# Dilatazioni e varietà canoniche sulle varietà algebriche.

Memoria di Beniamino Segre (a Roma).

**Sunto.** - *È dato dagli ultimi due capoversi del n. 1.*

1. In una recente Memoria [1] ho introdotto — per ogni sottovarietà $P$ (di dimensione $p$) di una varietà algebrica $V$ (di dimensione $v$) — una *successione covariante d'immersione* $\{P_V\}$, formata da varietà $P_{V,i}$ (di dimensione $p-i$, ove $i=0, 1, \ldots$) opportunamente definite [2]. Poggiando su questa fondamentale nozione, ho ivi potuto risolvere un gran numero di questioni di geometria sulle varietà algebriche, e giungere fra l'altro a definire le *varietà canoniche* $V_i^*$ (di dimensione $v-i$) di $V$, con l'identificare $V$ alla varietà diagonale del prodotto diretto $\Upsilon = V \times V$ e quindi assumere [3]:

$$V_i^* = (-1)^i \tilde{V}_{\Upsilon, i}. \tag{1}$$

In particolare, quando $i$ uguagli la dimensione $v$ di $V$, dalla (1) si trae per un *gruppo canonico* $V_v^*$ la semplicissima formula [4]:

$$V_v^* = (-1)^v (V^{[2]})_\Upsilon, \tag{2}$$

avente un chiaro significato topologico.

In base alla (1) si perviene a dare una definizione topologica anche per le altre varietà canoniche $V_i^*$, non appena si siano introdotte topologicamente le diverse varietà covarianti d'immersione: al che riuscii precisamente nel n. 16′ di N. M., usufruendo della nozione di *dilatazione*, che già avevo approfondita in un precedente lavoro [5]. Poichè però quel n. 16′ (aggiunto all'ultimo sulle bozze) dovette essere piuttosto stringato e rimase del tutto inoperante in N. M., non sarà inopportuno che io qui riprenda *ab ovo* la questione ivi trattata, precisandone meglio sia il risultato che la dimostrazione, per farne poi anche talune applicazioni.

---

(1) Cfr. B. Segre, *Nuovi metodi e risultati nella geometria sulle varietà algebriche*, questi «Annali», (4) 35 (1953), 1-128. In seguito citeremo tale lavoro con la sigla N. M. e, salvo esplicito avviso in contrario, conserveremo le notazioni e la terminologia in esso usate.

(2) Ved. N. M., n. 13.

(3) Ved. N. M., nn. 66, 87. Si rammenti che la successione delle $\tilde{V}_{\Upsilon,i}$ è l'inversa di quella formata dalle $V_{\Upsilon,i}$: cfr. N. M., n. 6.

(4) Si passa subito dalla (1) alla (2) tenendo conto del n. 23 di N. M.

(5) Cfr. B. Segre, *Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche*, questi «Annali», (4) 33 (1952), 5-48.

Consideriamo all'uopo (modificando leggermente le notazioni di quel n. 16') due varietà algebriche $P'$ e $V'$ di dimensioni $p$ e $v$ $(p < v - 1)$, le quali siano entrambe effettive, irriducibili e non singolari, e tali che $P'$ giaccia in $V'$. Resta allora definita — a meno di una trasformazione birazionale regolare — una varietà algebrica $V$, ottenibile da $V'$ mediante una dilatazione $T$ di base $P'$, la quale dunque «dilaterà» $P'$ in un'ipersuperficie (eccezionale) $P$ di $V$, luogo di $\infty^p$ varietà $Q$ — trasformate dei singoli punti $Q'$ di $P'$ — ciascuna delle $Q$ potendo supporsi ridotta ad uno spazio lineare, di dimensione

$$q = v - p - 1 \quad (3)$$ [6].

La trasformazione $T^{-1}$ inversa della $T$, e cioè la trasformazione birazionale di $V$ in $V'$ che «contrae» $P$ in $P'$, non ammette nessun punto fondamentale su $V$; essa muta ogni sottovarietà $M$ (effettiva o virtuale) di $V$ in una ben determinata sottovarietà di $V'$ (avente in generale dimensione uguale a quella di $M$, ma che può risultare di dimensione inferiore se $M$ giace in $P$): e denoteremo precisamente con $M'$ la varietà di $V'$ trasformata di $M$ mediante $T^{-1}$.

Le suddette considerazioni si trasportano subito, con ovvie varianti, al caso $(p = v - 1)$ in cui $P'$ sia un'ipersuperficie di $V'$, tenendo presente che $T$ risulta allora una trasformazione birazionale senza eccezioni fra $V'$ e $V$.

Con le precedenti notazioni, ed a parziale modifica dell'ultima formula contenuta nel n. 16' di N. M., mostreremo anzitutto (nn. 2–5) che, *per* $i = 0, 1, \dots, p$; $p \leq v - 1$, *sussiste l'equivalenza*

$$P'_{V',i} = (-1)^{v-p+i-1} (P^{[v-p+i]})'_{V}. \quad (4)$$

Questa porge manifestamente — nel caso più generale — il richiesto significato topologico per le varietà covarianti d'immersione di $P$, in $V'$; e da essa discende agevolmente (n. 6) una *definizione puramente topologica delle varietà canoniche.*

Come applicazione, daremo poi (nn. 6–12) risposta in casi abbastanza estesi all'importante e non facile questione di *determinare le varietà canoniche di* $V$, *note che siano le varietà canoniche di* $P'$ *e di* $V'$. I risultati a cui così giungeremo includono certe proposizioni ottenute — con procedimento delicato e laborioso — da J. A. Todd [nei lavori citati in [12] ed in [16]], nell'ipotesi che $P'$ si riduca ad un punto $(p = 0)$ oppure sia una curva $(p = 1)$. Un più completo approfondimento della suddetta questione, potrà formare oggetto di ulteriori ricerche.

---

[6] Ved. *loc. cit.* in [5], § 1.

2. Qualora $P'$ sia un' ipersuperficie di $V'$, e cioè si abbia $p = v - 1$, la corrispondenza fra $V$ e $V'$ risulta — come già si è detto — birazionale senza eccezioni, sicchè è lecito identificare $P$ con $P'$ e $V$ con $V'$. In tal caso la (4) può venire scritta semplicemente nella forma

$$P_{V,i} = (-1)^i (P^{[i+1]})_V;$$

e questa relazione notoriamente sussiste nelle ipotesi ammesse (7).

Basterà quindi stabilire la (4) quando — come noi faremo — si supponga $p < v - 1$. Va rilevato che, in virtù di quest'ultima condizione, risulta $v \geq 2$; inoltre, tenuto conto della (3), gli spazi $Q$ hanno dimensione $q > 0$. In seguito avremo occasione di doverci riferire agli spazi subordinati di uno spazio $Q$: denoteremo precisamente con $Q_i$ uno spazio subordinato di $Q$ di dimensione

$$q - i = v - p - i - 1 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

scrivendo dunque anche talvolta $Q_0$ in luogo di $Q$ ed assumendo $Q_s = 0$ per $s > q$.

