Sur les surfaces de genre $P_{12} > 1$.

par Pol Burniat (Bruxelles)

En souvenir de Guido Castelnuovo, à l'occasion du premier centenaire de sa naissance.

Résumé. - *On démontre l'existence des surfaces algébriques* $F(P_2 > 1,\ p^{(1)} = 1)$ *et* $F(p_g = p_a \geq 0,\ p^{(1)} \gtrless 3)$ *signalées dans les énoncés I et II des pages 2 et 3.*

Introduction.

Selon la tradition, on désigne par p_a, p_g, $p^{(1)}$ les genres arithmétique, géométrique, linéaire d'une surface algébrique, par P_2 son bigenre.

Selon la classification proposée par F. Enriques [1], l'ensemble E des surfaces algébriques de 12-genre $P_{12} > 1$ peut être subdivisé en deux grands sous-ensembles E_1 et E_2. Dans E_1 figurent les surfaces de genre $p^{(1)} = 1$, dans E_2 figurent les surfaces de genre $p^{(1)} > 1$.

L'auteur de cette classification précise :

1°. Les surfaces $F^0(P_{12} > 1,\ p^{(1)} = 1)$ portent un faisceau de grenre p de courbes elliptiques a^0, soit le faisceau $\{a^0\}$. Elles sont dotées des genres

$$p_a \gtrless 0,\ p_g = p + p_a \quad \text{ou} \quad p_a = -1,\ p_g = p \geq 0.$$

Dans le dernier cas, elles portent en outre un faisceau elliptique de courbes.

2°. Les surfaces de genres $P_{12} > 1$, $p^{(1)} > 1$. Celles-ci admettent des modèles i-canoniques, $i \gtrless 1$.

Si on veut pousser plus loin la classification, la question se pose immédiatement de savoir.

1. Quelles sont les valeurs atteintes par P_2 sur les surfaces $F^0(P_2 > 1, p^{(1)} = 1)$ pour p et p_g donnés ?

2. Quelles sont les valeurs atteintes par $p^{(1)}$ sur les surfaces $F^0(P_2 > 1, p^{(1)} > 1)$ pour p_a et p_g donnés ?

Voici une dizaine d'années, les connaissances à ce propos étaient demeurées fort indigentes. Nous nous proposons de rassembler ici les contributions que nous avons apportées et apportons encore dans ce domaine.

On peut ainsi résumer la teneur de ce travail.

I. - $P_2 > 1$, $p^{(1)} = 1$.

Une surface $F^0(P_2 > 1,\ p^{(1)} = 1)$ porte un faisceau $\{a^0\}$ de genre p de courbes elliptiques a^0. Son système canonique pur $|K^*|$ est donc la somme d'une partie A formée à l'aide de morceaux de genre 1 de courbes a^0 parmi lesquels $m \geq 0$ moitiés au moins de pareilles courbes; $|K^*|$ est complété par une série linéaire g_n de courbes a^0 sur $\{a^0\}$.

Nous démontrons essentiellement ce qui suit.

Soit p le genre du faisceau $\{a^0\}$ de courbes elliptiques a^0 porté par une surface $F^0 = F(P_2 > 1,\ p^{(1)} = 1)$ et soit g_n la série linéaire du faisceau $\{a^0\}$ contenue dans le système canonique de F^0. Cela étant,

1°. *Le bigenre des surfaces $F^0(p_g > p)$ a pour expression*

$$P_2 = 2p_g + p - 1 + m.$$

De telles surfaces existent, avec $p_a = p_g - p$, pour tout $p_g \gtreqless 0$ et tout $m \geq 0$ tel que $P_2 > 1$.

2°. *Le bigenre de surfaces $F^0(p_g = p)$ a pour expression*

$$P_2 = 3p_g - 1 + m \quad ou \quad P_2 = 3p_g - 3 + m$$

suivant que la série linéaire g_n est une série g^{p-1}_{2p-1} ou la série canonique g^{p-1}_{2p-2} du faisceau $\{a^0\}$. De telles surfaces existent, suivant le cas, avec $p_a = 0$, pour tout $p_g \gtreqless 0$ et tout $m \geq 0$ tel que $P_2 > 1$, ou, avec $p_a = -1$, pour tout $p_g \geq 0$ et au moins tout entier m pair ≥ 0 tel que $P_2 > 1$.

3°. *Le bigenre des surfaces $F^0(p_g = p - 1)$ a pour expression*

$$P_2 = 3p_g + m.$$

De telles surfaces existent, avec $p_a = -1$, pour tout $p_g \gtreqless 0$ et au moins tout entier $m \geq 0$ pair tel que $P_2 > 1$ (¹).

La classification de Enriques ne reconnait pas l'existence de ces dernières surfaces F^0 de genre $p_g = p - 1$.

(¹) Des plans 2^3-uples qui sont des surfaces du type 3° viennent d'être costruits, pour tout $m \geq 0$ tel que $P_2 > 1$, par Mlle VANDEZAND (Bruxelles).

II. - $P_2 > 1$, $p^{(1)} > 1$.

A ce propos, avons montrons que

Il est des surfaces régulières de genres

$$p_g = 0,\ p^{(1)} = 3,\ 4,\ \dots\ 7.$$

$$p_g = 1,\ 2,\ p^{(1)} = 3,\ 4,\ \dots\ 8p_g + 7,$$

$$p_g \geqq 3,\ p^{(1)} = 2p_g - 3,\ 2p_g - 2,\ \dots\ 8p_g + 7.$$

La valeur $p^{(1)} = 8p_g + 2$ *n'est toutefois pas assurée pour* $p_g = 1, 2$ *et les valeurs paires de* p_g *de la forme* $6\alpha + 4$, $\alpha \geqq 0$, *qui ne peuvent se mettre sous la forme*

$$p_g = r(s-1) + s(t-1) + t(r-1),\ r \geqq s \geqq t \geqq 1,\ s \geqq 2.$$

Nous simplifions la démonstration de ces résultats que nous avons donnés en 1958 et 1959 [12].

§ 1. - Rappels relatifs à des surfaces 2^2-uples abéliennes.

1. - Rapportons un espace S à trois dimensions aux coordonnées cartésiennes x_1, x_2, x_3. Pour simplifier l'écriture, représentons par x le triple de nombres x_1, x_2, x_3. Désignons par $\varphi(x) = 0$ l'équation de la surface représentée par φ.

Faisons choix d'une surface algébrique irréductible F puis de trois surfaces F_i, $i = 1, 2, 3$, dont aucune ne contient F, et satisfaisant les conditions suivantes :

1°. Chaque surface $F_j + F_h$, $i \neq j \neq h = 1, 2, 3$, est d'ordre pair $2n_i$,

2°. Les courbes multiples de $F_j + F_h$ sont multiple d'ordre pair et les courbes multiples de F sont multiples d'ordre pair ou nul pour $F_j + F_h$.

Dans ces conditions, la courbe de diramation de la fonction $z_i = \sqrt{F_j(x)F_h(x)}$ est la partie simple E_{jh} de l'intersection $F \cap (F_j + F_h)$. La courbe E_i, qui est à la fois de diramation pour z_j et z_h, est donc la partie commune à E_{ij} et E_{ih}. On a par conséquent $E_{jh} = E_j + E_h$. Sur E_i, on a $z_j = z_h = 0$.

Considérons un point simple X de F. Supposons-le, soit multiple d'ordre impair pour E_i et d'ordre pair pour E_j et E_h, soit multiple d'ordre pair pour

E_i et multiple d'ordre impair pour E_j et E_h. D'après la définition des courbes E_{jh}, on voit de suite que X (considéré comme courbe exceptionelle de première espèce sur F) est composante de E_i.

Observons qu'on peut écrire, avec A_i courbe convenable,

$$F \cap (F_j + F_h) = E_j + E_h + 2A_i.$$

On dit que A_i est la courbe de diramation apparente pour z_i.

Dans tout ce qui suit, le sens du vocable « courbe » est celui que lui confère la géométrie algébrique sur une surface.

