Elasticità asimmetrica.

Memoria di GIUSEPPE GRIOLI (a Padova)

Ad Antonio Signorini nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Si sviluppa una teoria generale dei corpi elastici con caratteristiche di tensione asimmetriche, valida per deformazioni finite. La struttura del potenziale elastico isotermo viene determinata in modo esplicito nel caso dei corpi isotropi poco deformabili.*

A mia conoscenza, non esiste una teoria completa riguardante le deformazioni e lo stato tensionale dei corpi elastici con caratteristiche di tensione asimmetriche, neppure nel caso di deformazioni infinitesime. I più noti trattati di teoria matematica dell'elasticità generalmente non fanno neppure cenno di tale questione, con qualche rara eccezione. Risale al 1910 una nota (1) di C. SOMIGLIANA contenente le relazioni generali per il caso delle piccole deformazioni.

Il problema è stato considerato successivamente da BODASZEWSKI (2) il quale ne fece anche un'applicazione all'idrodinamica. Tuttavia è da osservarsi che i risultati contenuti in detti lavori si fondano su postulazioni intuitive dell'espressione del lavoro delle forze interne di contatto [nel primo] e delle relazioni lineari tra sforzi e deformazioni [nel secondo] che non mi sembrano accettabili, come risulterà dalle considerazioni che seguiranno.

Un'asimmetria delle caratteristiche di tensione può presentarsi in presenza di momenti di massa, cioè quando le forze di massa agenti su ogni elemento di volume sono riducibili ad una forza e ad una coppia, il che può accadere, ad esempio, in presenza di forze magnetiche, ed è questo il caso ritenuto più interessante.

Tuttavia, anche escludendo la presenza dei momenti di massa possono portarsi esempi (3) in cui i dati richiedono per la soluzione asimmetria delle caratteristiche di tensione, almeno in certe parti del corpo. In tali casi l'abi-

---

(1) C. SOMIGLIANA, *Sopra un'estensione della teoria dell'elasticità*, « Rend. Acc. dei Lincei », 1910, Vol. XIX, 1° sem.

(2) S. BODASZEWSKI, *On the asymmetric state of stress and its applications to the mechanics of continuous mediums*, « Archiwam Mechaniki Stosowanej », 5 (1953), p. 351.

(3) E. REISSNER, *Note on the theorem of the symmetry of the stress tensor*, « Journal of Mathematics and Physics », Vol. XXIII, 1944, pag. 192.

tuale teoria con caratteristiche di tensione simmetriche porta fatalmente a soluzioni con singolarità [polidromie, infiniti] e non è da escludersi che il superamento della soglia plastica sia spesso dovuto proprio a quelle singolarità. Questi motivi, da soli, possono riuscire sufficienti a dare interesse ad una teoria in cui le caratteristiche di tensione possono essere asimmetriche anche in assenza di momenti di massa. Ma in tal caso non si può *assolutamente* escludere la presenza di momenti superficiali. Si deve, cioè, necessariamente ammettere che l'insieme delle forze interne di contatto che si esplicano attraverso un qualunque elemento superficiale interno di un corpo siano, generalmente, riducibili ad una forza applicata in un punto dell'elemento e ad una coppia il cui momento dirò *momento superficiale*. In tal modo si possono trattare in un campo di regolarità (4) [ed è qui l'interesse] problemi che nell'ambito della teoria abituale ammettono solo soluzioni con singolarità la cui esistenza non è certo plausibile dal punto di vista fisico.

Qualche Autore (5) trova difficoltà ad ammettere la presenza di momenti superficiali per il motivo che non si riesce a concepire un modo di realizzarli ma mi pare che se. in effetti, ci può essere impossibilità [o difficoltà] di realizzare momenti superficiali esterni non si può tuttavia escludere la possibilità che essi siano presenti nell'interno di un corpo, supponendo piccolissimi ma non evanescenti i suoi elementi. Del resto non mi sembra neppure facile indicare il modo di realizzare le distribuzioni di forze superficiali che in tutta generalità si ammettono nell'abituale teoria dei corpi elastici.

È dunque mia intenzione di impostare lo studio di una teoria con caratteristiche di tensione asimmetriche. ammettendo non solo la presenza di momenti di massa — spesso inessenziali — ma anche quella di momenti superificiali. Cio farò nell'ipotesi di deformazioni finite, il che non mi sembra un'inutile complicazione neppure se si ha di mira l'istituzione di una teoria lineare valida per corpi poco deformabili: ho potuto. infatti, constatare che una trattazione diretta della teoria in tale caso, parallela a quella del caso simmetrico, lascia delle indeterminazioni nella struttura del potenziale elastico [e quindi nel legame sforzi-deformazioni] che difficilmente si possono togliere senza fare discendere la teoria lineare da quella delle deformazioni finite come teoria di prima approssimazione, e senza considerare una speciale condizione che nell'ambito dellle deformazioni finite si deve imporre al potenziale stesso.

Se si pensa decomposto il tensore degli sforzi nella somma di due tensori, uno simmetrico e l'altro emisimmetrico [nullo quest'ultimo, nella teoria

---

(4) Vedi esempio, in fine.

(5) Voigt, *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle*, « Abhand K. Ges Göttingen », 1887.

abituale], si trova che il lavoro delle forze interne di contatto, per ogni spostamento infinitesimo a partire dallo stato attuale, non dipende dalla parte emisimmetrica e dipende dalla rotazione locale solo attraverso le sue derivate. Se si suppongono nulli i momenti superficiali interni l'espressione di quel lavoro diviene identica a quella del caso simmetrico anche se le caratteristiche di tensione sono asimmetriche per la presenza di momenti di massa, i quali ultimi da soli [in questo caso] determinano le asimmetrie degli sforzi.

La conoscenza dell'espressione del lavoro delle forze interne di contatto è essenziale affinchè con considerazioni termodinamiche ben note si stabilisca il legame sforzi-deformazioni ma, a differenza di quello che capita nel caso simmetrico, si presenta la circostanza nuova che gli sforzi dipendono non solo dalla conoscenza di una funzione termodinamica, *l'energia libera*, ma anche da quella di un certo parametro che pur non interviene nell'espressione del lavoro. Si presenta in effetti, una certa analogia formale con quanto capita nella teoria dei corpi elastici incomprimibili ([6]) ma mentre in tal caso la condizione di incomprimibilità, che rappresenta un vincolo interno, permette di determinare il parametro che ivi si presenta, nella teoria elastica asimmetrica non è evidente il modo di determinarlo e, almeno allo stato attuale delle considerazioni da me svolte, sembra, in generale, costituire un elemento da fissare preventivamente come avviene per la struttura del potenziale termodinamico.

Ho sviluppato gli argomenti che seguono ponendomi in condizioni statiche ma è evidente la validità delle relazioni generali anche in condizioni dinamiche, salvo l'aggiunta delle forze d'inerzia nei secondi membri delle equazioni indefinite. Così pure mi son posto quasi sempre in condizioni isoterme ma risulta evidente l'applicabilità di tutto quanto al caso adiabatico, mediante il solito uso della condizione di isoentropia.

Nel caso di piccole deformazioni, ammettendo l'ipotesi — per me attendibilissima — che lo stato tensionale che si crea per effetto di un qualunque spostamento irrotazionale infinitesimo a partire da uno stato naturale abbia i momenti superficiali interni tutti nulli, ho potuto dimostrare che, almeno nel caso isotropo, il parametro interveniente va posto uguale a zero e il potenziale termodinamico risulta la somma di una funzione delle sole caratteristiche di deformazione e di una delle sole derivate della rotazione locale. Di queste funzioni [nel caso isotropo] la prima ha la struttura del potenziale elastico della teoria classica delle piccole deformazioni, mentre la seconda dipende dalla conoscenza di un solo coefficiente ed è tale che le equazioni

---

([6]) A. SIGNORINI, *Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata*, « Rend. di Matematica, Roma », 1959, vol. 18, p. 95.

indefinite scritte nelle componenti di spostamento, sono ognuna del quarto ordine.

Non mi è sembrato superfluo portare, alla fine, un esempio in cui risulta chiaramente come la teoria sviluppata porta ad una soluzione regolare in un caso in cui la soluzione che si otterrebbe nell'ipotesi di simmetria delle caratteristiche di tensione avrebbe certamente delle singolarità.

I. - Impostazione di una teoria delle deformazioni finite.

1. Equazioni fondamentali in forma euleriana.

Siano: $\mathcal{C}$ la configurazione attuale, $d\mathcal{C}$ il suo elemento di volume, Σ il contorno di $\mathcal{C}$, $d\Sigma$ l'elemento di contorno.

Le forze di massa agenti sull'elemento $d\mathcal{C}$ siano riducibili al risultante $\boldsymbol{F}d\mathcal{C}$ applicato in un punto interno a $d\mathcal{C}$ e alla coppia di momento $\boldsymbol{M}d\mathcal{C}$, mentre le forze superficiali agenti su $d\Sigma$ siano riducibili alla forza superficiale $\boldsymbol{f}d\Sigma$ applicata in un punto interno a $d\Sigma$ e alla coppia di momento $\boldsymbol{m}d\Sigma$.

Si supponga che le forze interne di contatto siano rappresentabili mediante due vettori, Φ_v, Ψ_v, di cui il primo è l'abituale sforzo specifico mentre il secondo è definito in maniera analoga a Φ_v ma riguarda i momenti. Si ritiene, in altri termini, che fissato il vettore applicato $(P, \boldsymbol{v})$ con $\boldsymbol{v}$ unitario, l'insieme delle forze interne di contatto che si esplicano attraverso un elemento infinitesimo $d\sigma$ circostante a P e contenuto nel piano π ortogonale a $\boldsymbol{v}$ in P, sia riducibile al vettore $(P, \Phi_v d\sigma)$ e alla coppia di momento $\Psi_v d\sigma$ [con convenzione analoga a quella valida per Φ_v, Ψ_v si riferisce, precisamente, alle forze che gli elementi della porzione di corpo non contenente $(P, \boldsymbol{v})$ esplicano su quelli dell'altra porzione.