Facciamo intanto alcune osservazioni sulla varietà $P$ di cui al n. 1. È questa una varietà fibrata, le cui fibre — e cioè gli $\infty^p$ spazi lineari $Q$ — ammettono delle varietà unisecanti ($p$-dimensionali): si ottiene per esempio una varietà siffatta come intersezione di $P$ con uno spazio di dimensione complementare a $q$ scelto genericamente entro un qualunque spazio lineare che contenga $P$. Ne discende, con nota argomentazione, che $P$ *risulta birazionalmente equivalente al prodotto diretto* $P' \times Q$, $P$ essendo riferibile a tale prodotto mediante una trasformazione birazionale che muta le fibre di $P$ nelle varietà $Q' \times Q$ di quest'ultimo (ove $Q'$ denoti un punto di $P'$); ma va avvertito che il suddetto riferimento birazionale può dover essere necessariamente dotato di eccezioni, onde quelle due varietà sono fra loro birazionalmente equivalenti in senso lato *ma non in senso stretto*, in quanto esse possono avere *ordini invariantivi relativi diversi* (8). Ciò si prova con il seguente semplicissimo esempio.

Siano $V'$ una quadrica non singolare di $S_4$ e $P'$ una sua generatrice rettilinea, sicchè $v = 3$, $p = 1$ e $Q$ è una retta. Ne consegue che, attualmente, $P' \times Q$ è una superficie quadrica ed ha quindi l'ordine invariantivo relativo uguale a due. Invece l'ordine invariantivo relativo di $P$ vale uno; infatti i punti di $P$ corrispondono biunivocamente senza eccezioni agli elementi piani (o calotte a due dimensioni del 1° ordine) contenenti $P'$ e tangenti a $V'$ in punti $Q'$ di $P'$, ossia ai piani di $S_4$ passanti per $P'$, in quanto

(7) Cfr. N. M., n. 14, formula (1).

(8) Per la nozione che qui interviene di ordine invariantivo relativo, cfr. F. SEVERI, *Conferenze di geometria algebrica* (Roma, 1927-30), p. 64, od anche F. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza, ecc.*, vol. I (Roma, Cremonese, 1942), n. 13.

ogni piano siffatto tocca $V'$ in uno ed un sol punto $Q'$ (giacente necessariamente su $P'$).

Notiamo da ultimo che due diversi spazi $Q$ generatori di $P$ sono sghembi fra loro, onde uno spazio subordinato dell'uno ed uno spazio subordinato dell'altro sono certamente privi di punti a comune. Ne consegue che è

(5) $$(Q_i Q_j)_V = 0 \qquad (i, j = 0, 1, \dots, q).$$

3. Allo scopo di stabilire la (4) (nell'ipotesi $p < v - 1$), introduciamo un'opportuna notazione. Se $M'$ denota una qualunque varietà algebrica (effettiva o virtuale) di dimensione $m$, tale che ciascuna sua componente appartenga a $V'$ ma non a $P'$, indicheremo con $T(M')$ la trasformata di $M'$ mediante la corrispondenza birazionale $T$ fra $V'$ e $V$; tale trasformata verrà invece designata con $M'^{\mathrm{I}}$, nell'ipotesi che $M'$ appartenga a $P'$. È chiaro che, mentre $T(M')$ è riferita ad $M'$ in una *corrispondenza birazionale* ed ha perciò ancora dimensione $m$, la varietà $M'^{\mathrm{I}}$ risulta il *luogo degli* $\infty^m$ *spazi* $Q$ *che corrispondono ai vari punti* $Q'$ *di* $M'$ ed ha quindi dimensione $m + q$; l'inversa $T^{-1}$ della $T$ contrae manifestamente $M'^{\mathrm{I}}$ nella varietà originalmente considerata (conservando le molteplicità delle singole componenti), talchè:

$$M'^{\mathrm{I}\mathrm{I}'} = M',$$

dove, in conformità con la convenzione indicata nel terzo capoverso del n. 1, nel primo membro l'ultimo apice denota la trasformazione di ciò che ivi precede mediante $T^{-1}$. In particolare risulta

$$P'^{\mathrm{I}} = P,$$

ed inoltre

$$0'^{\mathrm{I}} = 0,$$

ove $0'$ sia lo zero di $V'$ (e di $P'$) e $0$ sia lo zero di $V$ (e di $P$).

Consideriamo ora un'ipersuperficie (effettiva) $A'$ di $V'$ che non passi per $P'$, e che seghi $P'$ secondo una varietà $\langle P'A' \rangle$ priva di componenti multiple (la quale avrà così dimensione regolare $p - 1$). La trasformata di $A'$ nel riferimento birazionale fra $V'$ e $V$ è un'ipersuperficie $T(A') = A$ di $V$, che sega $P$ semplicemente lungo la varietà $\langle P'A' \rangle^{\mathrm{I}}$, di dimensione regolare $(p - 1) + q = v - 2$. Si ha quindi

$$(P'A')^{\mathrm{I}}_{V'} = (PA)_V;$$

e si constata subito che questa relazione vale comunque si scelga in $V$ l'ipersuperficie $A$, eventualmente anche virtuale. Più in generale si vede che, per ogni $A'$ ed ogni numero naturale $k$, risulta:

(6) $$(P'A'^{[k]})^{\mathrm{I}}_{V'} = (PA^{[k]})_V;$$

il secondo membro della (6) vale quindi zero se $k > p$, ciò essendo allora manifesto pel primo membro.

Torniamo a supporre che $A'$ soddisfi alle condizioni enunciate al principio del capoverso precedente, ed ammettiamo inoltre — com'è lecito senza restrizione su $V'$ e $P'$ — che $A'$ possa variare con continuità entro ad un sistema (lineare od anche soltanto) razionale, fino a ridursi ad un'ipersuperficie irriducibile $B'$, passante semplicemente per $P'$. Detta $B$ l'ipersuperficie irriducibile di $V$ avente come punto generico il trasformato mediante $T$ del punto generico di $B'$, è chiaro che — corrispondentemente alla suddetta variazione di $A'$ su $V'$ — $A$ descrive su $V$ un sistema (lineare o) razionale, spezzandosi al limite nella somma delle ipersuperficie $B$ e $P$ contate ciascuna semplicemente; su $V$ vale quindi l'equivalenza

$$A = B + P. \tag{7}$$

Dalla (7) si ricava (per $s = 1, 2, \dots$):

$$(-1)^s (P^{[s+1]})_V = (P(B - A)^{[s]})_V = (PB^{[s]})_V + \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} (PB^{[s-k]}A^{[k]})_V. \tag{8}$$

