Equazioni paraboliche del secondo ordine e spazi $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$.

SERGIO CAMPANATO (a Pisa) (*)

Riassunto. - *Si considera il primo problema al contorno per l'equazione parabolica* $\left(E - \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f$ *con dati al contorno nulli e si dimostra che se* f *appartiene allo spazio funzionale* $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ *allora la soluzione* u *del problema anzidetto ha le derivate* $D_i D_j$ *e* $\frac{\partial}{\partial t}$ *nello stesso spazio funzionale. Si ottengono così, in particolare, risultati di regolarità del tipo di Schauder nelle classi holderiane e, come conseguenza, risultati e maggiorazioni negli spazi* L^p *per le derivate* $D_i D_j u$ *e* $\frac{\partial}{\partial t}$.

Sia Ω un aperto limitato di $\boldsymbol{R}^{n+1} = \boldsymbol{R}^n_x \times \boldsymbol{R}_t$, $X = (x, t)$ un generico punto di $\boldsymbol{R}^{n+1}$, $d(X, Y)$ una metrica in $\boldsymbol{R}^{n+1}$ rispetto alla quale $\boldsymbol{R}^{n+1}$ sia uno spazio lineare metrico. Indichiamo con $I(X_0, \rho)$ la sfera di centro X_0 e raggio $\rho > o$ relativa alla metrica d e poniamo $\Omega(X_0, \rho) = \Omega \cap I(X_0, \rho)$. Indichiamo con $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, d)$, $\theta \geq o$, il sottospazio lineare di $L^2(\Omega)$ delle funzioni $u(x, t)$ per le quali

$$\sup_{\substack{X_0 \in \bar{\Omega} \\ \rho > o}} |\Omega(X_0, \rho)|^{-\theta} \int_{\Omega(X_0, \rho)} |u - u_{\Omega(X_0, \rho)}|^2 \, dx dt < +\infty$$

dove $|E|$ è la misura di LEBESGUE di E e u_E è la media integrale di u su E.

Se d è la metrica euclidea

$$d(X, Y) = |X - Y| \tag{I}$$

gli spazi $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, d)$ non sono altro che gli spazi $\mathfrak{L}^{2,\theta(n+1)}(\Omega)$ che ho utilizzato in un precedente, analogo, lavoro relativo alle equazioni di tipo ellittico ([6] cfr. anche [7]).

Nel presente lavoro utilizzeremo gli spazi $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ relativi alla metrica

$$\delta(X, Y) = \sup \{|x - y|, |t_X - t_Y|^{\frac{1}{2}}\} \tag{II}$$

$\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, d)$ si normalizza in modo ovvio (cfr. n. 1). Si verifica quindi facilmente che $\mathfrak{L}^{2,0}(\Omega, d)$ è isomorfo a $L^2(\Omega)$ e si dimostra, sotto certe con-

(*) Questa ricerca è stata parzialmente finanziata da « the United States Air Force » col contratto AF EOAR grant 65-42 attraverso « the European office of Aerospaces Research ».

dizioni sulla metrica d, che, se Ω è di tipo $\mathcal{A}$ e θ è >1, $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, d)$ è isomorfo ad un opportuno spazio di funzioni holderiane rispetto a d (cfr. [8] e i n. 1 e 2). Le condizioni sulla metrica d sono verificate sia dalla metrica euclidea (I) che dalla metrica (II).

Supponiamo che Ω sia il cilindro $Q \times (o, T)$ con $T < +\infty$ e Q aperto limitato di $\boldsymbol{R}^n$.

Consideriamo l'operatore $\left(E - \frac{\partial}{\partial t}\right)$ dove $E = \sum\limits_{ij} a_{ij} D_i D_j$ è un operatore ellittico a coefficienti continui in $\overline{\Omega}$, simmetrici e tali che

$$\nu^{-1}|\lambda|^2 \leq \sum_{ij} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \leq \nu|\lambda|^2, \quad \nu > o$$

$\forall X \in \overline{\Omega}$, $\forall \lambda \in \boldsymbol{R}^n$.

Indichiamo con $W_0^{2,1}(\Omega)$ la classe delle funzioni $u(x, t)$ tali che

$$u \in L^2(o, T; H_0^1(Q) \cap H^2(Q)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega), \quad u(x, o) = 0$$

È noto (cfr. [9], [10]) che se Q è di classe C^2 il seguente problema

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} u \in W_0^{2,1}(\Omega) \\ \left(E - \dfrac{\partial}{\partial t}\right) u = f \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione la quale verifica la maggiorazione

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{ij} \|D_i D_j u\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\nu)\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Nel presente lavoro dimostriamo, sotto opportune ipotesi per Ω e per i coefficienti a_{ij}, che se f appartiene a $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ allora la soluzione u del problema (III) ha le derivate $D_i D_j$ e $\frac{\partial}{\partial t}$ appartenenti a $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ e si ha la maggiorazione

$$\text{(V)} \qquad \sum_{ij} \|D_i D_j u\|_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)} \leq c\|f\|_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)}$$

e questo per tutti i $\theta \in \left[o, \frac{n+4}{n+2}\right)$ (cfr. teor. 11.I).

In particolare quando θ è >1 si ritrova un noto risultato di holderianita:

Se $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \delta)$, $0 < \alpha < 1$, allora $D_i D_j u$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$ appartengono a $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \delta)$ e

$$\sum_{ij} \| D_i D_j u \|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega},\delta)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega},\delta)} \leq c \| f \|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega},\delta)}$$

Un caso interessante è anche quello relativo al valore $\theta = 1$. Lo spazio $\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$ occupa nella famiglia $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ una posizione limite del tutto analoga a quella dello spazio $\mathcal{E}_0$ di JOHN e NIRENBERG nella famiglia di spazi $\mathfrak{L}^{2,\lambda}(\Omega)$.

La maggiorazione (V) assicura che se $f \in \mathfrak{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$ allora anche $D_i D_j u$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$ appartengono a $\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$. Da questo risultato e dal fatto che $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow$ $\Rightarrow D_i D_j u$ e $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega)$ si ottengono dei risultati e delle maggiorazioni in L^p per le derivate $D_i D_j u$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$ (cfr. n. 12).

Il procedimento è quello già usato in [7] per le soluzioni di equazioni ellittiche. Si considerano le applicazioni $G_{ji}: f \to D_i D_j u$ e $G_t: f \to \frac{\partial u}{\partial t}$. Si è trovato che queste applicazioni sono lineari e continue da $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ e da $\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$ in $\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$ allora utilizzando un teorema di interpolazione di G. STAMPACCHIA (cfr. n. 3) si trova che G_{ji} e G_t sono applicazioni lineari e continue anche da $L^p(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $2 \leq p < +\infty$.

Quindi accanto ad una gamma di risultati nuovi ($0 < \theta \leq 1$) in questa teoria viene inquadrata in modo unitario tutta una serie di risultati noti. È forse interessante osservare che questi risultati sono ottenuti senza l'utilizzazione della teoria del potenziale e quindi della nozione di soluzione fondamentale.

Il lavoro si articola in questo modo:

Nei numeri 1 — 4 si fa un'esposizione delle proprietà degli spazi $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, d)$ utilizzando i risultati di [8] è, mediante semplici osservazioni, si fa vedere come anche per questi spazi sussistono alcuni risultati di JOHN e NIRENBERG e un teorema di interpolazione di STAMPACCHIA relativi agli spazi $\mathfrak{L}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Nei numeri 5, 7 e 8 si stabiliscono delle maggiorazioni locali per soluzioni dell'equazione parabolica $\left(E - \frac{\partial}{\partial t}\right)$ a coefficienti costanti. Queste maggiorazioni costituiscono la parte centrale del lavoro e hanno interesse in se stesse.

Nei numeri 9 — 12 si dimostrano dei risultati di regolarità negli spazi $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ e negli spazi $L^p(\Omega)$ relativi alla soluzione del problema (III). Di questi risultati si è già parlato sopra.

Ho considerato soluzioni del problema (III) per esemplificare, su un caso semplice, il procedimento sviluppato in questo lavoro, ma è ovvio che con lo stesso metodo si possono trattare anche altri problemi al contorno e si possono studiare anche operatori più generali dell'operatore $\left(E-\frac{\partial}{\partial t}\right)$; operatori ad esempio in cui E contiene anche derivate di ordine inferiore (cfr. n. 10) oppure operatori in cui E non è del II° ordine. Il procedimento infatti non è legato a questi aspetti particolari del problema, a parte le difficoltà tecniche che si potranno incontrare.

Il lavoro è corredato da una bibliografia minima in quanto sarebbe stata ardua una citazione anche parziale dei lavori relativi alle equazioni paraboliche. Una buona raccolta bibliografica si può trovare in [16] e [11]; a questa va aggiunta tutta la vasta produzione degli anni più recenti.

1. - Indichiamo con x, y, ... gli elementi di $\boldsymbol{R}^n$ e con $X=(x, t)$, $Y=(y, t)$... gli elementi di $\boldsymbol{R}^{n+1}=\boldsymbol{R}^n\times(-\infty<t<+\infty)$.

In $\boldsymbol{R}^{n+1}$ consideriamo la metrica

$$\delta(X, Y)=\max\{|x-y|, |t_X-t_Y|^{\frac{1}{2}}\}, \tag{1.1}$$

dove

$$|x-y|=\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Indichiamo con $I(X, \rho)$ la sfera di centro X e raggio ρ nella metrica (1.1).

Se $u(x, t)$ è una funzione sommabile su E, E sottoinsieme misurabile di $\boldsymbol{R}^{n+1}$ con $|E|<+\infty$ (1), poniamo

$$u_E=\frac{1}{|E|}\int_E u(x, t)\,dxdt$$

Se Ω è un aperto di $\boldsymbol{R}^{n+1}$ poniamo

$$\Omega(X, \rho)=I(X, \rho)\cap\Omega, \quad \rho>0 \text{ e } X\in\boldsymbol{R}^{n+1}.$$

Diremo che Ω è di classe $\mathcal{A}$ (relativamente alla metrica δ) se esiste una costante $A>0$ tale che

$$|\Omega(X, \rho)|\geq A\,|I(0, \rho)|, \quad \forall\, X\in\Omega \quad \text{e} \quad o<\rho\leq \operatorname{diam}\Omega. \tag{1.2}$$

Se Ω è il cilndro $Q\times(T_1<t<T_2)$, Q aperto di $\boldsymbol{R}^n$, condizione necessaria e sufficiente perchè Ω sia di classe $\mathcal{A}$ rispetto alla metrica δ è che

(1) Se E è un sottoinsieme misurabile di R^{n+1} indichiamo con $|E|$ la misura di LEBESGUE di E.

Q sia di classe $\mathfrak{A}$ relativamente alla metrica euclidea in $\boldsymbol{R}^n$. Questa condizione è verificata, ad esempio, se Q ha la proprietà di cono di SOBOLEV.

Supponiamo Ω limitato.

DEF. 1.I. - *Indichiamo con* $L^{2,\theta}(\Omega, \delta)$, $\theta \geq o$, *lo spazio delle funzioni* $u \in L^2(\Omega)$ *per le quali*

$$\|u\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)} = \sup_{\substack{X\in\overline{\Omega}\\ \rho>o}} |\Omega(X,\rho)|^{-\theta} \int_{\Omega(X,\rho)} |u(y,t)|^2\, dydt < +\infty$$

munito della norma $u \to \|u\|_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)}$

DEF. 1.II. - *Indichiamo con* $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$, $\theta \geq o$, *lo spazio delle funzioni* $u \in L^2(\Omega)$ *per le quali*

$$[u]^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\delta)} = \sup_{\substack{X\in\overline{\Omega}\\ \rho>o}} |\Omega(X,\rho)|^{-\theta} \int_{\Omega(X,\rho)} |u(y,t) - u_{\Omega(X,\rho)}|^2\, dydt < +\infty$$

munito della norma

$$\|u\|_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\delta)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + [u]_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\delta)}$$

DEF. 1.III. - *Indichiamo con* $C^{o,\alpha}(\overline{\Omega}, \delta)$, $\alpha > o$, *lo spazio delle funzioni* u *che sono* α*-holderiane in* $\overline{\Omega}$ *rispetto alla metrica* δ *munito della norma*

$$\|u\|_{C^{o,\alpha}(\overline{\Omega},\delta)} = \sup_{\overline{\Omega}} |u| + [u]_{C^{o,\alpha}(\overline{\Omega},\delta)}$$

dove

$$[u]_{C^{o,\alpha}(\overline{\Omega},\delta)} = \sup_{X,Y\in\overline{\Omega}} \frac{|u(X)-u(Y)|}{\delta^\alpha(X,Y)}$$

$L^{2,\theta}(\Omega, \delta)$, $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ e $C^{o,\alpha}(\overline{\Omega}, \delta)$ sono spazi di BANACH. Si verifica facilmente che $C^{o,\alpha}(\overline{\Omega}, \delta)$ si identifica con la classe delle funzioni $u(x, t)$ continue in $\overline{\Omega}$ per le quali esiste una costante $M > o$ tale che

$$|u(x,t) - u(y,t)| \leq M|x-y|^\alpha$$

e

$$|u(x,t) - u(x,\tau)| \leq M|t-\tau|^{\alpha/2}$$

per ogni terna di punti (x, t), (y, t), $(x, \tau) \in \overline{\Omega}$.

Sia A un aperto di $\boldsymbol{R}^s$, allora:

$C^\infty(A)$ è la classe delle funzioni infinitamente derivabili in A. Analoga definizione per $C^\infty(\bar{A})$ ($\bar{A}$ chiusura di A).
$C_o^\infty(A)$ è il sottoinsieme di $C^\infty(A)$ delle funzioni che hanno supporto compatto in A.
$H^k(A)$, k intero, è il completamento di $C^\infty(\bar{A})$ rispetto alla norma [2]

$$(1.3)\qquad \| u \|_{k,A} = \{ \sum_{|p|\leq k} \| D^p u \|^2_{L^2(A)} \}^{\frac{1}{2}}$$

$H_o^k(A)$ è la chiusura di $C_o^\infty(A)$ rispetto alla norma (1.3).

Sia B uno spazio di BANACH con norma $\|\cdot\|_B$; indichiamo con $L^2(a, b; B)$ lo spazio delle funzioni $t \to u(t)$ di quadrato sommabile in (a, b) a valori in B, cioè delle funzioni $t \to u(t)$ a valori in B tali che

$$(1.4)\qquad \int_a \| u \| \; dt < + \infty$$

munito della norma

$$(1.5)\qquad \| u \|_{L^2(a,b;B)} = \{ \int_a^b \| u \|_B^2 \, dt \}^{\frac{1}{2}}$$

2. - Sia $d(X, Y)$ una metrica in R^{n+1} rispetto alla quale R^{n+1} sia uno spazio lineare metrico e sia p un numero reale ≥ 1. Si possono definire gli spazi $L^{p,\theta}(\Omega, d)$ ed $\mathfrak{L}^{p,\theta}(\Omega, d)$, $\theta \geq o$, apportando ovvie modifiche formali alle Def. 1.I e 1.II (cfr. [2], [8] per gli spazi $L^{p,\theta}(\Omega, d)$ e [8] per gli spazi $\mathfrak{L}^{p,\theta}(\Omega, d)$). In queste famiglie più generali di spazi di BANACH rientrano, come caso particolare, non solo gli spazi $L^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ ed $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ definiti nel numero 1 ma anche gli usuali spazi di MORREY $L^{p,\theta}(\Omega)$ e gli spazi $\mathfrak{L}^{p,\theta}(\Omega)$ (cfr. [3], [4], [5], [6], [19]...) i quali corrispondono al caso in cui d è la metrica euclidea. Gli spazi $L^{p,\theta}(\Omega, d)$ si possono chiamare «spazi di MORREY relativi alla metrica d».

È stato dimostrato in [8] (teor. 3.1) che se d è una metrica con queste proprietà:

a) le sfere I nella metrica d sono insiemi convessi,

---

(2) Se $p \in N^s$ è il multiindice $(p_1, p_2, \dots, p_s)$ allora $|p| = p_1 + p_2 + \dots + p_s$,

$$D^p u = \frac{\partial^{|p|} u}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_s^{p_s}}, \quad D^o u = u.$$

b) esistono tre costanti positive M_1, M_2, $m\,(m \geq n+1)$ tali che per ogni sfera I di « raggio » ρ risulta

$$M_1 \rho^m \leq |I| \leq M_2 \rho^m$$

e se Ω è un aperto limitato di classe $\mathcal{A}$ rispetto alla metrica d, allora

(I) per $0 \leq \theta < 1$, $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega, d)$ è isomorfo a $L^{p,\theta}(\Omega, d)$

(II) per $\theta > 1$, $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega, d)$ è isomorfo allo spazio $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, d)$ con

$\alpha = \dfrac{m}{p}(\theta - 1)$.