Con riferimento al caso statico, per una porzione c tutta interna a $\mathcal{C}$ e di contorno σ, detto $\boldsymbol{n}$ il versore della normale interna a σ, le equazioni cardinali si scrivono

$$(1)\qquad \int_\sigma \Phi_n d\sigma + \int_c \boldsymbol{F} d\mathcal{C} = 0,$$

$$(2)\qquad \int_\sigma OP \wedge \Phi_n d\sigma + \int_c OP \wedge \boldsymbol{F} d\mathcal{C} + \int_\sigma \Psi_n d\sigma + \int_c \boldsymbol{M} d\mathcal{C} = 0.$$

Da esse, oltre a

$$(3)\qquad \lim_{c \to P} \frac{1}{c} \int_\sigma \Phi_n d\sigma = -\boldsymbol{F},$$

discende

$$\lim_{c \to P} \frac{1}{c} \int_{\sigma} \Psi_n d\sigma = \sum_s \boldsymbol{c}_s \wedge \Phi_s - \boldsymbol{M}, \tag{4}$$

ove [7] il significato delle Φ_s è il solito. Per ottenere la (4) si è supposta valida la relazione

$$\Phi_v = \sum_s \Phi_s v_s \tag{5}$$

e le equazioni indefinite di CAUCHY che, naturalmente, sussistono, in base alle (1), (3).

I v_s sono i coseni direttori di $\boldsymbol{v}$ rispetto ad una presupposta terna di riferimento $\mathcal{T}$, trirettangola levogira.

Con procedimento parallelo a quello con cui da (3) si deduce la (5) [tetraedro di CAUCHY], da (4) segue

$$\Psi_v = \sum_s \Psi_s v_s \tag{6}$$

con evidente significato di Ψ_s. La (6) [come la (5)] ha evidentemente carattere generale e sussiste anche nel caso dinamico, com'è facile riconoscere.

Dalle (1), (2), tenuto conto di (5), (6), si deducono, oltre alle equazioni di CAUCHY, le equazioni indefinite e al contorno per i vettori Ψ_s, valide nel caso statico.

Nel loro complesso esse, in forma euleriana, sono

$$\sum_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial x_s} = \boldsymbol{F}, \qquad [\text{in } \mathcal{C}], \tag{7}$$

$$\sum_s \Phi_s N_s = \boldsymbol{f} \qquad [\text{su } \Sigma], \tag{8}$$

$$\sum_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial x_s} = -\sum_s \boldsymbol{c}_s \wedge \Phi_s + \boldsymbol{M}, \qquad [\text{in } \mathcal{C}], \tag{9}$$

$$\sum_s \Psi_s N_s = \boldsymbol{m}, \qquad [\text{su } \Sigma], \tag{10}$$

ove le x_s sono le coordinate di P rispetto a $\mathcal{T}$.

---

(7) Nel seguito si deve intendere che gli indici delle sommatorie come pure quelli scoperti variano da uno a tre, salvo contrario avviso.

2. Espressione euleriana del lavoro delle forze interne.

Per il seguito, porrò

$$X_{rs} = \mathbf{c}_r \times \Phi_s, \qquad \Psi_{rs} = \mathbf{c}_r \times \Psi_s, \tag{11}$$

se con c_r si denota il versore dell'asse d'indice r.

Si supponga che il corpo subisca uno spostamento infinitesimo a partire dallo stato attuale per il quale ad ogni punto corrisponda lo spostamento $\delta P \equiv (\delta u_r)$ e la rotazione dell'elemento circostante di componenti [8]

$$\delta'\omega_r = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \delta u_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial \delta u_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right]. \tag{12}$$

Il corrispondente lavoro $\delta\mathfrak{L}^{(i)}$ delle forze interne di contatto agenti in $\mathcal{C}$ è

$$\delta\mathfrak{L}^{(i)} = -\int_{\mathcal{C}} \sum_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial x_s} \times \delta P d\mathcal{C} - \int_{\Sigma} \boldsymbol{f} \times \delta P d\Sigma - \tag{13}$$

$$- \int_{\mathcal{C}} \sum_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial x_s} \times \delta'\omega d\mathcal{C} - \int_{\mathcal{C}} \sum_s \mathbf{c}_s \wedge \Phi_s \times \delta'\omega d\mathcal{C} - \int_{\Sigma} \boldsymbol{m} \times \delta'\omega d\Sigma.$$

Alla (13) si giunge tenendo presenti le (7), (9).

Tenendo presenti anche le (8), (10), da (13) si trae

$$\delta\mathfrak{L}^{(i)} = \int_{\mathcal{C}} \left\{ \sum_{r,s} \left[X_{rs} \frac{\partial \delta u_r}{\partial x_s} + \Psi_{rs} \frac{\partial \delta'\omega_r}{\partial x_s}\right] + \sum_r \delta'\omega_r (X_{r+1\,r+2} - X_{r+2\,r+1}) \right\} d\mathcal{C}. \tag{14}$$

Per l'elemento $d\mathcal{C}$ il lavoro delle forze interne si ottiene, cioè, moltiplicando $d\mathcal{C}$ per l'espressione

$$\delta l^{(i)} = \sum_{r,s} \left[X_{rs} \frac{\partial \delta u_r}{\partial x_s} + \Psi_{rs} \frac{\partial \delta'\omega_r}{\partial x_s}\right] + \sum_r (X_{r+1\,r+2} - X_{r+2\,r+1}) \delta'\omega_r. \tag{15}$$

[8] Naturalmente se l'indice $r+i$ supera 3 esso va diminuito di 3. Così sempre nel seguito.

Si constata subito che $\delta l^{(i)}$ dipende solo *apparentemente* dalle $\delta'\omega_r$ non derivate. Infatti, tenendo conto delle (12), la (15) si può scrivere

$$\delta l^{(i)} = \sum_r \left[X_{rr} \frac{\partial \delta u_r}{\partial x_r} + X_{r+1r+2} \frac{\partial \delta u_{r+1}}{\partial x_{r+2}} + \right. \tag{16}$$

$$\left. + X_{r+2r+1} \frac{\partial \delta u_{r+2}}{\partial x_{r+1}} + \frac{1}{2} (X_{r+1r+2} - X_{r+2r+1}) \left(\frac{\partial \delta u_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial \delta u_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) \right] + \sum_{r,s} \Psi_{rs} \frac{\partial \delta' \omega_r}{\partial x_s},$$

e quindi

$$\delta l^{(i)} = \sum_r \left[X_{rr} \frac{\partial \delta u_r}{\partial x_r} + \frac{1}{2} (X_{r+1r+2} + X_{r+2r+1}) \left(\frac{\partial \delta u_{r+1}}{\partial x_{r+2}} + \frac{\partial \delta u_{r+2}}{\partial x_{r+1}} \right) \right] + \sum_{r,s} \Psi_{rs} \frac{\partial \delta' \omega_r}{\partial x_s}. \tag{17}$$

Pertanto, posto,

$$\xi_{rs} = \frac{X_{rs} + X_{sr}}{2} = \xi_{sr}, \tag{18}$$

si ha

$$\delta l^{(i)} = \sum_{r,s} \left[\xi_{rs} \delta' e_{rs} + \Psi_{rs} \frac{\partial \delta' \omega_r}{\partial x_s} \right], \tag{19}$$

con

$$\delta' e_{rs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial \delta u_s}{\partial x_r} \right). \tag{20}$$

Si trova così il risultato che $\delta l^{(i)}$ *non dipende* dalle $\delta'\omega_r$ non derivate e per quanto riguarda le X_{rs}, esso dipende solo dalla *dilatazione* contenuta nell'omografia euleriana di tensione, quando si pensi questa decomposta nella somma di una dilatazione e di un'omografia assiale [9].

Anzi, se si pensano nulli gli $\boldsymbol{m}$ e le Ψ_{rs} senza che, per la presenza di $\boldsymbol{M}$, le X_{rs} siano da supporsi simmetriche, $\delta l^{(i)}$ *non dipende in nessun modo dalle* $\delta'\omega_r$.

3. Equazioni fondamentali in forma lagrangiana.

Per ottenere in forma lagrangiana le equazioni fondamentali nel caso di deformazioni finite, conviene riprendere le (1), (2). In forma scalare esse si scrivono

$$\int_\sigma \sum_s X_{rs} n_s d\sigma + \int_C F_r dC = 0, \tag{1'}$$

---

[9] Invece l'espressione postulata in loco cit. in nota [1] nel caso di piccole deformazioni fa dipendere $\delta l^{(i)}$ direttamente da $X_{rs} - X_{sr}$ e da $\delta'\omega_r$. Tra l'altro, così, $\delta l^{(i)}$ non risulta nullo per uno spostamento rigido generico.

$$(2') \quad \int_\sigma \sum_s (x_{r+1} X_{r+2s} - x_{r+2} X_{r+1s}) n_s d\sigma + \int_c (x_{r+1} F_{r+2} - x_{r+2} F_{r+1} + M_r) d\mathcal{C} + \\ + \int_\sigma \sum_s \Psi_{rs} n_s d\sigma = 0 .$$

Detta $\mathcal{C}^*$ una presupposta configurazione di riferimento, sia P^* il corrispondente di P in essa ([10]) e y_r le coordinate di P^* rispetto a $\mathcal{T}$.

Posto

$$(21) \qquad D = \left\| \frac{\partial x_r}{\partial y_s} \right\| > 0 ,$$

si introducano le caratteristiche lagrangiane Y_{rs} di tensione mediante le formule ([11])

$$(22) \qquad X_{rs} = \frac{1}{D} \sum_{l,m} Y_{lm} x_{r,l} x_{s,m} .$$

Pongo

$$(23) \qquad \boldsymbol{F}^* d\mathcal{C}^* = \boldsymbol{F} d\mathcal{C}, \qquad \boldsymbol{f}^* d\Sigma^* = \boldsymbol{f} d\Sigma ;$$

$$(24) \qquad \boldsymbol{M}^* d\mathcal{C}^* = \boldsymbol{M} d\mathcal{C}, \qquad \boldsymbol{m}^* d\Sigma^* = \boldsymbol{m} d\Sigma .$$

Da (1') seguono le ben note equazioni lagrangiane ([12])

$$(25) \qquad \sum_{m,l} (Y_{lm} x_{r,l})_{,m} = F_r^* .$$

Tenendo presente le relazioni ([13])

$$(26) \qquad n_s d\sigma = d\sigma^* \sum_{r,t} C_{rt} n_t^* \mathbf{c}_r \times \mathbf{c}_s = d\sigma^* \sum_t C_{st} n_t^*$$

e ponendo

$$(27) \qquad \Psi_{rs} = \frac{1}{D} \sum_{lm} \varphi_{lm} x_{r,l} x_{s,m} ,$$

([10]) Ponendo l'asterisco sul simbolo di un ente di C intenderò sempre riferirmi al suo corrispondente in C^*.