Poichè, a norma della (6), ciascuna delle varietà $(PA^{[k]})_V$ è luogo di spazi $Q$, così — se $s - k < q$ — la $(PB^{[s-k]}A^{[k]})_V$ appare luogo di varietà ($Q_{s-k}$, giusta quanto si dirà al principio del n. 4) di dimensione p o s i t i v a giacenti in tali spazi, e subisce quindi una c o n t r a z i o n e quando si passi mediante $T^{-1}$ da $V$ a $V'$. Risulterà dal primo capoverso dal n. 4, che, se $s \geq v - p - 1$, non v'è invece contrazione per gli altri termini che figurano in (8) (fra cui quelli che si hanno per $k < s - q$ risultano manifestamente nulli). Pertanto — tenuto anche conto della (3) — la (8) nell'ipotesi che si faccia $s = v - p - 1$ fornisce così su $V'$ l'equivalenza:

$$(-1)^{v-p-1} (P^{[v-p]})'_V = (PB^{[v-p-1]})'_V; \tag{9}$$

mentre nell'ipotesi che si assuma $s > v - p - 1$ dalla (8) si trae la:

$$(-1)^s (P^{[s+1]})'_V = (PB^{[s]})'_V + (-1)^{s+p-v+1} \binom{s}{v-p-1} (PB^{[v-p-1]}A^{[s+p-v+1]})'_V. \tag{10}$$

4. L'ipersuperficie $B'$ di cui al n. 3 passa semplicemente per il generico punto $Q'$ di $P'$; vi sono quindi $\infty^{q-1}$ elementi $(p+1)$-dimensionali tangenti in $Q'$ simultaneamente a $P'$ ed a $B'$, e questi — sullo spazio $Q$ imagine di $Q'$ — si rappresentano coi punti di uno spazio subordinato $Q_1$ (di dimensione $q - 1$). Ne consegue che $B$ sega il generico spazio $Q$ generatore di $P$ semplicemente lungo un tale $Q_1$, eppertanto:

$$(QB)_V = Q_1.$$

Più generalmente, se $B^1, B^2, \dots, B^s$ denotano $s$ ipersuperficie di $V$ analoghe a $B$ (ma non necessariamente equivalenti fra loro), si ha

$$(QB^1B^2 \dots B^s)_V = Q_s; \tag{11}$$

sicchè fra l'altro risulta

$$(QB^{[v-p-1]})_V = Q_{v-p-1}. \tag{11'}$$

In virtù della (8), e tenuto conto delle (5), (6), (11), si vede che è

$$(-1)^s(QP^{[s]})_V = (QB^{[s]})_V = Q_s; \tag{12}$$

e l'ultimo membro di questa relazione ha dimensione positiva se $0 \leq s < q$. Avuto riguardo alla (6), ne discende che *ogni varietà del tipo* $(P^{[s+1]}A^{[k]})_V$, *ove* $0 \leq s < q$, $k > 0$, *subisce una contrazione quando si passi mediante* $T^{-1}$ *da* $V$ *a* $V'$.

Notiamo ora che, se $s > v - p - 1$, dalle (6), (11') discende che è:

$$(PB^{[v-p-1]}A^{[s+p-v+1]})'_V = (P'A'^{[s+p-v+1]})_{V'}.$$

Così la (10) riducesi alla

$$(-1)^s(P^{[s+1]})'_V = (PB^{[s]})'_V + (-1)^{s+p-v+1}\binom{s}{v-p-1}(P'A'^{[s+p-v+1]})_{V'}, \tag{13}$$

valida nell'ipotesi ammessa che sia $s > v - p - 1$.

Inoltre la (11') mostra che la varietà $(PB^{[v-p-1]})_V$ incontra in un sol punto il generico spazio $Q$ generatore di $P$. Risulta perciò

$$(PB^{[v-p-1]})'_V = P' = P'_{V',0},$$

e la (9) diventa

$$P'_{V',0} = (-1)^{v-p-1}(P^{[v-p]})'_V.$$

Abbiamo così provata la (4) *per* $i = 0$.

5. Poichè la (4) è ovvia (e banale) per $i > p$, basterà ora stabilirla nei casi rimanenti, in cui cioè si abbia $1 \leq i \leq p$. All'uopo potremo procedere per induzione rispetto ad $i$, ed ammettere quindi la validità della

$$P'_{V',j} = (-1)^{v-p+j-1}(P^{[v-p+j]})'_V \quad \text{per } j = 0, 1, \dots, i-1. \tag{14}$$

Posto per abbreviare

$$s = v - p + i - 1, \tag{15}$$

talchè risulta $v - p \leq s \leq v - 1$, consideriamo in $V'$ $s$ ipersuperficie

$$B^{1'}, B^{2'}, \dots, B^{s'} \tag{16}$$

passanti semplicemente in modo generico per $P'$, e che su $V'$ rispettivamente equivalgano alle ipersuperficie

$$A^{1'}, A^{2'}, \dots, A^{s'} \tag{17}$$

non passanti per $P'$. Le (16) si segano lungo $P'$ ed ulteriormente lungo una varietà $N'$ (di dimensione regolare $v-s$) la quale si appoggia a $P'$ lungo una varietà $R'$, di dimensione

$$v-s-1=p-i,$$

luogo dei punti $Q'$ di $P'$ in cui le (16) sono toccate da uno stesso elemento $(p+1)$-dimensionale ivi tangente a $P'$; e la $R'$ viene fornita dall'equivalenza (9):

$$R'=P'_{V',i}+\sum_{j=0}^{i-1}P'_{V',j}V'^{s}_{i-j}(A'), \tag{18}$$

dove $V'^{s}_{k}(A')$ denota la somma dei prodotti (su $V'$) delle ipersuperficie (17) combinate a $k$ a $k$ senza ripetizioni.

Con notazioni che si deducono in modo ovvio da quelle del n 3, e tenuto conto della (7), si ha intanto

$$B^k=-(P-A^k) \qquad (k=1,2,\dots,s). \tag{19}$$

Inoltre i suddetti elementi $(p+1)$-dimensionali hanno per imagini su $V$ i punti di $P$ comuni alle $B^1, B^2,\dots, B^s$; si ha pertanto

$$R'=(PB^1B^2\dots B^s)'_V,$$

sicchè, avuto riguardo alla (19), risulta:

$$R'=(-1)^s(P^{[s+1]})'_V+\sum_{k=1}^{s}(-1)^{s-k}(P^{[s-k+1]}V^s_k(A))'_V. \tag{20}$$

In virtù di una proprietà dianzi stabilita nel n. 4 (ed ivi enunciata in corsivo), i singoli termini che qui provengono da valori di $k$ per cui risulti $s-k<q$ non arrecano alcun contributo. Basta quindi dare a $k$ soltanto i valori

$$1, 2, \dots, s-q;$$

e si noti che è $s-q=i$, in forza delle (3), (15).