Questo teorema generalizza un precedente risultato di CAMPANATO–MEYERS relativo al caso in cui d è la metrica euclidea (cfr. [4] per il caso (I) e [3], [17], per il caso (II)).

Poichè la metrica (1.1) verifica le condizioni *a*) e *b*) e in particolare

$$|I(0, \rho)| = \rho^{n+2} |I(0, 1)|, \qquad \rho > 0 \tag{2.1}$$

si ha il seguente teorema

TEOREMA 2.I. - *Se Ω è di classe $\mathcal{A}$ rispetto alla metrica δ, allora*

i) *per $0 \leq \theta < 1$, $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ è isomorfo a $L^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ e in particolare*

$$\mathcal{L}^{2,0}(\Omega, \delta) \backsim L^{2,0}(\Omega, \delta) \backsim L^2(\Omega) \ (3)$$

ii) *per $\theta > 1$, $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ è isomorfo allo spazio $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \delta)$ con* $\alpha = \dfrac{n+2}{2}(\theta - 1)$.

Siano d_1 e d_2 due metriche equivalenti in $\boldsymbol{R}^{n+1}$ nel senso che esistono due costanti positive c_1 e c_2 tali che

$$c_1 d_2(X, Y) \leq d_1(X, Y) \leq c_2 d_2(X, Y), \quad \forall X, Y \in \boldsymbol{R}^{n+1}. \tag{2.2}$$

Indichiamo con $J(X, \rho)$ le sfere nella metrica d_1 e con $I(X, \rho)$ le sfere nella metrica d_2. Allora

---

(3) Poichè

$$\theta_1 \geq \theta_2 \Rightarrow \mathcal{L}^{2,\theta_1}(\Omega, \delta) \subset \mathcal{L}^{2,\theta_2}(\Omega, \delta)$$

con iniezione continua, dalla proprietà *i*) segue in particolare che, $\forall \theta \geq 0$, $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta) \subset L^2(\Omega)$ con iniezione continua.

1) Se d_1 verifica l'ipotesi $b)$ anche d_2 verifica l'ipotesi $b)$ con lo stesso esponente m (e si può sempre supporre con le medesime costanti M_1 e M_2).

2) Se d_1 e d_2 verificano l'ipotesi $b)$, ogni aperto limitato Ω che sia di classe $\mathcal{A}$ rispetto a d_1 è anche di classe $\mathcal{A}$ rispetto a d_2 (e viceversa).

3) Se d_1 e d_2 verificano l'ipotesi $b)$ e Ω è di classe $\mathcal{A}$ rispetto a d_1 e d_2 allora esiste una costante positiva $\beta = \beta(M_1, M_2, m, \Omega)$ (4) tale che $\forall X \in \Omega$ e $o < \rho \leq \rho_0$ (ρ_0 sufficientemente piccolo)

$$\frac{|I(X, \rho/c_1) \cap \Omega|}{|I(X, \rho/c_2) \cap \Omega|} \leq \beta; \quad \frac{|J(X, c_2\rho) \cap \Omega|}{|J(X, c_1\rho) \cap \Omega|} \leq \beta. \tag{2.3}$$

4) Se d_1 e d_2 verificano l'ipotesi $b)$ e Ω è di classe $\mathcal{A}$ rispetto alle metriche d_1 e d_2 allora, $\forall p \geq 1$ e $\theta \geq o$, $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega, d_1)$ e $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega, d_2)$ sono spazi di BANACH equivalenti (5).

Questo segue facilmente dalla (2.3) e dall'osservazione che l'ipotesi (2.2) implica che $\forall X \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ e $\forall \rho > o$

$$I(X, \rho/c_2) \subset J(X, \rho) \subset I(X, \rho/c_1)$$

e

$$J(X, c_1\rho) \subset I(X, \rho) \subset J(X, c_2\rho)$$

Supponiamo che d verifichi le ipotesi $a)$ e $b)$ e Ω sia di classe $\mathcal{A}$ rispetto a d. Al valore $\theta = 1$ corrisponde nella famiglia di spazi $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega, d)$ un certo «spazio limite» il quale separa la sottofamiglia degli spazi di MORREY ($\theta < 1$) dalla sottofamiglia degli spazi holderiani ($\theta > 1$). Qualunque sia la metrica d si ha l'inclusione (algebrica e topologica)

$$L^\infty(\Omega) \subset \mathcal{L}^{p,1}(\Omega, d), \qquad 1 \leq p < +\infty \tag{2.4}$$

A parte questa inclusione le proprietà dello spazio limite $\mathcal{L}^{p,1}(\Omega, d)$ dipendono ovviamente dalla metrica d.

Consideriamo una metrica di questo tipo

$$d(X, Y) = \sup_{1 \leq i \leq n+1} |x_i - y_i|^{\alpha_i/\alpha} \tag{2.5}$$

dove gli α_i sono interi ≥ 1 e $\alpha = \max \alpha_i$.

---

(4) Si può verificara che β dipende da Ω solo attraverso la costante A che interviene nella condizione (1.2).

(5) E similmente $L^{p,\theta}(\Omega, d_1)$ e $L^{p,\theta}(\Omega, d_2)$ sono spazi di BANACH equivalenti. Questa affermazione è contenuta in quella del testo, in virtù della proposizione (I), se d_1 e d_2 verificano anche l'ipotesi $a)$.

Sa $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 2$ e $\alpha_{n+1} = 1$ si ha una metrica equivalente alla metrica δ definita in (1.1) ($t_X = x_{n+1}$, $t_Y = y_{n+1}$). Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n+1} = 2$ si ha una metrica euclidea.

Sia Ω un cubo di $\boldsymbol{R}^{n+1}$ di lato 1 a faccie parallele agli iperpiani coordinati [6]. Sia d la metrica (2.5) e sia

$$I(X, \rho) = \{Y : d(X, Y) < \rho\}$$

la sfera di centro X e raggio ρ nella meriça (2.5). Sia $u(X)$ sommabile in Ω allora (cfr [12] teor. 6) per quasi tutti gli $X \in \Omega$ si ha

$$\lim_{\rho \to o} \frac{1}{|I(X, \rho)|} \int_{I(X,\rho)} u(Y) dY = u(X)$$

Inoltre, $\forall \rho > o$,

$$|I(0, \rho)| = \rho^{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\alpha}{\alpha_i}}$$

Queste osservazioni permettono di enunciare nel caso che d sia la metrica (2,5) i seguenti teoremi che JOHN e NIRENBERG hanno dimostrato in [13] nel caso che d sia la metrica euclidea. Le dimostrazioni date da JOHN e NIRENBERG si ripetono con qualche modifica puramente formale anche nel caso della metrica (2.5) (cfr. anche [14]).

TEOREMA 2.II. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $u \in \mathfrak{L}^{1,1}(\Omega, d)$ e $[u]_{\mathfrak{L}^{1,1}(\Omega,d)} \leq K$ è che esistano due costanti positive H ed α indipendenti da u tali che per ogni sfera $I \subset \Omega$ e $\forall \sigma > 0$ risulti*

$$\text{mis}\{X : X \in I,\ |u - u_I| > \sigma\} \leq He^{-\alpha\sigma/K}\ |I|\,. \tag{2.6}$$

Da questo teorema si deducono varie proprietà dello spazio limite $\mathfrak{L}^{1,1}(\Omega, \delta)$ in particolare si vede facilmente che se $u \in \mathfrak{L}^{1,1}(\Omega, d)$ allora $u \in L^p(\Omega) \ \forall\ 1 \leq \leq p < +\infty$; si deduce inoltre che $\forall\, 1 \leq p < +\infty$ è $\mathfrak{L}^{p,1}(\Omega, d) \sim \mathfrak{L}^{1,1}(\Omega, d)$.

Indichiamo con $\Delta(d)$ un qualunque sistema finito di sfere I_i, nella metrica d, contenute in Ω e a due a due disgiunte. Indichiamo con S l'insieme di tutti i possibili sistemi $\Delta(d)$ del tipo ora detto.

---

[6] Più in generale si può prendere come Ω una qualunque sfera I, nella metrica (2.5), di raggio fissato R.

TEOREMA 2.III. - *Se* $u \in L^1(\Omega)$ *e se per un certo* p, $1 < p < +\infty$, *risulta*

$$K_p^p(u) = \sup_{\Delta \in S} \sum_{\Delta(d)} |I_i|^{1-p} \left(\int_{I_i} |u - u_{I_i}| \, dX \right)^p < +\infty \tag{2.7}$$

allora $u \in L^p(\Omega)$ — *debole e si ha la maggiorazione*

$$\text{mis} \{ X : |u - u_\Omega| > \sigma \} \leq A(n, p) \left(\frac{K_p(u)}{\sigma} \right)^p, \qquad \forall \sigma > 0. \tag{2.8}$$

Poniamo $N^p(\Omega) = \{ u : u \in L^1(\Omega), \; K_p(u) < +\infty \}$. $N^p(\Omega)$ è uno spazio vettoriale che può essere opportunamente normalizzato (cfr. [20]).

3. - Sia d la metrica (2.5) e sia Ω una sfera in questa metrica; indichiamo con $\mathfrak{F}(\Omega)$ la classe delle funzioni semplici su Ω. Sia T un operatore lineare definito su $\mathfrak{F}(\Omega)$.

TEOREMA 3.I. - *Se per ogni* $u \in \mathfrak{F}(\Omega)$ *si ha*

$$\| Tu \|_{\mathcal{L}^{1,1}(\Omega, d)} \leq M_1 \| u \|_{L^\infty(\Omega)} \tag{3.1}$$

e

$$\| Tu \|_{L^p(\Omega)} \leq M_2 \| u \|_{L^p(\Omega)} \tag{3.2}$$

con M_1 *e* M_2 *costanti e* $p \geq 1$, *allora* $\forall u \in L^q(\Omega)$ *con* $p \leq q < +\infty$ *risulta*

$$\| Tu \|_{L^q(\Omega)} \leq \mathfrak{M} \| u \|_{L^q(\Omega)} \tag{3.3}$$

dove $\mathfrak{M}$ *è una opportuna costante positiva.*

Questo teorema di interpolazione è stato dimostrato da G. STAMPACCHIA in [20] nel caso che d sia una metrica euclidea ma la dimostrazione di STAMPACCHIA si può ripetere inalterata anche nel caso della metrica (2.5). In questa dimostrazione si utilizza in modo essenziale la proprietà degli spazi $N^p(\Omega)$ contenuta nel teor. 2.III e questo teorema, come si è osservato nel numero precedente, continua a valere anche se d non è una metrica euclidea ma, più in generale, una qualunque metrica (2.5).

Il ragionamento di STAMPACCHIA si può sintetizzare in questo modo. Si dimostra che se T è una applicazione lineare definita su $\mathfrak{F}(\Omega)$ e se $\forall u \in \mathfrak{F}(\Omega)$ si ha

$$K_q(Tu) \leq M_1 \| u \|_{L^\infty(\Omega)}$$

e

$$K_p(Tu) \leq M_2 \| u \|_{L^p(\Omega)}$$

allora $\forall u \in \mathcal{F}(\Omega)$ e $\forall t \in [0, 1]$

$$K_r(Tu) \leq M_1^{1-t} M_2^t \| u \|_{L^s(\Omega)}$$

dove

$$\frac{1}{r} = \frac{t}{p} + \frac{1-t}{q} \quad \text{e} \quad \frac{1}{s} = \frac{t}{p}.$$

Si osserva quindi che $\forall f \in \mathfrak{L}^{1,1}(\Omega, d)$ e $\forall 1 < q < +\infty$ risulta

$$K_q(f) \leq [f]_{\mathfrak{L}^{1,1}(\Omega, d)} \, |\, \Omega \,|^{1/q}$$

mentre $\forall f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, si ha

$$K_p(f) \leq 2 \| f - f_\Omega \|_{L^p(\Omega)} \leq 4 \| f \|_{L^p(\Omega)}.$$

Ne segue che se T è una applicazione lineare definita su $\mathcal{F}(\Omega)$ la quale verifica le ipotesi (3.1) e (3.2) allora $\forall u \in L^s(\Omega)$, $p \leq s < +\infty$,

$$K_s(Tu) \leq \mathfrak{M}(s, p, M_1, M_2) \| u \|_{L^s(\Omega)}.$$

Quindi, per il teorema 2.III, l'applicazione $\mathcal{T} : u \to [Tu - (Tu)_\Omega]$ è di tipo (s, s)-debole per ogni $p \leq s < +\infty$ e, per l'ipotesi (3.2), $\mathcal{T}$ è di tipo (p, p)-forte. Un ben noto teorema di MARCINKIEWICZ assicura allora che $\mathcal{T}$ è di tipo (q, q)-forte per ogni $p \leq q < +\infty$. Di qui segue che T è di tipo (q, q)-forte, cioè la (3.3), con un calcolo elementare.

4. - In questo numero riportiamo l'enunciato di un lemma che utilizzeremo nel seguito del lavoro. Questo lemma si trova dimostrato in [6] n. 6 (7).

LEMMA 4.I. - *Sia $t \to \varphi(t)$ una funzione di $\boldsymbol{R}^+$ in $\boldsymbol{R}_0^+$, $t \to B(t)$ una funzione di $(1, +\infty)$ in $\boldsymbol{R}_0^+$, A una costante > 1, siano infine α e β due numeri verificanti la relazione $0 < \beta < \alpha$.*

Supponiamo che $\forall p > 1$ esista un $t(p) > 0$ tale che per ogni coppia di valori ρ, $r \in (0, t(p)]$, per i quali $1 < \dfrac{r}{\rho} \leq p$, si abbia

$$\varphi(\rho) \leq A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha} \varphi(r) + B(p)\rho^{\beta} \tag{4.1}$$

allora $\forall \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \alpha - \beta$, $\forall r \in (0, t(A^{1/\varepsilon})]$ e $\forall \rho$, $0 < \rho < r$, risulta

$$\varphi(\rho) \leq A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha-\varepsilon} \varphi(r) + B(A^{1/\varepsilon}) \frac{A^{\frac{\alpha-\beta}{\varepsilon}}}{A^{\frac{\alpha-\beta}{\varepsilon}} - A} \rho^{\beta}. \tag{4.2}$$

(7) $\boldsymbol{R}^+ = \{x : x \in \boldsymbol{R},\ x > 0\}$, $\boldsymbol{R}_0^+ = \{x : x \in \boldsymbol{R},\ x \geq 0\}$.

5. - In questo numero dimostriamo alcuni lemmi relativi a soluzioni regolari dell'equazione parabolica

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0 \tag{5.1}$$

dove $\Delta = \sum_{i=1}^{n} D_i^2$, $D_i^k = \left(\dfrac{\partial^k}{\partial x_i^k}\right)$.

Poniamo, per $r > 0$,

$$\begin{aligned}
C(r) &= \{x : x \in \boldsymbol{R}^n,\ |x| < r\} \\
C^*(r) &= C(r) \cap \{x_n > o\} \\
Q(r) &= C(r) \times (-r^2 < t < o) \\
Q^*(r) &= C^*(r) \times (-r^2 < t < o) \\
M(r) &= C(r) \times (o < t < r^2) \\
M^*(r) &= C^*(r) \times (o < t < r^2)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

LEMMA 5.I. - *Sia $u(x, t)$ una funzione $\in C^\infty(\overline{Q(r)})$ soluzione in $Q(r)$ dell'equazione $\left(\Delta - \dfrac{\partial}{\partial t}\right) u = 0$. Esiste una costante $C > o$ tale che $\forall\, \rho \in \left(o, \dfrac{r}{2}\right]$ risulta*

$$\frac{1}{|Q(\rho)|} \int_{Q(\rho)} |u|^2 \, dx dt \leq C \frac{1}{|Q(r)|} \int_{Q(r)} |u|^2 \, dx dt \tag{5.3}$$

e

$$\frac{1}{|Q(\rho)|} \int_{Q(\rho)} |u(x, t) - u(Y)|^2 \, dx dt \leq C \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \frac{1}{|Q(r)|} \int_{Q(r)} |u|^2 \, dx dt \tag{5.4}$$

dove Y è un punto qualunque $\in \overline{Q(\rho)}$.

Dim. - Siano $\theta(x)$ e $\sigma(t)$ due funzioni con queste proprietà:

$$\begin{gathered}
\theta(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n),\ \theta(x) = 1 \quad \text{per} \quad |x| \leq \frac{r}{2},\ \theta(x) = o \quad \text{per} \quad |x| > r, \\
o \leq \theta(x) \leq 1,\ |D_i \theta| \leq \frac{K}{r} \quad (i = 1, 2, \dots n)
\end{gathered} \tag{5.5}$$

$$\begin{gathered}
\sigma(t) \in C^\infty(\mathbf{R}_t),\ o \leq \sigma(t) \leq 1,\ \sigma(t) = 1 \quad \text{per} \quad t \geq -\left(\frac{r}{2}\right)^2, \\
\sigma(t) = o \quad \text{per} \quad t \leq -r^2,\ \left|\frac{d\sigma}{dt}\right| \leq \frac{\mathrm{K}}{r^2}
\end{gathered} \tag{5.6}$$

K costante positiva.