2. - Soit F^0 une surface ayant le champ de rationnalité

$$H^0 = \{x,\ z_1,\ z_2;\ \ F(x) = 0,\ z_i^2 = F_j(x)F_h(x)\}.$$

Il est clair que $H^0 \ni z_3 = \sqrt{F_1(x)F_2(x)} = z_1 z_2 : F_3(x)$. On peut donc attribuer les coordonnées $(x, z_1, z_2, z_3;\ F(x) = 0)$ à un point générique de F^0. Cette surface porte donc l'involution I^0 des quaternes de points $X^0 = \{X_0, X_1, X_2, X_3\}$,

$$X_0(x,\ z_1,\ z_2,\ z_3), \qquad X_1(x,\ z_1,\ -z_2,\ -z_3),$$

$$X_2(x, -z_1, z_2, -z_3),\ X_3(x,\ -z_1,\ -z_2,\ z_3),$$

qui est induite sur F^0 par le 2^2-groupe $G = \{T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3;\ T_q : X_0 \longrightarrow X_q\}$ d'automorphismes de H^0; l'involution I^0 est composée avec les involutions I_i d'ordre 2 engendrées sur F^0 par les automorphismes T_i; $q=0, 1, 2, 3$, $i=1, 2, 3$.

Les courbes de points unis de I^0 sont les courbes U_i de points unis pour les trois involutions I_i, c'est-à-dire les courbes de points fixes pour les automorphismes T_i. On voit facilement que $T_j U_i = U_i$ et que, par suite, $2U_i \subset I^0$.

La surface F est une image F^0/I^0 de I^0. Soit X le point X^0/I^0 de la surface F. Considérons l'application $\sigma : X^0 \longrightarrow X : F^0 \longrightarrow F$. Les courbes de diramation de σ^{-1} sont celles qui sont à la fois de diramation pour les fonctions des couples z_j et z_h; ce sont donc les courbes $E_i = \sigma(2U_i)$.

Si C est une courbe de F, $C^0 = \sigma^{-1}C \subset I^0$. Moyennant $E = E_1 + E_2 + E_3$ et $U = U_1 + U_2 + U_3$, on a donc sur F^0 les égalités

$$\sigma^{-1}E_i = E_i^0 = 2U_i, \quad U_i = \frac{1}{2}E_i^0, \quad E^0 = 2U.$$

On dit que F^0 appartient à la classe d'une surface quadruple $4F$ dotée des courbes de diramation E_i. Pour le rappeler, on écrir a $F^0 = 4F(E_1, E_2, E_3)$ et, plus souvent, $F^0 = 4F$.

3. - Soit c une section plane générique de F. La surface $F_j + F_h$ est d'ordre $2n_i$. Prenons une surface $\varphi_i(x) = 0$ d'ordre n_i dans S. La fonction

$$V_i(x) = F_j(x)F_h(x) : \varphi_i^2(x) = z_i^2 : \varphi_i^2(x)$$

est rationnelle en les coordonnées d'un point X de F. Elle induit sur F une équivalence linéaire

$$E_j + E_h + 2A_i \equiv 2n_i c \Rightarrow E_j + E_h \equiv 2(n_i c - A_i).$$

La fonction $z_i : \varphi_i(x)$ est rationnelle en les coordonnées d'un point de F^0. Elle induit sur F^0, d'après ce qui précède, l'équivalence linéaire

$$\frac{1}{2} E_j^0 + \frac{1}{2} E_h^0 + A_i^0 \equiv n_i c^0 \Rightarrow U_j + U_h \equiv n_i c^0 - A_i^0$$

en vertu des (1) et, par suite, moyennant $n_i c - A_i \equiv e_i$,

(2) $$E_j + E_h \equiv 2e_i, \quad U_j + U_h \equiv e_i^0, \quad U \equiv U_i + e_i^0.$$

Les courbes canoniques impures K et K_0 de F et F^0 satisfont le théorème de Enriques-Castelnuovo

$$K_0 \equiv U + K^0 \Rightarrow K_0 \equiv U_i + (e_i + K)^0 \Rightarrow K_0 \equiv U_i + (e_i')^0$$

si selon l'habitude, C' représente les adjointes d'une courbe C de F.

On déduit facilement de là que $|K_0|$ est la combinaison linéaire de ceux des systèmes linéaires de courbes fixes dans le groupe G

$$U + |K|^0 \text{ et } U_i + |e_i'|^0$$

qui sont effectifs.

Désignons par $r_0 - 1$, $r_i - 1$ et $s_0 - 1$, $s_i - 1$ les dimensions effectives et les dimensions virtuelles des systèmes respectifs $|K|$, $|e_i'|$. Les genres géométrique et arithmétique de F^0 ont pour expressions, d'après ce qui précède,

(3) $$p_g = r_0 + r_1 + r_2 + r_3, \; p_a = s_0 + s_1 + s_2 + s_3.$$

Il est clair que r_0 et s_0 sont les genres géométrique et arithmétique de F.

On trouve encore

$$|2K_0| = |2U + 2K^0| = |(E + 2K)^0| = |(E'')^0|$$

et, par conséquent, si $p^{(1)}$ est le genre linéaire de F^0 et si $|(E'')^0|$ est le système bicanonique pur de F^0,

$$p^{(1)} = \frac{1}{4} 2K_0 \cdot 2K_0 + 1 = \frac{1}{4} (E'')^0 \cdot (E'')^0 + 1 = E'' \cdot E'' + 1\,.$$

§ 2. - $P_2 > 1$, $p^{(1)} = 1$.

4. - A notre connaissance, au titre de résultats non accidentels concernant les valeurs prises par P_2 sur les surfaces $F^0(P_2 > 1,\ p^{(1)} = 1)$, on ne dispose que de ceux fournis par des plans doubles d'Enriques [2], plans doubles construits pour toutes les valeurs de p_g, qui ont le genre $p_a = p_g$ ou $p_a = 1$. Chaque valeur de p_g ne correspond qu'à un nombre très restreint de valeurs de P_2 sur ces plans doubles.

Récemment (²), nous avons établi l'existence de surfaces de genres

$$p_g = p_a = 0\,,\ P_2 = 2p_g + p - 1 + m$$

$p \geq 0$ et $m \geq 0$ entiers arbitraires donnant $P_2 > 1$.

5. - Mettons en évidence un caractère qui s'indique naturellement comme élément de base pour une classification des surfaces $F^0(P_2 > 1,\ p^{(1)} = 1)$. Montrons aussi comment ce caractère permet de fournir les différentes expressions de P_2 sur les surfaces F^0 correspondantes, sous la réserve qu'existent ces surfaces.

Une surface F^0 dont il est question n'est pas une réglée. On en conclut que

$$p_g - p \geqq p_a \geqq -1 \Rightarrow p_g \geqq p - 1.$$

Puisque $p^{(1)} = 1$ et $P_2 > 1$, F^0 porte un faisceau $\{a^0\}$ de genre $p \geq 0$ de courbes elliptiques a^0 et le système bicanonique pur $|2K^*|$ de la surface comporte une partie variable qui est une série g_μ, de dimension $P_2 - 1 \geqq 1$, linéaire sur le faisceau $\{a^0\}$. Observons que si g_μ est spéciale, elle doit donner

$$P_2 - 1 \leqq p - 1 \Rightarrow p \geqq P_2 \geqq 2.$$

Le système canonique pour $|K^*|$ de F^0 possède le degré $K^* \cdot K^* = p^{(1)} - 1 = 0$. Dans le cas, à certains égards le plus général, $|K^*|$ est donc la somme de deux parties. La première, soit A, est formée à l'aide de morceaux elliptiques

(²) Bull. Accadémie royale de Belgique, 1962-3-pp 290-295.

de courbes a^0. La seconde est une série linéaire g_n, éventuellement non effective, de courbes a^0 sur $\{a^0\}$. La série g_μ de $|2K^*|$ est donc la somme de $2g_n$ et des composantes de A qui, comptées deux fois, sont des courbes a^0. Par conséquent,

$$\mu = 2n + m, \; m \geqq 0.$$

Trois cas seulement peuvent se présenter:

1°. La série g_n n'est pas spéciale ($p_g \geqq p - 1$).

Ce cas est le seul possible pour $p_g > p$. Il donne

$$n = p_g + p - 1, \; \mu = 2p_g + 2p - 2 + m.$$

La série g_μ n'est pas spéciale, car $p \geqq 2$ entraine $p_g \geqq p - 1 \geqq 1$, donc $\mu > 2p - 2$ et

$$\text{(I)} \qquad P_2 = 2p_g + p - 1 + m.$$

2°. La série g_n est la série canonique g_{2p-2}^{p-1} du faisceau $\{a^0\}$, ($p_g = p$).