Pongasi infine nella (20) $k=i-j$, talchè all'indice $j$ $(=i-k=s-q-k)$ dovranno venir attribuiti i valori

$$i-1,\ i-2,\dots,\ 0.$$

Avuto riguardo alla (15). otteniamo così l'equivalenza

$$R'=(-1)^{v-p+i-1}(P^{[v-p+i]})'_V+\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{v-p+j-1}(P^{[v-p+j]})'_V\,V'^{s}_{i-j}(A'),$$

(9) Cfr. N. M., n. 16, formula (1).

la quale, in virtù delle (14), può anche scriversi sotto la forma:

$$R' = (-1)^{v-p+i-1}(P^{[v-p+i]})'_V + \sum_{j=0}^{i-1} P'_{V',j} V'^{s}_{i-j}(A').$$

Basta quindi raffrontare quest'ultima con la (18), per dedurne precisamente la formula (4) che si doveva dimostrare.

**6.** In virtù di quanto richiamato nel n. 1, le varietà canoniche $V_i^*$ di una qualunque varietà $V$ si esprimono con la (1), dove nel secondo membro $\Upsilon$ denota il prodotto $V \times V$ e la $V$ va identificata con la varietà diagonale di $\Upsilon$. Possiamo ora esprimere in modo più esplicito quel secondo membro, usufruendo della (4). A tale scopo basta applicare alla varietà $\Upsilon$ (che ha dimensione $2v$) una dilatazione di base la relativa varietà diagonale $V$; se con ciò $\Upsilon$ e $V$ si mutano rispettivamente in $\underline{\Upsilon}$ ed in $\underline{V}$, la (4) fornisce

$$V_{\Upsilon,i} = (-1)^{v+i-1}(\underline{V}^{[v+i]})'_{\underline{\Upsilon}},$$

ove l'apice nel secondo membro designa l'applicazione della trasformazione inversa da $\underline{\Upsilon}$ a $\Upsilon$. Sostituendo nella (1), e ricordando (N. M., n. 6) che l'inversa dell'alternante di una successione uguaglia l'alternante dell'inversa di questa, otteniamo l'equivalenza

$$V_i^* = (-1)^{v-1}(\underline{V}^{[v+i]})'_{\underline{\Upsilon}}, \tag{21}$$

la quale porge una *definizione puramente topologica delle varietà canoniche.*

Possiamo fare una prima applicazione della (21), riferendoci al caso in cui la varietà $V$ provenga da un'altra varietà $V'$ mediante una dilatazione $T$ di base $P'$. Conservando per $T$ le notazioni dei nn. 1, 2, possiamo dire che si passa da $V$ a $V'$ con un'operazione $T^{-1}$ di contrazione, che consiste nel ridurre ad un sol punto $Q'$ ciascuno degli spazi $Q$ generatori di $P$. Tale operazione si riflette in analoghe operazioni di contrazione sulle varietà $\underline{V}$, $\underline{\Upsilon}$; mediante queste, il secondo membro della (21) si riduce alla analoga espressione relativa alle varietà contratte, a meno di un'eventuale sottovarietà di $P'$ (proveniente da una sottovarietà di $P$); sicchè — in ultima analisi — $V_i^*$ si trasforma nella somma di $V_i'^*$ e di un'eventuale sottovarietà di $P'$.

Sussiste pertanto un'equivalenza del tipo

$$V_i^* = T(V_i'^*) + \Lambda_i, \tag{22}$$

dove — a norma di quanto convenuto nel n. 3 — $T(V_i'^*)$ denota la trasformata di $V_i'^*$ nella corrispondenza $T$ fra $V'$ e $V$, mentre $\Lambda_i$ sta per indicare una varietà (virtuale, eventualmente nulla), di dimensione $v - i$, *giacente in* $P$. Il problema enunciato alla fine del n. 1 è così ricondotto a quello della determinazione di tali varietà $\Lambda_i$ (per $i = 1, 2, \ldots, v$).

7. La questione testè indicata può venire risolta assai facilmente *nel caso in cui sia* $p = 0$, e cioè quando $P'$ si riduca ad un punto e quindi $P$ sia uno spazio $Q = [v-1]$, di dimensione $v-1$. In tale ipotesi, una base per l'equivalenza algebrica o razionale fra varietà di $P$ di dimensione $v-i$ è data da uno spazio subordinato $Q_{i-1} = [v-i]$ di $Q$; sicchè nella (22) dev'essere

$$\Lambda_i = a_i[v-i], \tag{23}$$

dove $a_i$ è un intero da determinarsi.

Ricordiamo ora che è (10)

$$P_i^* = [v-1]_i^* = (-1)^i \binom{v}{i} [v-i-1],$$

ed inoltre (11)

$$P_i^* = P \cdot \sum_{j=0}^{i} P^{[j]} V_{i-j}^*,$$

onde risulta:

$$(-1)^i \binom{v}{i} [v-i-1] = P^{[i+1]} + \sum_{j=0}^{i-1} P^{[j+1]} V_{i-j}^* . \tag{24}$$

Per $i > 0$ si ha d'altro canto $P \cdot T(V_i'^*) = 0$, in quanto la generica $V_i'^*$ non passa per $P'$. Pertanto, avuto riguardo alle (22), (23), e tenuto anche conto della (12), quando $j < i$ si ottiene:

$$\begin{aligned} P^{[j+1]} V_{i-j}^* &= P^{[j+1]} \Lambda_{i-j} = a_{i-j}([v+j-i] P^{[j+1]})_V = \\ &= (-1)^{j+1} a_{i-j}([v+j-i] Q_{j+1})_Q = (-1)^{j+1} a_{i-j} [v-i-1], \end{aligned}$$

ed inoltre

$$(P^{[i+1]})_V = (-1)^i Q_i = (-1)^i [v-i-1],$$

onde la (24) fornisce:

$$(-1)^i \binom{v}{i} = (-1)^i + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} a_{i-j} . \tag{25}$$

Ponendo nella (25) $i = 1$, si ottiene subito

$$a_1 = v - 1. \tag{26}$$

Assunto invece $i > 1$, basta sommare a membro a membro la (25) e la relazione che da essa si deduce scrivendo $i-1$ in luogo di $i$, per dedurre l'uguaglianza

$$a_i = (-1)^{i-1} \left( \binom{v}{i} - \binom{v}{i-1} \right);$$

(10) Cfr. N. M., n. 86, formula (1).
(11) Cfr. N. M., n. 70, formula (1).

e questa sussiste anche per $i=1$, in virtù della (26). Pertanto attualmente, tenuto conto della (23), la (22) si precisa nel modo richiesto con la formula

$$V_i^* = T(V_i'^*) + (-1)^{i-1}\left(\binom{v}{i} - \binom{v}{i-1}\right)[v-i], \tag{27}$$

*valida per* $p=0$ *ed* $i=1, 2, \ldots, v$ [12].

