokuna Kansû no Zoku to Syazô.* « Mem. Fac Sci. Kyûsyû Univ. Ser. A », **5** (1950) 61-63.

J. MALMQUIST

[1] *Sur les points singuliers des équations différentielles Ier ordre.* « Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik », **15** (1921) 28-40.

[2], [3], [4] *Sur l'étude analytique des solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage d'un point singulier d'indétermination*, I, II, III. « Acta Math. » **73** (1940) 87-129, **74** (1941) 1-64, **74** (1941) 109-128.

J. TRJITZINSKY

[1] *Analytic theory of linear differential equations.* « Acta Math. », **62** (1934) 167-226.

[2] *Analytic theory of non-linear singular differential equations.* « Mémorial des Sciences Mathématiques 1938 ».