([11]) Per indicare la derivazione di una generica funzione f delle y_r rispetto ad una di esse porrò l'indice di quella coordinata y dopo la virgola: $\frac{\partial f}{\partial y_s} = f_{,s}$.

([12]) Vedi A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria 1ª; « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV; Tomo XXII (1943), pp. 33-143 [pag. 106].

([13]) Con C_{rt} si indica il complemento algebrico di $x_{r,t}$ nel determinante (21).

la (2'), in base a (22), (26), (27), assume l'aspetto lagrangiano

$$(28)\qquad \int_{\sigma^*} \frac{1}{D} \sum_{mls} x_{s,m} (x_{r+1} x_{r+2,l} - x_{r+2} x_{r+1,l}) Y_{lm} \sum_t C_{st} n_t^* d\sigma^* +$$

$$\int_{c^*} (x_{r+1} F^*_{r+2} - x_{r+2} F^*_{r+1} + M_r^*) d\mathcal{C}^* + \int_{\sigma^*} \frac{1}{D} \sum_{lmst} \varphi_{lm} x_{r,l}\, x_{s,m} C_{st} n_t^* d\sigma^* = 0.$$

Ne segue

$$(29)\quad \int_{\sigma^*} \sum_{lm} Y_{lm}(x_{r+1} x_{r+2,l} - x_{r+2} x_{r+1,l}) n^*_m d\sigma^* + \int_{c^*} (x_{r+1} F^*_{r+2} - x_{r+2} F^*_{r+1} + M_r^*) d\mathcal{C}^* +$$

$$+ \int_{\sigma^*} \sum_{lm} \varphi_{lm} x_{r,l} n^*_m d\sigma^* = 0,$$

da cui, tenute presenti le (25), si deduce

$$(30)\qquad \int_{c^*} \sum_{lm} Y_{lm}(x_{r+2,l}\, x_{r+1,m} - x_{r+1,l}\, x_{r+2,m}) d\mathcal{C}^* +$$

$$+ \int_{c^*} \sum_{lm} (\varphi_{lm}\, x_{r,l})_{,m}\, d\mathcal{C}^* - \int_{c^*} M_r^*\, d\mathcal{C}^* = 0\,.$$

Data l'arbitrarietà di C^* e l'indipendenza delle funzioni integrande dal campo d'integrazione, da (30) segue, *quasi ovunque*

$$(31)\qquad \sum_{lm} (\varphi_{lm}\, x_{r,l})_{,m} = \sum_{lm} (x_{r+1,l}\, x_{r+2,m} - x_{r+2,l}\, x_{r+1,m}) Y_{lm} + M_r^*\,.$$

Le equazioni indefinite di equilibrio sono pertanto le (25) e le (31) che per il seguito, posto

$$(32)\qquad \lambda_{rm} = \sum_l \varphi_{lm}\, x_{r,l}$$

converrà scrivere nella forma

$$(33)\qquad \sum_m \lambda_{rm,m} = \sum_{lm} (x_{r+1,l}\, x_{r+2,m} - x_{r+1,m}\, x_{r+2,l}) Y_{lm} + M_r^*.$$

Alle (25), (33) vanno associate le condizioni al contorno

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{lm} Y_{lm}\, x_{r,l}\, N_m{}^* = f_r{}^*, \\ &\sum_m \lambda_{rm}\, N_m^* = m_r{}^*. \end{aligned}\right. \qquad \text{su } \Sigma^*$$

4. Espressione lagrangiana del lavoro delle forze interne di contatto.

La determinazione di un'espressione lagrangiana del lavoro delle forze interne si può fare a partire dalle equazioni generali lagragiane ora stabilite, ma riesce più semplice arrivarci trasformando opportunamente l'espressione euleriana (19).

A tal fine comincio con l'osservare che è

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \delta u_r}{\partial x_s} = \frac{1}{D}\sum_l C_{sl}(\delta u_r),_l\,, \\ &\frac{\partial \delta' \omega_r}{\partial x_s} = \frac{1}{D}\sum_l C_{sl}(\delta'\omega_r),_l\,, \end{aligned}\right.$$

$$(36)\qquad d\mathcal{C} = D\,d\mathcal{C}^*$$

e che le (18), (22), implicano

$$(37)\qquad \xi_{rs} = \frac{1}{D}\sum_{lm} T_{lm}\, x_{r,l}\, x_{s,m}$$

con

$$(38)\qquad T_{lm} = T_{ml} = \frac{Y_{lm} + Y_{ml}}{2}.$$

Le (27), (35), (36), (37) pemettono di mutare la (19) nella espressione ([14])

$$(39)\quad \delta^* l^{(i)} = \frac{1}{D}\sum_{rslmq} x_{r,l}\, x_{s,m} \left\{ \frac{1}{2} T_{lm}[C_{sq}(\delta u_r),_q + C_{rq}(\delta u_s),_q] + \varphi_{lm}\, C_{sq}(\delta'\omega_r),_q \right\},$$

equivalente a

$$(40)\qquad \delta^* l^{(i)} = \sum_{lm}[T_{lm}\sum_r (\delta u_r),_m\, x_{r,l} + \varphi_{lm}\sum_r x_{r,l}(\delta'\omega_r),_m]$$

che, posto

$$(41)\qquad b_{rs} = \sum_i x_{i,r}\, x_{i,s}\,,$$

([14]) Il prodotto $dC^*\delta^* l^{(i)}$ esprime evidentemente il lavoro delle forze interne di contatto relative all'elemento dC^*.

può anche scriversi

$$\delta^* l^{(i)} = \sum_{lm} [T_{lm} \frac{\delta b_{lm}}{2} + \lambda_{lm} (\delta' \omega_r),_m]. \tag{42}$$

5. Un'opportuna trasformazione dell'espressione del lavoro delle forze interne.

Nel caso di deformazioni finite non si vede di quali funzioni delle y_r le $\delta'\omega_t$ possono considerarsi le variazioni, nel passaggio dalla configurazione caratterizzata dai valori attuali delle x_r a quella corrispondente a valori variati $x_r + \delta x_r$.

Tale inconveniente rende impossibile l'elegante applicazione della termodinamica ([15]) che nel caso dell'elasticità simmetrica permette di uguagliare $-\delta^* l^{(i)}$ alla variazione di una funzione termodinamica, *l'energia libera di Helmotz.* A ciò si può ovviare trasformando opportunamente l'espressione (42) di $\delta l^{(i)}$ nel modo che stabilirò

Comincio con l'osservare che, dette $u_i = x_i - y_i$ le componenti dello spostamento $\mathcal{C}^* \to \mathcal{C}$ e interpretate le δu_i quali variazioni delle u_i nel passaggio da $\mathcal{C}$ ad una configurazione vicinissima, ovviamente risulta

$$\delta(u_{i,s}) = (\delta u_i),_s \qquad \delta(u_{i,sm}) = (\delta u_i),_{sm} \tag{43}$$

mentre se $F(x)$ è una funzione che dipende dalle y_r, solo per tramite delle $x_{i,h}$, si ha simultaneamente

$$\left\{\begin{aligned} \delta(F,_s) &= \delta\left[\sum_{ih} \frac{\partial F}{\partial x_{i,h}} u_{i,hs}\right] = \sum_{ih} \left[\frac{\partial F}{\partial x_{i,h}} (\delta u_{i,h}),_s + \sum_{pq} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,h} \partial x_{p,q}} u_{i,hs} \delta(u_{p,q})\right], \\ (\delta F),_s &= \left[\sum_{ih} \frac{\partial F}{\partial x_{i,h}} \delta(u_{i,h})\right],_s = \sum_{ih} \left[\frac{\partial F}{\partial x_{i,h}} (\delta u_{i,h}),_s + \sum_{pq} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,h} \partial x_{p,q}} u_{p,qs} \delta(u_{i,h})\right]. \end{aligned}\right. \tag{44}$$

Risulta pertanto

$$(\delta F),_s = \delta(F,_s). \tag{45}$$

In base alla (35,1), si riconosce che l'espressione (12) delle $\delta'\omega_r$ possono porsi nella forma lagrangiana

$$\delta'\omega_r = \frac{1}{2D} \sum_m [(\delta u_{r+2}),_m C_{r+1m} - (\delta u_{r+1}),_m C_{r+2m}]. \tag{46}$$

([15]) E. e F. Cosserat, *Sur la théorie de l'élasticité*, Premier mémoire; pag. 59 e segg.