Dall'equazione $\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) u = o$, moltiplicando il primo membro per $\theta^2\sigma^2 u$ e integrando su $Q(r)$, si ottiene

$$\int_{Q(r)} [\sum_{i=1}^{n} D_i u D_i(\theta^2\sigma^2 u) + \frac{\partial u}{\partial t}\theta^2\sigma^2 u]\, dxdt = o$$

Di qui

$$\int_{Q(r)} \left\{\sum_i (D_i\theta\sigma u)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial(\theta\sigma u)^2}{\partial t}\right\} dxdt =$$

(5.7)

$$= \int_{Q(r)} u^2\sigma^2 \sum_i (D_i\theta)^2\, dxdt + \int_{Q(r)} \theta^2 u^2 \sigma \frac{d\sigma}{dt}\, dxdt$$

Tenuto conto delle (5.5), (5.6) e del fatto che

$$\frac{1}{2}\int_{Q(r)} \frac{\partial(\theta\sigma u)^2}{\partial t}\, dxdt = \frac{1}{2}\int_{C(r)} \theta^2(x) u^2(x,\ o) dx \geq o$$

dalla (5.7) si ha che

$$\int_{Q\left(\frac{r}{2}\right)} \sum_i |D_i u|^2\, dxdt \leq \frac{K^2 + K}{r^2}\int_{Q(r)} u^2\, dxdt = c(K,\ r)\int_{Q(r)} u^2\, dxdt \tag{5.8}$$

Poichè ogni derivata alla u verifica in $Q(r)$ le ipotesi del lemma, la maggiorazione (5.8) continua a valere se al posto della u mettiamo una qualunque derivata della u. Si può allora maggiorare l'integrale delle derivate seconde $D_i D_j u$ con l'integrale della u; d'altra parte $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta\, u$ e quindi si maggiora anche l'integrale della $\frac{\partial u}{\partial t}$ con l'integrale della u. Ponendo nella (5.8) $\frac{\partial u}{\partial t}$ al posto della u si maggiora l'integrale delle derivate seconde del tipo $D_i \frac{\partial}{\partial t}$ con l'integrale di $\frac{\partial u}{\partial t}$ e quindi di u. E così via ... si riesce a maggiorare l'integrale di una qualunque derivata della u mediante l'integrale della u. Si arriva quindi ad una maggiorazione del tipo

$$\|u\|^2_{H^k\left(Q\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \leq c_1(r)\int_{Q(r)} |u|^2\, dxdt \tag{5.9}$$

D'altra parte $\forall\, \rho \in \left(o, \frac{r}{2}\right]$

$$\int_{Q(\rho)} |u|^2\, dxdt \leq |Q(\rho)| \sup_{Q\left(\frac{r}{2}\right)} |u|^2 \tag{5.10}$$

e similmente $\forall\, Y \in \overline{Q(\rho)}$ e $\rho \in \left(o, \frac{r}{2}\right]$

$$\int_{Q(\rho)} |u(x, t) - u(Y)|^2\, dxdt \leq c_2(r)\rho^2 |Q(\rho)| \sup_{Q\left(\frac{r}{2}\right)} \left\{ \sum_i |D_i u|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} \tag{5.11}$$

Per un noto teorema di SOBOLEV, se k è sufficientemente elevato

$$\begin{gathered} \sup_{Q\left(\frac{r}{2}\right)} |u|^2 \leq c_3(r) \|u\|^2_{H^k\left(Q\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \\ \sup_{Q\left(\frac{r}{2}\right)} \left\{ \sum_i |D_i u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \right\} \leq c_3(r) \|u\|^2_{H^k\left(Q\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \end{gathered} \tag{5.12}$$

Dalle (5.10), (5.11), (5.12) e (5.9) segue che $\forall\, \rho \in \left(o, \frac{r}{2}\right]$ e $\forall\, Y \in \overline{Q(\rho)}$

$$\int_{Q(\rho)} |u|^2\, dxdt \leq c_4(r) |Q(\rho)| \int_{Q(r)} |u|^2\, dxdt \tag{5.13}$$

e

$$\int_{Q(\rho)} |u(x, t) - u(Y)|^2\, dxdt \leq c_5(r)\rho^2 |Q(\rho)| \int_{Q(r)} |u|^2\, dxdt \tag{5.14}$$

Si può precisare la dipendenza da r delle costanti $c_4(r)$ e $c_5(r)$ in questo modo: Se $u(x, t)$ è soluzione in $Q(r)$ dell'equazione $\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = o$ la funzione $v(y, \tau) = u(\lambda y, \lambda^2 \tau)$, $\lambda > o$, è soluzione della stessa equazione in $Q\left(\frac{r}{\lambda}\right)$. Assumiamo $\lambda = r$ e scriviamo le maggiorazioni (5.13) e (5.14) per la funzione

$v(y, \tau)$ e gli insiemi $Q\left(\frac{\rho}{r}\right)$ e $Q(1)$

(5.15)
$$\int_{Q\left(\frac{\rho}{r}\right)} |v(y, \tau)|^2 \, dyd\tau \leq c_4(1) \left| Q\left(\frac{\rho}{r}\right) \right| \int_{Q(1)} |v(y, \tau)|^2 \, dyd\tau$$
$$\int_{Q\left(\frac{\rho}{r}\right)} |v(y, \tau) - v(X)|^2 \, dyd\tau \leq c_5(1) \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \left| Q\left(\frac{\rho}{r}\right) \right| \int_{Q(1)} |v|^2 \, dyd\tau$$

dove X è un generico punto di $\overline{Q\left(\frac{\rho}{r}\right)}$. Nelle (5.15) effettuiamo il cambiamento di variabili $y = \frac{x}{r}$, $\tau = \frac{t}{r^2}$, si ottiene

(5.16)
$$\int_{Q(\rho)} |u|^2 \, dxdt \leq c_4(1) \left| Q\left(\frac{\rho}{r}\right) \right| \int_{Q(r)} |u|^2 \, dxdt$$
$$\int_{Q(\rho)} |u(x, t) - u(Y)|^2 \, dxdt \leq c_5(1) \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \left| Q\left(\frac{\rho}{r}\right) \right| \int_{Q(r)} |u|^2 \, dxdt$$

Tenuto conto che

$$\left| Q\left(\frac{\rho}{r}\right) \right| = |Q(1)| \frac{|Q(\rho)|}{|Q(r)|}$$

restano dimostrate le (5.3) e (5.4).

I lemmi che ora enunceremo seguono come semplici corollari dal lemma 5.I.

Useremo le notazioni

(5.17)
$$|||u|||_A^2 = \int_A \left\{ \sum_{ij} |D_i D_j u|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} dxdt = \sum_{ij} \|D_i D_j u\|^2_{L^2(A)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(A)}$$
$$p(A, u) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \{D_i D_j u\}_A x_i x_j + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_A t$$

LEMMA 5. II. - *Sia* $u \in C^\infty(\overline{Q(r)})$ *una soluzione in* $Q(r)$ *dell'equazione* $\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = o$. *Esiste una costante* $C > o$ *tale che* $\forall\, \rho \in (o,\, r]$ *risulta*

$$|||\, u\, |||^2_{Q(\rho)} \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} |||\, u\, |||^2_{Q(r)} \tag{5.18}$$

e

$$|||\, u - p(Q(\rho),\, u)\, |||^2_{Q(\rho)} \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} |||\, u - p(Q(r),\, u)\, |||^2_{Q(r)} \tag{5.19}$$

Dim. - Le derivate D_iD_ju e $\frac{\partial u}{\partial t}$ verificano le ipotesi del lemma 5.I. Allora dalla (5.3) segue la (5.18) $\forall\, \rho \in \left(o,\, \frac{r}{2}\right]$.

Similmente la funzione $U = u - p(Q(r),\, u)$ verifica le ipotesi del lemma 5.I. e quindi lo stesso vale per le derivate D_iD_jU e $\frac{\partial U}{\partial t}$. Allora dalla (5.4) segue la (5.19) $\forall\, \rho \in \left(o,\, \frac{r}{2}\right]$. È infine evidente che pur di modificare la costante C le maggiorazioni (5.18) e (5.19) valgono $\forall\, \rho \in (o,\, r]$.

LEMMA 5. III. - *Sia* $u(x,\, t)$ *una funzione* $\in C^\infty(\overline{M(r)})$ *soluzione in* $M(r)$ *dell'equazione* $\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = o$ *e nulla per* $t = o$. *Esiste una costante* $C > o$ *tale che* $\forall\, \rho \in (o,\, r]$ *risulta*

$$|||\, u\, |||^2_{M(\rho)} \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} |||\, u\, |||^2_{M(r)}\,. \tag{5.20}$$

Dim. - Le ipotesi del lemma assicurano che u si annulla per $t = o$ con tutte le derivate. Prolunghiamo allora la funzione u a tutto il cilindro illimitato $\Omega = C(r) \times (-\infty < t \leq r^2)$ ponendola uguale a zero per $t < o$. La funzione

$$U(x,\, t) = \begin{cases} u(x,\, t) & \text{in } \overline{M(r)} \\ 0 & \text{in } \overline{C(r)} \times (-\infty < t < o) \end{cases}$$

appartiene a $C^\infty(\overline{\Omega})$ ed è ivi soluzione dell'equazione $\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)U = o$. Lo stesso avviene per le derivate D_iD_jU e $\frac{\partial U}{\partial t}$. Scriviamo per queste derivate la maggiorazione (5.4) prendendo

$$Q(\rho) = M(\rho)\,,\;\; Q(r) = C(r) \times (\rho^2 - r^2 < t < \rho^2),\;\; Y \in C(\rho)$$

Nel punto Y si annullano le derivate D_iD_jU e $\frac{\partial U}{\partial t}$. Dalla (5.4) si ha quindi $\forall\, \rho \in \left(o, \frac{r}{2}\right]$

$$|||u|||^2_{M(\rho)} = |||U|||^2_{M(\rho)} \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} |||U|||^2_{Q(r)} \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} |||u|||^2_{M(r)}$$

Cioè la maggiorazione (5.20). Pur di modificare la costante C questa maggiorazione vale ovviamente per tutti i $\rho \in (o, r]$.

6. - Sia Ω il cilindro $Q \times (o < t < T)$, $T < +\infty$ e Q aperto limitato di $\boldsymbol{R}^n$. Indichiamo con $W^{k,1}(\Omega)$ ($k \geq 1$ intero) la classe delle funzioni $u(x, t)$ tali che

$$u \in L^2(o, T; H^k(Q)) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega) \tag{6.1}$$

e indichiamo con $W_0^{k,1}(\Omega)$ la classe delle funzioni $u(x, t)$ tali che

$$u \in L^2(o, T; H_0^1(Q) \cap H^k(Q)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega), \quad u(x, o) = o. \tag{6.2}$$

La condizione $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega)$ equivale a dire che $\frac{du}{dt} \in L^2(o, T; L^2(Q))$ (derivata nel senso delle distribuzioni a valori in $L^2(Q)$) e per quanto riguarda la condizione $u(x, o) = o$ ricordiamo che una funzione $u \in W^{1,1}(\Omega)$ e a maggior ragione $u \in W^{k,1}(\Omega)$ con $k > 1$) è quasi ovunque uguale ad una funzione continua di $[o, T] \to L^2(Q)$ (cfr. ad es. [15] *p.* 11).

Sia $E(x, t) = E(X)$ l'operatore differenziale

$$E(x, t) = \sum_{ij} a_{ij}(x, t) D_i D_j \tag{6.3}$$

dove i coefficienti a_{ij} verificano le condizioni

a) $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$

b) $\nu^{-1}|\lambda|^2 \leq \sum_{ji} a_{ij}(x, t)\lambda_i\lambda_j \leq \nu|\lambda|^2$

per un certo $\nu > o$ *e* $\forall\, \lambda \in \boldsymbol{R}^n$.

Sia $f \in L^2(\Omega)$. Consideriamo il

PROBLEMA 6. I. - *Trovare una funzione* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,1}_0(\Omega)$ *tale che*

$$\left(E(X) - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f \quad \text{in} \quad \Omega \tag{6.4}$$

È noto (cfr. ad es. [9], [10]) che se ∂Q è di classe C^2 il problema 6.I ammette una e una sola soluzione $u(x, t)$ e si ha la maggiorazione

$$|||\, u\, |||^2_\Omega = \int_\Omega \left[\sum_{ij} (D_i D_j u)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right] dxdt \leq c(\nu) \int_\Omega f^2\, dxdt$$

Questo risultato vale in particolare se l'operatore E ha coefficienti costanti. In tal caso però la dimostrazione di questo fatto diventa assai facile.

7. - In questo numero dimostriamo alcuni lemmi relativi a soluzioni nella classe $W^{2,1}$ dell'equazione parabolica $\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f$ con f di quadrato sommabile.

Gli insiemi $Q(r)$, $Q^*(r)$, $M(r)$, $M^*(r)$ che intervengono in questi lemmi sono definiti come in (5.2).

LEMMA 7. I. - *Sia* $u \in W^{2,1}(Q(r))$ *una soluzione in* $Q(r)$ *dell'equazione* $\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f$. *Esiste una costante* $c > 0$ *tale che* $\forall\, \rho \in (0, r)$

$$|||\, u\, |||^2_{Q(\rho)} \leq c \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} |||\, u\, |||^2_{Q(r)} + \|f\|^2_{L^2(Q(r))} \right] \tag{7.1}$$

e

$$|||\, u - p(Q(\rho), u)\, |||^2_{Q(\rho)} \leq c \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} |||\, u - p(Q(r), u)\, |||^2_{Q(r)} + \|f - f_{Q(r)}\|^2_{L^2(Q(r))} \right]. \tag{7.2}$$

Dim. - Decomponiamo u nella somma $v + w$ dove

$$\begin{cases} w \in \overset{\circ}{W}{}^{2,1}_0(Q(r)) \\ \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)w = f \quad \text{in} \quad Q(r) \end{cases} \tag{7.3}$$

e

$$\begin{cases} v \in W^{2,1}(Q(r)) \\ \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)v = 0 \quad \text{in} \quad Q(r) \end{cases} \tag{7.4}$$

Quindi $v \in C^{\infty}(\overline{Q(\rho)}) \cap W^{2,1}(Q(r))$, $\forall\, \rho \in (o,\, r)$.

Applichiamo alla v la maggiorazione (5.18); si ottiene $\forall\, \rho \in (o,\, r)$

$$|||\, v \,|||^2_{Q(\rho)} \leq c \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} |||\, v \,|||^2_{Q(r)} \tag{7.5}$$

Applichiamo alla w la maggiorazione (6.5)

$$|||\, w \,|||^2_{Q(\rho)} \leq c \,\|\, f \,\|^2_{L^2(Q(r))}, \qquad \rho \in (o,\, r] \tag{7.6}$$

Dalle (7.5) e (7.6) segue che $\forall\, \rho \in (o,\, r)$

$$|||\, u \,|||^2_{Q(\rho)} \leq c \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} |||\, u \,|||^2_{Q(r)} + \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} |||\, w \,|||^2_{Q(r)} + \|\, f \,\|^2_{L^2(Q(r))}\right]$$

e quindi la (7.1).

Per dimostrare la (7.2) si ragiona in modo analogo: si considera la funzione $U = u - p(Q(r),\, u)$; $U \in W^{2,1}(Q(r))$ e $\left(\Delta - \dfrac{\partial}{\partial t}\right) U = f - f_{Q(r)}$. Si decompone U nella somma $v + w$ dove v e w soddisfano le condizioni (7.4) e (7.3) con $f - f_{Q(r)}$ al posto di f. Alla funzione v si applica la maggiorazione (5.19) e si ottiene $\forall\, \rho \in (o,\, r)$

$$|||\, v - p(Q(\rho),\, v) \,|||^2_{Q(\rho)} \leq c \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} |||\, v - p(Q(r),\, v) \,|||^2_{Q(r)} \tag{7.7}$$

Alla funzione w si applica la maggiorazione (6.5) e si ha $\forall\, \rho \in (o,\, r]$

$$|||\, w \,|||^2_{Q(\rho)} \leq c \,\|\, f - f_{Q(r)} \,\|^2_{L^2(Q(r))} \tag{7.8}$$

Dalle (7.7), (7.8) segue la (7.2) tenuto conto delle relazioni

$$|||\, U - p(A,\, U) \,|||^2_A = |||\, u - p(A,\, u) \,|||^2_A, \qquad A \subseteq Q(r)$$

e

$$|||\, p(A,\, w) \,|||^2_A \leq |||\, w \,|||^2_A, \quad A \subseteq Q(r).$$

LEMMA 7. II. - *Sia* $u \in W^{2,1}(M(r))$ *una soluzione in* $M(r)$ *dell'equazione* $\left(\Delta - \dfrac{\partial}{\partial t}\right) u = f$ *e* $u(x,\, o) = o$. *Esiste una costante* $c > o$ *tale che* $\forall\, \rho \in (o,\, r)$

$$|||\, u \,|||^2_{M(\rho)} \leq c \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} |||\, u \,|||^2_{M(r)} + \|\, f \,\|^2_{L^2(M(r))}\right] \tag{7.9}$$

e

$$|||\, u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M(\rho)} |||^2_{M(\rho)} \leq c \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} |||\, u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M(r)} |||^2_{M(r)} + \|\, f - f_{M(r)} \,\|^2_{L^2(M(r))}\right] \tag{7.10}$$

Dim. - Come nel lemma precedente si decompone u nella somma $v + w$ dove

$$\begin{cases} w \in W_0^{2,1}(M(r)) \\ \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) w = f \quad \text{in} \quad M(r) \end{cases}$$

Di conseguenza $v \in W^{2,1}(M(r))$ e verifica in ogni $M(\sigma)$, $\sigma \in (o, r)$, le ipotesi del lemma 5. III. Dalla maggiorazione (5.20) scritta per la v e dalla maggiorazione (6.5) scritta per la w si ottiene allora $\forall\, \rho \in (o, r)$ la (7.9).