**8.** Un altro caso in cui si risponde agevolmente alla questione posta alla fine del n. 6 è quello in cui, $P'$ essendo qualsivoglia, *si supponga* $i=1$. Si osservi invero che, $\Lambda_1$ essendo una varietà (virtuale) di dimensione $v-1$ giacente nella $P$, la quale è irriducibile ed ha pure dimensione $v-1$, deve essere $\Lambda_1 = \alpha P$ eppertanto

$$V_1^* = T(V_1'^*) + \alpha P, \tag{28}$$

dove $\alpha = \alpha(v, p)$ denota un intero da determinarsi convenientemente. Proveremo che è

$$\alpha = v - p - 1, \tag{29}$$

ossia che — *per* $i=1$ — *la* (22) *può venir precisata con la*

$$V_1^* = T(V_1'^*) + (v-p-1)P. \tag{30}$$

Osserviamo intanto che, se $p=0$, la (30) non differisce dalla formula fornita dalla (27) per $i=1$. Un altro caso in cui la validità della (30) è ovvia, è quello in cui si abbia $p=v-1$, e cioè $P'$ sia un'ipersuperficie di $V'$; in tale ipotesi, infatti, $T$ è una corrispondenza birazionale senza eccezioni fra $V'$ e $V$ (n. 1), sicchè un'ipersuperficie canonica $V_1^*$ di $V$ risulta equivalente alla trasformata $T(V_1'^*)$ mediante $T$ di un'ipersuperficie canonica di $V'$, in accordo con quanto appunto esprime la (30) per $p=v-1$. Potremo quindi suppòrre $p<v-1$, e procedere per induzione rispetto a $v$ tenendo fisso $p$.

Consideriamo una generica ipersuperficie $B'$ di $V'$ che passi semplicemente per $P'$, relativamente alla quale conserviamo le notazioni del n. 3. La corrispondenza fra $B'$ e $B$ è una dilatazione di base $P'$, trasformante $P'$ nella varietà $\mathfrak{S}$ segata da $P$ su $B$. Da un lato si ha quindi

$$\mathfrak{S} = (PB)_V; \tag{31}$$

mentre d'altro canto, in virtù dell'ammessa induzione, dev'essere

$$B_1^* = T(B_1'^*) + (v-p-2)\mathfrak{S}. \tag{32}$$

Inoltre dalle (28), (31) si deduce:

$$(V_1^* B)_V = T(V_1'^* B')_{V'} + \alpha\mathfrak{S}. \tag{33}$$

[12] Questa equivale alle (12), (13) di J. A. TODD, *Birational transformations with isolated fundamental points*, « Proc. Edinburgh Math. Soc. », (2) 5 (1937), 117-124.

In virtù del teorema d'aggiunzione ([13]), risulta

$$B_1^* = (V_1^* B)_V + (B^{[2]})_V, \qquad B_1'^* = (V_1'^* B')_V + (A'B')_{V'}.$$

Avuto anche riguardo alle (33), (7), (31), si ottiene successivamente:

$$\begin{aligned} T(B_1'^*) &= T(V_1'^* B')_{V'} + (AB)_V = \\ &= (V_1^* B)_V - \alpha\mathcal{S} + (B^{[2]})_V + (PB)_V = \\ &= B_1^* - (\alpha - 1)\mathcal{S}; \end{aligned}$$

basta dunque confrontare con la (32), per dedurne la (29) e quindi la (30) ([14]).

9. Mostreremo ora che *per* $i = 2$, $p \leq v - 1$, *la* (22) *si precisa con la*

(34) $$V_2^* = T(V_2'^*) + c_{v,p}(P^{[2]})_V + H^{\mathrm{I}}_{V',P'},$$

dove, per abbreviare, si è scritto $c_{v,p}$ per indicare l'intero

(35) $$c_{v,p} = \frac{1}{2}(v-p)(v-p-3),$$

$H_{V',P'}$ denota l'ipersuperficie di $P'$ data da

(36) $$H_{V',P'} = P_1'^* + (v-p-2)(P'V_1'^*)_{V'},$$

e l'indice I in alto ha il significato specificato nel n. 3.

Poichè (n. 6) $\Lambda_2$ è un'ipersuperficie di $P$, così essa deve esprimersi con un'equivalenza del tipo

(37) $$\Lambda_2 = c_{v,p}(P^{[2]})_V + H^{\mathrm{I}}_{V',P'},$$

dove $c_{v,p}$ è un intero — uguale precisamente all'ordine della varietà segata da $-\Lambda_2$ su di uno spazio $Q$ — ed $H_{V',P'}$ è un'opportuna ipersuperficie di $P'$. Ed invero, scelto $c_{v,p}$ nel modo anzidetto, la $\Lambda_2 - c_{v,p}(P^{[2]})_V$ non incontra gli spazi $Q$ generatori di $P$, in virtù della (12); sicchè essa dev'essere un luogo di $\infty^{p-1}$ spazi $Q$, e quindi del tipo $H^{\mathrm{I}}_{V',P'}$ ([15]). Si tratta dunque di dimostrare che valgono le (35), (36), dopo di che le (22), (37) forniscono senz'altro la annunciata formula (34).

Ora tutto ciò è ovvio nel caso in cui $p = v - 1$, e cioè quando $P'$ sia un'ipersuperficie di $V'$, le (35), (36) riducendosi allora alle $c = -1$, $H = P_1'^* - (P'V_1'^*)_{V'}$, sicchè la (37) — tenuto anche conto del teorema d'aggiunzione ([13]) — diventa

$$\Lambda_2 = [-(P'^{[2]})_{V'} + P_1'^* - (P'V_1'^*)_{V'}]^{\mathrm{I}} = 0;$$

---

([13]) Cfr. ad esempio N. M., n. 70, formula (1).

([14]) Nel n. 8 di F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, « Ann. di Mat. », (4) 32 (1951), 1-81, trovasi dimostrato che — se $p < v - 1$ e $V$ ha genere geometrico positivo — l'ipersuperficie eccezionale $P$ risulta *parte fissa* del sistema canonico impuro $|V_1^*|$ di $V$. A norma dalla (30), è anzi presumibile che questo sistema ammetta come parte fissa la $P$ *contata* $v - p - 1$ *volte*.