Da (43), (44), (45), (46), segue

$$(47)\quad (\delta'\omega_r)_{,s} = \frac{1}{2}\sum_{pqm}\left\{\left[\delta(u_{r+2,m})\frac{\partial}{\partial x_{p,q}}\left(\frac{C_{r+1m}}{D}\right) - \delta(u_{r+1,m})\frac{\partial}{\partial x_{p,q}}\left(\frac{C_{r+2m}}{D}\right)\right]u_{p,sq} - \right.$$

$$\left. - \left[u_{r+2,sm}\frac{\partial}{\partial x_{p,q}}\left(\frac{C_{r+1m}}{D}\right) - u_{r+1,sm}\frac{\partial}{\partial x_{p,q}}\left(\frac{C_{r+2m}}{D}\right)\right]\delta(u_{p,q})\right\} +$$

$$+ \delta\left[\frac{1}{2D}\sum_m (u_{r+2,sm}C_{r+1m} - u_{r+1,sm}C_{r+2m})\right].$$

La (42), posto

$$(48)\quad \mu_{rs} = \frac{1}{2D}\sum_m [u_{r+2,sm}C_{r+1m} - u_{r+1,sm}C_{r+1m}],$$

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} M_{rs} &= \frac{1}{2}\sum_{pqm}\left[u_{p+1,qm}\frac{\partial}{\partial x_{r,s}}\left(\frac{C_{p+2m}}{D}\right) - u_{p+2,qm}\frac{\partial}{\partial x_{r,s}}\left(\frac{C_{p+1m}}{D}\right)\right]\lambda_{pq}, \\ N_{rs} &= \frac{1}{2}\sum_{pqm}\left[\lambda_{r+1m}\frac{\partial}{\partial x_{p,q}}\left(\frac{C_{r+2s}}{D}\right) - \lambda_{r+2m}\frac{\partial}{\partial x_{p,q}}\left(\frac{C_{p+1s}}{D}\right)\right]u_{p,qm}, \end{aligned}\right.$$

diviene, in base a (47),

$$(50)\quad \delta^* l^{(i)} = \sum_{rs}\left[T_{rs}\frac{\delta b_{rs}}{2} + (M_{rs} + N_{rs})\delta(u_{r,s}) + \lambda_{rs}\delta\mu_{rs}\right]$$

che può anche scriversi [vedi (41)]

$$(51)\quad \delta^* l^{(i)} = \sum_{rs} \{[\sum_l T_{ls}x_{r,l} + M_{rs} + N_{rs}]\delta(u_{r,s}) + \lambda_{rs}\delta\mu_{rs}.$$

La (51) costituisce la preannunciata espressione del lavoro delle forze interne di contatto.

6. Introduzione del potenziale termodinamico.

Supposto il sistema a trasformazioni reversibili e introdotta la funzione *energia libera termodinamica*

$$(52)\quad \mathfrak{J} = \mathfrak{U} - eTE,$$

[$\mathfrak{U}$ energia interna, T temperatura assoluta, E entropia, e equivalente meccanico del calore, ben note considerazioni termodinamiche ([16]) implicano l'uguaglianza

$$\delta^* l^{(i)} + eE\delta T = -\delta \mathfrak{J} \tag{53}$$

per ogni trasformazione infinitesima del sistema a partire dallo stato attuale.

Le (51), (53) mostrano chiaramente che $\mathfrak{J}$ deve pensarsi dipendente dallo stato attuale solo per tramite delle $x_{r,s}$, μ_{rs} e T.

Nel caso di simmetria delle caratteristiche di tensione da (53) seguono immediatamente le relazioni che le esprimono quali derivate della $\mathfrak{J}$ rispetto alle caratteristiche di deformazione.

Nel caso asimmetrico, invece, da (53) non seguono formule analoghe. Infatti, si deve ora tenere presente che le μ_{rs} e conseguentemente le $\delta(u_{p,q})$ e le $\delta\mu_{rs}$ non sono tra loro indipendenti ma risulta ideaticamente, com'è facile constatare in base a (48),

$$\sum_{rs} C_{rs}\mu_{rs} = 0, \tag{54}$$

nonchè

$$\sum_{rs}\left[\sum_{pq}\frac{\partial C_{rs}}{\partial x_{p,q}}\,\delta(u_{p,q})\,\mu_{rs} + C_{rs}\,\delta\mu_{rs}\right] = 0. \tag{55}$$

Ne segue che la (53) si deve ritenere valida non per variazioni arbitrarie $\delta(u_{p,q})$, $\delta\mu_{rs}$ ma per tutte e sole quelle che verificano la (55).

In assenza di vincoli interni da (53), (55) si deduce, pertanto,

$$\sum_l T_{ls}\,x_{r,l} + M_{rs} + N_{rs} + \tau\sum_{pq}\frac{\partial C_{pq}}{\partial x_{r,s}}\,\mu_{pq} = -\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial x_{r,s}}, \tag{56}$$

$$\lambda_{rs} + \tau C_{rs} = -\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial\mu_{rs}}, \tag{57}$$

$$eE = -\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial T}, \tag{58}$$

ove τ è un parametro del quale non si può a priori escludere la dipendenza dallo stato attuale, cioè dalle $x_{r,s}$ e μ_{rs}.

È quasi superfluo avvertire che nelle (56), (57), (58), la derivazione della

---

([16]) Loco cit. in nota ([15]).

$\mathfrak{J}$ rispetto alle $x_{r,s}$, μ_{rs}, T va fatta pensando quali indipendenti tali variabili. Da (56) segue subito

$$T_{rs} = -\frac{1}{D}\sum_l C_{lr}\left[\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_{l,s}} + M_{ls} + N_{ls} + \tau \sum_{pq} \frac{\partial C_{pq}}{\partial x_{ls}}\mu_{pq}\right]. \tag{59}$$

La conoscenza della $\mathfrak{J}$ e del parametro τ — cioè, generalmente, di due funzioni delle x_{rs}, μ_{rs}, T — determina, in base alle (56), (57), (58), le espressioni delle T_{rs} delle λ_{rs} e di E. Nel caso isotermo ciò è sufficiente per pareggiare nel sistema delle equazioni indefinite (25), (33), tenuto conto delle relazioni (38), il numero delle incognite a quello delle equazioni. Analogamente nel caso adiabatico, come si potrebbe dimostrare con considerazioni analoghe a quelle che si fanno nel caso simmetrico. Così pure è evidente che le espressioni ottenute mantengono validità nel caso dinamico.

7. Equazioni di condizione per l'energia libera.

Si può fin d'ora affermare che la funzione termodinamica $\mathfrak{J}$ e il parametro τ devono soddisfare le equazioni che esprimono la simmetria delle T_{rs}. In base a (59), esse sono

$$\begin{aligned} \sum_l \Bigg\{ C_{lr}\left[\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_{l,s}} + M_{ls} + N_{ls} + \tau \sum_{pq} \frac{\partial C_{pq}}{\partial x_{l,s}}\mu_{pq}\right] - \\ - C_{ls}\left[\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_{l,r}} + M_{lr} + N_{lr} + \tau \sum_{pq} \frac{\partial C_{pq}}{\partial x_{l,r}}\mu_{pq}\right]\Bigg\} = 0. \end{aligned} \tag{60}$$

Si potrebbe credere che le (60) siano atte a determinare il parametro τ ma così in realtà non è, dato che le (60) *solo apparentemente* contengono il parametro τ.

Infatti, posto

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{rs} &= \sum_l (C_{lr} M_{ls} - C_{ls} M_{lr}), \\ \beta_{rs} &= \sum_l (C_{lr} N_{ls} - C_{ls} N_{lr}), \\ \gamma_{rs} &= \sum_{lpq}\left(C_{lr}\frac{\partial C_{pq}}{\partial x_{l,s}} - C_{ls}\frac{\partial C_{pq}}{\partial x_{l,r}}\right)\mu_{pq} \end{aligned} \right. \tag{61}$$

con un po' di pazienza si trova essere

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{s+1s} &= \frac{1}{2D}\sum_{lmpqt\nu} u_{p,qm}\left[C_{ls+1}\frac{\partial C_{tm}}{\partial x_{l,s}} - C_{ls}\frac{\partial C_{tm}}{\partial x_{l,s+1}}\right]\lambda_{\nu q}\, \mathbf{c}_\nu \times \mathbf{c}_p \wedge \mathbf{c}_t, \\ \beta_{s+1s} &= \frac{1}{2D}\sum_{lq}[D u_{l,qs+2} - x_{l,s+2}\sum_{mt} C_{tm} u_{t,qm}]\lambda_{lq}, \\ \gamma_{s+1s} &= -\frac{1}{2D}\sum_{lmpqt\nu} u_{p,qm}\left[C_{ls+1}\frac{\partial C_{tm}}{\partial x_{l,s}} - C_{ls}\frac{\partial C_{tm}}{\partial x_{l,s+1}}\right] C_{\nu q}\, \mathbf{c}_p \wedge \mathbf{c}_\nu \times \mathbf{c}_t, \end{aligned} \right. \tag{62}$$

ed è facile riconoscere che se si identifica λ_{rs} con $-C_{rs}$ si ha

$$\beta_{s+1s} = 0, \qquad [\text{per } \lambda_{rs} = -C_{rs}] \tag{63}$$

$$\alpha_{s+1s} + \gamma_{s+1s} = 0, \qquad [\text{per } \lambda_{rs} = -C_{rs}] \tag{64}$$

mentre è evidente che la funzione delle (60) è completamente esaurita se esse si considerano per $s = 1, 2, 3$ ed $r = s + 1$.

Si conclude che le (60) sono identicamente soddisfatte se in esse — tenuto conto delle (49) si identificano le λ_{rs} con le $-\tau C_{rs}$, il che è quanto dire che *il coefficiente di* τ *nelle* (60), tenute presenti le (49), *è identicamente nullo.*

Da quanto sopra si riconosce che le equazioni (60) equivalgono al sistema

$$\alpha_{s+1s} + \beta_{s+1s} + \sum_l \left[C_{ls+1} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_{l,s}} - C_{ls} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_{l,s+1}} \right] = 0, \tag{65}$$

da considerarsi quando nelle (62, 1, 2) si identifichino le λ_{rs} con $-\dfrac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \mu_{rs}}$.

Il sistema (65), tenuto conto di (62), si presenta [a questo punto] con coefficienti dipendenti dalle derivate seconde delle componenti di spostamento mentre la $\mathfrak{J}$ dipende da esse solo per tramite delle μ_{rs}. Ciò vuol dire che le (65) debbono [in apparenza] valere identicamente rispetto alle derivate seconde delle u_r. Non è pertanto superfluo dimostrare, come subito farò, che nel sistema (65) i coefficienti dipendono da quelle derivate seconde solo per tramite delle μ_{rs} e che quindi le (65) costituiscono un sistema di tre equazioni alle derivate parziali cui è condizionata la struttura della $\mathfrak{J}$.