Per dimostrare la (7.10) osserviamo che la funzione $U = u + t f_{M(r)}$ verifica ancora le ipotesi del lemma con $f - f_{M(r)}$ in luogo di f. Si può quindi scrivere la maggiorazione (7.9) per la funzione U

$$|||\, U \,|||^2_{M(\rho)} \leq c \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} |||\, U \,|||^2_{M(r)} + \| f - f_{M(r)} \|^2_{L^2(M(r))} \right], \quad \rho \in (o,\ r)$$

Da questa maggiorazione segue la (7.10) tenuto conto delle maggiorazioni

$$\left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_A \right|\right|\right|^2_A \leq |||\, U \,|||^2_A, \quad A \subseteq M(r)$$

e [8]

$$|||\, U \,|||^2_A \leq \left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_A \right|\right|\right|^2_A + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} + f \right\|^2_{L^2(A)} \leq c \left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_A \right|\right|\right|^2_A, \qquad A \subseteq M(r).$$

Nei due lemmi che seguono indichiamo con $\tilde{H}_0^1(C^*(r))$ la classe delle funzioni $u \in H^1(C^*(r))$ che hanno traccia nulla sull'iperpiano $x_n = o$ e indichiamo con $\tilde{W}^{2,1}(C^*(r) \times (a < t < b))$ la classe delle funzioni u tali che

$$u \in L^2[a,\ b;\ \tilde{H}_0^1(C^*(r)) \cap H^2(C^*(r))] \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega)$$

LEMMA 7. III. - *Sia $u \in \tilde{W}^{2,1}(Q^*(r))$ una soluzione in $Q^*(r)$ dell'equazione $\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f$. Esiste una costante $c > o$ tale che $\forall\, \rho \in (o, r)$*

$$|||\, u \,|||^2_{Q^*(\rho)} \leq c \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} |||\, u \,|||^2_{Q^*(r)} + \| f \|^2_{Q^*(r)} \right] \tag{7.11}$$

e

$$|||\, u - p(Q^*(\rho), u) \,|||^2_{Q^*(\rho)} \leq c \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} |||\, u - p(Q^*(r), u) \,|||^2_{Q^*(r)} + \| f - f_{Q^*(r)} \|^2_{Q^*(r)} \right] \tag{7.12}$$

---

[8] Dall'equazione si ricava che

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} + f \right\|^2_{L^2(A)} = \| \Delta u \|^2_{L^2(A)} \leq c \sum_{ij} \| D_i D_j u \|^2_{L^2(A)}$$

Dim. - Consideriamo le funzioni U e F definite in $Q(r)$ nel seguente modo

$$U(x,\ t) = \begin{cases} u(x,\ t) & \text{se } x_n \geq o \\ -u(\bar{x},\ -x_n,\ t) & \text{se } x_n < o \end{cases} \tag{7.13}$$

$$F(x,\ t) = \begin{cases} f(x,\ t) & \text{se } x_n \geq o \\ -f(\bar{x},\ -x_n,\ t) & \text{se } x_n < o \end{cases} \tag{7.14}$$

dove $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$.

La funzione $F \in L^2(Q(r))$ mentre $U \in W^{2,1}(Q(r))$ ed è soluzione in $Q(r)$ dell'equazione $\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)U = F$. Quindi U verifica le ipotesi del lemma 7.1. Allora le maggiorazioni (7.11) e (7.12) seguono dalle (7.1) e (7.2), scritte per U ed F, tenuto conto che $\forall\ \sigma \in (o,\ r)$ risulta

$$|||\, U\, |||^2_{Q(\sigma)} = 2\, |||\, u\, |||^2_{Q^*(\sigma)}$$

$$|||\, U - p\ (Q(\sigma),\ U)\, |||^2_{Q(\sigma)} = 2\, |||\, u - p(Q^*(\sigma),\ u)\, |||^2_{Q^*(\sigma)}$$

$$\|F\|^2_{L^2(Q(\sigma))} = 2\, \|f\|^2_{L^2(Q^*(\sigma))}$$

$$\|F - F_{Q(\sigma)}\|^2_{L^2(Q(\sigma))} = 2\, \|f - f_{Q^*(\sigma)}\|^2_{L^2(Q^*(\sigma))}.$$

LEMMA 7. IV. - *Sia $u \in \tilde{W}^{2,1}(M^*(r))$ una soluzione in $M^*(r)$ dell'equazione $\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f$ e sia $u(x,\ o) = o$. Esiste una costante $c > o$ tale che $\forall\ \rho \in (o,\ r)$*

$$|||\, u\, |||^2_{M^*(\rho)} \leq c\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} |||\, u\, |||^2_{M^*(r)} + \|f\|^2_{L^2(M^*(r))}\right] \tag{7.15}$$

e

$$|||\, u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M^*(\rho)} |||^2_{M^*(\rho)} \leq c\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} \left|\left|\left|\, u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M^*(r)} \right|\right|\right|^2_{M^*(r)} + \|f - f_{M^*(r)}\|^2_{L^2(M^*(r))}\right] \tag{7.14}$$

Dim. - Definiamo U e F in tutto $M(r)$ mediante le posizioni (7.13) e (7.14). La funzione $F \in L^2(M(r))$ mentre U verifica in $M(r)$ le ipotesi del lemma 7. II con F in luogo di f. Le maggiorazioni (7.15) e (7.16) seguono allora dalle (7.9) e (7.10), scritte per U e F, tenuto conto che $\forall\, \sigma \in (o\,, r)$

$$|||\, U\, |||^2_{M(\sigma)} = 2\, |||\, u\, |||^2_{M^*(\sigma)}$$

$$\|F\|^2_{M(\sigma)} = 2\|f\|^2_{M^*(\sigma)}$$

$$\left|\left|\left| U - t\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{M(\sigma)} \right|\right|\right|^2_{M(\sigma)} = 2 \left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M^*(\sigma)} \right|\right|\right|^2_{M^*(\sigma)}$$

$$\|F - F_{M(\sigma)}\|^2_{L^2(M(\sigma))} = 2\, \| f - f_{M^*(\sigma)} \|^2_{L^2(M^*(\sigma))}$$

8\. - Consideriamo ora l'operatore parabolico $\left(E - \dfrac{\partial}{\partial t}\right) u$ dove

$$Eu = \sum_{ij} a_{ij}\, D_i D u_j \tag{8.1}$$

è un operatore ellittico a coefficienti costanti, con costante di ellitticità ν. Quindi $a_{ij} = a_{ji}$ e

$$\nu^{-1}|x|^2 \leq \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j \leq \nu\, |x|^2, \quad \forall\, x \in \boldsymbol{R}^n. \tag{8.2}$$

Poniamo $a = \{a_{ij}\}$, $A = a^{-1} = \{A_{ij}\}$. Indichiamo con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori (positivi ma non necessariamente distinti) della trasformazione $x \to ax$ e sia $\Lambda^1, \Lambda^2, \ldots, \Lambda^n$ un corrispondente sistema di autovettori normalizzati e tali che

$$\Lambda = \det\{\Lambda_i^h\} = 1$$

Le trasformazione $x \to Ax$ ha come autovalori $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ e quindi anche la forma quadratica $\varphi(x) = \sum_{ij} A_{ij}\, x_i x_j$ verifica la relazione

$$\nu^{-1}|x|^2 \leq \sum_{ij} A_{ij} x_i x_j \leq \nu\, |x|^2, \ \forall\, x \in \boldsymbol{R}^n \tag{8.3}$$

Per ogni $\rho > o$ poniamo

$$\Phi(\rho) = \{x : x \in \boldsymbol{R}^n,\ \varphi(x) < \rho^2\}$$

$$\Phi^*(\rho) = \Phi(\rho) \cap \{x_n > o\}$$

L'applicazione $x \to \mathcal{T}(x) = y$ dove

$$y_h = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}\, (x\,, \Lambda_h), \quad (h = 1\,, 2\,, \ldots, n) \tag{8.4}$$

trasforma, con evidente significato dei simboli, l'operatore E_x nell'operatore

Δ_y, l'insieme $\Phi(\rho)$ nella sfera $C(\rho)$ e $\Phi^*(\rho)$ in una semisfera che mediante una rotazione $\mathfrak{R}$ possiamo far coincidere con $C^*(\rho) = C(\rho) \cap \{y_n > 0\}$.

Osserviamo inoltre che una rotazione $\mathfrak{R}$ sulle variabili $x_1 x_2 \dots x_n$ lascia inalterate le quantità $\| u \|_{L^2(A)}$, $\| u - u_A \|_{L^2(A)}$, $||| u |||_A$, $||| u - p(A, u) |||_A$, A sottoinsieme misurabile di $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}_t$, mentre con la trasformazione lineare di coordinate

$$T : (x, t) \rightarrow (\mathcal{T}(x), t) = (y, t)$$

le medesime quantità diventano

$$\| u(x, t) \|^2_{L^2(A)} = \Lambda \| v(x, t) \|^2_{L^2(B)}$$

$$\| u - u_A \|^2_{L^2(A)} = \Lambda \| v - v_B \|^2_{L^2(B)}$$

$$||| u |||^2_A = \Lambda \left(\sum_{hk} \frac{1}{\lambda_h \lambda_k} \| D_h D_k v \|^2_{L^2(B)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|^2_{L^2(B)} \right)$$

$$||| u - p(A, u) |||^2_A = \Lambda \left(\sum_{hk} \frac{1}{\lambda_h \lambda_k} \| D_h D_k v - \{D_h D_k v\}_B \|^2_{L^2(B)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_B \right\|^2_{L^2(B)} \right)$$

dove si è posto

$$\Lambda = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}, \quad v(y, t) = u(\mathcal{T}^{-1}(y), t), \quad B = T(A).$$

Quindi tutti i lemmi che abbiamo dimostrato nel n. 7 si enunciano inalterati anche per soluzioni $u \in W^{2,1}$ dell'equazione $\left(E - \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f$ sostituendo formalmente agli insiemi Q, Q^*, M, M^* definiti dalle (5.2) rispettivamente gli insiemi

$$
\begin{aligned}
& Q_1(r) = \Phi(r) \times (-r^2 < t < 0) \\
& Q_1^*(r) = \Phi^*(r) \times (-r^2 < t < 0) \\
& M_1(r) = \Phi(r) \times (0 < t < r^2) \\
& M_1^*(r) = \Phi^*(r) \times (0 < t < r^2)
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

La costante positiva c che figura nelle mggiorazioni (7.1), (7.2), (7.9), (7.10), (7.11), (7.12), (7.15) e (7.16) verrà in questo caso a dipendere dalla costante di ellitticità γ.

Teoremi di regolarità negli spazi $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$.

9. - Indichiamo con Ω il cilindro $Q \times (o < t < T)$ dove T è $< +\infty$ e Q è un aperto limitato di $\boldsymbol{R}^n$, sufficientemente regolare. Indichiamo con $E(X) = E(x, t)$ l'operatore ellittico $\sum\limits_{ij} a_{ij}(X) D_i D_j$ definito in $\overline{\Omega}$, a coefficienti continui in $\overline{\Omega}$ e simmetrici, il quale verifica la condizione

$$\nu^{-1}|\lambda|^2 \leq \sum_{ij} a_{ij}(X)\lambda_i\lambda_j \leq \nu|\lambda|^2, \quad \forall \lambda \in \boldsymbol{R}^n, \quad \forall X \in \overline{\Omega} \tag{9.1}$$

con $\nu > o$.

Sia $f \in L^2(\Omega)$ e sia $u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,1}(\Omega)$ la soluzione in Ω dell'equazione $\left(E(X) - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f$ (cfr. n. 6). Indichiamo con $G_{ij}(f)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ e con $G_t(f)$ le applicazioni lineari di $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ definite nel seguente modo

$$G_{ij} : f \to D_i D_j u$$

$$G_t : f \to \frac{\partial u}{\partial t}$$

La maggiorazione (6.5) assicura che le applicazioni G_{ij} e G_t sono continue da $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$. Allora G_{ij} e G_t sono applicazioni lineari e continue anche da $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ in $L^2(\Omega)$ per ogni $\theta \geq o$ (cfr. la nota [8]).

Noi vogliamo dimostrare che, se ∂Q e i coefficienti a_{ij} sono opportunamente regolari, le applicazioni G_{ij} e G_t son lineari e continue da $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ in $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ per ogni $o \leq \theta \leq \frac{n+4}{n+2}$ (cfr. teor. 11. I) [9].

Questo risultato seguirà, con ragionamento standard, dai teoremi che dimostreremo in questo numero.

Utilizzeremo i lemmi dimostrati nel n. 7 i quali, come si è osservato nel n. 8, restano validi anche per gli operatori a coefficienti costanti (8.1). La costante positiva c che figura nelle maggiorazioni (7.1), (7.2), (7.9), (7.10), (7.11), (7.12), (7.15), (7.16) viene a dipendere in questo caso da ν e possiamo

[9] Volendo, è sufficiente dimostrare questo fatto per le applicazioni G_{ij} in quanto per la G_t viene di conseguenza tenuto conto della relazione

$$G_t f = \sum_{ij} a_{ij} G_{ij} f - If$$

I applicazione identica.

supporre che questa $c(\nu)$ sia la stesa in tutte quelle maggiorazioni. Possiamo anche supporre $c(\nu) > 1$. Non staremo a ripetere ogni volta queste precisazioni. Nel seguito useremo le seguenti notazioni

$$|||u|||^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(A,\delta)} = \sum_{ij} \|D_iD_ju\|^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(A,\delta)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(A,\delta)}$$

$$|||u|||^2_{L^{2,\theta}(A,\delta)} = \sum_{ij} \|D_iD_ju\|^2_{L^{2,\theta}(A,\delta)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^{2,\theta}(A,\delta)}$$

Se Ω_0 è il cilindro $Q_0 \times (o < t < T)$, scriveremo $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ nel caso che sia $Q_0 \subset\subset Q$. Ricordiamo infine chè $I(X_0, \sigma)$ è la sfera di centro X_0 e raggio σ nella metrica (1.1) e che $\Omega(X_0, \sigma) = I(X_0, \sigma) \cap \Omega$.

TEOREMA 9. I - *Sia* $u \in W^{2,1}(\Omega)$ *una soluzione in* Ω *dell'equazione* $\left(E(X) - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f$ *con la condizione* $u(x, o) = o$. *Supponiamo che i coefficienti* a_{ij} *siano continui in* $\overline{\Omega}$ *e che* $f \in L^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ *per un certo* θ, $o \leq \theta < 1$. *Allora per ogni cilindro* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, *di classe* $\mathfrak{A}$ *rispetto alla metrica* δ, *risulta*

$$D_iD_ju \in L^{2,\theta}(\Omega_0, \delta), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{2,\theta}(\Omega_0, \delta)$$

e si ha la maggiorazione

$$|||u|||^2_{L^{2,\theta}(\Omega_0,\delta)} \leq c(\nu, \theta, \Omega_0)\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{\bar{r}^{\theta(n+2)}} + \|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)}\right] \tag{9.2}$$

dove $c(\nu, \theta, \Omega_0)$ *dipende da* Ω_0 *solo attraverso la costante che interviene nella condizione* $\mathfrak{A}$ *ed* $\bar{r}$ *è un numero positivo definito dalla* (9.5).