Alors, $n = 2p - 2$, $\mu = 4p - 4 + m$, la série g_μ n'est pas spéciale, car $p \geqq 2$ entraine $\mu > 2p - 2$ et

$$\text{(II)} \qquad P_2 = 3p_g - 3 + m.$$

3°. La série g_n est une série spéciale g^{p-2}.

Alors, on voit aisément que, le faisceau $\{a^0\}$ pouvant être hyperelliptique, on a $n = 2p - 3$ ou $n = 2p - 4$. On trouve que g_μ ne peut être spéciale que si $n = 2p - 4$ et $p = 2$, $m = 2$ ou $p = 3$, $m = 0$, ce qui amène les solutions arithmétiques

$$p_g = 1, \; P_2 = 2 \quad \text{ou} \quad p_g = 2, \; P_2 = 3.$$

Dans tout autre cas, g_μ est non spéciale et

$$P_2 = 3p_g - 2 + m \quad \text{ou} \quad P_2 = 3p_g - 4 + m \text{ (}^3\text{)}.$$

Dans les expressions de P_2 qui précèdent, $m \geqq 0$ représente un entier arbitraire satisfaisant toutefois la condition $P_2 > 1$.

Rappelons que la classification de ENRIQUES refuse les surfaces F^0 de genre $p_g = p - 1$. Passons maintenant aux théorèmes d'existence annoncés.

(3) Nous n'avons pas rencontré de telles surfaces.

6. - *Soit* $p \geqslant 0$ *un entier quelconque. Pour toute valeur et* $p_g \geqslant p$, *il est des surfaces de genres* $p^{(1)} = 1$, $p_a = p_g - p$ *et de bigenre*

$$P_2 = 2p_g + p - 1 + m,$$

$m \geqslant 0$ *entier arbitraire assurant la condition* $P_2 > 1$.

Dans l'espace S, désignons par $f_n(d^s)$ une surface d'ordre n passant s fois par une droite donnée d et par $f_n(0^s + d^r)$, $r > s$, la même surface dotée d'un point 0 r-uple donné sur d; les valeurs des ordres n, r, s doivent être entendues au sens de valeurs assignées.

Prenons un cône $F = f_{p+2}(0^{p+2} + d^p)$ $p \geqslant 0$; F est hyperelliptique pour $p \geqslant 2$. Désignons par $\{a\}$ le faisceau de ses génératrices a. En tant qu'être simplement infini, $\{a\}$ est birationnellement identique à une section plane générique c de F. Pour $p = 0$, la droite d est évidemment incidente à 0 mais n'est pas située sur F.

Représentons par $|a_2|$ et $|a_{p+2}|$ les séries linéaires g_2^1 et g_{p+2}^2 de droites $F \cap |f_1(d)|$ et $F \cap |f_1(0)|$, par $|a_m|$ une série linéaire d'ordre m sur $\{a\}$.

Le système canonique impur $|K|$ du cône F est formellement défini comme intersection de F avec le système $|f_{p-2}(0^p + d^{p-1})| = |(p-1)f_1(d) + f_1(0) - 2f_1|$ de ses adjointes d'ordre $(p+2) - 4 = p - 2$. On a donc

$$|K| = |(p-1)a_2 + a_{p+2} - 2c|.$$

Pour $p \geqslant 1$, $|(p-1)a_2|$ est la série canonique du faisceau $\{a\}$. Pour uniformiser le language, disons que la série non effective $g_{-2}^{-1} = |-a_2|$ est la série canonique de ce faisceau pour $p = 0$.

Suivant le cas, nous écrirons

$$|K| = |(p-1)a_2 + a_{p+2} - 2c| = |k + a_{p+2} - 2c| = |a_{3p} - 2c|.$$

On sait que l'adjoint d'un système linéaire $|C|$ de courbes de F a pour expression $|C'| = |C + K|$ à la condition d'inclure dans les courbes K, au titre de courbes exceptionnelles de première espèce, les points-base de $|C|$ qui sont simples pour F.

7. - Partons de la surface $F^0 = 4F$ définie par le cône F et trois surfaces générales

$$F_1 \equiv f_{2r}(d^{2r}), \quad F_2 \equiv f_{2s+2}(d^{2s}), \quad F_3 \equiv f_2, \quad r \geqslant 0, \quad s \geqslant 0.$$

Ces surfaces ont l'ordre de multiplicité pair sur d. Elles ont avec F les courbes d'intersection simple

$$E_1 \equiv 2ra_2, \quad E_2 \equiv 2sa_2 + 2c, \quad E_3 \equiv 2c;$$

on trouve immédiatement (n° 3)

$$e_1 \equiv sa_2 + 2c, \quad e_2 \equiv ra_2 + c, \quad e_3 \equiv (r+s)a_2 + c,$$
$$E = 2(r+s)a_2 + 4c$$

et, puisque $e'_i \equiv K + e_i$, $E'' \equiv E + 2K$

$$e'_1 \equiv sa_2 + 2c + (a_{3p} - 2c) \equiv a_{3p+2s}, \quad e'_2 \equiv a_{3p+2r} - c, \quad e'_3 \equiv a_{3p+2r+2s} - c,$$
$$E'' \equiv a_{6p+4r+4s}.$$

On sait (n° 3) que le système bicanonique de F^0 est fourni par la relation $|2K| = |(E'')^0|$, c'est-à-dire, d'après l'expression donnée ci-dessus de E'',

$$|2K_0| = |\overset{0}{a}_{6p+4r+4s}|.$$

$|2K|$ est donc composé avec les courbes a^0 du faisceau $\{a^0\} = \sigma^{-1}\{a\}$ de F^0. Il s'ensuit que $|2K_0|$ est une série linéaire d'ordre $6p + 4r + 4s$ non spéciale de courbes a^0 sur $\{a^0\}$, que les courbes a^0 sont elliptiques, que le système $|2K^0|$, dépourvu de partie fixe, est le système bicanonique pur de F^0 et que, par suite, F^0 possède les genres

$$p^{(1)} = 1, \; P_2 = 5p + 1 + 4r + 4s.$$

(n° 3). D'autre part, parmi les systèmes $|e'_i|$, seul le système $|e'_1|$ est effectif. Le système canonique $|K_0|$ se réduit par conséquent (n° 3) au système linéaire à partie fixe

$$|K_0| = U_1 + |e'_1|^0 = \frac{1}{2}E^0_1 + |e'_1|^0.$$

Or on vient de le voir, le système $|e'_1|$ est une série linéaire $|a_{3p+2s}|$ sur le faisceau $\{a\}$. Il vient donc

$$p_g = 2p + 2s + 1 \Rightarrow P_2 = 2p_g + p - 1 + 4r.$$

Retournons à la formule (3). Le cône F, de genre p, de genre géométrique $r_0 = 0$ et de genre arithmétique $s_0 = -p$. Le système $|e_1|$ est une série linéaire non spéciale sur $\{a\}$. Il s'ensuit que $r_1 = s_1 = p_g$. Nous allons voir qu'on a $s_2 = s_3 = 0$.

Les systèmes $|e'_i|$, $i = 2, 3$, ont la forme $|a_\gamma - c|$. Ces systèmes donnent évidemment $r_2 = r_3 = 0$. Soit ρ la dimension virtuelle du système $|a_\gamma|$, ρ est aussi la dimension de la série linéaire ponctuelle $c \cap |a_\gamma|$. Pour contenir une courbe c, $|a_\gamma|$ doit donc satisfaire formellement $\rho + 1$ conditions et

$|a_\gamma - c|$ est de dimension virtuelle $\rho - (\rho + 1) = -1$. Dès lors, $s_2 = s_3 = 0$ et F^0 possède les genres (nº 3)

$$p_a = p_g - p, \quad p^{(1)} = 1, \quad p_g = 2p + 1 + 2s, \quad P_2 = 2p_g + p - 1 + 4r.$$

8. - Pour $s = 0$, on a

$$p_g = 2p + 1, \quad P_2 = 2p_g + p - 1 + 4r.$$

Pour $s > 0$, déformons la surface F_1 jusqu'à lui faire toucher le cône F le long d'une droite $a \neq d$. La chose est toujours possible. En effet, une surface $f_{2s-1}(d^{2s-1})$ augmentée d'un plan $f_1(d)$ tangent à F en dehors de d répond à cette condition.