([15]) La (37) segue anche da un risultato stabilito in H. GUGGENHEIMER, *Omologia delle dilatazioni* (che uscirà nel vol. 17 dei « Rend. Acc. Lincei »).

mentre d'altro canto risulta $V_2^* = (T V_2'^*)$, poichè attualmente $T$ è un riferimento birazionale privo di eccezioni fra $V'$ e $V$ (n. 1). Potremo quindi supporre $p < v - 1$ e — tenuto fisso $p$ — procedere per induzione rispetto a $v$, considerando una generica ipersuperficie $B'$ di $V'$ passante semplicemente per $P'$ (per la quale conserviamo le notazioni del n. 3), a cui si potranno così applicare le (34)-(36). Poichè dalla (31) segue che è $(\mathfrak{F}^{[2]})_B = (PB^{[2]})_V$, ciò porge le:

$$B_2^* = T(B_2'^*) + c_{v-1,p}(BP^{[2]})_V + H_{B',P'}^{\text{II}}, \tag{38}$$

$$c_{v-1,p} = \frac{1}{2}(v - p - 1)(v - p - 4), \tag{39}$$

$$\begin{aligned} H_{B',P'} &= P_1'^* + (v - p - 3)(P'B_1'^*)_{B'} = \\ &= P_1'^* + (v - p - 3)(P', A' + V_1'^*)_{V'}, \end{aligned} \tag{40}$$

dove $H_{B',P'}^{\text{II}}$ è la varietà (di $\mathfrak{F}$) trasformata di $H_{B',P'}$ nel riferimento birazionale indotto da $T$ fra $B'$ e $B$. Inoltre dalla (34) segue la

$$(BV_2^*)_V = T(B'V_2'^*) + c_{v,p}(BP^{[2]})_V + H_{V',P'}^{\text{II}}. \tag{41}$$

Rammentiamo ora [ved. *loc. cit.* in ([13])] che è

$$B_2^* = B(V_2^* + BV_1^* + B^{[2]});$$

inoltre, applicando la stessa formula a $B'$ in $V'$, e trasformando poi i due membri col riferimento birazionale indotto da $T$ fra $B'$ e $B$, otteniamo la

$$T(B_2'^*) = B(T(V_2'^*) + AT(V_1'^*) + A^{[2]}).$$

Avuto anche riguardo alla (7), ne consegue:

$$\begin{aligned} B_2^* - T(B_2'^*) &= BV_2^* - T(B'V_2'^*) + \\ + B^{[2]}(V_1^* - T(V_1'^*)) &- BPT(V_1'^*) - 2ABP + BP^{[2]}. \end{aligned}$$

Da qui, usufruendo delle (30), (38), (41) e tenendo conto della (7), ricaviamo:

$$\begin{aligned} &(c_{v-1,p} - c_{v,p})(BP^{[2]})_V + (H_{B',P'} - H_{V',P'})^{\text{II}} = \\ &= (v - p - 1)B^{[2]}P - BPT(V_1'^*) - 2ABP + BP^{[2]} = \\ &= (v - p - 3)ABP - (v - p - 2)BP^{[2]} - BPT(V_1'^*) = \\ &= (v - p - 3)(P'A')_{V'}^{\text{II}} - (v - p - 2)(BP^{[2]})_V - (P'V_1'^*)^{\text{II}}. \end{aligned}$$

Uguagliando gli ordini delle varietà segate su di uno spazio $Q$ dal primo e dall'ultimo membro di questa catena di equivalenze, vediamo intanto che dev'essere:

$$c_{v-1,p} - c_{v,p} = -(v - p - 2);$$

sicchè, dall'ammessa validità della (39), segue senz'altro la validità della (35). Quella catena di uguaglianze porge allora

$$H_{B',P'} - H_{V',P'} = (v-p-3)(P'A')_{V'} - (P'V_1'^*)_{V'},$$

onde la (40) fornisce la (36). La (34) rimane così compiutamente stabilita.

**10.** Ci proponiamo di dimostrare che *per* $i=3$, $p \leq v-1$, *la* (22) *si precisa con la*

$$V_3^* = T(V_3'^*) + d_{v,p}(P^{[3]})_V + K^{\mathrm{I}}_{V',P'} + L^{\mathrm{II}}_{V',P'} - (A'L_{V',P'})^{\mathrm{I}}_{V'}, \tag{42}$$

dove i simboli hanno i seguenti significati. Anzitutto, $d_{v,p}$ è l'intero dato da

$$d_{v,p} = \binom{v-p}{3} - \binom{v-p}{2}; \tag{43}$$

inoltre, $K$ ed $L$ sono sottovarietà di $P'$, rispettivamente di dimensioni $p-2$ e $p-1$, espresse dalle:

$$K_{V',P'} = 2P_2'^* - (P_1'^{*[2]})_{P'} + (P_1'^* V_1'^*)_{V'} + (v-p-3)(P'V_2'^*)_{V'}, \tag{44}$$

$$L_{V',P'} = -(v-p-2)P_1'^* - \frac{1}{2}(v-p-1)(v-p-4)(P'V_1'^*)_{V'}. \tag{45}$$

L'indice superiore I ha qui lo stesso significato che nei nn. 3, 9; e l'indice II ha (come nel n. 9) significato analogo, in relazione alla corrispondenza indotta da $T$ fra $B'$ e $B$, dove conserviamo le notazioni dei nn. 3, 9. Gli ultimi due termini figuranti nella (42) fanno dunque apparentemente intervenire un elemento estraneo alla questione, dato dalla scelta di un'ipersuperficie $B'$ ($\equiv A'$) di $V'$ per $P'$; tale elemento estraneo scompare però quando si effettua la somma dei due termini, poichè questa — avuto riguardo alle (6), (7) — equivale alla trasformata della $L$ nel riferimento birazionale indotto da $T$ fra $P'$ e la sottovarietà $S$ di $V$ definita dalla:

$$S = -(P^{[2]})_V = (PB)_V - (PA)_V. \tag{46}$$

Incominciamo con lo stabilire che la (42) sussiste quando $p = v-1$, nel qual caso — in virtù di un'osservazione già ripetutamente applicata — si ha $V_3^* = T(V_3'^*)$. In tale ipotesi, tenuto anche conto di ciò che si è detto alla fine dell'ultimo capoverso e della (45), risulta:

$$L^{\mathrm{II}}_{V',P'} - (A'L_{V',P'})^{\mathrm{I}}_{V'} = -(P'L_{V',P'})^{\mathrm{I}}_{V'} = -(P'P_1'^*)^{\mathrm{I}}_{V'}.$$

Inoltre dalle (43), (44) attualmente si deduce:

$$d_{v,p}(P^{[3]})_V + K^{\mathrm{I}}_{V',P'} = [2P_2'^* - (P_1'^{*[2]}) + P_1'^* V_1'^* - 2P'V_2'^*]^{\mathrm{I}};$$

ora quest'ultima espressione vale $(P'P_1'^*)^{\text{I}}_{V'}$ [onde segue subito la (42)], come si vede senza difficoltà tenendo conto delle ([13]):

$$P_1'^* = P'^{[2]} + P'V_1'^*, \qquad P_2'^* = P'V_2'^* + P'^{[2]}V_1'^* + P'^{[3]}.$$

Possiamo dunque supporre $p < v - 1$ e — lasciato fisso $p$ — procedere per induzione rispetto a $v$, ammettendo la validità del risultato da stabilire nel caso della solita $B'$, e cioè valendoci della:

$$B_3^* = T(B_3'^*) + d_{v-1,p}(BP^{[3]})_V + K^{\text{II}}_{B',P'} + L^{\text{III}}_{B',P'} - (A'L_{B',P'})^{\text{II}}_{V'}, \tag{47}$$

dove gli indici II e III in alto hanno ovvi significati ed inoltre:

$$d_{v-1,p} = \binom{v-p-1}{3} - \binom{v-p-1}{2}, \tag{48}$$

$$\begin{aligned} K_{B',P'} &= 2P_2'^* - (P_1'^{*[2]})_{P'} + (P_1'^* B_1'^*)_{B'} + (v-p-4)(P'B_2'^*)_{B'} = \\ &= 2P_2'^* - (P_1'^{*[2]})_{P'} + (P_1'^* V_1'^*)_{V'} + (P_1'^* A')_{V'} + \\ &\quad + (v-p-4)(P'V_2'^* + P'A'V_1'^* + P'A'^{[2]})_{V'}, \end{aligned} \tag{49}$$

$$L_{B',P'} = -(v-p-3)P_1'^* - \frac{1}{2}(v-p-2)(v-p-5)(P'V_1'^* + P'A')_{V'}. \tag{50}$$

Considerazioni analoghe a quelle svolte nel 2° capoverso del n. 9 mostrano che si può scrivere la (42): e si tratta essenzialmente soltanto di stabilire le (43)-(45).

