Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni (*).

Memoria di Ennio De Giorgi (a Roma).

Sunto. - *In questo lavoro do una definizione della misura* $(r-1)$*-dimensionale della frontiera orientata di un insieme di* BOREL *contenuto in uno spazio euclideo ad* r *dimensioni e dimostro alcune fra le più notevoli proprietà di tale misura.*

La teoria della misura sviluppata in questo lavoro [1] concerne le frontiere di insiemi di uno spazio euclideo S_r; tali frontiere non sono riguardate come semplici insiemi di punti ma come *insiemi orientati*, per i quali si definisce non solo la misura assoluta ma anche la misura relativa delle proiezioni su un qualunque iperpiano. I fondamenti di questa teoria sono stati posti recentemente da R. CACCIOPPOLI [2] (in generale per la misura $(r-h)$-dimensionale); contemporaneamente ed indipendentemente io ero pervenuto agli stessi risultati, partendo da un altro punto di vista e con intenti diversi. CACCIOPPOLI si è proposto di dare una teoria generale dell'integrazione delle forme differenziali in più variabili ed una estensione completa delle formule di GREEN-STOKES. Il mio scopo invece era inizialmente una generalizzazione sostanziale di certi problemi isoperimetrici e partivo dalla formula di GAUSS-GREEN come istanza a priori.

Stabilisco così una condizione necessaria e sufficiente perchè sussista una simile formula relativamente ad un insieme di BOREL E: in tale formula compare una funzione vettoriale d'insieme a variazione limitata il cui differenziale adempie all'ufficio che ha l'« elemento $(n-1)$-dimensionale » nel caso ordinario. La variazione totale di tale funzione additiva, che si identifica con la misura $(r-1)$-dimensionale secondo CACCIOPPOLI della frontiera *orientata* di E, viene chiamata in questo lavoro *perimetro dell'insieme* E. Di questo perimetro si dà un'espressione analitica, mediante il limite di un integrale

---

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(1) I principali risultati contenuti in questo lavoro sono stati esposti nella mia nota *Definizione ed espressione analitica del perimetro di un insieme*, « Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sc. fis. mat. nat. », Serie VIII, Vol. XIV, fasc. 3 (marzo 1953), pp. 390-393.

(2) Vedi R. CACCIOPPOLI, *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati*. « Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sc. fis. mat. nat. », Serie VIII, Vol. XII, fasc. 1, 2 (gennaio-febbraio 1952), pp. 3-11, 137-146.

spaziale contenente un parametro. Il procedimento per giungere alla detta funzione additiva d'insieme è quanto mai semplice e si fonda su una conveniente approssimazione della funzione caratteristica dell'insieme E mediante funzioni regolari, come limite delle quali si ritrova la funzione caratteristica dell'insieme E. La formula generale di Gauss-Green si ottiene in tal modo come limite della formula ordinaria d'integrazione per parti.

L'espressione analitica del perimetro permette di ottenere con relativa facilità alcuni risultati fondamentali, cui non sembra agevole pervenire partendo dalle definizioni originali di Caccioppoli. Il più importante a mio avviso è il seguente: *il perimetro di un insieme E è il minimo limite dei perimetri degli insiemi poliedrici approssimanti in media E* (cioè le cui funzioni caratteristiche tendano in media d'ordine 1 verso la funzione caratteristica di E). Segnalerò pure la proprietà isoperimetrica, per cui la misura di un insieme si limita mediante il suo perimetro, e precisamente risulta minore della potenza $\left(\frac{r}{r-1}\right)$-esima del perimetro stesso.

La presente teoria si ispira a concezioni affatto diverse da quelle che sono alla base di precedenti definizioni di misura dimensionale, p. es. quelle di Gross e di Carathéodory, le quali non sono peraltro applicabili alle questioni suaccennate, p. es. alla formula di Gauss-Green, che dopo essere state completate da qualche definizione di *normale*, come appunto si è fatto finora. Per quanto riguarda la definizione di Carathéodory, si vede subito che essa fornisce in generale, per la misura della frontiera di un insieme, un valore maggiore del nostro, eventualmente infinito, quando il perimetro è finito, sicchè tutte le frontiere di misura finita secondo Carathéodory sono tali secondo la nostra definizione e non viceversa.

Avvertirò infine che i concetti esposti in questo lavoro sono alla base di una trattazione sostanzialmente nuova di certi problemi isoperimetrici, dei quali mi occuperò in un prossimo lavoro

1. Conveniamo, per semplificare l'esposizione, che ogni volta che in questo lavoro si parla di insiemi contenuti in uno spazio euclideo S_r e di funzioni ivi definite, intenderemo sempre parlare di insiemi di Borel e di funzioni di Baire. Stabiliamo inoltre che, dati comunque due operatori T_1, T_2 ed una funzione $f(x)$, indicheremo con $T_1 T_2 f(x)$ la funzione ottenuta applicando a $T_2 f(x)$ l'operatore T_1. Consideriamo ora uno spazio euclideo S_r, il cui punto generico indicheremo con $x \equiv (x_1, \ldots, x_r)$ e definiamo, per ogni valore del parametro λ, l'operatore W_λ, ponendo, per ogni funzione $f(x)$ definita in tutto lo spazio S_r ed ivi limitata

$$W_\lambda f(x) = \pi^{-\frac{r}{2}} \int_{S_r} e^{-|\xi|^2} f(x + \sqrt{\lambda}\,\xi) d\xi_1 \ldots d\xi_r, \tag{1}$$

ove abbiamo posto $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_r^2}$ ed abbiamo indicato con $(x + \sqrt{\lambda}\,\xi)$ il punto di coordinate $(x_1 + \sqrt{\lambda}\,\xi_1, \dots, x_r + \sqrt{\lambda}\,\xi_r)$. Dalla (1) segue immediatamente

$$W_\lambda f(x) = (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_{S_r} e^{-\frac{|\xi|^2}{\lambda}} f(x + \xi) d\xi_1 \dots d\xi_2 = \tag{2}$$

$$= (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_{S_r} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} f(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_r .$$