Dim. - Indichiamo con R_0 la distanza (euclidea) di Q_0 dalla frontiera di Q e poniamo

$$r_0 = \min\left(\frac{R_0}{2\sqrt{\nu}}, \frac{\sqrt{T}}{2}\right)$$

Se $X_0 = (x_0, t)$ è un punto di $\overline{\Omega}_0$ indichiamo con $a(X_0)$ la matrice $\{a_{ij}(X_0)\}$ e con $\{A_{ij}(X_0)\}$ la matrice $a^{-1}(X_0)$. Poniamo infine

$$\varphi(X_0, x) = \sum_{ij} A_{ij}(X_0)(x_i - x_{i,0})(x_j - x_{j,}), \quad x \in \boldsymbol{R}^n$$

$$\Phi(X_0, \sigma) = \{x : x \in \boldsymbol{R}^n, \ \varphi(X_0, x) < \sigma^2\}, \quad \sigma > o$$

Per ogni $\sigma > o$ si ha [10]

$$C\left(x_0, \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right) \subset \Phi(X_0, \sigma) \subset C(x_0, \sqrt{\nu}\sigma)$$

e quindi risulta $\Phi(X_0, \sigma) \subset Q$, $\forall X_0 \in \Omega_0$ e $\forall \sigma \in (o, r_0]$. Poniamo

$$\omega(r) = \sup_{ij} \sup_{X_0 \in \overline{\Omega}_0} \sup_{X \in \Omega(X_0, \sqrt{\nu} r)} |a_{ij}(X) - a_{ij}(X_0)|^2 \tag{9.3}$$

Poiché i coefficienti a_{ij} son continui in $\overline{\Omega}$, $\omega(r)$ è infinitesimo con r e quindi esiste una applicazione $p \to r(p)$, definita per $p > 1$ a valori in $\boldsymbol{R}^+$, tale che

$$\omega(r) \leq \frac{1}{p^{n+2}}, \quad \forall r \in (o, r(p)] \tag{9.4}$$

Poniamo $\bar{p}(\nu, \theta) = [2c(\nu)]^{[(n+2)(1-\theta)]^{-1}}$ e

$$\bar{r} = \min(r(\bar{p}), r_0) \tag{9.5}$$

Sia $t \to \varphi(t)$ una applicazione di $\boldsymbol{R}^+$ in $\boldsymbol{R}_0^+$ e per ogni coppia di valori ρ, r, $o < \rho < r \leq r_0$, si abbia

$$\varphi(\rho) \leq c(\nu)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \varphi(r) + \omega(r)\varphi(r) + r^{\theta(n+2)} F\right] \tag{9.6}$$

con F costante $\geq o$. Il lemma 4.I assicura che per ogni coppia di valori ρ, r, $o < \rho < r \leq \bar{r}$, risulta

$$\varphi(\rho) \leq 2c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{(n+2)\theta} \varphi(r) + c(\nu, \theta)\rho^{(n+2)\theta} F. \tag{9.7}$$

dove $c(\nu, \theta)$ è una costante positiva, facilmente deducibile dal lemma citato. Basti osservare che, fissato un $p > 1$, da (9.6) e (9.4) si ottiene che per ogni coppia di valori ρ, $r \in (o, r(p)]$, tali che $1 < \frac{r}{\rho} \leq p$, si ha

$$\varphi(\rho) \leq 2c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \varphi(r) + c(\nu) p^{\theta(n+2)} F \cdot \rho^{(n+2)\theta} \tag{9.8}$$

---

(10) $C(X_0, r) = \{x : x \in \boldsymbol{R}^n, |x - x_0| < r\}$. Ricordiamo la (8.3).

Ciò posto, il teorema 9. I sarà dimostrato se noi proveremo che $\forall\, X_0 \in \Omega_0$ e $\forall\, \rho > o$ si ha una maggiorazione di questo tipo ([11])

$$|||\, u\, |||^2_{\Omega(X_0,\rho)} \leq c(\nu,\ \theta)\rho^{\theta(n+2)}\left[\frac{|||\, u\, |||^2_{\Omega}}{\bar{r}^{\theta(n+2)}} + \|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)}\right] \tag{9.9}$$

È sufficiente provare la (9.9) per tutti i $\rho \in (o,\ \alpha\bar{r})$ (α reale positivo fissato) perché se $\rho \geq \bar{r}\alpha$ si ha banalmeute

$$|||\, u\, |||^2_{\Omega(X_0,\rho)} \leq \frac{\rho^{\theta(n+2)}}{(\alpha\bar{r})^{\theta(n+2)}}\, |||\, u\, |||^2_{\Omega}$$

Per dimostrare la (9.9) distinguiamo due casi.

a) - $t_0 = t_{X_0} = o$. Indichiamo con $M(X_0,\ r)$ un insieme di questo tipo

$$M(X_0,\ r) = \Phi(X_0,\ r) \times (o < t < r^2) \tag{9.10}$$

Per ogni $r \in (o,\ \bar{r})$ si ha

$$\Omega\left(X_0,\ \frac{r}{\sqrt{\nu}}\right) \subset M(X_0,\ r) \subset \Omega \tag{9.11}$$

Fissato r la funzione u appartiene a $W^{2,1}(M(X_0,\ r))$, si annulla per $t = o$ ed è soluzione dell'equazione

$$\left(E(X_0) - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = F(X) = f(X) + \sum_{ij}\, [a_{ij}(X_0) - a_{ij}(X)]\, D_i D_j u$$

con $F(X) \in L^2(M(X_0,\ r))$. La maggiorazione (7.9) del lemma 7. II assicura allora che $\forall\, \rho \in (o,\ r)$

$$|||\, u\, |||^2_{M(X_0,\rho)} \leq c(\nu)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} |||\, u\, |||^2_{M(X_0,r)} + \|F\|^2_{L^2(M(X_0,r))}\right]$$

e quindi $\forall\, \rho \in (o,\ r)$

$$|||\, u\, |||^2_{M(X_0,\rho)} \leq c(\nu)\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} |||\, u\, |||^2_{M(X_0,r)} + \omega(r)\, |||\, u\, |||^2_{M(X_0,r)} + c r^{\theta(n+2)}\, \|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)}\right\} \tag{9.12}$$

Questa maggiorazione si identifica con la (9.6) qual'ora si assuma $\varphi(t) =$

([11]) Questo perché $|||u|||^2_{\Omega_0(X_0,\rho)} \leq |||u|||^2_{\Omega(X_0,\rho)}$ e inoltre, avendo supposto Ω_0 di tipo $\mathfrak{A}$, $\rho^{\theta(n+2)} \leq \text{cost.}\, |\Omega_0(X_0,\ \rho)|^{\theta}$.

$= |||u|||^2_{M(X_0,t)}$ ed $F = c\|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)}$. Quindi, per quanto si è provato precedentemente, si avrà $\forall\, \rho \in (o, \bar{r})$

$$|||u|||^2_{M(X_0,\rho)} \leq 2c(\nu)\left(\frac{\rho}{\bar{r}}\right)^{\theta(n+2)} |||u|||_{M(X_0,\bar{r})} + c(\nu, \theta)\rho^{(n+2)\theta}\|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)} \tag{9.13}$$

A maggior ragione, $\forall\, \rho \in (o, \bar{r})$,

$$|||u|||^2_{M(X_0,\rho)} \leq c_1(\nu, \theta)\rho^{\theta(n+2)}\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{\bar{r}^{\theta(n+2)}} + \|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)}\right] \tag{9.14}$$

Da questa maggiorazione, tenuto conto della (9.11), segue la (9.9) per tutti i $\rho \in \left(o, \dfrac{\bar{r}}{\sqrt{\nu}}\right)$.

b) - Sia $X_0 = (x_0, t_0) \in \overline{\Omega}_0$ e $o < t_0 \leq T$. Indichiamo con $Q(X_0, \rho)$ un insieme di questo tipo

$$Q(X_0, \rho) = \Phi(X_0, \rho) \times (t_0 - \rho^2 < t < t_0) \tag{9.15}$$

Proveremo che $\forall\, \rho \in (o, \bar{r})$ risulta

$$|||u|||^2_{Q(X_0,\rho)\cap\Omega} \leq c_1(\nu, \theta)\rho^{\theta(n+2)}\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{\bar{r}^{\theta(n+2)}} + \|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)}\right] \tag{9.16}$$

Supponiamo per un momento di aver dimostrato questo fatto. Osserviamo che $\forall\, \rho \in (o, \bar{r})$ risulta

$$\Omega\left(X_0, \frac{\rho}{\sqrt{\nu}}\right) = \Omega \cap I\left(X_0, \frac{\rho}{\sqrt{\nu}}\right) \subset [\Phi(X_0, \rho) \times (t_0 - \rho^2 < t < t_0 + \rho^2)] \cap \Omega$$

E quindi, posto $\bar{t} = \min\,(t_0 + \rho^2, T)$ e $Q'(X_0, \rho) = \Phi(X_0, \rho) \times (\bar{t} - \rho^2 < t < \bar{t})$,

$$\Omega\left(X_0, \frac{\rho}{\sqrt{\nu}}\right) \subset [Q(X_0, \rho) \cap \Omega] \cup Q'(X_0, \rho)$$

Anche $Q'(X_0, \rho)$ è un insieme del tipo (9.15) per cui dalla (9.16) segue la (9.9) per tutti i $\rho \in \left(o, \dfrac{\bar{r}}{\sqrt{\nu}}\right)$.

Dimostriamo allora la (9.16).

Poniamo $r^* = \min(\bar{r}, \sqrt{t_0})$. Allora è $Q(X_0, r^*) \subset \Omega$. Fissiamo un r, $r \in (o, r^*]$. La funzione $u \in W^{2,1}(Q(X_0, r))$ ed è soluzione dell'equazione

$$\left(E(X_0) - \frac{\partial}{\partial t}\right) u = F(X) = f(X) + \sum_{ij} [a_{ij}(X_0) - a_{ij}(X)] D_i D_j u$$

con $F \in L^2(Q(X_0, r))$. La maggiorazione (7.1) del lemma 7.I assicura allora che $\forall\, \rho \in (o, r)$

$$\text{(9·17)} \qquad |||u|||^2_{Q(X_0,\rho)} \leq c(\nu)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} |||u|||^2_{Q(X_0,r)} + \omega(r)\, |||u|||^2_{Q(X_0,r)} + \right.$$
$$\left. + \, c r^{\theta(n+2)} \|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)}\right]$$

Questa maggiorazione si identifica con la (9.6) qualora si assuma $\varphi(t) = |||u|||^2_{Q(X_0,t)}$ ed $F = c\|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)}$. Quindi dalla (9.17) segue che $\forall\, \rho \in (o, r^*)$

$$\text{(9.18)} \qquad |||u|||^2_{Q(X_0,\rho)} \leq 2c(\nu)\left(\frac{\rho}{r^*}\right)^{\theta(n+2)} |||u|||^2_{Q(X_0,r^*)} + c(\nu, \theta)\rho^{\theta(n+2)} \|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)}$$

Qui si presentano due possibilità:

Se $r^* = \bar{r}$, dalla (9.18) si ha subito la (9.16) $\forall\, \rho \in (o, \bar{r})$.

Se invece $r^* = \sqrt{t_0}$ la (9.18) si può scrivere in questo modo

$$\text{(9.19)} \qquad |||u|||^2_{Q(X_0,\rho)} \leq c_1(\nu, \theta)\rho^{\theta(n+2)} \left[\frac{|||u|||^2_{Q(X_0\sqrt{t_0})}}{(\sqrt{t_0})^{\theta(n+2)}} + \|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)}\right]$$

Ora però

$$Q(X_0, \sqrt{t_0}) = M(X_0, \sqrt{t_0}) = \Phi(X_0, \sqrt{t_0}) \times (o < t < t_0)$$

e quindi dalla maggiorazione (9.14) si ha che

$$\text{(9.20)} \qquad \frac{|||u|||^2_{Q(X_0,\sqrt{t_0})}}{(\sqrt{t_0})^{\theta(n+2)}} \leq c_1(\nu, \theta)\left[\frac{|||u|||^2_{\Omega}}{\bar{r}^{\theta(n+2)}} + \|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)}\right]$$

Dalle (9.19) e (9.20) segue anche in questo caso la (9.16) per tutti i $\rho \in (o, \sqrt{t_0})$.

Se poi $\sqrt{t_0} \leq \rho \leq \bar{r}$ allora $Q(X_0, \rho) \cap \Omega \subset M(X_0, \rho)$ e quindi per la (9.14)

$$|||u|||^2_{Q(X_0,\rho)\cap\Omega} \leq |||u|||^2_{M(X_0,\rho)} \leq c_1(\nu, \theta)\rho^{\theta(n+2)}\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{\bar{r}^{\theta(n+2)}} + \|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\delta)}\right]$$

Osservazione 9.I - In relazione al teorema ora dimostrato si puo osservare quanto segue: Supponiamo che $f \in L^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ con $\theta \leq \frac{2}{n+2}$ e supponiamo che i coefficienti a_{ij}, anziché continui in $\bar{\Omega}$, appartengano a $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \delta)$ con $\alpha = \frac{\theta(n+2)}{2}$, allora nella maggiorazione (9.2) si può sostituire $\bar{r}$ con r_0. Infatti nelle ipotesi attuali $\omega(r)$ verifica una maggiorazione di questo tipo

$$\omega(r) \leq A\, r^{2\alpha} = A r^{\theta(n+2)}, \quad \forall\, r \in (0, r_0]$$

per cui dalla maggiorazione (9.6), supposto, come è lecito nel caso che a noi interessa, che $t \to \varphi(t)$ sia non decrescente, si ottiene

$$\varphi(\rho) \leq c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}\varphi(r) + r^{\theta(n+2)}(A\varphi(r_0) + F) \tag{9.21}$$

per ogni coppia di valori ρ, r verificanti la relazione $0 < \rho < r \leq r_0$. Il lemma 4.I assicura allora che per ogni coppia di valori ρ, r, con $0 < \rho < r \leq r_0$, risulta

$$\varphi(\rho) \leq 2c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\theta(n+2)}\varphi(r) + c(\nu, \theta)\rho^{\theta(n+2)}(A\varphi(r_0) + F). \tag{9.22}$$

TEOREMA 9. II - *Sia* $u \in W^{2,1}(\Omega)$ *una soluzione dell'equazione* $\left(E(X) - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f$ *con la condizione* $u(x, 0) = 0$. *Supponiamo che* $f \in \mathfrak{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$ *e che i coefficienti* $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \delta)$, $0 < \alpha \leq 1$. *Allora per ogni cilindro* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, *di classe* $\mathfrak{A}$ *rispetto alla metrica* δ, *risulta*

$$D_iD_ju \in \mathfrak{L}^{2,1}(\Omega_0, \delta), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathfrak{L}^{2,1}(\Omega_0, \delta)$$

e si ha la maggiorazione

$$|||u|||^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega_0,\delta)} \leq c(\nu, A, \alpha, \Omega_0)\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{r_0^{n+2}} + \|f\|^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega,\delta)}\right] \tag{9.23}$$

Dim. - r_0, $\Phi(X_0, \sigma)$, $\omega(r)$ sono definiti come nel lemma precedente. Nelle ipotesi attuali sui coefficienti a_{ij} si ha

$$\omega(r) \leq \sup_{ij} [a_{ij}]^2_{C^{0,\alpha}(\Omega,\delta)} r^{2\alpha} = A r^{2\alpha} \tag{9.24}$$

Il teorema sarà dimostrato se noi proveremo che per ogni $X_0 \in \vec{\Omega}_0$ e $o < \rho < k r_0$ ($k > o$ fissato) si ha la maggiorazione

$$|||u - p\,\Omega(X_0, \rho)\ u)|||^2_{\Omega(X_0,\rho)} \leq c\rho^{n+2}\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{r_0^{n+2}} + \|f\|^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega,\delta)}\right] \tag{9.25}$$

con c costante opportuna.

Premetteremo una osservazione. Sia $\Omega_1 = Q_1 \times (o, T)$ un cilindro di classe $\mathfrak{A}$ scelto in modo tale che

i) $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$

ii) detta R_1 la distanza di Q_0 dalla frontiera di Q_1 si abbia

$$\frac{r_0}{4} \leq r_1 = \min\left(\frac{R_1}{2\sqrt{\nu}}, \frac{\sqrt{T}}{2}\right) \leq \frac{r_0}{2}$$

Poiché è $\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega, \delta) \subset L^{2,1-\frac{2\alpha}{n+2}}(\Omega, \delta)$ il teorema 9.I e l'osservazione 9.I assicurano che

$$|||u|||^2_{L^{2,1-\frac{2\alpha}{n+2}}(\Omega_1,\delta)} \leq c(\nu, \alpha)\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{r_0^{n+2-2\alpha}} + \|f\|^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega,\delta)}\right] \tag{9.26}$$

Ciò posto distinguiamo due casi [12]

a) - $X_0 \in \vec{\Omega}_0$ e $t_0 = t_{X_0} = o$. Fissato r, $r \in \left(o, \frac{r_0}{4}\right]$, si ha

$$\Omega\left(X_0, \frac{r}{\sqrt{\nu}}\right) \subset M(X_0, r) \subset \Omega_1 \tag{9.27}$$

La funzione u appartiene a $W^{2,1}(M(X_0, r))$, si annulla per $t = o$ ed è soluzione dell'equazione

$$\left(E(X_0) - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = F(X) = f(X) + \sum_{ij} [a_{ij}(X_0) - a_{ij}(X)] D_i D_j u$$

([12]) Utilizzeremo le notazioni introdotte nella dimostrazione del teorema 9.I.