A tale scopo, osserviamo che dalla (42) segue la

$$(BV_3^*)_V = T(B'V_3'^*)_{V'} + d_{v,p}(BP^{[3]})_V + K^{\text{II}}_{V',P'} + L^{\text{III}}_{V',P'} - (A'L_{V',P'})^{\text{II}}_{V'}. \tag{51}$$

Si ha inoltre ([13]):

$$B_3^* = B(V_3^* + BV_2^* + B^{[2]}V_1^* + B^{[3]}) \tag{52}$$

e, del pari,

$$B_3'^* = B'(V_3'^* + A'V_2'^* + A'^{[2]}V_1'^* + A'^{[3]}),$$

da cui

$$T(B_3'^*) = T(B'V_3'^*) + BAT(V_2'^*) + BA^{[2]}T(V_1'^*) + BA^{[3]}. \tag{53}$$

Sottraendo le (52), (53) a membro a membro, ed utilizzando le (47), (53), (7), (30), (34), otteniamo:

$$\begin{aligned} &(d_{v-1,p} - d_{v,p})(BP^{[3]})_V + [K_{B',P'} - K_{V',P'}]^{\text{II}} + [L_{B',P'} - L_{V',P'}]^{\text{III}} - [A'(L_{B',P'} - L_{V',P'}]^{\text{II}} = \\ &\quad = B^{[2]}(c_{v,p}P^{[2]} + H^{\text{I}}_{V',P'}) + (v-p-1)B^{[3]}P + (B^{[4]} - BA^{[3]}) - \\ &\qquad - BPT(V_2'^*) - B(P^{[2]} + 2BP)T(V_1'^*) = \\ &= c_{v,p}(A^{[2]}BP - AB^{[2]}P - BP^{[3]}) + H^{\text{III}}_{V',P'} + (v-p-1)(2AB^{[2]}P - A^{[2]}BP + BP^{[3]}) - \\ &\qquad - (3AB^{[2]}P + BP^{[3]}) - BPT(V_2'^*) - (ABP + B^{[2]}P)T(V_1'^*), \end{aligned}$$

ossia:

$$[d_{v-1,p} - d_{v,p} + c_{v,p} - (v-p-1) + 1](BP^{[3]})_V +$$
$$+ [L_{B',P'} - L_{V',P'} - H_{V',P} + c_{v,p}A'P' - 2(v-p-1)A'P' + 3A'P' + P'V_1'^*]^{\text{III}} +$$
$$+ [K_{B',P'} - K_{V',P'} - A'L_{B',P'} + A'L_{V',P'} - c_{v,p}A'^{[2]}P' +$$
$$+ (v-p-1)A'^{[2]}P' + P'V_2'^* + A'P'V_1'^*]^{\text{II}} = 0.$$

Ne discende che le tre espressioni qui scritte entro parentesi quadre debbono separatamente annullarsi. Orbene, l'annullarsi della prima, avuto riguardo alle (35), (48), porge la (43); l'annullarsi della seconda espressione, tenuto conto delle (50), (35), (36), fornisce la (45); e l'annullarsi dell'ultima espressione, in base alle (49), (50), alla (45) (testè dimostrata) ed alla (35), prova la (44). La (42) rimane così compiutamente stabilita.

**11.** Abbiamo visto nei nn. 8-10 come sia possibile di dare forma precisa alla (22) per $v$, $p$ arbitrari ed $i = 1, 2, 3$, ricorrendo ad un procedimento — di carattere induttivo rispetto ad $i$ — che ci ha ordinatamente condotti alle (30), (34), (42) ([16]). Tale procedimento potrebbe venir proseguito per $i = 4, 5, \dots$; esso però diventa sempre più faticoso al crescere di $i$. Ha quindi interesse di indicare un'altra via che conduce abbastanza rapidamente alla meta, nel caso — al quale qui ci limiteremo — dei ***gruppi canonici*** $(i = v)$: questo caso si presenta dal nostro punto di vista come particolarmente semplice, in quanto per esso si può far uso della (2). Incominciamo all'uopo col dimostrare che:

*Con le notazioni del n. 1, la varietà $P$ in cui viene dilatata $P'$ ammette un gruppo canonico $P_{v-1}^*$ dato dall'equivalenza*

$$P_{v-1}^* = (-1)^q[(q+1)P_p'^*]; \tag{54}$$

qui ed in seguito, se $k$ è un intero e $G'$ è un gruppo di $g$ punti di $P'$, denotiamo con $[kG']$ un gruppo di $kg$ punti (di $P$) ottenuto sommando $g$ gruppi di $k$ punti scelti a piacere rispettivamente nei $g$ spazi $Q$ che corrispondono mediante $T$ ai $g$ punti $Q'$ di $G'$.

Per stabilire la (54), riferiamoci alle varietà prodotti $\Pi = P \times P$ e $\Pi' = P' \times P'$ (di dimensioni $2v-2$ e $2p$), ed alle relative varietà diagonali $P$, $P'$. In forza della (2) risulta intanto

$$P_{v-1}^* = (-1)^{v-1}(P^{[2]})_\Pi, \qquad P_p'^* = (-1)^p(P'^{[2]})_{\Pi'}.$$

([16]) Nel caso particolare in cui $P$ sia una curva $(p = 1)$, queste formule collimano con quelle ottenute in tutt'altra guisa sotto tale ipotesi (e per un valore arbitrario dell'indice $i$) in J. A. TODD, *Birational transformations possessing fundamental curves*, « Proc. of the Cambridge Phil. Soc. », 34 (1938), 144-155.