Dalle (2) si vede che, per ogni funzione limitata $f(x)$ e per ogni valore positivo del parametro λ, la funzione $W_\lambda f(x)$ risulta continua e limitata in tutto lo spazio S_r insieme a tutte le sue derivate parziali di qualsiasi ordine. Se $f(x)$ è continua e limitata in S_r ed ivi derivabile con derivate parziali prime continue e limitate, si verifica immediatamente che vale la

$$\frac{\partial}{\partial x_h} W_\lambda f(x) = W_\lambda \frac{\partial f}{\partial x_h}, \tag{3}$$

cioè l'operatore W_λ è permutabile con l'operatore $\dfrac{\partial}{\partial x_h}$. Si vede pure facilmente che, dati due numeri positivi λ, μ, risulta

$$W_\lambda W_\mu f(x) = W_{\lambda+\mu} f(x). \tag{4}$$

Non è difficile provare che, per ogni funzione $f(x)$ limitata, si ha, in quasi tutti i punti di S_r,

$$\lim_{\lambda \to 0} W_\lambda f(x) = f(x); \tag{5}$$

se poi $f(x)$ è continua, allora la (5) è verificata uniformemente in ogni insieme chiuso e limitato contenuto in S_r. Si vede pure che valgono le relazioni

$$\int_{S_r} |W_\lambda f(x)| dx_1 \dots dx_r \le \int_{S_r} |f(x)| dx_1 \dots dx_r, \tag{6}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{S_r} |W_\lambda f(x)| dx_1 \dots dx_r = \int_{S_r} |f(x)| dx_1 \dots dx_r; \tag{7}$$

si ha inoltre, per ogni insieme limitato L,

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_L |W_\lambda f(x) - f(x)| dx_1 \dots dx_r = 0. \tag{8}$$

I risultati finora esposti valgono naturalmente anche se $f(x)$, invece di essere una funzione scalare, è una funzione vettoriale ad un numero qualunque di componenti.

Fissiamo ora una funzione scalare $f(x)$, definita in tutto S_r ed ivi limitata, e consideriamo l'integrale

$$\int_{S_r} |\operatorname{grad} W_\lambda f(x)|\, dx_1 \dots dx_r\,; \tag{9}$$

poichè per le (3), (4) abbiamo, comunque si scelgano due numeri positivi λ, μ,

$$\operatorname{grad} W_{\lambda+\mu} f(x) = \operatorname{grad} W_\mu W_\lambda f(x) = W_\mu \operatorname{grad} W_\lambda f(x), \tag{10}$$

ricordando le (6) troviamo che, per λ e μ positivi, si ha

$$\int_{S_r} |\operatorname{grad} W_{\mu+\lambda} f(x)|\, dx_1 \dots dx_r \leq \int_{S_r} |\operatorname{grad} W_\lambda f(x)|\, dx_1 \dots dx_r\,. \tag{11}$$

La (11) ci assicura che l'integrale (9) è funzione non crescente di λ e quindi è certamente determinato il limite

$$\mathfrak{I}[f(x)] = \lim_{\lambda \to 0} \int_{S_r} |\operatorname{grad} W_\lambda f(x)|\, dx_1 \dots dx_r\,, \tag{12}$$

che potrà essere finito o infinito.

Dato un insieme E contenuto in S_r, definiremo il *perimetro dell'insieme* E che indicheremo con $P(E)$, ponendo

$$P(E) = \mathfrak{I}[\varphi(x \mid E)] = \lim_{\lambda \to 0} \int_{S_r} |\operatorname{grad} W_\lambda \varphi(x \mid E)|\, dx_1 \dots dx_r \tag{22}$$

ove con $\varphi(x \mid E)$ abbiamo indicato la funzione caratteristica dell'insieme E.

2. Data una funzione d'insieme $F^{(\lambda)}(B)$, dipendenti da un parametro λ, che sia completamente additiva, diremo che per $\lambda \to \lambda_0$ la funzione $F^{(\lambda)}(B)$ *converge debolmente* verso una funzione $F(B)$, se la relazione

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_{S_r} g(x)\, dF^{(\lambda)} = \int_{S_r} g(x)\, dF \tag{14}$$

è verificata per ogni funzione $g(x)$ continua in tutto lo spazio S_r ed infinitesima per $|x| \to \infty$.

Ricordiamo ora un teorema di de La Vallée Poussin [3] che può essere enunciato nella maniera seguente: *data una successione di funzioni scalari d'insieme*

$$\mu_1(B), \dots, \mu_n(B), \dots \tag{15}$$

---

[3] Vedi de La Vallée Poussin, « Annales de l'Institut H. Poincaré », (1932), Vol. II, pp. 221-224.

definite per ogni insieme $B \subset S_r$, completamente additive, mai negative ed equilimitate, è possibile trovare una funzione additiva d'insieme $\mu(B)$ mai negativa e limitata ed una successione subordinata alla (15),

$$\mu_{h_1}(B), \ldots, \mu_{h_n}(B), \ldots \tag{16}$$

tali che si abbia

$$\lim_{n \to \infty} \mu_{h_n}(B) = \mu(B) \tag{17}$$

per ogni insieme B sulla cui frontiera sia nulla $\mu(B)$. Dal teorema ora enunciato si deduce facilmente che *da una successione di funzioni vettoriali d'insieme, definite per ogni insieme $B \subset S_r$, completamente additive ed aventi le variazioni totali equilimitate è sempre possibile estrarre una successione subordinata che converga debolmente.*

Servendoci dei risultati ora esposti possiamo dimostrare il

TEOREMA I. – *Data una funzione $f(x)$ definita in tutto lo spazio S_r ed ivi limitata, se è finito $\mathfrak{J}[f(x)]$ esiste una ed una sola funzione vettoriale d'insieme $\mathbf{F}(B) \equiv (F_1(B), \ldots, F_r(B))$ soddisfacente le condizioni seguenti:*

a) *$\mathbf{F}(B)$ è definita per ogni insieme $B \subset S_r$ ed è completamente additiva ed a variazione totale limitata;*

b) *Per ogni funzione $g(x)$ continua in S_r insieme alle sue derivate parziali prime ed infinitesima insieme ad esse per $|x| \to \infty$, d'ordine non inferiore a quello di $|x|^{-(r+1)}$ risulta*

$$\int_{S_r} f(x) \operatorname{grad} g(x) dx_1 \ldots dx_r = \int_{S_r} g(x) d\mathbf{F}. \tag{18}$$

DIMOSTRAZIONE. – Prendiamo una successione di numeri positivi tendente a zero, che indicheremo con

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots \tag{19}$$

e consideriamo la successione delle funzioni vettoriali d'insieme

$$\mathbf{F}^1(B), \ldots, \mathbf{F}^n(B), \ldots \tag{20}$$

definite dalle relazioni

$$\mathbf{F}^h(B) = -\int_B \operatorname{grad} W_{\lambda_h} f(x) dx_1 \ldots dx_r \qquad (\text{per } h = 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

Abbiamo visto che da una successione di funzioni vettoriali d'insieme, definite per ogni insieme $B \subset S_r$ completamente additive ed aventi le variazioni totali equilimitate è sempre possibile estrarre una successione subordinata che convenga debolmente; ora, per la definizione stessa di $\mathfrak{J}[f(x)]$, le funzioni della successione (20) hanno tutte variazioni totali non superiori ad $\mathfrak{I}[f(x)]$ e quindi è possibile estrarre dalla (20) una successione subordinata

$$\mathbf{F}^{\nu_1}(B), \ldots, \mathbf{F}^{\nu_h}(B), \ldots \tag{22}$$

la quale converge debolmente verso una funzione additiva d'insieme che indicheremo con $\mathbf{F}(B)$.