A tal fine innanzitutto osservo che le (62, 1) possono scriversi

$$\begin{aligned} \alpha_{s+1s} = \frac{1}{2D} \sum_{lmq} [& u_{l+1,qm} (C_{l+1m} x_{l,s+2} - C_{lm} x_{l+1,s+2}) + \\ & + u_{l+2,qm} (C_{l+2m} x_{l,s+2} - C_{lm} x_{l+2,s+2})] \lambda_{lq} \end{aligned} \tag{66}$$

e che le (65), tenuto conto di (62, 2), (66), divengono

$$\sum_l \left\{ C_{ls+1} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_{l,s}} - C_{ls} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_{l,s+1}} - \frac{1}{2D} \sum_q [D u_{l,qs+2} - \sum_{mt} C_{lm} x_{t,s+2} u_{t,qm}] \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \mu_{lq}} \right\} = 0. \tag{67}$$

Tenuto conto delle uguaglianze

$$\begin{cases} C_{\nu+1s+1} C_{\nu s+2} - C_{\nu+1s+2} C_{\nu s+1} = -x_{\nu+2,s} D, \\ C_{\nu+2s+1} C_{\nu s+2} - C_{\nu+2s+2} C_{\nu s+1} = x_{\nu+1s} D, \end{cases} \tag{68}$$

è facile constatare che risulta

$$\sum_{ls} C_{\nu s+2}\left[C_{ls+1}\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial x_{l,s}} - C_{ls}\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial x_{l,s+1}}\right] = D\sum_{s}\left[\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial x_{\nu+2,s}}x_{\nu+1,s} - \frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial x_{\nu+1,s}}x_{\nu+1,s}\right] \tag{69}$$

e inoltre, tenuto conto di (48), che è

$$\sum_{lqs} C_{\nu s+2}\left[Du_{l,qs+2} - \sum_{mt} C_{lm}\,x_{t,s+2}\,u_{t,qm}\right]\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial\mu_{lq}} = \tag{70}$$

$$= D\sum_{lqm}(C_{\nu m}\,u_{l,qm} - C_{lm}\,u_{\nu,qm})\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial\mu_{lq}} = -2D^2\sum_{q}\left[\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial\mu_{\nu+2q}}\mu_{\nu+1q} - \frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial\mu_{\nu+1q}}\mu_{\nu+2q}\right].$$

Poichè il determinante delle C_{rs} è certamente non nullo le (67) equivalgono al sistema che da esse si deduce moltiplicandone la generica per $C_{\nu s+2}$, sommando rispetto ad s e facendo variare ν da 1 a 3. Così facendo, il sistema (67), tenuto conto di (67), (70) si muta in definitiva, nel sistema

$$\sum_{q}\left\{\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial x_{\nu+2,q}}x_{\nu+1,q} - \frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial x_{\nu+1,q}}x_{\nu+2,q} + \frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial\mu_{\nu+2q}}\mu_{\nu+1q} - \frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial\mu_{\nu+1q}}\mu_{\nu+2q}\right\} = 0 \tag{71}$$

i cui coefficienti dipendono solo dalle $x_{r,s}$ e $\mu_{r,s}$ e che costituisce certo la forma più opportuna per il sistema (60).

Naturalmente, se il sistema considerato è un corpo elastico, il lavoro delle forze interne per un qualunque spostamento non rigido isotermo a partire dalla configurazione di equilibrio spontaneo, $\mathfrak{C}^*$ è negativo. Supposta nulla la $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{C}^*$ da (53) segue in tal caso

$$\mathfrak{J} > 0, \tag{72}$$

in ogni configurazione distinta da $\mathfrak{C}^*$ e non ottenibile da essa mediante uno spostamento rigido.

Si riconosce che le (71) sono certamente soddisfatte se $\mathfrak{J}$ dipende dalle $x_{r,s}$ solo per tramite delle b_{rs} [vedi (41)] e dalle μ_{rs} solo per tramite delle ν_{rs}, ove sia

$$\nu_{rs} = \sum_{i}\mu_{ir}\,\mu_{is}. \tag{73}$$

II. - Teoria linearizzata dell'elasticità asimmetrica isoterma.

1. Soluzioni dipendenti da un parametro - Teoria linearizzata.

Si sostituiscano i vettori F^* ecc., con i vettori $h\boldsymbol{F}^*$, $h\boldsymbol{M}^*$, $h\boldsymbol{f}^*$, $h\boldsymbol{m}^*$ ove h è un parametro indipendente dalle coordinate. Le x_r, Y_{lm}, ecc. saranno da pensarsi funzioni di h.

Supporrò che esse siano *derivabili* rispetto ad h *almeno una volta* nell'intorno dello zero e per la generica funzione, η, di h porrò

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{d^n \eta}{dh^n}\right) = h^{(n)}, \qquad (n = 0,\ 1, \ldots, \bar{n}),\ \bar{n} \geq 1. \tag{74}$$

Supponendo che $\mathcal{C}^*$ sia la configurazione del sistema corrispondente ad $h = 0$, si dovrà ritenere

$$u_r^{(0)} \equiv 0, \tag{75}$$

mentre potrà essere

$$Y_{rs}^{(0)} \neq 0, \qquad \lambda_{rs}^{(0)} \neq 0. \tag{76}$$

Inoltre riterrò

$$\lim_{h \to 0} \frac{d^n}{dq^n} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y_l}\right) = \frac{\partial \eta^{(n)}}{\partial y_l}, \tag{77}$$

per ognuna delle funzioni di h e delle y che interverranno nel seguito.

In particolare si ha

$$(x_{r,l})^{(0)} = \delta_{rl}, \qquad (x_{r,l})^{(1)} = u_{r,l}^{(1)} \tag{78}$$

ove δ_{rl} è il simbolo di KRONECKER, mentre, dette ε_{rs} le caratteristiche di deformazione ([17]) risulterà

$$\varepsilon_{rs}^{(0)} = 0, \qquad \varepsilon_{rs}^{(1)} = \frac{1}{2}\,(u_{r,s}^{(1)} + u_{s,r}^{(1)}), \tag{79}$$

$$\mu_{rs}^{(0)} = 0, \qquad \mu_{rs}^{(1)} = \omega_{r,s}^{(1)}, \tag{80}$$

ove le

$$\omega_r^{(1)} = \frac{1}{2}\,(u_{r+2,\,r+1}^{(1)} - u_{r+1,\,r+2}^{(1)}) \tag{81}$$

rappresentano le componenti della rotazione locale inerente al passaggio mediante lo spostamento di componenti $u_r^{(1)}$ dalla configurazione $\mathcal{C}^*$ ad una configurazione vicinissima.

([17]) Per semplicità chiamerò così le espressioni delle ε_{rs} da cui provengono le $\varepsilon_{rs}^{(1)}$, nonostante per $r \neq s$, tale denominazione spetti alle quantità $2\varepsilon_{rs}$.

Tenuto conto di (74), (75), (77), (78), le (25), (33), (34) posto in esse hF_r^*, ecc. al posto di F_r, ecc. [il chè supporrò sempre in seguito] danno, per $h \to 0$,

$$(82) \qquad \begin{cases} \sum\limits_m Y^{(0)}_{rm,m} = 0\,, \\ Y^{(0)}_{r+1\,r+2} - Y^{(0)}_{r+2\,r+1} = \lambda^{(0)}_{rm,\,m}\,, \end{cases}$$

$$(83) \qquad \begin{cases} \sum\limits_m Y^{(0)}_{rm} N^*_m = 0\,, \\ \sum\limits_m \lambda^{(0)}_{rm} N^*_m = 0\,, \end{cases}$$

che vincolano lo stato tensionale eventualmente preesistente nella presupposta configurazione di equilibrio spontaneo.

Si constata subito che in una teoria in cui si ritengano necessariamente nulle le λ_{rm} lo stato tensionale eventualmente preesistente *non può che essere simmetrico.*

Si valutino adesso i limiti per $h \to 0$ delle derivate prime rispetto ad h dei due membri delle equazioni (25), (33), (34). Tenuto conto di (78), si trova

$$(84) \qquad \begin{cases} \sum\limits_m Y^{(1)}_{rm,m} = F_r^* - \sum\limits_{lm} [Y^{(0)}_{lm} u^{(1)}_{r,l}]_{,\,m}\,, & [\text{in } \mathcal{C}^*] \\ \sum\limits_m \lambda^{(1)}_{rm,\,m} = Y^{(1)}_{r+1 r+2} - Y^{(1)}_{r+2 r+1} + \sum\limits_l [u^{(1)}_{r+1,\,l}(Y^{(0)}_{lr+2} - \\ \quad - Y^{(0)}_{r+2l}) + u^{(1)}_{r+2,\,l}(Y^{(0)}_{r+1l} - Y^{(0)}_{lr+1})] + M_r^* & [\text{in } \mathcal{C}^*] \end{cases}$$

$$(85) \qquad \begin{cases} \sum\limits_m Y^{(1)}_{rm} N^*_m = f^*_r - \sum\limits_{lm} Y^{(0)}_{lm} u^{(1)}_{r,l} N^*_m\,, \\ \sum\limits_m \lambda^{(1)}_{rm} N^*_m = m^*_r\,. \end{cases} \qquad [\text{su } \Sigma^*]$$

In base a (38) si deve ritenere

$$(86) \qquad T^{(i)}_{rs} = \frac{1}{2}(Y^{(i)}_{rs} + Y^{(i)}_{rs}).$$

Le (82,1), (83,1) divengono, in conseguenza,

$$(87) \qquad \begin{cases} \sum\limits_m T^{(0)}_{rm,\,m} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_s [\lambda^{(0)}_{r+2s,\,r+1} - \lambda^{(0)}_{r+1s,\,r+2}]_{,\,s} = 0, & [\text{in } \mathcal{C}^*] \\ \sum\limits_m T^{(0)}_{rm} N^*_m + \dfrac{1}{2}\sum\limits_s [\lambda^{(0)}_{r+2s,\,s} N^*_{r+1} - \lambda^{(0)}_{r+1s,\,s} N^*_{r+2}] = 0 & [\text{su } \Sigma^*] \end{cases}$$

mentre le (84,1), (85,1) diventano

$$(88)\qquad \begin{cases} \sum\limits_m T^{(1)}_{rm,m} + \frac{1}{2}\sum\limits_s [\lambda^{(1)}_{r+2s,r+1} - \lambda^{(1)}_{r+1s,r+2}]_{,s} = -\sum\limits_{lm} [u^{(1)}_{r,l} T^{(0)}_{lm} - \\ \quad - \frac{1}{2} u^{(1)}_{m,l}(Y^{(0)}_{rl} - Y^{(0)}_{lr})]_{,m} + F^*_r + \frac{1}{2}(M^*_{r+2,r+1} - M^*_{r+1,r+2}), \\ \sum\limits_m T^{(1)}_{rm} N^*_m + \frac{1}{2}\sum\limits_s [\lambda^{(1)}_{r+2s,s} N^*_{r+1} - \lambda^{(1)}_{r+1s,s} N^*_{r+2}] = -\sum\limits_{lm} [u^{(1)}_{r,l} T^{(0)}_{lm} - \\ \quad - \frac{1}{2} u^{(1)}_{m,l}(Y^{(0)}_{rl} - Y^{(0)}_{lr})] N^*_m + f^*_r + \frac{1}{2}(M^*_{r+2} N^*_{r+1} - M^*_{r+1} N^*_{r+2}). \end{cases}$$