S'il en est ainsi fait, la courbe de diramation $E_2 + E_3$ et la courbe E perdent la partie $2a$ et le système $|e_1|$ est diminué de a. Il résulte de là que les ordres des séries $|e_1'| = |e_1 + K|$, $|E''| = |E + 2K|$ sont diminués respectivement de 1 et de 2, si bien qu'on obtient de la sorte des surfaces F^0 dotées des genres

$$p_g = 2p + 1 + (2s - 1), \quad P_2 = 2p_g + p - 1 + 4r.$$

Au total, on peut affirmer qu'il est des surfaces F^0 dotées des genres

$$p_a = p_g - p, \quad p^{(1)} = 1, \quad p_g = 2p + 1 + n, \quad P_2 = 2p_g + p - 1 + 4r,$$

$p \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ entiers arbitraires.

Il est entendu que nous supposons toujours m choisi tel qu'il donne $P_2 > 1$.

9. - Pour $r = 0$, on a $P_2 = 2p_g + p - 1$.

Pour $r > 0$, disposons de l'un des $2r$ plans $f_1(d)$ de F_1 pour faire passer celui-ci par un point Q de l'intersection $E_2 \cap E_3$. Observons qu'il est

$$E_2 \cdot E_3 = 2c \cdot 2c = 4(p + 2) \geqslant 4$$

pareils points (simples pour cette intersection). A ce moment, la courbe $E_2 + E_3$ reste inchangée mais la courbe E se voit doter d'un point triple en Q. Ce point est donc base simple pour le système $|E''|$ dont la dimension diminue ainsi de 1, $|e_1'|$ restant le même.

D'autre part, si l'un des plans de F_1 devient tangent à F le long d'une génératrice a, $|e_1|$ ne change pas, E_1, donc E et la série $|E''|$ perdent $2a$ et P_2 diminue de 2, p_g restant inchangé.

Enfin, si on procède successivement à ces deux opérations, la dimension de $|E''|$ diminue de trois unités.

Sans toucher à p_g, pour $r > 0$, on peut donc construire des surfaces F^0 dotées du bigenre

$$P_2 = 2p_g + p - 1 + m, \quad m = 4r, \quad 4r - 1, \quad 4r - 2, \quad 4r - 3$$

et on peut affirmer qu'il est des surfaces F^0 dotées des genres

$$p_a = p_g - p, \quad p^{(1)} = 1, \quad p_g = 2p + 1 + n, \quad P_2 = 2p_g + p - 1 + m,$$

$m \geqslant 0$ entier arbitraire donnant toutefois $P_2 > 1$.

10. - On peut préciser. Désignons par q la génératrice OQ, par q^* la droite q doté du point-base assigné Q qui est triple pour E. D'après ce qu'on a vu, on a

$$|2K_0| = |(E'' - q)^0| + q^{*0}.$$

Partie de la courbe E_1 donnant $E_1^0 = 2U_1$, la courbe q^{*0} est une certaine courbe b comptée deux fois à propos de laquelle on peut écrire

$$q^* \cdot q^* = -1 \Rightarrow q^{*0} \cdot q^{*0} = 2b \cdot 2b = -4 \Rightarrow b \cdot b = -1.$$

$$a \cdot q^* = 0 \Rightarrow a^0 \cdot b = 0.$$

D'autre part, si w est le genre de b, on sait que

$$2K_0 \cdot b = (E'' - q)^0 \cdot b + q^{*0} \cdot b = 2(2w - 2 - b \cdot b) = 4w - 2.$$

Mais $(E'' - q)^0 \cdot b = 0$, car $(E'' - q)^0$ est une somme de courbes a^0. De plus, $q^{*0} \cdot b = 2b \cdot b = -2$. Dés lors, on a

$$-2 = 4w - 2 \Rightarrow w = 0$$

et q^{*0} est une courbe exceptionnelle de première espèce de F^0 comptée deux fois. Elle est donc nécessairement composante fixe de $|2K_0|$.

11. - Avant de poursuivre notre démonstration, établissons l'énoncé suivant:

On peut construire des triples de surfaces F, F_2, F_3 *dotées de* $t \leqq p + 2$ *contacts isolés indépendants en* t *points d'une conique* C.

Il suffit de démontrer l'indépendance pour $t = p + 2$, évidemment.

Les cônes F forment un système linéaire de dimension

$$\binom{p+4}{2} - 1 - \binom{p+1}{2} = 3p + 5$$

pour d et O donnés. Ceux de ces cônes qui touchent un cône quadratique $F^* = f_2(O^2)$ irréductible le long de $p+2$ de ses génératrices, soit les génératrices q_i, $i = 1, 2, \dots p+2$ choisies en position générique, forment un système linéaire Σ de dimension

$$\rho \geqq 3p + 5 - 2(p+2) = p + 1.$$

Or le cône F^* est fondamental pour ce système. Il est donc dans Σ $\infty^{\rho-1}$ cônes F contenant F^*. Mais ces cônes F décomposés sont ceux du système Σ^* ∞^p composé à l'aide de F^* et d'un qroupe de p plans $f_1(d)$ variables. Il s'ensuit que l'on a

$$\rho - 1 = r \Rightarrow \rho = r + 1$$

et les conditions de contact sont bien indépendantes comme annoncé.

Observons que Σ s'obtient en combinant linéairement le système $F^* + |pf_1(d)|$ avec un cône F de Σ n'appartenant pas à Σ^*. Le cône générique F de Σ n'a pas de partie fixe commune avec un cône décrivant Σ^*, un cône de Σ et un cône de Σ^* ne sont pas composés avec les cônes d'un même faisceau. Il s'ensuit que le cône générique de Σ est irréductible.

Maintenant, considérons la conique C découpée sur F^* par un plan générique de S et le faisceau Y des quadriques tangentes à F^* le long de C. Deux quadriques génériques de Y touchent F en chacun des $p+2$ points $C \cap q_i = Q_i$ et notre affirmation initiale est établie.

12. - Partons d'une surface F^0 associée à un cône F et trois surfaces

$$F_1 \equiv f_{2r}(d^{2r}), \quad F_2 \equiv F_3 \equiv f_2, \quad F_2 \neq F_3, \quad r \geqq 0,$$

F, F_2, F_3 étant choisies tangentes en $t \leq p+1$ points Q_i d'une conique C, $i = 1, 2, \dots p+1$.

Actuellement, les courbes $E_2 \equiv 2c$, $E_3 \equiv 2c$ passent doublement par chaque point de contact Q_i. Chaque point Q_i est donc double pour les courbes e_1 et quadruple pour E. Ce point est par suite base-simple pour $|e_1'|$ et base double pour $|E''|$. Désignons par b_t le système des t droites q_i, par b_t^* le système dest t droites pointées $q_i^* = q_i - Q_i$. On a alors

$$|e_1'| = |a_{3p} - b_t| + b_t^*, \quad |E''| = |a_{6p+4r} - 2b_t| + 2b_t^*,$$

car les systèmes $|e_1'|$, $|E''|$ sont des séries linéaires de génératrices du faisceau $\{a\}$.

Remarquons qu'une droite q_i^* ne rencontre E qu'en le seul point quadruple Q_i. La restriction de σ^{-1} à q_i^* n'a donc pas de diramation et q_i^* se décompose en quatre courbes rationnelles deux à deux disjointes. Or

$$q_i^* \cdot q_i^* = -1 \Rightarrow q_i^{*0} \cdot q_i^{*0} = -4,$$

ces quatre courbes rationnelles deux à deux disjointes ont donc le degré -1 et q_i^{*0} est la somme de quatre conrbes exceptionnelles de première espèce de F^0.

De ce qui précède, il résulte que les systèmes linéaires

$$|K^*| = \frac{1}{2} E_1^0 + |a_{3p} - b_t|^0, \quad |2K^*| = |a_{6p+4r} - 2b_t|^0$$

sont les systèmes canonique et bicanonique purs de la surface F^0 actuellement construite. De plus, $|a_{3p} - b_t| = |a_{3p-t}|$ et $|E'' - 2b_t| = |a_{6p+4r-2t}|$ sont des séries linéaires non spéciales sur le faiseau $\{a\}$, car leurs ordres respectifs dépassent $2p-2$. On en conclut que les surfaces F^0 en question possèdent les genres

$$p_a = p_g - p, \; p_g = 2p + 1 - t \geq p, \; P_2 = 5p + 1 + 4r - 2t = 2p_g + p - 1 + 4r.$$

Enfin, les courbes E_2, E_3 possèdent encore

$$E_2 \cdot E_3 - 4t \geqslant 4(p+2) - 4(p+1) = 4$$

points d'intersection simple. Pour $r \geq 0$, opérant comme il a été fait au n° 9, on peut déduire des surfaces précédentes de nouvelles surfaces F^0 dotées des genres

$$p_g \geqslant p, \; P_2 = 2p_g + p - 1 + m, \quad p_a = p_g - p, \quad P_2 > 1.$$

13. - *Pour tout entier* $p \geqslant 1$, *il est des surfaces* F^0 *dotées des genres*

$$p_a = -1, \quad p_g = p - 1, \quad P_2 = 2p_g + p - 1 + 2m = 3p_g + 2m,$$

$m \geqslant 0$ *entier arbitraire assurant toutefois la rèlation* $P_2 > 1$.