Avremo allora, indicando con lim' il minimo limite,

$$\lim_{h \to \infty}{}' \int_{S_r} |d\mathbf{F}^{\nu_h}| \geq \int_{S_r} |d\mathbf{F}| \tag{23}$$

e quindi, poichè le funzioni della successione (22) hanno variazioni totali non superiori ad $\mathfrak{I}[f(x)]$, sarà

$$\int_{S_r} |d\mathbf{F}| \leq \mathfrak{I}[f(x)]; \tag{24}$$

dalla (24) si vede che $\mathbf{F}(B)$ soddisfa la condizione a).

Presa ora arbitrariamente una funzione $g(x)$ continua in S_r con le sue derivate parziali prime ed infinitesima insieme ad esse per $|x| \to \infty$, d'ordine non inferiore a quello di $|x|^{-(r+1)}$, abbiamo

$$\int_{S_r} g(x) d\mathbf{F} = \lim_{h \to \infty} \int_{S_r} g(x) d\mathbf{F}^{\nu_h}. \tag{25}$$

Poichè, per la definizione stessa dell'operatore W_λ, essendo limitata $f(x)$ risultano equilimitata le funzioni $W_{\lambda_{\nu_h}} f(x)$, abbiamo, ricordando le (8) n. 1 e tenendo presente che $\lim\limits_{h \to \infty} \lambda_h = 0$,

$$\lim_{h \to \infty} \int_{S_r} (W_{\lambda_{\nu_h}} f(x)) \operatorname{grad} g(x) dx_1 \ldots dx_r = \int_{S_r} f(x) \operatorname{grad} g(x) dx_1 \ldots dx_r. \tag{26}$$

Dalle (21) segue invece, mediante una integrazione per parti,

$$\begin{aligned} &\int_{S_r} (W_{\lambda_{\nu_h}} f(x)) \operatorname{grad} g(x) dx_1 \ldots dx_r = \\ &= -\int_{S_r} g(x) \operatorname{grad} W_{\lambda_{\nu_h}} f(x) dx_1 \ldots dx_r = \int_{S_r} g(x) d\mathbf{F}^{\nu_h}. \end{aligned} \tag{27}$$

Dalle (25), (26), (27) segue la (18) e il nostro teorema è dimostrato.

Ricordando la definizione del perimetro di un insieme si trova, come caso particolare del teorema I, il seguente

TEOREMA II. – *Dato un insieme $E \subset S_r$, se il suo perimetro $P(E)$ è finito, esiste una funzione vettoriale d'insieme $\Phi(B) \equiv (\Phi_1(B), \dots, \Phi_r(B))$ soddisfacente le condizioni seguenti:*

a) *$\Phi(B)$ è definita per ogni insieme $B \subset S_r$ ed è completamente additiva ed a variazione totale limitata.*

b) *Per ogni funzione $g(x)$ continua in S_r insieme alle sue derivate parziali prime ed infinitesima insieme ad esse per $|x| \to \infty$, d'ordine non inferiore a quello di $|x|^{-(r+1)}$, risulta*

$$\int_E \operatorname{grad} g(x) dx_1 \dots dx_r = \int_{S_r} \varphi(x \mid E) \operatorname{grad} g(x) dx_1 \dots dx_r = \int_{S_r} g(x) d\Phi, \tag{28}$$

$\varphi(x \mid E)$ essendo la funzione caratteristica dell'insieme E.

3. Il teorema I può essere invertito e completato dal

TEOREMA III. – *Data una funzione limitata $f(x)$, se esiste una funzione vettoriale $\mathbf{F}(B)$ soddisfacente le condizioni a), b) del teorema I, allora $\mathfrak{I}[f(x)]$ è finito e si ha*

$$\mathfrak{I}[f(x)] = \int_{S_r} |d\mathbf{F}| \tag{29}$$

DIMOSTRAZIONE. – Dato che risulta evidentemente

$$\operatorname{grad}_x e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} = -\operatorname{grad}_\xi e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}}, \tag{30}$$

ove con grad_x e grad_ξ indicheremo rispettivamente i gradienti fatti rispetto alle variabili puntuali $x \equiv (x_1, \dots, x_r)$, $\xi \equiv (\xi_1, \dots, \xi_r)$, per la condizione b) del teorema I risulta, ricordando la definizione dell'operatore W_λ,

$$\begin{aligned} |\operatorname{grad} W_\lambda f(\xi)| &= (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \left| \int_{S_r} \left(\operatorname{grad}_\xi e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}}\right) f(x) dx_1 \dots dx_r \right| = \\ &= (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \left| \int_{S_r} \left(\operatorname{grad}_x e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}}\right) f(x) dx_1 \dots dx_r \right| = \\ &= (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \left| \int_{S_r} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\mathbf{F} \right| \leq (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_{S_r} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} |d\mathbf{F}|. \end{aligned} \tag{31}$$

Dalle (31) segue

$$\begin{aligned} \int_{S_r} |\operatorname{grad} W_\lambda f(\xi)| d\xi_1 \dots d\xi_r &\leq (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_{S_r} d\xi_1 \dots d\xi_r \int_{S_r} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} |d\mathbf{F}| = \\ &= (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_{S_r} |d\mathbf{F}| \int_{S_r} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\xi_1 \dots d\xi_r = \int_{S_r} |d\mathbf{F}| \end{aligned} \tag{32}$$

e quindi, per la definizione di $\mathfrak{I}[f(x)]$, abbiamo

$$\mathfrak{I}[f(x)] \leq \int_{S_r} |d\mathbf{F}|. \tag{33}$$

Le (33) ci assicurano che $\mathfrak{I}[f(x)]$ è finito e quindi vale la (24); dalla (33) e dalla (24) segue la (29) e il nostro teorema è dimostrato.