Le (88) insieme alle (84,2) e alle (85,2) rappresentano il sistema differenziale fondamentale della teoria linearizzata. Se $\mathcal{C}^*$ rappresenta una configurazione di *equilibrio naturale* e risulta, pertanto, $Y^{(0)}_{rs} = \lambda^{(0)}_{rs} = 0$, le (88), (84,2), (85,3) divengono

$$(89)\qquad \begin{cases} \sum\limits_m T^{(1)}_{rm,m} + \frac{1}{2}\sum\limits_s [\lambda^{(1)}_{r+2s,r+1} - \lambda^{(1)}_{r+1s,r+2}]_{,s} = F^*_r + \\ \quad + \frac{1}{2}[M^*_{r+2,r+1} - M^*_{r+1,r+2}], \\ \sum\limits_m T^{(1)}_{rm} N^*_m + \frac{1}{2}\sum\limits_s [\lambda^{(1)}_{r+2s,s} N^*_{r+1} - \lambda^{(1)}_{r+1s,s} N^*_{r+2}] = \\ \quad = f^*_r + \frac{1}{2}[M^*_{r+2} N^*_{r+1} - M^*_{r+1} N^*_{r+2}], \end{cases} \qquad [\text{in } \mathcal{C}^*]$$

$$(90)\qquad \begin{cases} \sum\limits_m \lambda^{(1)}_{rm,m} = Y^{(1)}_{r+1r+2} - Y^{(1)}_{r+2r+1} + M^*_r, \\ \sum\limits_m \lambda^{(1)}_{rm} N^*_m = m^*_r \end{cases} \qquad [\text{su } \Sigma^*]$$

e vanno associate alle

$$(91)\qquad Y^{(1)}_{rs} + Y^{(1)}_{sr} = 2T^{(1)}_{rs}.$$

Le (89), (90) evidentemente possono ottenersi, in via di approssimazione direttamente dalle (7), (8), (9), (10) identificandole con le X_{rs} con le Y_{rs}, le ψ_{rs} con le λ_{rs}, e le x_r con le y_r.

2. Potenziale elastico isotermo per le piccole trasformazioni dei corpi isotropi.

Nel seguito supporrò che $\mathcal{C}^*$ sia configurazione di equilibrio naturale. Nell'ipotesi di piccole deformazioni non c'è motivo di non ritenere valida una legge del tipo di quella di HOOKE e di non ritenere che le $T^{(1)}_{rs}$, $\lambda^{(1)}_{rs}$ siano polinomi omogenei di primo grado nelle $u^{(1)}_{r,s}$ e nelle $\mu^{(1)}_{rs}$. A tale risultato si giunge, del resto, derivando una volta rispetto al parametro h le relazioni generali (57), (59), facendo tendere h a zero e ritenendo τ e $\mathfrak{J}$ dipendenti da h per tramite delle $x_{r,s}$, μ_{rs} e T. Anzi, la ricerca delle relazioni valide nel caso delle piccole deformazioni per deduzione dal caso delle deformazioni finite, anzichè per via diretta, è certo molto utile, almeno nel problema che sto considerando, dato che ciò porterà ad una completa caratterizzazione delle relazioni tra sforzi e deformazioni e della struttura dell'*energia libera*, altrimenti difficilmente ottenibile.

In base alle (57) si ha, innanzitutto,

$$\lambda^{(0)}_{rs} = -\tau^{(0)}\delta_{rs} - \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \mu_{rs}}\right)^{(0)} \tag{92}$$

da cui si vede che — se $\mathcal{C}^*$ è, come suppongo, *stato naturale* — deve essere

$$\tau^{(0)} + \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \mu_{rr}}\right)^{(0)} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \mu_{rs}}\right)^{(0)} = 0, \qquad \text{per } r \neq s. \tag{93}$$

Da (59) segue

$$T^{(0)}_{rs} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_{r,s}}\right)^{(0)} \tag{94}$$

che implica

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_{r,s}}\right)^{(0)} = 0. \tag{95}$$

Da (59), derivando rispetto ad h e facendo tendere h a zero, risulta

$$T^{(1)}_{rs} = -\tau^{(0)}\sum_{pq}\left(\frac{\partial C_{pq}}{\partial x_{r,s}}\right)^{(0)}\mu^{(1)}_{pq} - \sum_{pq}\left[\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{r,s}\partial x_{p,q}}\right)^{(0)} u^{(1)}_{p,q} + \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{r,s}\partial \mu_{pq}}\right)^{(0)}\mu^{(1)}_{pq}\right], \tag{96}$$

$$\lambda^{(1)}_{rs} = -\tau^{(0)}C^{(1)}_{rs} - \tau^{(1)}C^{(0)}_{rs} - \sum_{pq}\left[\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{p,q}\partial \mu_{rs}}\right)^{(0)} u^{(1)}_{p,q} + \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial \mu_{rs}\partial \mu_{pq}}\right)^{(0)}\mu^{(1)}_{pq}\right] \tag{97}$$

ed è facile constatare che è

$$\left\{\begin{aligned}
&C^{(0)}_{rs} = \delta_{rs},\\
&C^{(1)}_{rs} = \delta_{rs}(u^{(1)}_{r+1,\,r+1} + u^{(2)}_{r+2,\,r+2}) - \delta_{rs+1}u^{(1)}_{r+2,\,r} - \delta_{rs+2}u^{(1)}_{r+1,\,r},\\
&\sum_{pq}\left(\frac{\partial C_{pq}}{\partial x_{r,s}}\right)^{(0)}\mu^{(1)}_{pq} = -\delta_{rr}\mu^{(1)}_{rr} - \delta_{rs+1}\mu^{(1)}_{r+2r} - \delta_{rs+2}\mu^{(1)}_{r+1r}.
\end{aligned}\right. \tag{98}$$

Per $r \neq s$ da (96), (97) segue, in base a (98),

$$T_{rs}^{(1)} = \tau^{(0)}(\delta_{rs+1}\,\mu_{r+2r}^{(1)} + \delta_{rs+2}\,\mu_{r+1r}^{(1)}) - \sum_{pq}\left[\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x_{r,s}\,\partial x_{p,q}}\right)^{(0)} u_{p,q}^{(1)} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{r,s}\,\partial\mu_{pq}}\right)^{(0)} \mu_{pq}^{(1)}\right], \qquad (r \neq s) \tag{99}$$

$$\lambda_{rs}^{(1)} = \tau^{(0)}(\delta_{rs+1}\,u_{r+2r}^{(1)} + \delta_{rs+2}\,u_{r+1r}^{(1)}) - \sum_{pq}\left[\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{p,q}\,\partial\mu_{rs}}\right)^{(0)} u_{p,q}^{(1)} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial\mu_{rs}\,\partial\mu_{pq}}\right)^{(0)} \mu_{pq}^{(1)}\right], \qquad (r \neq s). \tag{100}$$

Da (71), derivando rispetto ad h e facendo tendere h a zero, in base alle (93), si deduce

$$\sum_{lm}\left\{\left[\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{\nu+2,\,\nu+1}\,\partial x_{l,m}}\right)^{(0)} - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{\nu+1,\,\nu+2}\,\partial x_{l,m}}\right)^{(0)}\right] u_{l,m}^{(1)} + \right.$$
$$\left. + \left[\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{\nu+2,\,\nu+1}\,\partial\mu_{lm}}\right)^{(0)} - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{\nu+1,\,\nu+2}\,\partial\mu_{lm}}\right)^{(0)}\right]\mu_{lm}^{(1)}\right\} + \tau^{(0)}(\mu_{\nu+2\nu+1}^{(1)} - \mu_{\nu+1\nu+2}^{(1)}) = 0. \tag{101}$$

Supporrò — come mi sembra plausibile — che per ogni spostamento infinitesimo irrotazionale a partire da C^* [per il quale le $\mu_{rs}^{(1)}$ risultano nulle] le $\psi_{rs}^{(1)}$, e quindi le $\lambda_{rs}^{(1)}$, riescano tutte uguali a zero.

Ne segue che ogniqualvolta sia

$$u_{r,\,r+1}^{(1)} - u_{r+1,\,r}^{(1)} = 0 \tag{102}$$

e, conseguentemente, sono nulle le $\mu_{rs}^{(1)}$, le $\lambda_{rs}^{(1)}$ devono essere tutte uguali a zero. Da (100), per $s = r + 1$, si deduce che affinchè ciò avvenga occorre, tra l'altro, che risulti

$$\tau^{(0)} - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{r+1,\,r}\,\partial\mu_{rr+1}}\right)^{(0)} - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{r,\,r+1}\,\partial\mu_{rr+1}}\right)^{(0)} = 0, \tag{103}$$

mentre da (101) si deduce

$$\tau^{(0)} + \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{r,\,r+1}\,\partial\mu_{rr+1}}\right)^{(0)} - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{r+1,\,r}\,\partial\mu_{rr+1}}\right)^{(0)} = 0. \tag{104}$$

Da (103), (104) segue

$$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{r,\,r+1}\,\partial\mu_{rr+1}}\right)^{(0)} = 0, \qquad \tau^{(0)} - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_{r+1,\,r}\,\partial\mu_{rr+1}}\right)^{(0)} = 0. \tag{105}$$

Altre conseguenze possono dedursi dalle (101) e dalla condizione posta per le $\lambda_{rs}^{(1)}$, Ma rinunzio ad esporle dato che bastano le (105) per dedurre che nel caso isotropo — che solo considererò in seguito — può supporsi nullo il parametro τ e la $\mathfrak{J}$ somma di due funzioni, una, $\mathfrak{J}_1$, delle sole $x_{r,s}$, l'altra, $\mathfrak{J}_2$, delle sole μ_{rs}. Attualmente la (105, 1) permette di asserire che l'*espressione di* T_{rr+1}, dedotta da (99), per $s = r + 1$ *manca del termine di* μ_{rr+1}.