Prenons encore une surface F^0 du type précédent mais supposons maintenant que les surfaces F, F_2, F_3 sont dotées de $p+2$ contacts isolés Q_i distribués de façon quelconque sur une conique C.

Un raisonnement analogue à celui qu'on a adopté au n° 12 conduit à la relation

$$|K^*| = \frac{1}{2} E_1^0 + |a_{3p} - b_{p+2}|^0, \; |2K^*| = |a_{6p} - 2b_{p+2} + 4ra_2|^0.$$

Rappelons (n° 6) que

$$a_{3p} = k + a_{p+2}, \quad k \equiv (p-1)a_2,$$

$|k|$ étant la série canonique de droites a du faisceau $\{a\}$. On déduit de là

$$|K^*| = \frac{1}{2}E_1^0 + |k + a_{p+2} - b_{p+2}|^0, \quad |2K^*| = |2k + 2a_{p+2} - 2b_{p+2} + 2ra_2|^0.$$

A présent, les $p+2$ droites composant b_{p+2} ne sont pas coplanaires, car elles sont distribuées sur un cône quadratique F^* (n° 11). La courbe $2b_{p+2}$, cependant, est l'intersection complète $F \cap F^*$. De là découlent les relations

$$a_{p+2} \equiv\!\!|\!\!\equiv b_{p+2} \Rightarrow |K^*| = \frac{1}{2}E_1^0 + |k^*|^0, \quad |k^*| = |a_{2p-2}| \neq |k|,$$

$$2a_{p+2} \equiv 2b_{p+2} \Rightarrow |2K^*| = |2k^0 + 2ra_2^0| = |a^0_{4p-4+4r}| = |a^0_\mu|.$$

La série linéaire $|k^*| = |a_{2p-2}|$ n'est pas spéciale et $p_g = p - 1 \geq 0$.

Si $r = 0$ et $p = 1$, on trouve $\mu = 0$ et $P_2 < 2$. Alors la surface F^0 ne répond pas à notre propos. Il faut donc prendre $p + r \gtreqless 2$, ce qui entraine $\mu > 2p - 2$. Dès lors, g_μ n'est pas spéciale et $P_2 = 3p - 3 + 4r = 3p_g + 4r$.

Observons que la surface F^0 de genre $p_g = p - 1$ qui porte le faisceau $\{a^0\}$ de genre p est nécessairement de genre $p_a = -1$, ce qui était prévu (n° 3).

Actuellement, l'intersection $E_2 \cap E_3$ est confondue en les $p+2$ points Q_i. Le raisonnement fait au n° 9 conduit immédiatement à des surfaces F^0 de bigenre $P_2 = 3p_g - 3 + 4r - 2$. Mais E_2, E_3 ne comportant plus de points d'intersection simple, on ne peut plus passer aux autres valeurs de P_2.

En somme, il est des surfaces F^0 dotées des genres

$$p_a = -1, \quad p_g = p - 1, \quad P_2 = 3p - 3 + 2m = 3p_g + 2m,$$

$m \gtreqless 0$ entier arbitraire assurant la condition $P_2 > 1$.

Notre énoncé du n° 13 est ainsi établi.

14. - *Pour $p \gtreqless 0$ entier quelconque, il est des surfaces F^0 dotées des genres*

$$p_a = -1, \quad p_g = p, \quad P_2 = 3p_g - 3 + m,$$

$m \geq 0$ entier pair arbitraire fournissant $P_2 > 1$.

Supposons maintenant

$$F_1 \equiv f_{2r}(d^{2r}), \quad F_2 \equiv F_3 \equiv f_2(q^2), \quad F_2 \neq F_3, \quad r \gtreqless 0,$$

avec q droite générique de l'espace S. Maintenant, les courbes E_2 et E_3 sont deux couples de courbes c_1 du faisceau $|c_1| = F \cap |f_1(q)|$ et E_2, E_3 passent doublement par les points Q_i de l'intersection $q \cap F$. Dans ces conditions, les $p+2$ points Q_i sont situés dans le plan $f_1(O+q)$. Contrairement à ce qu'on a eu plus haut, on a dans le cas présent $a_{p+2} \equiv b_{p+2}$ et les systèmes $|K^*|$, $|2K^*|$ se réduisent respectivement à

$$|K^*| = \frac{1}{2} E_1^0 + |(p-1)a_2|^0, \quad |2K^*| = |2k^0 + 2ra_2^0| = |a_\mu^0|.$$

On constate d'après celà que

$$p = 0 \Rightarrow |K^*| - \frac{1}{2} E_1^0 = |-a_2|^0 = |a_{-2}|^0 \Rightarrow p_g = 0.$$

Pour $p \geq 1$, $(p-1)a_2$ est la série canonique g_{2p-2}^{p-1} du faisceau $\{a\}$ et $p_g = p$. D'autre part, $\mu = 4p - 4 + 4r$. On ne peut accepter l'hypothèse $p - 1 + r = 0$, car cela entrainerait $\mu = 0$, donc $P_2 \leq 1$. Il s'ensuit que $p + r \geq 2$, donc $\mu > 2p - 2$ et g_μ n'est pas spéciale. Il résulte de là que

$$P_2 = 3p - 3 + 4r = 3p_g - 3 + 4r.$$

Disposant convenablement de la surface F_1 (voir n° 9) on peut passer à des surfaces F^0 sur lesquelles $P_2 = 3p_g - 3 + 4r - 2$.

En somme, il est bien des surfaces F^0 actuellement considérées pour toute valeur du bigenre

$$P_2 = 3p_g - 3 + 2m > 1.$$

On pourrait calculer le genre p_a de F^0 en s'appuyant sur l'expression donnée à ce genre au n° 3. Il est plus intéressant de vérifier que

A côté du faisceau $\{a^0\}$, *les surfaces* F^0 *ici examinées portent encore un faisceau elliptique de courbes de genre* $\frac{1}{2}(P_2 + p_g + 1)$.

La restriction de l'involution I^0 de F^0 à une courbe c_1^0 porte

$$c_1^0 \cdot U = \frac{1}{2} c_1^0 \cdot E^0 = 2c_1 \cdot E = 2c_1 \cdot (2ma + 4c) = 4m$$

points de diramation, car $a \cdot c_1 = 1$ et $c_1 \cdot c_1 = 0$. Le genre w de c_1^0 est lié à m et au genre p d'une courbe c_1 par la formule de Zeuthen qui s'écrit ici

$$2w - 2 = 4(2p-2) + 4m \Rightarrow w - 1 = 4p - 4 + 2m.$$

Moyennant une homographie convenable de l'espace S en soi, on peut donner au faisceau de plans $|f_1(q)|$ l'équation $x_1 =$ cte. Alors, on a

$$F_2(x) \equiv F_2(x_1), \quad F_3(x) = F_3(x_1)$$

et la courbe C^* d'équation

$$z_1^2 = F_2(x_1)F_3(x_1)$$

est elliptique, car F_2 et F_3 sont des polynomes du second degré en x_1.

Si c_1 est la courbe d'équation $z_1 = \alpha$ du faisceau $|c_1| = F \cap |f_1(q)|$, on a

$$z_1^2 = F_2(\alpha_1)F_3(\alpha) = A = \text{cte}$$

sur c_1^0. Il s'ensuit que c_1^0 est décomposée eu deux parties c_1^* et c_1^{**} sur lesquelles on a respectivement $z_1 = +\sqrt{A}$ et $z_1 = -\sqrt{A}$. Lorsque c_1 décrit $|c_1|$, c_1^* et c_1^{**} décrivent le faisceau $|c^*|$ d'équation (I) sur F^0 et ce faisceau est birationnellement identique à la courbe C^*.