In virtù del lemma 7. II (maggior. (7.10)) si ha allora $\forall\, \rho \in (o,\ r)$

$$\left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M(X_0,\rho)} \right|\right|\right|^2_{M(X_0,\rho)} \leq$$

$$\leq c(\nu)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} \left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M(X_0,r)} \right|\right|\right|^2_{M(X_0,r)} + \| F - F_{M(X_0,r)} \|^2_{L^2(M(X_0,r))}\right] \leq \tag{9.28}$$

$$\leq c(\nu)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} \left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M(X_0,r)} \right|\right|\right|^2_{M(X_0,r)} + Ar^{2\alpha} |||\, u\, |||^2_{M(X_0,r)} + r^{n+2} \| f \|^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega,\delta)}\right]$$

D'altra parte la (9.26) assicura che

$$|||\, u\, |||^2_{M(X_0,r)} \leq c(\nu,\ \alpha) r^{n+2-2\alpha} \left[\frac{|||\, u\, |||^2_\Omega}{r_0^{\,n+2-2\alpha}} + \| f \|^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega,\delta)}\right] \tag{9.29}$$

Da (9.28) e (9.29) segue in definitiva che $\forall\, \rho \in (o,\ r)$

$$\left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M(X_0,\rho)} \right|\right|\right|^2_{M(X_0,\rho)} \leq c(\nu,\ \alpha,\ A)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} \left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M(X_0,r)} \right|\right|\right|^2_{M(X_0,r)} + r^{n+2}K\right]$$

dove

$$K = \frac{|||\, u\, |||^2_\Omega}{r_0^{\,n+2-2\alpha}} + \| f \|^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega,\delta)}$$

A questo punto si utilizza il lemma 4. I e si conclude che per ogni coppia di valori ρ, r con $o < \rho < r \leq \frac{r_0}{4}$

$$\left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M(X_0,\rho)} \right|\right|\right|^2_{M(X_0,\rho)} \leq c(\nu,\ \alpha,\ A)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M(X_0,r)} \right|\right|\right|^2_{M(X_0,r)} + \rho^{n+2}K\right]$$

e quindi $\forall\, \rho \in \left(o,\ \frac{r_0}{4}\right)$

$$\left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M(X_0,\rho)} \right|\right|\right|^2_{M(X_0,\rho)} \leq c_1(\nu,\ \alpha,\ A)\rho^{n+2} \left[\frac{|||\, u\, |||^2_\Omega}{r_0^{\,n+2}} + \| f \|^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega,\delta)}\right]$$

Da questa maggiorazione, tenuto conto della (9.27), segue la (9.25) per tutti i $\rho \in \left(o,\ \frac{r_0}{4\sqrt{\nu}}\right)$.

b) - $X_0 \in \Omega$ e $o < t_0 \leq T$. Indichiamo con $Q(X_0, \rho)$ un insieme di questo tipo

$$Q(X_0, \rho) = \Phi(X_0, \rho) \times (t_0 - \rho^2 < t < t_0)$$

Per dimostrare che vale la maggiorazione (9.25) per tutti i $\rho \in \left(o, \frac{r_0}{4\sqrt{\nu}}\right)$ basterà provare che per $\rho \in \left(o, \frac{r_0}{4}\right)$ si ha

$$\text{(9.30)} \qquad |||u - p(Q(X_0, \rho), u)|||^2_{Q(X_0,\rho)} \leq c\rho^{n+2}\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{r_0^{n+2}} + \|f\|^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega,\delta)}\right]$$

Poniamo $r^* = \min\left(\frac{r_0}{4}, \sqrt{t_0}\right)$. Fissato $r \in (o, r^*]$ la funzione $u \in W^{2,1}(Q(X_0, r))$ ed è soluzione dell'equazione

$$\left(E(X_0) - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f(X) + \sum_{ij} [a_{ij}(X_0) - a_{ij}(X)]D_iD_ju$$

La maggiorazione (7.2) del lemma 7.I assicura allora che $\forall\ \rho \in (o, r)$

$$|||u - p(Q(X_0, \rho), u)|||^2_{Q(X_0,\rho)} \leq$$

$$\leq c(\nu)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} |||u - p(Q(X_0, r), u)|||^2_{Q(X_0,r)} + Ar^{2\alpha}|||u|||^2_{Q(X_0,r)} + r^{n+2}\|f\|^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega,\delta)}\right]$$

e tenuto conto della (9.26) si ha, $\forall\ \rho \in (o, r)$,

$$|||u - p(Q(X_0, \rho), u)|||^2_{Q(X_0,\rho)} \leq c(\nu, \alpha, A)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} |||u - p(Q(X_0, r), u)|||^2_{Q(X_0,r)} + r^{n+2}K\right]$$

dove

$$K = \frac{|||u|||^2_\Omega}{r_0^{n+2-2\alpha}} + \|f\|^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega,\delta)}$$

Applichiamo il lemma 4.I e concludiamo che per ogni coppia di valori ρ, r con $o < \rho < r \leq r^*$

$$\text{(9.31)} \qquad |||u - p(Q(X_0, \rho), u)|||^2_{Q(X_0,\rho)} \leq$$

$$\leq c(\nu, \alpha, A)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} |||u - p(Q(X_0, r), u)|||^2_{Q(X_0,r)} + \rho^{n+2}K\right]$$

A questo punto si presentano due possibilità:

Se $r^* = \frac{r_0}{4}$ dalla (9.31) si ha subito la (9.30) $\forall\, \rho \in \left(o, \frac{r_0}{4}\right)$. Se invece $r^* = \sqrt{t_0}$ dalla (9.31) si ottiene $\forall\, \rho \in (o, \sqrt{t_0})$

$$|||u - p(Q(X_0, \rho), u)|||^2_{Q(X_0,\rho)} \leq$$

$$\leq c(\nu, \alpha, A)\left[\rho^{n+2}\frac{|||u - p(Q(X_0, \sqrt{t_0}), u)|||^2_{Q(X_0,\sqrt{t_0})}}{(\sqrt{t_0})^{n+2}} + \rho^{n+2}K\right]$$

D'altra parte, per quanto dimostrato in a),

$$\frac{|||u - p(Q(X_0, \sqrt{t_0}), u)|||^2_{QX_0,\sqrt{t_0})}}{(\sqrt{t_0})^{n+2}} \leq c\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{r_0^{n+2}} + \|f\|^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega,\delta)}\right]$$

e quindi $\forall\, \rho \in (o, \sqrt{t_0})$

$$|||u - p(Q(X_0, \rho), u)|||^2_{Q(X_0,\rho)} \leq c(\nu, \alpha, A)\,\rho^{n+2}\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{r_0^{n+2}} + \|f\|^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega,\delta)}\right] \tag{9.32}$$

È chiaro che pur di modificare la costante $c(\nu, \alpha, A)$ la maggiorazione (9.32) vale anche per tutti i $\rho \in \left[\sqrt{t_0}, \frac{r_0}{4}\right)$ in quanto per questi ρ risulta

$$Q(X_0, \rho) \subset \Phi(X_0, \rho) \times (o < t < \rho^2)$$

È immediato verificare che ripetendo la dimostrazione che abbiamo dato per il teorema 9. II si può dimostrare il seguente risultato che contiene e generalizza il teorema 9. II medesimo

TEOREMA 9. III - *Sia $u \in W^{2,1}(\Omega)$ una soluzione dell'equazione $\left(E(X) - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f$ con la condizione $u(x, o) = o$. Supponiamo che $f \in \mathfrak{L}^{2,1+\frac{2\beta}{n+2}}(\Omega, \delta)$ e che i coefficienti a_{ij} appartengano a $C^{o,\alpha+\beta}(\overline{\Omega}, \delta)$ con*

$$\alpha > o, \quad \beta \geq o, \quad \alpha + \beta \leq 1$$

Allora per ogni cilindro $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ e di tipo $\mathfrak{A}$ risulta

$$|||u|||^2_{\mathfrak{L}^{2,1+\frac{2\beta}{n+2}}(\Omega_0,\delta)} \leq c(\nu, A, \alpha, \beta, \Omega_0)\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{r_0^{n+2+2\beta}} + \|f\|^2_{\mathfrak{L}^{2,1+\frac{2\beta}{n+2}}(\Omega,\delta)}\right] \tag{9.33}$$

Per $\beta = o$ si riottiene il teorema 9. II.

COROLLARIO 9. I - *Nelle stesse ipotesi del teorema* 9. III *le derivate* $D_i D_j u$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *e* $\frac{\partial u}{\partial t}$ *sono limitate in* Ω_0 *e si ha la maggiorazione*

$$(9.34) \qquad |||u|||^2_{L^\infty(\Omega_0)} \leq c(\nu, A, \alpha, \beta, \Omega_0)\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{r_0^{\,n+2+2\beta}} + \|f\|^2_{\mathfrak{L}^{2,1+\frac{2\beta}{n+2}}(\Omega,\delta)}\right]$$

dove $|||u|||_{L^\infty(\Omega_0)} = \sum_{ij} \|D_i D_j u\|_{L^\infty(\Omega_0)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^\infty(\Omega_0)}$.

Dim. - Poiché Ω_0 è di tipo $\mathfrak{A}$ il teorema 2. I assicura che $\mathfrak{L}^{2,1+\frac{2\beta}{n+2}}(\Omega_0, \delta)$ è isomorfo a $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0, \delta)$. D'altra parte se $v \in C^{0,\beta}(\bar{\Omega}_0, \delta)$ si ha

$$\|v\|^2_{L^\infty(\Omega_0)} \leq c(\beta, \Omega_0)\{\|v\|^2_{L^2(\Omega_0)} + [v]^2_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega}_0,\delta)}\}$$

La (9.34) è coseguenza allora di questa maggiorazione e della (9.33).

TEOREMA 9. IV - *Sia* $u \in W^{2,1}(\Omega)$ *una soluzione dell'equazione* $\left(E(X) - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f$ *con la condizione* $u(x, o) = o$. *Supponiamo che* $f \in \mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$, *con* $1 < \theta < \frac{n+4}{n+2}$, *e che i coefficienti* a_{ij} *appartengano a* $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \delta)$ *con* $\alpha = \frac{n+2}{2}(\theta - 1)$. *Allora per ogni cilindro* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ *e di tipo* $\mathfrak{A}$ *risulta*

$$D_i D_j u \in \mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega_0, \delta), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \quad \mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega_0, \delta)$$

e si ha la maggiorazione

$$(9.35) \qquad |||u|||^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega_0,\delta)} \leq c(\nu, A, \theta, \Omega_0)\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{r_0^{(\theta n+2)}} + \|f\|^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\delta)}\right]$$

Questo teorema migliora il risultato del teorema 9.III per il fatto che i coefficienti a_{ij} hanno lo stesso esponente di holderianità della f anziché un esponente maggiore. Nel teorema 9. III α era positivo, qui α è zero.

Dim. - La dimostrazione è analoga a quella del teorema 9. II per cui ci limiteremo a tratteggiarla rapidamente. Il simbolismo che useremo è quello già introdotto nelle dimostrazioni precedenti.

Dobbiamo provare che per ogni $X_0 \in \Omega_0$ e $o < \rho < kr_0$ ($k > o$ fissato) risulta

$$(9.36) \qquad |||u - p(\Omega(X_0, \rho), u)|||^2_{\Omega(X_0,\rho)} \leq c\rho^{(n+2)\theta}\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{r_0^{(n+2)\theta}} + \|f\|^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega,\delta)}\right]$$

Sia $\Omega_1 = Q_1 \times (o, T)$ un cilindro di classe $\mathcal{A}$ scelto in modo che verifichi le condizioni *i*) e *ii*) (cfr. dimostr. del teor. 9.II).

Distinguiamo due casi

a) $X_0 \in \bar{\Omega}_0$ e $t_0 = t_{X_0} = o$. Fissato r, $r \in \left(o, \frac{r_0}{4}\right]$ si ha

$$\Omega\left(X_0, \frac{r}{\sqrt{\nu}}\right) \subset M(X_0, r) \subset \Omega_1 \tag{9.37}$$

La funzione $u \in W^{2,1}(M(X_0, r))$, si annulla per $t = 0$ ed è soluzione dell'equazione

$$\left(E(X_0) - \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f(X) + \sum_{ij} [a_{ij}(X_0) - a_{ij}(X)] D_i D_j u.$$

In virtù del teorema 7.II (maggior. (7.10)) si ha allora che $\forall \rho \in (o, r)$

$$\left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M(X_0, \rho)} \right|\right|\right|^2_{M(X_0, \rho)} \leq \tag{9.38}$$

$$\leq c(\nu)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} \left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M(X_0, r)} \right|\right|\right|^2_{M(X_0, r)} + A r^{(n+2)(\theta-1)} ||| u |||^2_{M(X_0, r)} + r^{(n+2)\theta} \| f \|^2_{\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega,\delta)}\right].$$

D'altra parte, per il corollario 9.1,

$$||| u |||^2_{M(X_0, r)} \leq c r^{n+2} ||| u |||^2_{L^\infty(\Omega_1)} \leq c(\nu, A, \theta, \Omega_1)\left[\frac{||| u |||^2_\Omega}{r_0^{(n+2)\theta}} + \| f \|^2_{\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)}\right] r^{n+2}$$

e quindi $\forall \rho \in (o, r)$

$$\left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M(X_0, \rho)} \right|\right|\right|^2_{M(X_0, \rho)} \leq$$

$$\leq c(\nu, A, \theta, \Omega_0)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} \left|\left|\left| u - t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{M(X_0, r)} \right|\right|\right|^2_{M(X_0, r)} + r^{(n+2)\theta} K\right]$$

dove

$$K = \frac{||| u |||^2_\Omega}{r_0^{(n+2)\theta}} + \| f \|^2_{\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \theta)}$$

A questo punto si utilizza il lemma 4.I e si conclude come nel punto *a*) della dimostrazione del teorema 9 II.

b) — $X_0 \in \bar{\Omega}_0$ e $o < t_0 \leq T$. Si procede come nell'analogo punto *b*) della dimostrazione del teorema 9.II con l'unica variante (già applicata nel caso *a*)) che anzichè utilizzare la (9.26) si utilizza, nella medesima circostanza, il corollario 9.I.

Nei teoremi che seguono indicheremo con $\Omega(R)$, $R > o$, il cilindro $C^*(R) \times \times (o < t < T)$ dove $C^*(R)$ è la semisfera $\{x : x \in \boldsymbol{R}^n,\ |x| < R,\ x_n > o\}$. In particolare porremo $\Omega(1) = \Omega$.

Ricordiamo che $\tilde{H}_0^1(C^*(R))$ è la classe delle funzioni $x \to u(x) \in H^1(C^*(R))$ che hanno traccia nulla sull'iperpiano $x_n = 0$ e $\tilde{W}^{2,1}(\Omega(R))$ è la classe delle funzioni $u \in L^2(o,\ T;\ \tilde{H}_0^1(C^*(R)) \cap H^2(C^*(R)))$ per le quali $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega(R))$.

Daremo tre teoremi, analoghi anche per quanto riguarda la dimostrazione ai teoremi 9.I. 9.II e 9.IV, relativi a funzioni $u \in \tilde{W}^{2,1}(\Omega)$ che si annullano per $t = o$ e sono soluzioni in $\Omega = \Omega(1)$ dell'equazione $\left(E(X) - \dfrac{\partial}{\partial t}\right)u = f$.

Ci soffermeremo solo sulla dimostrazione del primo di questi teoremi, al fine di mettere in evidenza l'utilizzazione che viene fatta dei lemmi 7.III e 7.IV. Ci limiteremo invece ad enunciare i due teoremi successivi.

TEOREMA 9.V. - *Sia* $u \in \tilde{W}^{2,1}(\Omega)$ *una soluzione in* Ω *dell'equazione* $\left(E(X) - \dfrac{\partial}{\partial t}\right)u = f$ *con la condizione* $u(x,\ 0) = 0$. *Supponiamo che* $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ *e che* $f \in L^{2,\theta}(\Omega,\ \delta)$ *con* $o \leq \theta < 1$. *Allora* $\forall R \in (o,\ 1)$ *risulta*

$$D_iD_ju \in L^{2,\theta}(\Omega(R),\ \delta), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{2,\theta}(\Omega(R),\ \delta)$$

e si ha la maggiorazione

$$|||u|||^2_{L^{2,\theta}(\Omega(R),\ \delta)} \leq c(\nu,\ \theta,\ R)\left[\frac{|||u|||^2_{\Omega}}{\bar{r}^{\theta(n+2)}} + \|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega,\ \delta)}\right] \tag{9.39}$$

dove $\bar{r}$ *è definito dalla* (9.41).