D'altronde, un'espressione lineare omogenea in $T_{rs}^{(1)}$:

$$T_{rs}^{(1)} = \sum_{pq} [m_{rspq} u_{p,q}^{(1)} + n_{rspq} \mu_{pq}^{(1)}], \tag{106}$$

corrisponde al caso isotropo quando e solo quando i tensori m_{rspq}, n_{rspq} sono isotropi, cioè quando, con riferimento cartesiano, risulta [18]

$$\begin{cases} m_{rspq} = \alpha\, \delta_{rs} \delta_{pq} + \beta\, \delta_{rp} \delta_{sp} + \gamma\, \delta_{rq} \delta_{sp}, \\ n_{rspq} = \alpha'\, \delta_{rs} \delta_{pq} + \beta'\, \delta_{rp} \delta_{sq} + \gamma'\, \delta_{rq} \delta_{sp}, \end{cases} \tag{107}$$

con α, β, ecc., coefficienti arbitrari.

Ne segue

$$T_{rs}^{(1)} = \alpha\, \delta_{rs} \sum_p u_{p,p}^{(1)} + \beta u_{r,s}^{(1)} + \gamma\, u_{s,r}^{(1)} + \alpha'\, \delta_{rs} \sum_p \mu_{p,p}^{(1)} + \beta' \mu_{rs} + \gamma' \mu_{sr} \tag{108}$$

che, per la simmetria delle $T_{rs}^{(1)}$, implicano

$$\beta = \gamma, \qquad \beta' = \gamma'. \tag{109}$$

Si ha quindi,

$$T_{rs}^{(1)} = \alpha\, \delta_{rs} \sum_p \varepsilon_{pp}^{(1)} + 2\beta\, \varepsilon_{rs}^{(1)} + \beta'(\mu_{rs} + \mu_{sr}) \tag{110}$$

e poichè l'espressione di $T_{rr+1}^{(1)}$ *deve mancare* del termine in $\mu_{rr+1}^{(1)}$, non può che essere

$$\beta' = 0. \tag{111}$$

L'espressione di $T_{rs}^{(1)}$ *è pertanto quella del caso simmetrico.*

Considerazioni analoghe indicano che un'espressione lineare omogenea di $\lambda_{rs}^{(1}$ nel caso isotropo è del tipo

$$\lambda_{rs}^{(1)} = A'\, \delta_{rs} \sum_p \varepsilon_{pp}^{(1)} + B' u_{r,s}^{(1)} + C' u_{s,r}^{(1)} - (B\, \mu_{rs} + C\, \mu_{sr}) \tag{112}$$

---

[18] Vedi, ad es., B. FINZI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, pag. 100.

che, dovendo risultare nulla per ogni spostamento irrotazionale, implica

$$A' = 0, \qquad B' + C' = 0 \tag{113}$$

mentre la (100), scritta per $s = r + 1$, mostra in base a (105, 1), che *l'espressione di* $\lambda^{(1)}_{rr+1}$ *non può contenere il termine in* $u^{(1)}_{rr+1}$. Nella (112) deve pertanto essere

$$B' = C' = 0. \tag{114}$$

È evidente dunque, in base a (110), (111), (112), (113), (114), che le espressioni delle $T'^{(1)}_{rs}$ dipendono dalle sole $\varepsilon^{(1)}_{rs}$ mentre quelle delle $\lambda^{(1)}_{rs}$ dipendono dalle sole $\mu^{(1)}_{rs}$. D'altronde, se si effettua la derivata seconda di $\mathfrak{J}$ rispetto ad h e si fa tendere h a zero, tenendo presente che $\mathfrak{J}$ dipende da h solo per tramite delle $x_{r,s}$ e $\mu_{r,s}$, si riconosce che i coefficienti della forma quadratica $\mathfrak{J}^{(2)}$ che così si ottiene coincidono con le derivate seconde della $\mathfrak{J}$ rispetto alle $x_{r,s}$, μ_{rs} e che quindi, in tutte le considerazioni e formule precedenti è lecito sostituire ai limiti, per h tendente a zero, delle derivate seconde della $\mathfrak{J}$ rispetto alle $x_{r,s}$, μ_{rs} le analoghe derivate seconde della forma quadratica che esprime $\mathfrak{J}^{(2)}$. In definitiva si conclude, per le considerazioni precedenti che, almeno nel caso isotropo delle piccole deformazioni si può ritenere $\tau = 0$ e $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^{(2)}$ con $\mathfrak{J}^{(2)} = W_1 + W_2$ e W_1 forma quadratica nelle sole $\varepsilon^{(1)}_{rs}$, W_2 nelle sole $\mu^{(1)}_{rs}$.

Da (97), (112), (113), (114) segue, in particolare,

$$W_2 = \frac{1}{2} \sum_{pq} (B\,\mu_{pq} + C\,\mu_{qp})\,\mu_{pq}. \tag{115}$$

Se si deriva la (71) due volte rispetto ad h e si fa tendere h a zero, tenendo conto di (93) si trova, tra l'altro

$$\sum_q \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \mu_{\nu+1q}}\right)^{(1)} \mu^{(1)}_{\nu+2q} - \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \mu_{\nu+2q}}\right)^{(1)} \mu^{(1)}_{\nu+1q}\right] = 0 \tag{116}$$

che si traduce in

$$\sum_{qlm} \left[\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}^{(2)}}{\partial \mu_{\nu+1q}\,\partial \mu_{lm}}\right) \mu^{(1)}_{\nu+2q} - \frac{\partial^2 \mathfrak{J}_2}{\partial \mu_{\nu+2q}\,\partial \mu_{lm}}\,\mu^{(1)}_{\nu+1q}\right] \mu^{(1)}_{lm} = 0 \tag{117}$$

e che, in base a (115) diviene

$$C \sum_q (\mu^{(1)}_{\nu+2q}\,\mu^{(1)}_{q\nu+1} - \mu^{(1)}_{\nu+1q}\,\mu^{(1)}_{q\nu+2}) = 0 \tag{118}$$

e implica

$$C = 0 . \tag{119}$$

Nel caso dei corpi elastici le (72), (115), (119) implicano che siano definite positive W_1 e W_2, singolarmente.

In particolare, dovrà essere

$$B > 0 . \tag{120}$$

3. Riepilogo delle equazioni generali valide per piccole trasformazioni isoterme. Qualche osservazione.

A questo punto non mi sembra inutile il riepilogo delle equazioni fondamentali valide nella statica delle piccole deformazioni isoterme a partire da uno stato naturale per i corpi isotropi con caratteristiche di tensione asimmetriche. Sopprimendo per semplicità di scrittura, l'apice (1) e l'asterisco, ormai superflui, esse sono

$$Y_{rs} + Y_{sr} = 2\, T_{rs}, \tag{121}$$

$$Y_{r+1r+2} - Y_{r+2r+1} = \sum_m \lambda_{rm,m} - M_r, \qquad [\text{in } \mathcal{C}] \tag{122}$$

$$\sum_m \lambda_{rm} N_m = m_r, \qquad [\text{su } \Sigma] \tag{123}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_m T_{rm,m} + \frac{1}{2} \sum_s (\lambda_{r+2s,r+1} - \lambda_{r+1s,r+2})_{,s} = \\ &= F_r + \frac{1}{2} (M_{r+2,r+1} - M_{r+1,r+2}), \qquad [\text{in } \mathcal{C}] \\ &\sum_m T_{rm} N_m + \frac{1}{2} \sum_s (\lambda_{r+2s,s} N_{r+1} - \lambda_{r+1s,s} N_{r+2}) = \\ &= f_r + \frac{1}{2} (M_{r+2} N_{r+1} - M_{r+1} N_{r+2}), \qquad [\text{su } \Sigma]. \end{aligned}\right. \tag{124}$$

A queste, introducendo le costanti di Lamé γ, ν, vanno associate le relazioni

$$W(\varepsilon, \mu) = W_1(\varepsilon) + W_2(\mu), \tag{125}$$

$$W_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} [(\gamma + 2\nu)(\sum_r \varepsilon_{rr})^2 - 4\nu \sum_r (\varepsilon_{rr}\varepsilon_{r+1r+1} - \varepsilon^2_{rr+1})], \tag{126}$$

$$W_2(\mu) = \frac{B}{2} \sum_{rs} \mu^2_{rs}, \qquad B > 0, \tag{127}$$

$$\varepsilon_{rs} = \frac{1}{2}(u_{r,s} + u_{s,r}), \qquad \mu_{rs} = \frac{1}{2}(u_{r+2,\, r+1} - u_{r+1,\, r+2}),_s \tag{128}$$

$$T_{rs} = -\frac{\partial W}{(2-\delta_{rs})\partial \varepsilon_{rs}}, \qquad \lambda_{rs} = -\frac{\partial W}{\partial \mu_{rs}}, \tag{129}$$

$$\delta l^{(i)} = \sum_{rs} [T_{rs}\,\delta\varepsilon_{rs} + \lambda_{rs}\,\delta\mu_{rs}]. \tag{130}$$

Le (122) mostrano che in una teoria in cui si ammette la possibilità di momenti superficiali λ_{rs} non nulli, le caratteristiche di tensione riescono generalmente asimmetriche ([19]) anche in assenza di momenti di massa e superficiali esterni $[M_r = m_r = 0]$. Ciò può togliere alle soluzioni della teoria classica singolarità non sempre plausibili dal punto di vista fisico, come mostrerò più avanti con un esempio.