Une courbe c_1^0 est donc la somme de deux courbes c^*. D'après une formule de NOETHER bien connue, le genre w de c_1^0 et le genre w^* de c^* satisfont la relation

$$w - 1 = 2(w^* - 1) + c^* \cdot c^* = 2(w^* - 1) \Rightarrow w^* - 1 = 2p - 2 + m,$$

si on tient compte de la valeur plus haut obtenue pour w. Connaissant les expressions $P_2 = 3p_g - 3 + 2m$ et $p_g = p$, on vérifie immédiatement que

$$w^* = \frac{1}{2}(P_2 + p_g + 1).$$

La surface F^0 portant les faisceaux de courbes $\{a^0\}$ et $\{c^*\}$ de genres p et 1, respectivement, le genre p_a de F^0 satisfait les conditions

$$-1 \lesssim p_a \leq p_g - p - 1 \Rightarrow p_a = -1.$$

Nous avons ainsi achevé d'établir les assertions formulées au n° 14.

§ 2. - $P_2 > 1$, $p^{(1)} > 1$.

15. - La détermination des systèmes de valeurs $(p_a, p_g, p^{(1)})$ atteintes sur une surface algébrique a fait l'objet de recherches systématiques, soit pour $p_a = p_g$ donnés, soit pour $p^{(1)}$ donné. Peu de résultats ont été obtenus à ce propos avant 1958. Rappelons rapidement l'essentiel des connaissances acquises dans ce domaine.

En 1891, G. CASTELNUOVO [3] construit la famille des surfaces à système canonique simple et irréductible sur lesquelles p_g est maximum pour $p^{(1)}$ fixé, c'est-à-dire les surfaces de genres $p_g \geqq 4$, $p^{(1)} = 3p_g - 6$.

La construction de surfaces projectivement canoniques ($p_g \geqq 4$) simples et régulières amène les valeurs $p^{(1)} = 5, 6, 7, 8$ (ENRIQUES [4], FRANCHETTA [5]), $p^{(1)} = 8, 9, 10, 11$ (L. GODEAUX [6]). Nous avons obtenu des modèles de genre $p^{(1)} = 9, 10, \ldots 17$ [7]. La progression dans cette voie se heurte à de grosses difficultés et ne concerne que $p_g = 4$. Nous avons signalé également des quadriques doubles canoniques pour $p^{(1)} = 13, 14, \ldots 33$ [8].

Les tentatives de résoudre le problème pour $p_a = p_g = 0$ n'ont pas permis de dépasser $p^{(1)} = 3$ (L. GODEAUX [9], L. CAMPEDELLI [10]). Pour $p_g = 1, 2$, on connait des modèles de genre $p^{(1)} = 2, 3$ [14].

16. - Pour établir notre thèse, nous construisons des modèles projectifs qui sont des plans quadruples $F^0 = 4F$ (au sens donné au n° 2).

Une courbe algébrique du plan F d'ordre assigné n et possédant les ordres de multiplicité assignés $r, s, \ldots$ en les points donnés $A, B, \ldots$ sera représentée par $C_n(A^r + B^s + \ldots)$.

Une surface $F^0 = 4F$ est caractérisée par ses courbes de diramation E_1, E_2, E_3. Les systèmes que nous avons désignés par $|e_i'|$ (n°. 3), $|E''|$ et les entiers r_i, s_i, p_a, p_g, $p^{(1)}$, en découlent à la suite de calculs élémentaires. Ceux-ci seront épargnés au lecteur.

Pour diminuer la valeur de $p^{(1)}$, p_g restant fixe, on choisira une courbe E_i passant par m intersections simples de $E_j \cap E_h$. La courbe E sera de la sorte dotée de m points triples, le système $|E''|$ sera ainsi doté de m points base simples supplémentaires et $p^{(1)}$ sera diminué de m unités.

En particulier, si $|E_i|$ contient un système $|C_n(B^n)|$ et si $E_j \cap E_h$ contient au moins $n+2$ intersections simples, on peut construire une courbe E qui possède $m = 0, 1, 2, \ldots n+2$ points triples en faisant choix, au besoin d'un point B aligné sur les points d'un couple ou de deux couples convenables de cette intersection.

17. - Considérons une surface F^0 qui est un plan quadruple $4F$ caractérisé par les courbes de diramation

$$E_1 \equiv C_{2r+1}(X^{2r+1} + Y) + Z, \quad E_2 = C_{2s+1}(Y^{2s+1} + Z) + X,$$

$$E_3 = C_{2t+1}(Z^{2t+1} + X) + Y, \quad r \geq s \geq t \geq 1$$

avec des points X, Y, Z non en ligne droite. La présence des composantes ponctuelles Z, X, Y des courbes E_1, E_2, E_3 résulte de la définition des courbes de diramation E_i (n° 2).

Le système linéaire $|E_2| \supset |C_{2s}(Y^{2s})|$ et on a $E_1 \cdot E_2 = 2r.2t \geq 2s$. On peut donc (n° 16) doter E de $m \leq 2s+2$ points triples A. On trouve facilement que, actuellement, (n° 3)

(1) $$p_a = p_g = r(s-1) + s(t-1) + t(r-1),$$

(2) $$E'' \equiv C_{2r+2s+2t-3}(X^{2r-1} + Y^{2s-1} + Z^{2t-1} + \Sigma A) \Rightarrow p^{(1)} = 8p_g + 7 - m.$$

Observons que $s = t = 1 \Rightarrow p_g = r-1$ et $2s = 2$. Les valeurs atteintes par $p^{(1)}$ sur les surfaces F^0 correspondantes sont donc

(3) $$p^{(1)} = 8p_g + 7, \quad 8p_g + 6, \dots 8p_g + 3.$$

Prenons maintenant $s = 2$, $t = 1 \Rightarrow p_g = 2r - 1 \geq s$ et $2s = 4$. Il est alors des surfaces F^0 pour chaque valeur du genre linéaire

(4) $$p^{(1)} = 8p_g + 7, \quad 8p_g + 6, \dots 8p_g + 1.$$

De même, avec $\alpha \geqq 1$ et

$$r = 2\alpha, \quad s = t = 2 \Rightarrow p_g = 6\alpha,$$

$$r = 2\alpha + 1, \quad s = 3, \quad t = 1 \Rightarrow p_g = 6\alpha + 2,$$

étant donné qu'on peut maintenant prendre $m \leq 6$, on voit qu'on construit des surfaces F^0 pour toutes les valeurs du genre linéaire (4).

En somme, nous avons obtenu des surfaces F^0 dotées des genres linéaires (4) pour toute valeur de p_g sauf pour les valeurs $p_g = 0, 1, 2, 4$ et les valeurs $p_g = 6\alpha + 4 \geqq 6$ qui ne sont pas justiciables de la formulation (1) avec $s \geqq 2$.

En particulier, la thèse énoncée au II de l'introduction est justifiée pour $p_g = 0$.

En dehors de $p_g = 0, 1, 2$, les seules valeurs de p_g pour lesquelles la valeur $p^{(1)} = 8p_g + 2$ ne soit pas assurée sont les valeurs paires du type $6\alpha + 4$, $\alpha \geqq 0$, non justiciables de la formule (1).

18. - Sur des surfaces F^0 de genre $p_g = 1$ sont atteintes, d'après ce qui précède, les valeurs du genre linéaire $p^{(1)} = 15, 14, \dots 11$.

Prenons les courbes de diramation

$$E_1 \equiv C_4(X^4), \quad E_2 \equiv C_4(Y^4), \quad E_3 \equiv C_2.$$

Elles donnent $p_g = 1$, $E_1 \cdot E_3 = 8$ et on peut disposer de E_2 (n° 16) pour donner à la courbe E $m \lesssim 6$ points triples A. On a alors

$$p_a = p_g = 1, \quad E'' \equiv C_4(X^2 + Y^2 + \Sigma A) \Rightarrow p^{(1)} = 9 - m.$$

Dès lors, on peut affirmer l'existence de surfaces F^0 de genres $p_a = p_g = 1$ et

$$p^{(1)} = 15,\ 14, \dots 11,\ 9, \dots 3.$$

La thèse énoncée au II de l'introduction est ainsi vérifiée pour $p_g = 1$.