Come caso particolare del teorema ora esposto si trova il

TEOREMA IV. - *Dato un insieme $E \subset S_r$, se esiste una funzione $\Phi(B)$ soddisfacente le condizioni* a), b) *del teorema II, il perimetro di E è finito e si ha*

$$P(E) = \int_{S_r} |d\Phi| \tag{34}$$

4. I teoremi II, IV ci danno una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una funzione $\Phi(B)$ soddisfacente le ipotesi a), b) del teorema II; una espressione della funzione $\Phi(B)$ è data dal

TEOREMA V. - *Dato un insieme $E \subset S_r$ avente perimetro finito, sia $\Phi(B)$ la funzione che soddisfa le ipotesi* a), b) *del teorema II; per ogni insieme L sulla cui frontiera sia nulla la variazione totale della funzione $\Phi(B)$ si ha allora*

$$\Phi(L) = -\lim_{\lambda \to 0} \int_L \operatorname{grad} W_\lambda\, \varphi(x \mid E) dx_1 \ldots dx_r. \tag{35}$$

DIMOSTRAZIONE. - Indicando con $\mathfrak{F}L$ la frontiera di L, potremo esprimere il fatto che la variazione totale di $\Phi(B)$ sulla frontiera di L sia nulla scrivendo

$$\int_{\mathfrak{F}L} |d\Phi| = 0. \tag{36}$$

Preso un numero positivo ε piccolo a piacere, poichè $\Phi(B)$ ha, per la condizione a) del teorema II, variazione totale limitata e poichè vale la (36), sarà certamente possibile trovare due insiemi chiusi e limitati C_1, C_2, non aventi punti comuni con $\mathfrak{F}L$, i quali verifichino le condizioni

$$C_1 \subset L, \qquad \int_L |d\Phi| - \int_{C_1} |d\Phi| < \varepsilon \tag{37}$$

$$C_2 \subset (S_r - L), \qquad \int_{(S_r - L)} |d\Phi| - \int_{C_2} |d\Phi| < \varepsilon. \tag{37'}$$

Indicando rispettivamente con δ_1, δ_2 le distanze degli insiemi C_1, C_2 da $\mathfrak{F}L$, sia Γ un dominio circolare avente il centro nell'origine e raggio minore del più piccolo fra i due numeri δ_1, δ_2; esisterà certamente un numero positivo λ_ε, tali che risulti, per $0 < \lambda < \lambda_\varepsilon$,

$$(\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_\Gamma e^{-\frac{|\xi|^2}{\lambda}} d\xi_1 \dots d\xi_r > 1 - \varepsilon. \tag{38}$$

Preso comunque un punto $x^1 \in C_1$, il dominio circolare avente il centro in x^1 e raggio uguale al raggio di Γ è certamente contenuto in L; preso invece un punto $x^2 \in C_2$, il dominio circolare di centro in x^2 e raggio uguale a quello di Γ è contenuto in $(S_r - L)$. Avremo allora per le (38)

$$1 > (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_L e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\xi_1 \dots d\xi_r > 1 - \varepsilon, \text{ per } x \in C_1,\ 0 < \lambda < \lambda_\varepsilon \tag{39}$$

$$(\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_L e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\xi_1 \dots d\xi_r < \varepsilon, \text{ per } x \in C_2,\ 0 < \lambda < \lambda_\varepsilon. \tag{39'}$$

Dalle (39), (39') seguono le

$$\begin{aligned} &\left| (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_L d\xi_1 \dots d\xi_r \int_{C_1} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\Phi - \int_{C_1} d\Phi \right| < \\ &< \varepsilon \int_{C_1} |d\Phi| \leq \varepsilon \int_{S_r} |d\Phi| = \varepsilon P(E), \end{aligned} \tag{40}$$

$$\left| (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_L d\xi_1 \dots d\xi_r \int_{C_2} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\Phi \right| < \varepsilon P(E). \tag{40'}$$

Osserviamo ora che dalle (37), (37') seguono le

$$\left| \int_L d\Phi - \int_{C_1} d\Phi \right| \leq \int_{(L-C_1)} |d\Phi| < \varepsilon, \tag{41}$$

$$\int_{(S_r - C_1 - C_2)} |d\Phi| < 2\varepsilon, \tag{42}$$

mentre dalla (42) si ricava la

$$\left| (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_L d\xi_1 \dots d\xi_r \int_{(S_r - C_1 - C_2)} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\Phi \right| < 2\varepsilon. \tag{43}$$

Dalle (40), 40'), (41), (43) si deduce che, per ogni valore del parametro λ positivo e minore di λ_ε, si ha

$$\left| \int_L d\Phi - (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_L d\xi_1 \dots d\xi_r \int_{S_r} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\Phi \right| < \varepsilon(2P(E) + 3). \tag{44}$$

Poichè $\Phi(B)$ soddisfa la condizione b) del teorema II, ricordando la (30) abbiamo

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} W_\lambda \varphi(\xi \mid E) &= (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_E \operatorname{grad}_\xi e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} dx_1 \dots dx_r = \\
&= -(\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_E \operatorname{grad}_x e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} dx_1 \dots dx_r = \\
&= -(\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_{S_r} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\Phi ;
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Dalle (44), (45) si vede che, per ogni valore positivo e minore di λ_ε del parametro λ, vale la

$$
\begin{aligned}
&\left| \Phi(L) + \int_L \operatorname{grad} W_\lambda \varphi(x \mid E) dx_1 \dots dx_r \right| = \\
&= \left| \int_L d\Phi + \int_L \operatorname{grad} W_\lambda \varphi(\xi \mid E) d\xi_1 \dots d\xi_r \right| < \varepsilon(2P(E) + 3).
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Dalle (46), poichè ε è un numero positivo arbitrario, segue la (35) e il nostro teorema è dimostrato.

5. Uno spazio euclideo S_r, il cui punto generico indicheremo sempre con $x \equiv (x_1, \dots, x_r)$, può sempre essere considerato il prodotto topologico di due spazi S_p ed S_{r-p}. Indicheremo con $y \equiv (y_1, \dots, y_p)$ il generico punto di S_p, con $z \equiv (z_1, \dots, z_{r-p})$ il generico punto di S_{r-p}, con (y, z) il punto di S_r avente le coordinate $(y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_{r-p})$. Dati un insieme $E^y \subset S_p$ ed un insieme $E^z \subset S_{r-p}$, indicheremo con (E^y, E^z) il prodotto topologico degli insiemi E^y ed E^z, cioè l'insieme descritto dal punto (y, z) al variare di y in E^y e di z in E^z. In maniera analoga a quella seguita per definire l'operatore W_λ, possiamo definire l'operatore W_λ^y ponendo, per ogni funzione $f(x) \equiv f(y, z)$ definita in S_r ed ivi limitata e per ogni valore positivo del parametro λ

$$
W_\lambda^y f(x) \equiv W_\lambda^y f(y, z) = \pi^{-\frac{p}{2}} \int_{S_p} e^{-|\eta|^2} f(y + \sqrt{\lambda}\,\eta, z) d\eta_1 \dots d\eta_p .
\tag{47}
$$

Per ogni funzione $g(x) \equiv g(y, z)$ che sia derivabile rispetto alle variabili $y_1, \dots, y_p$, indicheremo con $\operatorname{grad}_y (y, z)$ il vettore di componenti $\left(\frac{\partial g}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_p}\right)$.