In una teoria in cui si suppongano necessariamente nulle le λ_{rs}, $[B = 0]$ e le m_r, le equazioni (122), (124) divengono

$$Y_{r+1r+2} - Y_{r+2r+1} = -M_r, \tag{131}$$

$$\begin{cases} \sum_m T_{rm,m} = F_r + \frac{1}{2}(M_{r+2r+1} - M_{r+1r+2}), \\ \sum_m T_{rm} N_m = fr + \frac{1}{2}(M_{r+2}N_{r+1} - M_{r+1}N_{r+2}), \end{cases} \tag{132}$$

mentre le (123), non vanno più prese in considerazione. La (130) diviene, inoltre,

$$\delta l^{(i)} = \sum_{rs} T_{rs}\,\delta\varepsilon_{rs}. \tag{133}$$

Dall'identità di $\delta l^{(i)}$ con $-\delta W$ per ogni trasformazione infinitesima isoterma segue

$$\delta W = -\sum_{rs} T_{rs}\,\delta\varepsilon_{rs}. \tag{134}$$

Le espressioni (133), (134), sono formalmente identiche a quelle che si hanno nell'ipotesi di simmetria degli sforzi e *la struttura della W non muta nel*

([19]) Sulle (122) si noti anche la differenza con i risultati già citati di BODASZEWKI e SOMIGLIANA secondo i quali le quantità $Y_{rs} - Y_{sr}$ dipendono linearmente dalle rotazioni locali.

passaggio dal caso simmetrico a quello asimmetrico se non si ammette l'esistenza di momenti superficiali di contatto [20].

Le (132) mostrano che per le T_{rs} valgono le medesime proprietà di media [21] valide per le Y_{rs} del caso simmetrico, pur di modificare opportunamente la definizione delle coordinate astatiche, iperastatiche, ecc. tenendo conto di M_r, m_r.

4. Significato di un esempio.

Si consideri un prisma di sezione quadrata di lato a, sollecitato sulla superficie laterale ma privo di forze di massa.

La terna di riferimento $\mathcal{T}$ abbia l'origine nel punto medio di uno spigolo, l'asse y_3 parallelo ad esso e gli assi y_1, y_2 paralleli ai lati del quadrato sezione.

Si supponga che il vettore f che caratterizza la sollecitazione esterna superficiale, non dipenda da y_3 e sia ortogonale all'asse y_3 e si cerchino soluzioni per le quali sia:

$$u_3 \equiv 0, \qquad u_1 \text{ e } u_2 \text{ indipendenti da } y_3. \tag{135}$$

Denoterò con f_{is} la componente i-esima di f sulla faccia $y_s = 0$, con $f_{is}^{(a)}$ sul lato $y_s = a$, $(s = 1, 2)$.

In base a (125, (126), (127), (128), le equazioni (124,1) si riducono a due e precisamente alle equazioni

$$\nu \Delta_2 u_r + (\nu + \gamma) \sum_{s=1}^{2} u_{s,rs} + \frac{B}{4} \Delta_2 [\sum_{s=1}^{2} u_{s,rs} - \Delta_2 u_r] = 0, \qquad (r = 1, 2), \tag{136}$$

mentre le equazioni al contorno (123), (124,2) da associare sono

$$(u_{2,1} - u_{1,2})_{,1} = 0, \qquad \text{per } y_1 = 0,\ a, \tag{137}$$

$$(u_{2,1} - u_{1,2})_{,2} = 0, \qquad \text{per } y_2 = 0,\ a, \tag{138}$$

$$(\gamma + 2\nu) u_{1,1} + \gamma u_{2,2} = \begin{cases} -f_{11}, & \text{per } y_1 = 0, \\ f_{11}^{(a)}, & \text{per } y_1 = a, \end{cases} \tag{139}$$

---

[20] Le (131), (132) sono equivalenti alle (3), (3') di Somigliana [loco cit. in nota (1)]. Invece la (134) ne differisce notevolmente, dipendendo ivi δW anche dalle $\delta\omega_r$.

[21] G. Grioli, *Relazioni quantitative per lo stato tensionale di un qualunque sistema continuo e per la deformazione di un corpo elastico in equilibrio*, « Annali di Matematica pura ed applicata », Serie IV, Tomo XXXIII, 1952.

$$(140)\qquad (\gamma+2\nu)u_{2,2}+\gamma u_{1,1}=\begin{cases} -f_{22}, & \text{per } y_2=0,\\ f_{22}^{(a)} & \text{per } y_2=a,\end{cases}$$

$$(141)\qquad \nu(u_{2,1}+u_{1,2})-\frac{B}{4}\,\Delta_2(u_{2,1}-u_{1,2})=\begin{cases} -f_{21}, & \text{per } y_1=0,\\ f_{21}^{(a)}, & \text{per } y_1=a,\end{cases}$$

$$(142)\qquad \nu(u_{2,1}+u_{1,2})+\frac{B}{4}\,\Delta_2(u_{2,1}-u_{1,2})=\begin{cases} -f_{12}, & \text{per } y_2=0,\\ f_{12}^{(a)}, & \text{per } y_2=a.\end{cases}$$

Si supponga

$$(143)\qquad f_{11}=0,\qquad f_{12}=0.$$

Trattasi quindi di una sollecitazione che è di taglio sulla faccia $y_1=0$, normale sulla faccia $y_2=0$.

Con una semplice verifica si riconosce che la coppia

$$(144)\qquad \begin{cases} u_1=b\left\{\left[y_1^2-\dfrac{\gamma+2\nu}{\nu}\,y_2^2\right]-B\,\dfrac{\gamma+2\nu}{2\nu^2}\,\dfrac{sh\,ky_2+sh\,k(a-y_2)}{sh\,ka}\right\},\\ u_2=0,\end{cases}$$

con b costante non nulla e

$$(145)\qquad k=\sqrt{\frac{4\nu}{B}}$$

verifica le equazioni indefinite (136), e, tenute presenti le (143), (145), le condizioni al contorno (137), (138), (139,1), (142,1).

Inoltre, sulla faccia $y_1=0$, risulta, in base a (141,1), (145)

$$(146)\qquad f_{21}=2(\gamma+2\nu)b\left[y_2+\sqrt{\frac{B}{\nu}}\,\frac{ch\,ky_2-ch\,k(a-y_2)}{sh\,ka}\right]$$

e si ha

$$(147)\qquad \lim_{y_2=0} f_{21}=2(\gamma+2\nu)b\sqrt{\frac{B}{\nu}}\,\frac{1-ch\,ka}{sh\,ka}.$$

In altri termini, sulla faccia $y_1=0$ si ha una sollecitazione di taglio che per $y_2 \to 0$ tende ad un limite non nullo mentre sul lato $y_2 = 0$ si ha una sollecitazione puramente normale. È quindi

$$
(148) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{y_2 \to 0} Y_{21}(0, y_2) = 2(\gamma + 2\nu) b \sqrt{\dfrac{B}{\nu}} \dfrac{1 - ch\, ka}{sh\, ka} \neq 0, \\ \lim\limits_{y_1 \to 0} Y_{12}(y_1, 0) = 0. \end{cases}
$$

Anzi, generalmente, risulta

$$
(149) \quad Y_{21} - Y_{12} = -\sum_s \lambda_{3s,s} = \frac{B}{2} u_{1,222} = -2b(\gamma + 2\nu) \sqrt{\frac{B}{\nu}} \frac{ch\, ky_2 - ch\, k(a - y_2)}{sh\, ka}.
$$

Dunque, in un problema in cui i dati siano tali che gli sforzi di taglio assegnati sulle facce $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ hanno limiti differenti quando si tende allo spigolo, la introduzione delle λ_{rs} porta ad una soluzione regolare e in particolare a sforzi *monodromi* come si riconosce facilmente in base a (144).

Invece la teoria classica che vuole nulle le λ_{rs} implica singolarità sullo spigolo.

E si badi che tale singolarità è dovuta non all'esistenza del punto angolare ma al fatto che i dati sugli sforzi di taglio presentano la particolarità sopradetta.

È infatti facile riconoscere che se si fa tendere B a zero, il problema al contorno tende a quello ben noto del caso simmetrico, mentre le (144) [vedi (145)] tendono alla sua soluzione:

$$
(150) \qquad u_1 = b\left(y_1^2 - \frac{\gamma + 2}{\nu}\right) y_2^2, \qquad u_2 = 0.
$$

Essa è regolare con tutte le sue derivate ma corrisponde ad assegnati sforzi di taglio che tendono ad un medesimo limite quando si tende allo spigolo del prisma $y_1 = y_2 = 0$.

Si ha infatti, com'è facile riconoscere, tenuto conto di (150)

$$
(151) \qquad \lim_{B \to 0} (Y_{21} - Y_{12}) = 0,
$$

$$
(152) \qquad \lim_{B \to 0} f_{21} = 2b(\gamma + 2\nu) y_2,
$$

$$
(153) \qquad \lim_{y_2 \to 0} \lim_{B \to 0} f_{21} = 0.
$$

Invece, nel caso simmetrico, $[B = 0]$ l'assegnare sforzi di taglio sulle facce $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ con limiti differenti quando si tende allo spigolo comune implica generalmente polidromia negli sforzi e divergenza nelle loro derivate.

Ciò capita ([22]), ad esempio, se si dà sforzo di taglio nullo per $y_2 = 0$ e costante non nullo per $y_1 = 0$.

Dalle considerazioni sopradette si deduce che può essere conveniente una teoria in cui si suppongano non nulle le λ_{rs} al fine di evitare nella soluzione delle polidromie certamente non plausibili dal punto di vista fisico. Del resto, anche se si può obbiettare che non si conosce il modo di realizzare momenti superficiali, ciò a *rigore* implica [come ho osservato] che si debba ritenere la sollecitazione esterna sui vari elementi superficiali riducibile a forze $f d\sigma$ [e, generalmente, non è neppure facile indicare il modo di realizzare la loro distribuzione superficiale], senza coppie $[m = 0]$ ma *senza escludere a priori* la possibilità di λ_{rs} non nulle, relativamente allo stato tensionale interno.

([22]) Loco cit. in nota ([3]).