Osserviamo inoltre che il riferimento indotto da $T$ fra $P$ e $P'$ si prolunga in un riferimento $\Theta$ fra $\Pi'$ e $\Pi$, che associa ad ogni punto $Q' \times Q'$ di $\Pi'$ una varietà di Segre $\chi = Q \times Q$ di $\Pi$, la cui varietà diagonale — secondo il solito — denoteremo con $Q$. Una varietà $\overline{P}'$ di $\Pi'$ equivalente a $P'$ può pensarsi come l'omologa secondo $\Theta^{-1}$ di una varietà $\overline{P}$ di $\Pi$ equivalente a $P$, che incontri $P$ in un gruppo $(P^{[2]})_\Pi$ di punti distinti. Le imagini di questi punti mediante $\Theta^{-1}$ sono i punti $Q'$ comuni a $P'$ e $\overline{P}'$ su $\Pi'$, costituenti quindi un gruppo $(P'^{[2]})_{\Pi'}$; però, viceversa, ogni siffatto punto $Q'$ proviene nel modo anzidetto da tutti i punti di un gruppo caratteristico $(Q^{[2]})_\chi$. A norma della (2), un tale gruppo equivale a $(-1)^q Q_q^*$, e cioè [N. M., n. 86, formula (1)] consta di $q+1$ punti, d'altronde qualsiansi, dello spazio diagonale $Q$ di $\chi$. Tenuto anche conto della (3), ne consegue tosto la (54).

Sia $B'$ un'ipersuperficie di $V'$ che passi per $P'$ e che *non possegga nessun punto multiplo su $P'$*. In base a N. M., n. 49, si può soddisfare a questa condizione — ed in infiniti modi — purchè si supponga:

$$v > 2p. \tag{55}$$

Si considerino allora le varietà $B$ e $\mathfrak{S}$ definite come nei nn. 3, 8, e si applichi la (54) alla varietà $\mathfrak{S}$ in cui viene dilatata $P'$ nel riferimento che $T$ induce fra $B'$ e $B$. Tenuto anche conto della (3), si ottiene così la:

$$\mathfrak{S}_{v-2}^* = (-1)^{v-p}[(v-p-1)P_p'^*]; \tag{56}$$

e questa mostra che, *mutando $B'$, i gruppi $\mathfrak{S}_{v-2}^*$ non fanno che variare su $P$ entro ad una serie di equivalenza.*

**12.** Ci proponiamo ora di dimostrare che, nell'ipotesi che valga la (55), il gruppo (56) testè considerato equivale al gruppo $\Lambda_i$ figurante nella (22) per $i = v$. In altri termini, *per $i = v$, $p < v/2$, la* (22) *può venire precisata con la*

$$V_v^* = T(V_v'^*) + (-1)^{v-p}[(v-p-1)P_p'^*] \text{ (}^{17}\text{)}. \tag{57}$$

Allo scopo di stabilire questo risultato, pensiamo — com'è lecito — la varietà $V'$ variabile in un fascio sopra una varietà non singolare $C'$ (di dimensione $v+1$), in guisa che la varietà base $B'$ di tale fascio sia un'ipersuperficie di $V'$ passante per $P'$ e soddisfacente alle condizioni specificate nel n. 11. La varietà $C$ ottenuta applicando a $C'$ la dilatazione di base $P'$ conterrà allora un fascio di varietà $V$, avente $B$ come varietà base; e sarà opportuno di considerare la varietà prodotto $\Gamma = C \times C$, in cui giaceranno le $\Upsilon = V \times V$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$.

---

[17] La (57) era già nota per i primi valori di $p$. Ed invero, per $p = 0$ essa rientra nella (27), valida appunto sotto questa condizione. Per $p = 1$, $v = 3$ essa è contenuta nella formula (5) del n. 43 di B. SEGRE, *Quelques résultats nouveaux dans la géométrie sur une $V_3$ algébrique*, « Mem. Couronné de l'Acad. Roy. de Belgique », (2) 14 (1936), 3-99. Per $p = 1$, $v > 3$ cfr. *loc. cit.* in [16], formula (28).

Presa una varietà $\overline{V}$ del suddetto fascio su $C$ prossima alla $V$, denotiamo con $\overline{\overline{V}}$ una generica varietà di $\overline{\Upsilon} = \overline{V} \times \overline{V}$ equivalente alla varietà $\overline{V}$ diagonale di questo prodotto. È chiaro che $\overline{\overline{V}}$ incontra il prodotto $\mathfrak{P}$ in una varietà $\overline{\overline{\mathfrak{S}}}$ equivalente alla varietà $\mathfrak{S}$ diagonale di quest'ultimo; eppertanto — avuto riguardo alla (2) ed a ciò che $\mathfrak{S}$ ha dimensione $v-2$ — risulta:

$$(\mathfrak{S}\overline{\overline{\mathfrak{S}}})_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{S}^{[2]})_{\mathfrak{P}} = (-1)^v \mathfrak{S}^*_{v-2}. \tag{58}$$

Quando $\overline{V}$, muovendosi in quel fascio, tende a $V$, la varietà $\overline{\overline{V}}$ dianzi considerata in $\overline{\Upsilon}$ si muta in una varietà $W$ di $\Upsilon$ equivalente a $V$; sicchè, ancora in base alla (2), risulta

$$(VW)_\Upsilon = (V^{[2]})_\Upsilon = (-1)^v V^*_v.$$

Ora è chiaro che fra le intersezioni di $V$ e $W$ ve n'è un certo numero che cadono su $P$, formanti un gruppo equivalente a quello fornito dalla (58); mentre le rimanenti costituiscono un gruppo di punti, che il riferimento birazionale indotto da $T^{-1}$ fra $\Upsilon$ e $\Upsilon' = V' \times V'$ trasforma in

$$(V'^{[2]})_{\Upsilon'} = (-1)^v V'^*_v.$$

Si ha dunque

$$V^*_v = T(V'^*_v) + \mathfrak{S}^*_{v-2}; \tag{59}$$

e da qui, tenuto conto della (56), segue subito la (57).

In base al noto legame che intercede fra l'ordine della serie canonica e l'invariante di Zeuthen-Segre di una varietà algebrica ([18]), l'interpretazione numerativa delle (59), (56) porge che:

*Quando si passi da una varietà $V'$ (di dimensione $v$) ad una varietà $V$ mediante una dilatazione avente per base una sottovarietà $P'$ (di dimensione $p < v/2$) di $V'$, la quale muti $P'$ in $P$, gli invarianti di Zeuthen-Segre $I$, $I'$, $J$, $J'$ delle $V$, $V'$, $P$, $P'$ risultano legati dalle:*

$$I - I' = J + (-1)^v(2v-4) = (-1)^{v-p}(v-p-1)J' + (-1)^v 2p(v-p-1).$$

Rileviamo da ultimo come appaia probabile che la questione di cui è detto negli ultimi capoversi dei nn. 1, 6 riesca trattabile in tutta generalità, con un'estensione dell'argomentazione testè usata (per $i = v$) nello stabilire la (57), ove si faccia intervenire opportunamente la (21) al posto della (2). Oppure si può pensare di raggiungere compiutamente l'intento — per $v$, $p$ ed $i$ qualsiansi — partendo dalla (57), ed applicando un'induzione decrescente rispetto all'indice $i$ che figura nella (22).

([18]) Cfr. ad esempio N. M., n. 79, formula (6).