È appena necessario osservare che tutte le proprietà dell'operatore W_λ che abbiamo visto nel n. 1 si estendono all'operatore W_λ^y. Possiamo perciò, accanto al funzionale $\mathfrak{J}[f(x)]$, definire $\mathfrak{J}_y[f(y, z)]$ ponendo

$$\mathfrak{J}_y[f(y, z)] = \lim_{\lambda \to 0} \int_{S_p} |\operatorname{grad}_y W_\lambda^y f(y, z)|\, dy_1 \ldots dy_p; \tag{48}$$

infatti si può provare che è determinato il limite che compare nella (48) con un ragionamento del tutto simile a quello usato per il limite (12). Dimostriamo ora la diseguaglianza

$$\mathfrak{J}[f(x)] \equiv \mathfrak{J}[f(y, z)] \geq \int_{S_{r-p}} \mathfrak{J}_y[f(y, z)] dz_1 \ldots dz_{r-p}. \tag{49}$$

Ricordando le (6) troviamo che, per ogni coppia di numeri reali positivi λ, μ, vale la

$$\begin{aligned} &\int_{S_r} |W_\lambda \operatorname{grad}_y W_\mu^y f(y, z)|\, dy_1 \ldots dy_p dz_1 \ldots dz_{r-p} = \\ &= \int_{S_r} |W_\mu^y \operatorname{grad}_y W_\lambda f(y, z)|\, dy_1 \ldots dy_p dz_1 \ldots dz_{r-p} \leq \\ &\leq \int_{S_r} |\operatorname{grad}_y W_\lambda f(y, z)|\, dy_1 \ldots dy_p dz_1 \ldots dz_{r-p} \leq \\ &\leq \int_{S_r} |\operatorname{grad} W_\lambda f(x)|\, dx_1 \ldots dx_r \leq \mathfrak{J}[f(x)]. \end{aligned} \tag{50}$$

Dalla (50), passando al limite per $\lambda \to 0$, si trova, ricordando la (7),

$$\int_{S_{r-p}} dz_1 \ldots dz_{r-p} \int_{S_p} |\operatorname{grad}_y W_\mu^y f(y, z)|\, dy_1 \ldots dy_p \leq \mathfrak{J}[f(x)] \tag{51}$$

e quindi dalle (51), tenendo presente la (48), per i noti teoremi sul passaggio al limite sotto il segno di integrale si deduce la (49).

6. Teorema VI. - *Dato un insieme E contenuto in uno spazio euclideo S_r (con $r \geq 2$), è sempre verificata una delle due diseguaglianze*

$$\begin{cases} (\operatorname{mis} E)^{r-1} \leq (P(E))^r \\ (\operatorname{mis}(S_r - E))^{r-1} \leq (P(E))^r \end{cases} \tag{52}$$

Dimostrazione. - Il nostro teorema sarà certamente dimostrato se faremo vedere che, dati uno spazio euclideo S_r (con $r \geq 1$) ed una funzione $\varphi(x)$ che in ogni punto $x \in S_r$ prenda il valore 0 oppure il valore 1, vale una delle due relazioni

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\int_{S_r} \varphi(x)dx_1 \ldots dx_r\right)^{r-1} \leq (\mathfrak{J}[\varphi(x)])^r \\ &\left(\int_{S_r} (1-\varphi(x))dx_1 \ldots dx_r\right)^{r-1} \leq (\mathfrak{J}[\varphi(x)])^r, \end{aligned}\right.$$

purchè, nel caso $r = 1$, si attribuisca il valore 1 al simbolo ∞^0 e il valore 0 al simbolo 0^0.

Cominciamo appunto col considerare il caso $r = 1$ e notiamo che, se è nullo uno dei due integrali $\int\limits_{S_1} \varphi(x)dx$, $\int\limits_{S_1} (1-\varphi(x))dx$, certamente risulta verificata una delle relazioni (53). Se invece si ha

$$(54)\qquad \int_{S_1} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx \neq 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (1-\varphi(x))dx \neq 0$$

sarà possibile, per la (5), trovare due punti $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$, tali che si abbia

$$(55)\qquad \lim_{\lambda \to 0} W_\lambda \varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}) = 0, \qquad \lim_{\lambda \to 0} W_\lambda \varphi(\bar{\bar{x}}) = \varphi(\bar{\bar{x}}) = 1.$$

Dalle (55) segue

$$(56)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{J}[\varphi(x)] = \lim_{\lambda \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d}{dx} W_\lambda \varphi(x) \right| dx \geq \\ &\geq \lim_{\lambda \to 0} \left| \int_{\bar{x}}^{\bar{\bar{x}}} \frac{d}{dx} W_\lambda \varphi(x) dx \right| = \lim_{\lambda \to 0} | W_\lambda \varphi(\bar{x}) - W_\lambda \varphi(\bar{\bar{x}}) | = 1 \end{aligned}$$

e quindi, nel caso in cui si verifichino le (54), le relazioni (53) sono certamente soddisfatte; è così provato che, per $r = 1$, vale sempre almeno una delle relazioni (53). Mostriamo ora che, fissato comunque un intero positivo m, se per $r = m$ è sempre verificata una delle relazioni (53), ciò accade anche per $r = m + 1$; dopo di ciò, poichè le (53) equivalgono evidentemente alle (52), il nostro teorema sarà completamente dimostrato. Cominciamo perciò con l'osservare che uno spazio S_{m+1} può sempre essere considerato come il prodotto topologico di due spazi S_m ed S_1; riprendendo le notazioni del n. 5, indicheremo con $y \equiv (y_1, \ldots, y_m)$ il generico punto di S_m e con z il generico punto di S_1. Sia ora $\varphi(x) \equiv \varphi(y, z)$ una funzione che, in ogni punto $x \in S_{m+1}$, prenda il valore 0 oppure il valore 1 e siano E_1, E_2, E_3, gli insiemi dello spazio S_m caratterizzati dalle proprietà seguenti:

$$(57)\qquad \begin{cases} \int\limits_{S_1} \varphi(y,\, z)dz \neq 0, \qquad \int\limits_{S_1} (1-\varphi(y,\, z))dz \neq 0 & \text{per } y \in E_1 \\ \int\limits_{S_1} \varphi(y,\, z)dz = 0 & \text{per } y \in E_2 \\ \int\limits_{S_1} (1-\varphi(y,\, z))dz = 0 & \text{per } y \in E_3 \end{cases}$$

evidentemente si ha

$$(58)\qquad S_m = E_1 + E_2 + E_3 .$$

Poichè $\varphi(x) \equiv \varphi(y,\, z)$ può prendere solo i valori 0, 1, in quasi tutti i punti di $(E_2,\, S_1)$ si avrà, per le (57), $\varphi(x) \equiv \varphi(y,\, z) = 0$, mentre, in quasi tutti i punti di $(E_3,\, S_1)$ abbiamo $\varphi(x) \equiv \varphi(y,\, z) = 1$. Indicando con μ la più piccola delle due quantità $\text{mis}\, E_2$ e $\text{mis}\, E_3$ per quasi tutti i valori di z si avrà

$$(59)\qquad \int\limits_{S_m} \varphi(y,z)dy_1 \,..\, dy_m \geq \mu, \qquad \int\limits_{S_m} (1-\varphi(y,\, z))dy_1, \ldots, dy_m \geq \mu ;$$

avendo supposto che, per $r = m$ fosse sempre verificata una delle relazioni (53) avremo, ricordando la definizione di $\mathfrak{J}_y[\varphi(y,\, z)]$,

$$(60)\qquad \mathfrak{J}_y[\varphi(y,\, z)] \geq \mu^{\frac{m-1}{m}}$$

per quasi tutti i valori di z. D'altra parte le (49) ci assicurano che

$$(61)\qquad \mathfrak{J}[\varphi(x)] = \mathfrak{J}[\varphi(y,\, z)] \geq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{J}_y[\varphi(y,\, z)]dz$$

e quindi se è $\mu \neq 0$, cioè se nessuno dei due insiemi E_2, E_3 ha misura nulla, risulta per le (60), (61)

$$(62)\qquad \mathfrak{J}[\varphi(x)] = +\infty$$

e le (53) sono certamente verificate.

Consideriamo ora i punti $y \in E_1$; poichè per $r = 1$ è sempre verificata una delle relazioni (53), ricordando la definizione di $\mathfrak{J}_z[f(y,\, z)]$ e tenendo presenti le (57), troviamo che, per ogni punto $y \in E_1$, vale la

$$(63)\qquad \mathfrak{J}_z[\varphi(y,\, z)] \geq 1.$$

Dalla (63) segue, ricordando la (49),

$$(64)\qquad \mathfrak{J}[\varphi(x)] \geq \int\limits_{S_m} \mathfrak{J}_z[\varphi(y,\, z)]dy_1 \ldots dy_m \geq \int\limits_{E_1} dy_1 \ldots dy_m = \text{mis}\, E_1$$

e quindi, se l'insieme E_1 ha misura infinita, le (53) sono certamente verificate.

Esaminiamo ora il caso in cui E_1 ha misura finita ed E_2 ha misura nulla; avrà allora misura infinita l'insieme E_3 e quindi, per quasi tutti i valori di z, avremo (ricordando che in quasi tutti i punti dell'insieme (E_3, S_1) risulta $\varphi(x) = 1$)

$$\int_{S_m} \varphi(y, z)dy_1 \dots dy_m = +\infty. \tag{65}$$

Avendo supposto che almeno una delle relazioni (53) fosse sempre verificata per $r = m$, troviamo, tenendo presenti le (65),

$$\left(\int_{S_m} (1 - \varphi(y, z))dy_1 \dots dy_m\right)^{m-1} \leq (\mathfrak{J}_y[\varphi(y, z)])^m \tag{66}$$

per quasi tutti i valori di z. D'altra parte, poichè E_2 ha misura nulla e in quasi tutti i punti di (E_3, S_1) si ha $\varphi(y, z) = 1$, avremo, per quasi tutti i valori di z,

$$\int_{S_m} (1 - \varphi(y, z))dy_1 \dots dy_m \leq \operatorname{mis} E_1. \tag{67}$$

Dalle (64), (66), (67) segue

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_y[\varphi(y, z)] &\geq \left(\int_{S_m} (1 - \varphi(y, z))dy_1 \dots dy_m\right)^{\left(1-\frac{1}{m}\right)} \geq \\ &\geq (\operatorname{mis} E_1)^{-\frac{1}{m}} \int_{S_m} (1 - \varphi(y, z))dy_1 \dots dy_m \geq \\ &\geq (\mathfrak{J}[\varphi(x)])^{-\frac{1}{m}} \int_{S_m} (1 - \varphi(y, z))dy_1 \dots dy_m . \end{aligned} \tag{68}$$

Dalle (68), ricordando la (61) si ha

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}[\varphi(x)] &\geq \int_{S_1} \mathfrak{J}_y[\varphi(y, z)]dz \geq \\ &\geq (\mathfrak{J}[\varphi(x)])^{-\frac{1}{m}} \int_{S_1} dz \int_{S_m} (1 - \varphi(y, z))dy_1 \dots dy_m = \\ &= (\mathfrak{J}[\varphi(x)])^{-\frac{1}{m}} \int_{S_{m+1}} (1 - \varphi(x))dx_1 \dots dx_{m+1} ; \end{aligned} \tag{69}$$

dalle (69) segue

$$(\mathfrak{J}[\varphi(x)])^{m+1} \geq \left(\int_{S_{m+1}} (1 - \varphi(x))dx_1 \dots dx_{m+1}\right)^m \tag{70}$$

e quindi è provato che, se ha misura nulla l'insieme E_2 ed ha misura finita E_1, la seconda delle relazioni (53) è verificata per $r = m + 1$. Se avesse avuto misura nulla l'insieme E_3 ed avesse avuto misura finita E_1 avremo potuto provare, con un ragionamento del tutto analogo a quello ora svolto la prima delle relazioni (53). Avendo già provato che le (53) sono verificate quando E_1 ha misura infinita, oppure hanno contemporaneamente misure diverse da zero gli insiemi E_2 ed E_3, possiamo concludere che, per $r = m + 1$, una delle relazioni (53) è sempre verificata; il nostro teorema è così completamende dimostrato.