DIM. - Poniamo

$$r_0 = \min\left(\frac{1-R}{2\sqrt{\nu}},\ \frac{\sqrt{T}}{2}\right) \tag{9.40}$$

per il resto usiamo le stesse notazioni introdotte nella dimostrazione del teor. 9.I; in particolare

$$\omega(r) = \sup_{ij} \sup_{X_0 \in \overline{\Omega(R)}} \sup_{X \in \Omega(X_0,\ r\sqrt{\nu})} |a_{ij}(X) - a_{ij}(X_0)|^2.$$

La continuità dei coefficienti a_{ij} assicura che esiste una applicazione $p \to r(p)$, definita per $p > 1$ a valori in $\boldsymbol{R}^+$, tale che

$$\omega(r) \leq \frac{1}{p^{n+2}},\quad \forall\ r \in (o,\ r(p)]$$

Poniamo $\bar{p}(\nu, \theta) = [2c(\nu)]^{[(n+2)(1-\theta)]^{-1}}$ e

$$\bar{r} = \min(r(\bar{p}), r_0). \tag{9.41}$$

Se $t \to \varphi(t)$ è una applicazione di $\boldsymbol{R}^+$ in $\boldsymbol{R}_0^+$ e per ogni coppia di valori ρ, r con $o < \rho < r \leq r_0$ si ha

$$\varphi(\rho) \leq c(\nu)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}\varphi(r) + \omega(r)\varphi(r) + r^{\theta(n+2)}F\right], \qquad F \geq o \tag{9.42}$$

il lemma 4.I assicura allora che per ogni coppia di valori ρ, r, con $o < \rho < r \leq \bar{r}$, risulta

$$\varphi(\rho) \leq 2c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\theta(n+2)}\varphi(r) + c(\nu, \theta)\rho^{\theta(n+2)}F. \tag{9.43}$$

Il teorema sarà dimostrato se noi proveremo che $\forall\ X_0 \in \overline{\Omega(R)}$ e $\forall\ \rho \in (o, \alpha\bar{r})$ ($\alpha > o$ fissato) si ha una maggiorazione di questo tipo [13]

$$|||u|||^2_{\Omega(X_0, \rho)} \leq c(\nu, \theta)\rho^{\theta(n+2)}\left[\frac{|||u|||^2_{\Omega}}{r^{\theta(n+2)}} + \|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega, \delta)}\right] \tag{9.44}$$

Sia $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t_0) = (x_0, t_0)$ un punto di $\Omega(R)$. Avendo presente l'artificio applicato nel punto *b*) della dimostrazione del teorema 9.I, sarà sufficiente dimostrare la maggiorazione (9.44) in queste quattro situazioni

a) $x_n^0 = t_0 = 0$, *b*) $x_n^0 = 0$ e $\bar{r} \leq t_0 \leq T$

c) $t_0 = 0$ e $\bar{r}\sqrt{\nu} \leq x_n^0 \leq T$, *d*) X_0 tale che $Q(X_0, \bar{r})$ sia $\subset \Omega$.

Nei casi *c*) e *d*) la maggiorazione (9.44) si prova ripetendo la dimostrazione del teorema 9.I. Esaminiamo brevemente i casi *a*) e *b*).

a) $x_n^0 = t_0 = o$. Poniamo

$$\begin{aligned} &\Phi^*(X_0, r) = \Phi(X_0, r) \cap \{x_n > o\} \\ &M^*(X_0, r) = \Phi^*(X_0, r) \times (o < t < r^2) \end{aligned} \tag{9.45}$$

$\forall\ r \in (o, \bar{r})$ si ha

$$\Omega\left(X_0, \frac{r}{\sqrt{\nu}}\right) \subset M^*(X_0, r) \subset \Omega. \tag{9.46}$$

(13) Osserviamo che $\Omega(R)$ è di tipo $\mathfrak{A}$ rispetto alla metrica δ.

Fissato r la funzione u appartiene a $\tilde{W}^{2,1}(M^*(X_0, r))$, si annulla per $t = 0$ ed è soluzione dell'equazione

$$\left(E(X_0) - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = F(X) = f(X) + \sum_{ij} [a_{ij}(X_0) - a_{ij}(X)]D_i D_j u.$$

La maggiorazione (7.15) del lemma 7.IV assicura allora che $\forall \rho \in (o, r)$ si ha

$$|||u|||^2_{M^*(X_0, \rho)} \leq c(\nu)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+4} |||u|||^2_{M^*(X_0, r)} + \|f\|^2_{L^2(M^*(X_0, r))}\right]$$

e quindi $\forall \rho \in (o, r)$

$$|||u|||^2_{M^*(X_0, r)} \leq c(\nu)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} |||u|||^2_{M^*(X_0, r)} + \omega(r)|||u|||^2_{M^*(X_0, r)} + cr^{\theta(n+2)}\|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega, \delta)}\right]$$

Questa maggiorazione si identifica con la (9.42) qualora si assuma $\varphi(t) = |||u|||^2_{M^*(X_0, t)}$ ed $F = c\|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega, \delta)}$, quindi in virtù della (9.43), si ha che $\forall \rho \in (o, \bar{r})$

$$|||u|||^2_{M^*(X_0, \rho)} \leq 2c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\theta(n+2)} |||u|||^2_{M^*(X_0, \bar{r})} + c(\nu, \theta)\rho^{(n+2)\theta}\|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega, \delta)}$$

A maggior ragione, $\forall \rho \in (o, \bar{r})$,

$$|||u|||^2_{M^*(X_0, \rho)} \leq c_1(\nu, \theta)\rho^{\theta(n+2)}\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{\bar{r}^{\theta(n+2)}} + \|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega, \delta)}\right]$$

Da questa maggiorazione, tenuto conto della (9.46), segue la (9.44) per tutti i $\rho \in \left(o, \dfrac{\bar{r}}{\sqrt{\nu}}\right)$.

b) $x_n^0 = 0$ e $\bar{r} \leq t_0 \leq T$. Poniamo

(9.47) $$Q^*(X_0, r) = \Phi^*(X_0, r) \times (t_0 - r^2 < t < t_0).$$

Sarà sufficiente dimostrare che $\forall \rho \in (o, \bar{r})$ risulta

(9.48) $$|||u|||^2_{Q^*(X_0, \rho)} \leq c_1(\nu, \theta)\rho^{\theta(n+2)}\left[\frac{|||u|||^2_\Omega}{\bar{r}^{\theta(n+2)}} + \|f\|^2_{L^{2,\theta}(\Omega, \delta)}\right]$$

perché da questa maggiorazione segue immediatamente la (9.44) per tutti i

$\rho \in \left(o, \dfrac{\bar r}{\sqrt{\nu}}\right)$. Per dimostrare la (9.48) si ragiona esattamente come nel punto *a*) utilizzando il lemma 7.III, anziché il lemma 7.IV.

TEOREMA 9.IV. - *Sia* $u \in \tilde W^{2,1}(\Omega)$ *una soluzione dell'equazione* $\left(E(X) - \dfrac{\partial}{\partial t}\right)u = f$ *con la condizione* $u(x, o) = o$. *Supponiamo che* $f \in \mathfrak{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$ *e che i coefficienti* $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\bar\Omega, \delta)$, $o < \alpha \leq 1$. *Allora* $\forall\ R \in (o, 1)$ *risulta*

$$D_i D_j u \in \mathfrak{L}^{2,1}(\Omega(R), \delta). \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathfrak{L}^{2,1}(\Omega(R), \delta)$$

e si ha la maggiorazione

$$|||\, u \,|||^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega(R),\delta)} \leq c(\nu, \alpha, R)\left[\frac{|||\, u \,|||^2_\Omega}{r_0^{n+2}} + \|\, f \,\|^2_{\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega,\delta)}\right] \tag{9.49}$$

dove r_0 *è definito come in* (9.40).

TEOREMA 9.VII. - *Sia* $u \in \tilde W^{2,1}(\Omega)$ *una soluzione dell'equazione* $\left(E(X) - \dfrac{\partial}{\partial t}\right)u = f$ *con la condizione* $u(x, o) = 0$. *Supponiamo che* $f \in \mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$, *con* $1 < \theta < \dfrac{n+4}{n+2}$, *e che i coefficienti* a_{ij} *appartengano a* $C^{1,\alpha}(\bar\Omega, \delta)$ *con* $\alpha = \dfrac{n+2}{2}(\theta - 1)$. *Allora* $\forall\ R \in (o, 1)$ *risulta*

$$D_i D_j u \in \mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega(R), \delta), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega(R), \delta)$$

e si ha la maggiorazione

$$|||\, u \,|||^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega(R),\delta)} \leq c(\nu, \theta, R)\left[\frac{|||\, u \,|||^2_\Omega}{r_0^{\theta(n+2)}} + \|\, f \,\|^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\delta)}\right] \tag{9.50}$$

dove r_0 *è definito come in* (9.40).

10. - I teoremi dimostrati nel numero precedente valgono inalterati, a parità delle altre ipotesi, anche se u è soluzione di un'equazione del tipo

$$\left(E(X) + M(X) - \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f \tag{10.1}$$

dove $E(X)$ è l'operatore ellittico già considerato nel n. 9 ed M è un operatore del primo ordine

$$M = \sum_h b_h(X) D_h . \tag{10.2}$$

È sufficiente supporre che i coefficienti $b_h(X)$ abbiano la stessa regolarità dei coefficienti $a_{ij}(X)$ dell'operatore E.

Per il seguito ci servirà la generalizzazione, nel senso precisato sopra, dei teoremi 9.V, 9.VI, e 9.VII perciò a questi faremo riferimento.

Facciamo alcune semplici considerazioni.

Dati due spazi di BANACH A e B, costituiti di funzioni definite su Ω, si dice che A è uno spazio di moltiplicatori per B se $\forall\ \varphi \in A$ e $\forall\ u \in B$ si ha

$$\varphi u \in B \quad \text{e} \quad \| u\varphi \|_B \leq \| \varphi \|_A \| u \|_B .$$

Si ha questo risultato di dimostrazione immediata (cfr. [6], app. I teor. IV)

LEMMA 10.I. - *$C^0(\bar{\Omega})$ è uno spazio di moltiplicatori per $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ se $0 \leq \theta < 1$; $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \delta)$, $0 < \alpha \leq 1$, è uno spazio di moltiplicatori per $\mathfrak{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$; $C^{0,\alpha}(\Omega, \delta)$, $0 < \alpha \leq 1$, è uno spazio di moltiplicatori per $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ con $\theta = \dfrac{2\alpha}{n+2} + 1$.*

Indichiamo con $W^{2,1,\theta}(\Omega)$ il sottospazio di $W^{2,1}(\Omega)$ delle funzioni u tali che

$$||| u |||_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\delta)} < +\infty,$$

In modo analogo si può definire $\tilde{W}^{2,1,\theta}(\Omega)$.

Si ha questo risultato di inclusione (cfr. [8] n. 4):

LEMMA 10.II. - *Sia $\Omega(R)$ il cilindro $C^*(R) \times (0, T)$, $R > 0$. Se $u \in \tilde{W}^{2,1,\theta}(\Omega(R))$, $0 \leq \theta < 1$, allora le derivate $D_i u$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ appartengono a $\mathfrak{L}^{2,\mu}(\Omega(R), \delta)$ con $\mu = \dfrac{2(n+1)}{n+2} + \dfrac{2}{n+1} - 2 + \theta$ e si ha la maggiorazione* [14]

$$\sum_i \| D_i u \|^2_{\mathfrak{L}^{2,\mu}(\Omega(R),\delta)} \leq c \sum_{hk} \| D_h D_k u \|^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega(R),\delta)} \tag{10.3}$$

Ciò posto, dimostriamo ad esempio che il teorema 9.V continua a valere anche se u è soluzione dell'equazione (10.1).

Poniamo $\Omega = \Omega(1)$. Le ipotesi sono:

$$f \in \mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta) \text{ con } 0 \leq \theta < 1, \quad a_{ij} \text{ e } b_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad u \in \tilde{W}^{2,1}(\Omega) \text{ e } u(x, 0) = 0.$$

---

[14] Come Ω basta prendere un insieme convesso. È chiaro poi che per questo risultato è sufficiente supporre che le derivate $D_h D_k u$ appartengano a $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ e non c'è bisogno di supporre nulla sulla $\dfrac{\partial u}{\partial t}$. Abbiamo volutamente enunciato questo lemma riferendoci alla situazione che si ha nei teoremi 9. V, 9. VI, e 9. VII.

Fissiamo R, $o < R < 1$. Scriviamo l'equazione (10.1) nel seguente modo

$$\left(E - \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f + Mu = f + \sum_h b_h D_h u. \tag{10.4}$$

Scegliamo un $R_1 > o$ tale che $R < R_1 < 1$. Poiché $u \in \tilde{W}^{2,1}(\Omega)$ le derivate $D_h u$ appartengono a $\mathfrak{L}^{2,\mu}(\Omega, \delta)$ con $\mu = \frac{2(n+1)}{n+2} + \frac{2}{n+1} - 2$ ed avendo supposto che $b_h \in C^0(\bar{\Omega})$ anche Mu apparterrà a $\mathfrak{L}^{2,\mu}(\Omega, \delta)$, in virtù del lemma 10.I. Il teorema 9.V, precedentemente dimostrato, assicura allora che

$$|||\, u \,|||^2_{L^{2,\xi}(\Omega(R_1),\delta)} \leq c[|||\, u \,|||^2_\Omega + \| f \|^2_{L^{2,\xi}(\Omega,\delta)} + \sum_h \| D_h u \|^2_{L^{2,\xi}(\Omega,\delta)}]$$

dove $\xi = \min(\theta, \mu)$. E quindi, per la (10.3),

$$|||\, u \,|||^2_{L^{2,\xi}(\Omega(R_1),\delta)} \leq c[|||\, u \,|||^2_\Omega + \| f \|^2_{L^{2,\xi}(\Omega,\delta)}] \tag{10.5}$$

Se $\xi = \theta$ la (9.39) è provata; se invece $\xi = \mu < \theta$ si ripete il procedimento: dalla (10.5) e dal lemma 10.II deduciamo che le derivate $D_h u$ appartengono a $\mathfrak{L}^{2,\mu_1}(\Omega(R_1), \delta)$ con $\mu_1 = \frac{2(n+1)}{n+2} + \frac{2}{n+1} - 2 + \xi > \mu$. Scegliamo un $R_2 > o$ tale che $R < R_2 < R_1$. Applichiamo nuovamente il teorema 9.V e otteniamo che

$$|||\, u \,|||^2_{L^{2,\xi}(\Omega(R_2),\delta)} \leq c[|||\, u \,|||^2_\Omega + \| f \|^2_{L^{2,\xi_1}(\Omega,\delta)}]$$

dove $\xi_1 = \min(\theta, \mu_1)$.

E così si prosegue. Dopo un numero finito di iterazioni la (9.39) resta provata.

In modo del tutto analogo si dimostra che i teoremi 9.VI e 9.VII continuano a valere, a parità delle altre ipotesi, anche per soluzioni u dell'equazione (10.1) se si suppone che i coefficienti $b_h(X)$ abbiano lo stesso esponente di holderianità dei coefficienti $a_{ij}(X)$.

Applicazione dei risultati ottenuti alla regolarizzazione della soluzione del I° problema al contorno.

11. Siano A e B due aperti limitati di $\boldsymbol{R}^n$ e $x \to \mathcal{C}(x)$ una applicazione di A in B di componenti $\mathcal{C}_i(x)$. Diciamo che $x \to \mathcal{C}(x)$ è di classe $C^{k,\alpha}$, k intero $> o$ e $o < \alpha \leq 1$, se le funzioni $\mathcal{C}_i \in C^{k,\alpha}(\bar{A})$ $i = 1, 2, \dots, n$ [15].

[15] $C^{k,\alpha}(\bar{A})$ è la classe delle funzioni f definite in $\bar{A}$ dotate di derivate k-sime α-holderiane (holderianità rispetto alla metrica euclidea).

Un omeomorfismo $x \to \mathcal{T}(x)$ di A su B si dice di classe $C^{k,\alpha}$ se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}^{-1}$ sono di classe $C^{k,\alpha}$.

Diciamo che un aperto $Q \subset \boldsymbol{R}^n$ è di classe $C^{k,\alpha}$ se per ogni $x_0 \in \partial Q$ esiste un suo intorno aperto $Q(x_0)$ e un omeomorfismo $x \to \mathcal{T}(x)$ di classe $C^{k,\alpha}$ che muta $\overline{Q(x_0)}$ nella sfera $\overline{C(1)}$ [16] e, in particolare, $Q(x_0) \cap Q$ nella semisfera $C^*(1) = C(1) \cap \{x_n > o\}$.

Sia Ω il cilindro $Q \times (o < t < T)$, $T < +\infty$, diremo che Ω è di classe $C^{k,\alpha}$ se Q è di classe $C^{k,\alpha}$.