19. - Les surfaces F^0 associées respectivement aux triples de courbes de diramation

$$E_1 \equiv C_{2r+2}(X^{2r+2}), \quad E_2 \equiv C_4(Y^4), \quad E_3 \equiv C_2, \quad r \gtrsim 2,$$

$$E_1 \equiv C_{2r}(X^{2r}), \quad E_2 \equiv C_4(Y^2), \quad E_3 \equiv C_2(Y^2), \quad r \gtrsim 2,$$

donnent toutes $p_a = p_g = r$. De plus, elles entrainent

$$E'' \equiv C_{2r+2}(X^{2r} + Y^2) \Rightarrow p^{(1)} = 8p_g + 1,$$

$$E'' \equiv C_{2r}(X^{2r+2} + Y^2) \Rightarrow p^{(1)} = 8p_g - 7.$$

Dans le premier cas, $E_2 \cdot E_3 = 8$. On a $2r + 2 \gtrsim 6$. Disposant de E_1 (n° 16), on peut doter E de $m \lesssim 8$ points triples. Dans le second cas, $E_2 \cdot E_4 = 4$. On peut disposer de E_1 pour que E possède $m \lesssim 4$ points triples

En résumé, depuis le début de ce §, on a démontré l'existence de surfaces F^0 possédant les genres

$$p_g \gtrsim 2, \quad p^{(1)} = 8p_g + 7, \dots 8p_g + 1, \dots 8p_g - 7, \dots 8p_g - 11,$$

avec la réserve déjà formulée pour $p^{(1)} = 8p_g + 2$.

20. - Traitons séparément les cas $p_g = 2$, $p_g = 3$.

Avec les courbes

$$E_1 \equiv C_3, \quad E_2 \equiv E_3 \equiv C_3(X^2),$$

on trouve $p_g = 2$. Mais $E_2 \cdot E_3 = 5$ et le système $|E_1|$ est ∞^9. On peut donc doter E de $m \lesssim 3$ points triples A, c'est-à-dire obtenir

$$E'' \equiv C_3(X^2 + \Sigma A) \Rightarrow p^{(1)} = 6 - m.$$

Rassemblant les résultats jusqu'à présent obtenus pour $p_g = 2$, nous voyons qu'il est des surfaces possédant les genres

$$p_g = 2, \quad p^{(1)} = 23, \dots 19, 17, \dots 3.$$

Avec les courbes

$$E_1 \equiv C_4(X^3 + Z), \quad E_2 \equiv C_4(Y^4 + X + Z), \quad E_3 \equiv C_4(X + Z^3),$$

on obtient $p_a = p_g = 3$, $E_1 \cdot E_3 = 10$ et $|E_2| \supset |C_2(X^2)|$. Il est possible de donner $m \lesssim 4$ points triples à E. Il vient alors

$$E'' \equiv C_6(X^3 + Y^2 + Z^3 + \Sigma A) \Rightarrow p^{(1)} = 15 - m, \ m \lesssim 4.$$

D'autre part, les courbes $E_1 \equiv E_2 \equiv E_3 \equiv C_3$ peuvent donner lieu à une courbe E possédant $m \lesssim 7$ points triples, si bien que

$$E'' \equiv C_3(\Sigma A) \Rightarrow p^{(1)} = 10 - m, \ m \lesssim 7.$$

Rassemblant tous les résultats jusqu'à présent récoltés pour $p_g = 3$, nous voyons qu'il existe des surfaces F^0 possédant les genres

$$p_g = 3, \ p^{(1)} = 31, 32, \dots 3.$$

L'énoncé du II de l'introduction est confirmé pour $p_g = 0, 1, 2, 3$.

Il reste à examiner les cas $p_g \gtrsim 4$

21. - Choisissons des entiers

$$t \gtrsim s \gtrsim 0, \quad r = 2t + 2 + \varepsilon, \quad \varepsilon = 0 \text{ ou } 1.$$

Ils donnent lieu aux relations

$$2r - 4s \gtrsim 2r - 4t \gtrsim 4, \quad 2r - 2s \gtrsim 4$$

et r peut prendre toute valeur entière supérieure à 1.

Les courbes de diramation

$$E_1 \equiv C_{2r-4s}(X^{2r-4s} + Y), \quad E_2 \equiv C_{2s+4}(X^{2s} + Y^3 + Z^2), \quad E_3 \equiv C_4(Y + Z^2)$$

entrainent

$$p_g = 2r \gtrsim 4, \ E'' \equiv C_{2r-2s+2}(X^{2r-2s-2} + Y^3 + Z^2) \Rightarrow p^{(1)} = 8p_g - 16s - 12.$$

D'autre part,

$$|E_1| \supset |C_3(X^3)|, \quad |E_2| \supset |C_3(Y^2 + Z)|,$$

$$E_1 \cdot E_2 \geqq C_3(X^3) \cdot C_3(Y^2 + Z) = 9.$$

Puisque le système $|E_3|$ est ∞^{10}, on peut faire passer une courbe E_3 par $m \lesseqgtr 6$ points doubles de la courbe $E_1 + E_2$ (en dehors de X, Y, Z). A ce moment, E est dotée de m points triples et les surfaces F^0 correspondantes sont dotées des genres

$$p_a = p_g = 2r, \quad p^{(1)} = 8p_g - 16s - 12 - m, \quad m \lesseqgtr 6. \quad (a)$$

Ensuite, les courbes de diramation

$$E_1 \equiv C_{2r-4s-2}(X^{2r-4s-2}), \quad E_2 \equiv C_{2s+4}(X^{2s} + Y^2), \quad E_3 \equiv C_4(Y^2)$$

donnent également $p_a = p_g = 2r$ et

$$E'' \equiv C_{2r-2s}(X^{2r-2s-4} + Y^2) \Rightarrow p^{(1)} = 8p_g - 19 - 16s.$$

On vérifie que $|E_3|$ est ∞^{11}, que

$$|E_1| \supset |C_2(X^2)|, \quad |E_2| \supset |C_4(Y^2)| \Rightarrow E_1 \cdot E_2 \geqq 8.$$

Il est donc au moins ∞^3 courbes E_3 passant par $m \lesseqgtr 8$ points de l'intersection $E_1 \cap E_2$ qui en compte au moins 8 dont plus que 2 ne sont pas alignés sur Y. La courbe E ainsi réalisée compte m points triples et les surfaces correspondantes ont le genre linéaire

$$p^{(1)} = 8p_g - 16s - 19 - m, \quad m \lesseqgtr 8. \quad (b)$$

En somme, donnant à m les valeurs qu'il peut prendre dans (a) et (b), on trouve qu'il est des surfaces F^0 possédant le genre linéaire

$$p^{(1)} = 8p_g - 16s - 12, \ 8p_g - 16s - 13, \ldots 8p_g - 16s - 27.$$

Donnant maintenant à s les valeurs $0, 1, \ldots t$ et remarquant que la plus petite valeur obtenue pour $s = s^0$ précède immédiatement la plus grande valeur que prend $p^{(1)}$ pour $s = s^0 + 1$, on constate qu'il est des surfaces de genres

$$p_g = p_a = 2r, \ p^{(1)} = 8p_g - 12, \ 8p_g - 13, \ldots 8p_g - 16t - 27.$$

Observons que, actuellement,

$$r = 2 + 2t + \varepsilon \Rightarrow 16t = 8r - 16 - 8\varepsilon \Rightarrow 8p_g - 16t - 27 = 4p_g - 11 + 8\varepsilon \lessgtr 4p_g - 3$$

et on conclut à l'existence de surfaces F^0 pour lesquelles

$$p_a = p_g = 2r, \quad p^{(1)} = 8p_g + 7, \quad 8p_g + 6, \dots 4p_g - 3,$$

moyennant la réserve habituelle à propos de la valeur $8p_g + 2$.

Occupons-nous de $p_g > 4$ impair. Pour ce, prenons les trois triples de courbes de diramation

$$E_1 \equiv C_{2r-4s}(X^{2r-4s}) + Z, \; E_2 \equiv C_{2s+4}(X^{2s} + Y^2 + Z), \; E_3 \equiv C_4(Y^2 + Z^3),$$

$$E_1 \equiv C_{2r-4s}(X^{2r-4s}) + Y, \; E_2 \equiv C_{2s+4}(X^{2s} + Y^3), \; E_3 \equiv C_4(Y),$$

$$E_1 \equiv C_{2r-4s-2}(X^{2r-4s-2}), \; E_2 \equiv C_{2s+4}(X^{2s}), \; E_3 \equiv C_4,$$

qui fournissent toutes $p_a = p_g = 2r + 1 \geqq 5$ et, respectivement,

$$E'' \equiv C_{2r-2s+2}(X^{2r-2s-2} + Y^2 + Z), \; E'' \equiv C_{2r-2s+2}(X^{2r-2s-2} + Y^3)$$

$$E'' \equiv C_{2r-2s}(X^{2r-2s-4}),$$

puis

$$p^{(1)} = 8p_g - 16s - 12, \quad p^{(1)} = 8p_g - 16s - 16, \quad p^{(1)} = 8p_g - 23 - 16s.$$

Dans les deux premiers cas, $|E_1| \supset |C_4(X^4)|$ et on a $E_2 \cdot E_3 \geqq 8$. Disposant de E_1 on peut donner $m \leq 6$ points triples à E.