7. Dàto uno spazio euclideo S_r, il cui punto generico indichiamo al solito con $x \equiv (x_1, \ldots, x_r)$, consideriamo l'aggregato di tutti gli insiemi contenuti in S_r; in tale aggregato introdurremo una metrica prendendo come distanza di due insiemi E_1, E_2 la quantità

$$\text{mis}\,(E_1 + E_2 - E_1 \cdot E_2). \tag{71}$$

Chiamiamo Σ lo spazio metrico così ottenuto e stabiliamo che, quando in questo lavoro si parlerà di limiti di insiemi contenuti in uno spazio euclideo S_r, intenderemo sempre considerare tali insiemi come elementi dello spazio Σ.

Consideriamo una successione $E_1, E_2, \ldots$ convergente verso l'insieme E; indichiamo con $\Phi(B)$ la eventuale funzione additiva d'insieme verificante le condizioni a), b) del teorema II, e indichiamo con $\Phi^n(B)$ l'analoga funzione relativa all'insieme E_n. Ricordando la definizione di convergenza debole (n. 2) possiamo enunciare il

TEOREMA VII. - *Data una successione di insiemi*

$$E_1, \ldots, E_n, \ldots \tag{72}$$

convergente verso un insieme E, si ha

$$\lim_{n \to \infty}{}' \; P(E_n) \geq P(E); \tag{73}$$

se è limitato l'insieme dei perimetri $P(E_n)$, la successione

$$\Phi^1(B), \ldots, \Phi^n(B), \ldots \tag{74}$$

converge debolmente verso $\Phi(B)$.

DIMOSTRAZIONE. - Indicheremo al solito con $\varphi(x \mid E)$ la funzione caratteristica del generico insieme $L \subset S_r$. Per la definizione di distanze fra due elementi dello spazio metrico Σ, dalla relazione

$$\lim_{n \to \infty} E_n = E \tag{75}$$

segue

$$\lim_{n \to \infty} \int_{S_r} \mid \varphi(x \mid E) - \varphi(x \mid E_n) \mid dx_1 \ldots dx_r = 0. \tag{76}$$

Avremo allora, ricordando la definizione dell' operatore W_λ,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{grad} W_\lambda\varphi(x \mid E_n) = \operatorname{grad} W_\lambda\varphi(x \mid E) \tag{77}$$

per ogni punto $x \in S_r$ e per ogni valore del parametro λ. Dalle (77) segue, ricordando la definizione del perimetro di un insieme ed i noti teoremi sul passaggio al limite sotto il segno di integrale,

$$\begin{aligned} \lim'_{n\to\infty} P(E_n) &\geq \lim'_{n\to\infty} \int_{S_r} |\operatorname{grad} W_\lambda\varphi(x(E_n)| \, dx_1 \dots dx_r \geq \\ &\geq \int_{S_r} \lim_{n\to\infty} |\operatorname{grad} W_\lambda\varphi(x \mid E_n)| \, dx_1 \dots dx_r = \\ &= \int_{S_r} |\operatorname{grad} W_\lambda\varphi(x \mid E)| \, dx_1 \dots dx_r \end{aligned} \tag{78}$$

e la (78) vale per ogni valore positivo del parametro λ. Dalla (78), passando al limite per $\lambda \to 0$, otteniamo la (73); dalla (73) si vede che, se l'insieme descritto da $P(E_n)$ al variare di n è limitato, $P(E)$ è finito; detto in questo caso μ l'estremo superiore dell'insieme descritto da $P(E_n)$ al variare dell'indice n, avremo, per il teorema IV,

$$\int_{S_r} |d\Phi| \leq \mu, \qquad \int_{S_s} |d\Phi^n| \leq \mu \qquad (\text{per } n = 1, 2, \dots). \tag{79}$$

Presa poi una funzione $g(x)$ continua in S_r ed infinitesima per $|x| \to \infty$, possiamo certamente, in corrispondenza ad ogni numero positivo ε, trovare una funzione $g_\varepsilon(x)$ continua in S_r insieme alle sue derivate parziali prime, infinitesima insieme ad esse, per $|x| \to \infty$, d'ordine non inferiore a quello di $|x|^{-(r+1)}$ tale che si abbia

$$|g(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon. \tag{80}$$

Per il teorema II abbiamo, ricordando la (76),

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{S_r} g_\varepsilon(x) d\Phi^n &= \lim_{n\to\infty} \int_{S_r} \varphi(x \mid E_n) \operatorname{grad} g_\varepsilon(x) dx_1 \dots dx_r = \\ &= \int_{S_r} \varphi(x \mid E) \operatorname{grad} g_\varepsilon(x) dx_1 \dots dx_r = \int_{S_r} g_\varepsilon(x) d\Phi \end{aligned} \tag{81}$$

e quindi, tenendo presenti le (79), (80), (81), si ha

$$\lim''_{n\to\infty} \left| \int_{S_r} g(x) d\Phi^n - \int_{S_r} g(x) d\Phi \right| \leq 2\varepsilon\mu\,; \tag{82}$$

data l'arbitrarietà di ε, abbiamo allora

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int_{S_r} g(x) d\Phi^n - \int_{S_r} g(x) d\Phi \right| = 0 \tag{83}$$

e la convergenza debole della successione (74) verso $\Phi(B)$ risulta dimostrata.

8. Dato uno spazio euclideo S_r (con $r \geq 2$), consideriamo l'aggregato $\{ \Pi \}$ dei domini contenuti in S_r, la cui frontiera è contenuta nella somma di un numero finito di iperpiani; a tali domini daremo il nome di ***domini poligonali*** (con una denominazione affine a quelle spesso usate di domini rettangolari, circolari, ecc.). Se in particolare lo spazio S_r si riduce al piano o allo spazio ordinario, i domini poligonali saranno rispettivamente poligoni o poliedri. Se ora noi consideriamo l'aggregato $\{ \Pi \}$ come insieme dello spazio Σ introdotto nel n. 7 è evidente che esso è denso nello spazio Σ e, per il teorema VII, si ha, comunque si prenda un insieme $E \subset S_r$,

$$\lim_{\Pi \to E}{}' \, P(\Pi) \geq P(E). \tag{84}$$

Un risultato più preciso di quello fornito dalla (84) è dato dal

Teorema VIII. - ***Dato un insieme $E \subset S_r$ (con $r \geq 2$) il suo perimetro $P(E)$ è uguale al minimo limite dei perimetri dei domini poligonali che approssimano in media E; si ha cioé***

$$\lim_{\Pi \to E}{}' \, P(\Pi) = P(E). \tag{85}$$

Dimostrazione. - Se $P(E)$ è infinito dalla (84) segue immediatamente la (85) e il nostro teorema è subito provato; se invece $P(E)$ è finito, per il teorema VI avrà misura finita uno dei due insiemi E, $(S_r - E)$. Supponiamo che abbia misura finita l'insieme E; in tal caso la sua funzione caratteristica $\varphi(x \mid E)$ è sommabile e quindi, ricordando le (6), (8) avremo