Consideriamo due cilindri $\mathcal{A} = A \times (o, T)$ e $\mathcal{B} = B(o, T)$ e sia $x \to \mathcal{T}(x)$ un omeomorfismo di A su B allora

$$\tau : (x, t) \to (\mathcal{T}(x), t) = (y, t) \tag{11.1}$$

è un omeomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{B}$. Diremo che τ è di classe $C^{k,\alpha}$ se $\mathcal{T}$ è di classe $C^{k,\alpha}$.

Sia $\theta \to \mu(\theta)$ la funzione definita nell'intervallo $\left[o, \dfrac{n+4}{n+2}\right)$ nel seguente modo

$$\mu(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } o \leq \theta < 1 \\ \alpha_0, \quad \alpha_0 \in (o, 1) \text{ fissato}, & \text{se } \theta = 1 \\ \dfrac{n+2}{2}(\theta - 1) & \text{se } 1 < \theta < \dfrac{n+4}{n+2}. \end{cases}$$

Supponiamo che il cilindro $\Omega = Q \times (o < t < T)$ sia di classe $C^{2,\mu(\theta)}$ $(C^{2,0} = C^{2})$ e che u sia la soluzione del problema di DIRICHLET (cfr. n. 6) [17]

$$\begin{cases} u \in W_0^{2,1}(\Omega) \\ \left(E(X) - \dfrac{\partial}{\partial t}\right) u = f \in \mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta) \end{cases} \tag{11.2}$$

Supponiamo infine che i coefficienti $a_{ij}(X)$ appartengano a $C^{0,\mu(\theta)}(\bar{\Omega}, \delta)$.

Si può trovare un numero finito di aperti di $\boldsymbol{R}^n$, Q_0, $Q_1 \ldots Q_m$ tali che $Q_0 \subset\subset Q$, $Q \subset \bigcup_{j=0}^{m} Q_j$ e per ogni Q_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ esiste un omeomorfismo $x \to \mathcal{T}_{(j)}(x)$ di classe $C^{2,\mu(\theta)}$ che muta $Q_j \cap Q$ nella semisfera $C^*(1)$ e quindi un omeomorfismo τ_j

$$\tau_j : (x, t) \to (\mathcal{T}_{(j)}(x), t) = (y, t)$$

di classe $C^{2,\mu(\theta)}$ che muta il cilindro $\Omega_j = Q_j \times (o, T)$ nel cilindro $S = C^*(1) \times (o, T)$.

---

[16] $C(R) = \{x : x \in \boldsymbol{R}^n, |x| < R\}$.

[17] Per quanto riguarda il simbolismo e le ipotesi facciamo riferimento al n. 6 e all'inizio del n. 9.

Sia u_j la restrizione di u a Ω_j.

La funzione u_0 verifica in Ω_0 [18] le ipotesi dei teoremi 9.I, 9.II, 9.IV per cui abbiamo che $D_iD_ju_0$ e $\dfrac{\partial u_0}{\partial t}$ appartengono a $\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega_0, \delta)$ e si ha la maggiorazione

$$|||u_0|||^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega_0,\delta)} \leq c_0 \{ |||u|||^2_\Omega + \|f\|^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\delta)} \} \tag{11.3}$$

dove c_0 dipende dalla costante di ellitticità ν dell'operatore E, da Ω_0, da θ e dal modulo di continuità oppure dal coefficiente di HOLDER degli a_{ij}. Fissiamo ora j, $1 \leq j \leq m$, e poniamo

$$v(y, t) = u_j(\mathcal{T}^{-1}_{(j)}(y), t).$$

La funzione v è definita in S, appartiene a $\tilde{W}^{2,1}(S)$, si annulla per $t = 0$ ed è soluzione in S dell'equazione

$$\left(E_j + M_j - \frac{\partial}{\partial t}\right) v = \tag{11.4}$$

$$= \sum_{hk} A_{hk}(y, t) D_h D_k v + \sum_h b_h(y, t) D_h v - \frac{\partial v}{\partial t} = F(y, t)$$

dove

$$F(y, t) = f_j(\mathcal{T}^{-1}_{(j)}(y), t)$$

$$A_{hk}(y, t) = \sum_{rs} [a_{rs} D_r \mathcal{T}_{(j)h} D_s \mathcal{T}_{(j)k}] \circ \mathcal{T}^{-1}_{(j)}(y)$$

$$b_h(y, t) \doteq \sum_{rs} [a_{rs} D_r D_s \mathcal{T}_{(j)h}] \circ \mathcal{T}^{-1}_{(j)}(y).$$

Poiché $\tau_j : (x, t) \to (\mathcal{T}_{(j)}(x), t)$ è un omeomorfismo di classe $C^{2,\mu(\theta)}$ è immediato verificare che

$$f \in \mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta) \Rightarrow f_j \in \mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega_j, \delta) \Rightarrow F \in \mathfrak{L}^{2,\theta}(S, \delta)$$

$$a_{rs} \in C^{0,\mu(\theta)}(\bar{\Omega}, \delta) \Rightarrow A_{hk} \in C^{0,\mu(\theta)}(\bar{S}, \delta)$$

$$a_{rs} \in C^{0,\mu(\theta)}(\bar{\Omega}, \delta) \Rightarrow b_h \in C^{0,\mu(\theta)}(\bar{S}, \delta)$$

e l'operatore E_j è ellittico in S con una costante di ellitticità $K\nu$.

---

[18] Possiamo senza restrizioni supporre che Ω_0 sia di tipo $\mathcal{A}$ rispetto alla metrica δ.

Utilizzando allora i teoremi 9.V, 9.VI, 9.VII, e più precisamente la generalizzazione che di questi teoremi è stata fatta nel n. 10, si ottiene che

$$D_h D_k v \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathfrak{L}^{2,\theta}(S(R),\ \delta)$$

dove $o < R < 1$ e $S(R) = C^*(R) \times (o,\ T)$, e si ha la maggiorazione

$$|||\, v\, |||^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(S(R),\ \delta)} \leq c_j^* \{ |||\, v\, |||^2_S + \|\, F\, \|^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(S,\ \delta)} \} \tag{11.5}$$

Posto $\Omega_j(R) = \tau_j^{-1}(S(R)) = Q_j(R) \times (o,\ T)$, dalla (11,5), applicando l'omeomorfismo τ_j, segue abbastanza facilmente che

$$|||\, u_j\, |||^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega_j(R),\ \delta)} \leq c_j \{ |||\, u\, |||^2_\Omega + \|\, f\, \|^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\ \delta)} \} \tag{11.6}$$

dove c_j dipende dagli stessi parametri da cui dipende c_0.

Possiamo scegliere R così vicino a 1 che gli aperti Q_0, $Q_1(R), \dots, Q_m(R)$ costituiscano ancora un ricoprimento di Q; dalle (11.3) e (11.6) si ottiene allora

$$|||\, u\, |||^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\ \delta)} \leq c \{ |||\, u\, |||^2_\Omega + \|\, f\, \|^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\ \theta)} \} \tag{11.7}$$

D'altra parte, poiché u è soluzione del problema di DIRICHLET (11.2), si ha (cfr. n. 6)

$$|||\, u\, |||^2_\Omega \leq c(\nu) \|\, f\, \|^2_{L^2(\Omega)} . \tag{11.8}$$

Dalle (11.7), (11.8) si ha in definitiva

$$|||\, u\, |||^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\ \delta)} \leq c \|\, f\, \|^2_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\ \delta)} . \tag{11.9}$$

Abbiamo quindi provato il seguente teorema:

TEOREMA 11.I. - *Sia* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,1}(\Omega)$ *la soluzione in* Ω *dell'equazione* $\left(E - \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f$. *Se* $f \in \mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\ \delta)$, $o \leq \theta < \frac{n+4}{n+2}$, *se* Ω *è di classe* $C^{2,\mu(\theta)}$ *e se i coefficienti* a_{ij} *dell'operatore* E *sono di classe* $C^{0,\mu(\theta)}(\overline{\Omega},\ \delta)$ *allora* $u \in W_0^{2,1,\theta}(\Omega,\ \delta)$ *e si ha la maggiorazione*

$$|||\, u\, |||_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\ \delta)} \leq c \|\, f\, \|_{\mathfrak{L}^{2,\theta}(\Omega,\ \delta)} . \tag{11.10}$$

Si è così dimostrato, ritornando al problema che ci eravamo posti all'inizio del n. 9, che:

Se Ω è di classe $C^{2,\mu(\theta)}$, gli a_{ij} sono di classe $C^{0,\mu(\theta)}$ e u è la soluzione del problema di DIRICHLET (11.2) allora le applicazioni

$$G_{ij} : f \to D_i D_j u \quad \text{e} \quad G_t : f \to \frac{\partial u}{\partial t}$$

sono applicazioni lineari e continue da $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ in $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$ per ogni $o \leq \theta < \dfrac{n+4}{n+2}$.

In particolare, tenuto conto del teorema 2.I, se facciamo variare θ nell'intervallo $1 < \theta < \dfrac{n+4}{n+2}$ si ottiene che G_{ij} e G_t sono applicazioni lineari e continue da $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \delta)$ in $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \delta)$ per orni $\alpha \in (o, 1)$, e assumendo $\theta = 1$ si ha che G_{ij} e G_t sono applicazioni lineari e continue da $\mathcal{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$ in $\mathcal{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$.

Maggiorazioni in L^p per soluzioni del I° problema al contorno.

12. - Sia Ω il cilindro $Q \times (o, T)$ con $T < +\infty$ e Q aperto limitato di $\boldsymbol{R}^n$. Supponiamo che Q sia immagine bilipschitziana di un cubo $\mathcal{C}$ di $\boldsymbol{R}^n$. Sia d la metrica così definita

$$d(X, Y) = \sup \{ |x_1 - y_1|, \ |x_2 - y_2|, \dots, \ |x_n - y_n|, \ |t_X - t_Y|^{\frac{1}{2}} \}.$$

La metrica d e la metrica δ definita da (1.1) sono equivalenti (cfr. n. 2).

Possiamo, senza alcuna restrizione, supporre che $\mathcal{C}$ sia tale che $\mathcal{C} \times (o, T)$ sia una sfera nella metrica d.

Sia $\mathcal{T}$ l'omeomorfismo di classe $C^{0,1}$ che muta Q in $\mathcal{C}$ e sia τ l'applicazione

$$\tau : (x, t) \to (\mathcal{T}(x), t) = (y, t).$$

Ovviamente

$$\tau(\Omega) = \mathcal{C} \times (o, T).$$

È immediato verificare che l'applicazione $\varphi : v(y, t) \to u(x, t) = v(\mathcal{T}(x), t)$ è un isomorfismo tra $\mathcal{L}^{2,\theta}(\mathcal{C} \times (o, T), d)$ e $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$, $\forall \ \theta \geq o$, ed è un isomorfismo tra $L^p(\mathcal{C} \times (o, T))$ e $L^p(\Omega)$, $\forall \ p \geq 1$. Inoltre, per quanto si è detto nel n. 2, è $\mathcal{L}^{2,1}(\mathcal{C} \times (o, T), d) \sim \mathcal{L}^{1,1}(\mathcal{C} \times (o, T), d)$. Dal teorema 3.I si deduce allora, come immediato corollario, che

LEMMA 12.I. - *Se G è una applicazione lineare e continua di $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ e di $\mathcal{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$ in $\mathcal{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$ allora G è una applicazione lineare e continua di $L^p(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ per $2 \leq p < +\infty$.*

Basta tener presente quanto si è detto più sopra e il fatto, già osservato nel n. 2, che è $L^\infty(\Omega) \subset \mathcal{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$.

Suppoiamo allora che Q, oltre che immagine bilipschitziana di un cubo, sia di classe C^{2,α_0}, con $\alpha_0 \in (o, 1)$ fissato, e sia u la soluzione del problema di DIRICHLET

$$
\left\{
\begin{aligned}
& u \in W_0^{2,1}(\Omega) \\
& \left(E(X) - \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f \in L^2(\Omega).
\end{aligned}
\right.
\tag{12.1}
$$

Supponiamo che i coefficienti $a_{ij}(X)$ dell'operatore E appartengano a $C^{0,\alpha_0}(\bar{\Omega}, \delta)$.

Consideriamo le applicazioni

$$
G_{ij} : f \to D_i D_j u
$$

$$
G_t : f \to \frac{\partial u}{\partial t}
$$

G_{ij} e G_t sono applicazioni lineari e continue di $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ (cfr. n. 6) e, per quanto si è dimostrato nel n. 11, sono applicazioni lineari e continue anche da $\mathcal{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$ in $\mathcal{L}^{2,1}(\Omega, \delta)$.

Il lemma 12.I assicura allora che le applicazioni G_{ij} e G_t sono lineari e continue anche da $L^p(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $2 \leq p < +\infty$.

Abbiamo quindi il seguente risultato:

TEOREMA 12.I. - *Se il cilindro $\Omega = Q \times (o, T)$ è di classe C^{0,α_0}, con $\alpha_0 \in (o, 1)$, e Q è immagine bilipschitziana di un cubo di $\boldsymbol{R}^n$, se i coefficienti a_{ij} appartengono a $C^{0,\alpha_0}(\bar{\Omega}, \delta)$ ed $f \in L^p(\Omega)$ con $2 \leq p < +\infty$, allora la soluzione u del problema di Dirichtet* (12.1) *ha le derivate $D_i D_j$ e $\dfrac{\partial}{\partial t}$ in $L^p(\Omega)$ e si ha la maggiorazione*

$$
\sum_{ij} \| D_i D_j u \|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq c \, \| f \|_{L^p(\Omega)}.
\tag{12.2}
$$

BIBLIOGRAFIA

[1] G. ARNESE, *Maggiorazioni in L^p dei potenziali relativi all'equazione del calore*, Ricerche di Matem., 1965.

[2] G. C. BAROZZI, *Su una generalizzazione degli spazi $L^{(q, \lambda)}$ di Morrey*. Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. XIX, 1965, pp. 609-626.

[3] S. CAMPANATO, *Proprietà di holderianità di alcune classi di funzioni*. Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. XVII, 1963.

[4] S. CAMPANATO, *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali*, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. XVIII, 1964.

[5] S. CAMPANATO, *Proprietà di inclusione per spazi di Morrey*, Ricerche di Matem., vol. XII, 1963.

[6] S. CAMPANATO, *Equazioni ellittiche del II ordine e spazi $\mathfrak{L}^{(2, \lambda)}$*, Annali di Matem., vol. LXIX, 1965, pp. 321-382.

[7] S. CAMPANATO e G. STAMPACCHIA, *Sulle maggiorazioni in L^p nella teoria delle equazioni ellittiche*, Boll. U.M.I., vol. XX, 1965, pp. 393.

[8] G. DA PRATO, *Spazi $\mathfrak{L}^{(p, \theta)}(\Omega, \delta)$ e loro proprietà*, Annali di Matem., vol. LXIX, 1965, pp. 383-392.

[9] E. GAGLIARDO, *Problema al contorno per equazioni differenziali lineari di tipo parabolico in n variabili*, Ricerche di Matem., vol. V, 1956.

[10] E. GAGLIARDO, *Teoremi di esistenza e di unicità per problemi al contorno relativi ad equazioni paraboliche lineari e quasi lineari in n variabili*, Ricerche di Matem., vol. V, 1956.

[11] A. M. IL'IN, A. S. KALASHNIKOV, O. A. OLEINIK, *Linear equations of the second order of parabolic type*, Russian Mathematical Surveys, 17, 1962 (1-143).

[12] B. JESSEN, J. MARCINKIEWICZ, A. ZYGMUND, *Note on the Differentiability of multiple integral*, Fund. Mathematicae, T. XXV, 1935.

[13] F. JOHN e L. NIRENBERG, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure and Appl. Math., vol. XIV, 1961.

[14] B. F. JONES Jr., *A class of singular integrals*, Amer. Journal of Math., vol. LXXXVI, 1964, pp. 441-462.

[15] J. L. LIONS, *Équations différentielles opérationelles dans les espaces de Hilbert*, Ciclo di lezioni su Equazioni diff. astratte a cura del C.I.M.E., 1963.

[16] J. L. LIONS, *Équations différentielles opérationelles*, Springer Verlag, Berlin, 1961.

[17] G. N. MEYERS, *Mean oscillation over cubes and Holder continuity*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 15, 1964.

[18] J. PEETRE, *On convolutionoperators leaving $\mathfrak{L}^{p, \lambda}$ spaces invariant*, in corso di stampa su Annali di Matem.

[19] G. STAMPACCHIA, *$\mathfrak{L}^{(p, \lambda)}$ spaces and interpolation*, Comm. pure and Appl. Math., vol. XVII, 1964.

[20] G. STAMPACCHIA, *The spaces $\mathfrak{L}^{(p, \lambda)}$, $N^{(p, \lambda)}$ and interpolation*, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. XIX, 1965, pp. 443-462.

[21] J. R. CANNON, *Regularity at the boundary for solutions of linear parabolic differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. XIX, 1965, pp. 415-427.