Dans le dernier cas, $|E_1| \supset |C_2(X^2)|$, $|E_2| \supset |C_4|$, $|E_3| = |C_4|$. Il est toujours possible d'assujettir deux courbes C_4 à se couper en $m \lessgtr 8$ points situés sur les deux droites composant $C_2(X^2)$.

Réunissant les résultats qui précèdent, on constate que $p^{(1)}$ peut prendre toute valeur allant de $8p_g - 16s - 12$ à $8p_g - 16s - 31$, puis, donnant à s les valeurs successives $0, 1, 2, \dots t$, toutes les valeurs allant de $8p_g - 12$ à $8p_g - 16t - 31$. De plus,

$$r = 2t + 2 + \varepsilon \Rightarrow 16t = 8r - 16 - 8\varepsilon = 4p_g - 20 - 8\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8p_g - 16t - 31 = 4p_g - 11 + 8\varepsilon \lessgtr 4p_g - 3.$$

Dès lors, il est des surfaces de genres

$$p_g = 2r + 1, \; p^{(1)} = 8p_g + 7, \; 8p_g + 6, \dots 4p_g - 3.$$

En somme :

Il est des surfaces F^0 pour tous les couples de genres

$$p_a = p_g \geq 4,\ p^{(1)} = 8p_g + 7,\ 8p_g + 6, \dots 4p_g - 3,$$

avec la réserve déjà formulée à propos de $p^{(1)} = 8p_g + 2$

22. - Pour terminer, prenons encore les triples de courbes

$$E_1 \equiv C_{2r+1}(X^{2r}),\quad E_2 \equiv C_{2r+1}(X^{2r}),\quad E_3 \equiv C_3,\quad r \geq 2,$$

$$E_1 \equiv C_{2r+1}(X^{2r}),\quad E_2 \equiv C_{2r+3}(X^{2r+2}),\quad E_3 \equiv C_3,\quad r \geq 2.$$

Elles donnent respectivement $p_g = 2r$ et $p_g = 2r + 1$.

Dans le premier cas [4], $E_1 \cdot E_2 = 4r + 1$, $E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_3 = 6r + 3$. De plus, le système linéaire $|E_1| = |E_2|$ de courbes rationnelles est de dimension $4r + 2$. Celles de ses courbes qui passent par $4r + 1$ points génériques de E_3 forment un faisceau dont la base est précisément donnée par le point X et ces $4r + 1$ points. Il s'ensuit que E peut acquérir $m \leqq 4r + 1$ points triples, ce qui conduit, puisque $4r + 1 = 2p_g + 1$, à des surfaces F^0 de genre $p^{(1)} = 4p_g - 2\ 4p_g - 3, \dots 4p_g - 2 - (2p_g + 1) = 2p_g - 3$.

Dans le second cas,

$$E'' \equiv C_{4r+1}(X^{4r}) \Rightarrow p^{(1)} = 8r + 2 = 4p_g - 2.$$

De plus, $E_1 \cdot E_3 = 6r + 3$ et le système de courbes rationnelles $|E_2|$ est de dimension $4r + 6$. Le système Σ des courbes E_2 qui passent par $m \leqq 4r + 3 = 2p_g + 1$ des $6r + 3$ points simples de l'intersection $E_1 \cap E_3$ est de dimension $6r + 3 - m = \geq 2r \geq 4$. Dans Σ on peut donc choisir une courbe E_2 ne contenant pas E_1, car $|E_3 - E_2| = |C_2(X^2)|$ est ∞^2 seulement. On peut donc disposer de E_2 pour donner $m \leqq 4r + 3 = 2p_g + 1$ point triples à la courbe E et, par suite, construire des surfaces F^0 de genres $p_g = 2r + 1 \geq 5$ et $p^{(1)} = 4p_g - 2,\ 4p_g - 3, \dots 2p_g - 3$.

Ce qui précède fachève la démonstration de l'énoncé du II ce l'introduction.

23. - Où en est le problème posé après la présente contribution ? Il est difficile répondre à cette question.

En effet, si on connait la valeur minimale $p^{(1)} = 2p_g - 3$ du genre linéaire sur une surface de genre $p_g \geq 3$, valeur minimale valable sous des conditions très larges, on n'en connait pas la valeur maximale.

---

[4] $E'' \equiv C_{4r-1}(X^{4r-2}) \Rightarrow p^{(1)} = 4p_g - 2.$

Des formules limitant $p^{(1)}$ supérieurement ont été proposées. La plus simple

$$p^{(1)} = 11p_a + 17, \quad [16]$$

est due à MARCHIONNA. Une autre,

$$p^{(1)} = 2p_a + 8p_g + 11 - r, \quad [15]$$

a été donnée par SEVERI, r désignant le nombre base de la surface supposée dénuée de courbes exceptionnelles. Aucune indication n'est fournie sur la validité éventuelle de l'égalité. Un problème demeuré jusqu'à présent difficile à résoudre reste donc posé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Bologna, Ed. Zanichelli, 1949, pp. 463-464.

[2] — —, *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)}=1$, Rend. Accad. Lincei, 1° semestre, 1898.

[3] G. CASTELNUOVO, *Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie*, Rendic. Ist. Lombardo, serie II, vol. XXIV, 1891; «Memorie Scelte», n. XVIII.

[4] F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, idem, pp. 268-284.

[5] A. FANCHETTA, *Su alcuni esempi di superficie canoniche*, Seminario Mat. di Roma, 1939.

[6] L. GODEAUX, *Construction d'une surface canonique du septième ordre*, Bull. Soc. Sc. de Liège, 1944, pp. 87-97; *Idem du huitième ordre*, Bull. Sc. Math. 1944, pp. 132-144; *Idem. du neuvième ordre*, Bull. Acad. royale de Belgique, 1944, pp. 202-212.

[7] P. BURNIAT, *Modèles de surfaces canoniques normales de* S_3 *et de genre linéaire* $11 \gtrless p^{(1)} \gtrless 17$, Colloque de Géom. Alg., Liège, 1952, pp. 189-210.

[8] — —, *Modèles de surfaces canoniques de genres* $p_a = 4$ *et* $p^{(1)} = 13, 14, \ldots 33$, Bull. Ac. royale de Belgique, 1957, pp. 720-730.

[9] L. GODEAUX, *Sur une surface algébrique de genres arithmétique et géométrique muls dont le genre linéaire* $p^{(1)}$ *est égal à* 2, Bull. Acad. royale de Belgique, 1933, pp. 26-37.

[10] L. CAMPEDELLI, *Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine*, Rendic. Accad. Lincei, 1932, pp. 536 542.

[11] P. BURNIAT, *Sur la classification des surfaces algébriques*, Bull. Acad. royale de Belgique, 1965, pp. 434-440.

[12] — —, *Superficie algebriche regolari di genere geometrico* $p_g \geq 4$ *qualunque e di genere* $p^{(1)} = 2p_g - 3, 2p_g - 2, \ldots 8p_g + 7$, Rendic. Accad. Lincei, 1958, pp. 276-281 et 404-409; *Surfaces algébriques régulières de genre géométrique* $p_g = 0, 1, 2, 3$ *et de genre linéaire* $p^{(1)} = 3, 4, \ldots 8p_g + 7$, Troisième Colloque de Géométrie algébrique tenu à Bruxelles du 17 au 19 décembre 1959, pp. 129-145

[13] F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, pp. 294-295.

[14] — —, Pour $p_g = 1, 2$, voir par exemple *Le superficie algebriche*, pp. 311-321.

[15] F. SEVERI, *Osservazioni a proposito di una Nota di E. Kähler*, Rendic. Circolo mat. Palermo, p. 79, 1932.

[16] E. MARCHIONNA, *Sopra una relazione fra i generi di una superficie irregolare*, Rendic. Accad. Lincei, dicembre 1957.