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{S_r} | W_\lambda \varphi(x \mid E) - \varphi(x \mid E) | \, dx_1 \dots dx_r = 0. \tag{86}$$

Preso un numero positivo ε piccolo a piacere sarà allora certamente possibile trovare un numero positivo λ tale che risulti

$$\int_{S_r} | W_\lambda \varphi(x \mid E) - \varphi(x \mid E) | \, dx_1 \dots dx_r \leq \varepsilon. \tag{87}$$

Per la definizione stessa dell'operatore W_λ, risulta limitata in S_r la funzione $|\operatorname{grad} W_\lambda \varphi(x \mid E)|$ e quindi sarà finito il suo estremo superiore che indicheremo con M. Preso arbitrariamente un numero positivo $\eta < \frac{1}{4}$, consideriamo l'insieme L formato dai punti di S_r nei quali si ha

$$W_\lambda\varphi(x \mid E) \geq \eta, \tag{88}$$

e dimostriamo che esso è limitato. Per ogni numero positivo ρ, indicheremo con $I_\rho(L)$ l'intorno di raggio ρ di L; inoltre porremo $\bar\rho = \frac{\eta}{2M}$. Poichè nei punti di L vale la (88), essendo

$$|\operatorname{grad} W_\lambda\varphi(x \mid E)| \leq M, \tag{89}$$

nei punti di $I_{\bar\rho}(L)$ avremo

$$W_\lambda\varphi(x \mid E) \geq \eta - \frac{M\eta}{2M} = \frac{\eta}{2} \tag{90}$$

e quindi sarà

$$\int_{S_r} |W_\lambda\varphi(x \mid E)|\, dx_1 \dots dx_r \geq \int_{I_{\bar\rho}(L)} |W_\lambda\varphi(x \mid E)|\, dx_1 \dots dx_r \geq \frac{\eta}{2} \cdot \operatorname{mis}(I_{\bar\rho}(L)); \tag{91}$$

dalla (91), tenendo presente la (87) e ricordando che $\varphi(x \mid E)$ è sommabile si vede che deve avere misura finita l'insieme $I_{\bar\rho}(L)$ e quindi L deve essere limitato. Essendo $\varphi(x \mid E)$ una funzione sommabile ed essendo L un insieme limitato, possiamo certamente trovare un numero positivo α abbastanza grande perchè, detto T_α il dominio formato dai punti soddisfacenti le relazioni

$$|x_h| \leq \alpha \qquad (\text{per } h = 1, \dots, r), \tag{92}$$

siano contemporaneamente verificate le formule

$$\int_{(S_r - T_\alpha)} \varphi(x \mid E) dx_1 \dots dx_r < \varepsilon, \tag{93}$$

$$W_\lambda\varphi(x \mid E) < \eta \qquad (\text{per } x \in (S_r - T_\alpha)). \tag{93'}$$

Consideriamo ora, in uno spazio S_{r+1} il cui punto generico sia $(x_1, \dots, x_r, y)$, l'ipersuperficie regolare Γ_1 individuata dalle

$$y = W_\lambda\varphi(x_1, \dots, x_r \mid E) \equiv W_\lambda\varphi(x \mid E), \qquad x \in T_\alpha. \tag{94}$$

La funzione $W_\lambda\varphi(x \mid E)$ è continua in S_r insieme alle sue derivate parziali prime, quindi è certamente possibile approssimare l'ipersuperficie Γ_1 con una ipersuperficie Γ_2, che sia contenuta nella somma di un numero finito di iperpiani e sia rappresentata dalle equazioni

$$y = g(x) \equiv g(x_1, \dots, x_r), \qquad x \equiv (x_1, \dots, x_r) \in T_\alpha, \tag{95}$$

essendo $g(x)$ una funzione continua soddisfacente le condizioni seguenti:

(96) $$0 < g(x) - W_\lambda \varphi(x \mid E) < \eta,$$

(97) $$\int_{T_\alpha} | g(x) - W_\lambda \varphi(x \mid E) | \, dx_1 \dots dx_r < \varepsilon,$$

(98) $$\begin{aligned} \int_{T_\alpha} | \operatorname{grad} g(x) | \, dx_1 \dots dx_r &< \int_{T_\alpha} | \operatorname{grad} W_\lambda \varphi(x \mid E) | \, dx_1 \dots dx_r + \eta \leq \\ &\leq \int_{S_r} | \operatorname{grad} W_\lambda \varphi(x \mid E) | \, dx_1 \dots dx_r + \eta \leq P(E) + \eta . \end{aligned}$$

Poichè evidentemente $W_\lambda \varphi(x \mid E)$ non è mai negativa, $g(x)$ sarà per le (96) sempre positiva e quindi l'insieme dei punti $(x_1, \dots, x_r, y)$ che soddisfano le condizioni

(99) $$0 \leq y \leq g(x), \qquad x \equiv (x_1, \dots, x_r) \in T_\alpha$$

sarà un dominio poligonale $D \subset S_{r+1}$. Tenendo presenti le (93'), (96) vediamo che, in ogni punto x appartenente alla frontiera di T_α, la funzione $g(x)$ è minore di 2η; di conseguenza, per ogni numero reale $\theta \geq 2\eta$, l'iperpiano $y = \theta$ incontra la frontiera del dominio D soltanto in punti appartenenti a Γ_2. Indichiamo con $\rho(\theta)$ la misura $(r-1)$-dimensionale (intesa in senso elementare) della sezione di Γ_2 col piano $y = \theta$ e chiamiamo Γ_2^* la porzione di Γ_2 che è contenuta nel semispazio $y \leq 2\eta$.

Per i teoremi elementari sulla misura delle sezioni di un insieme (teoremi che possiamo certamente applicare all'ipersuperficie Γ_2^* la quale, essendo contenuta in Γ_2, è a sua volta contenuta nella somma di un numero finito di iperpiani) avremo

(100) $$\int_{\Gamma_2^*} \nu_y d\sigma = \int_{2\eta}^{+\infty} \rho(\theta) d\theta,$$

ove con $d\sigma$ indichiamo l'elemento di misura r-dimensionale su Γ_2^* e con ν_y la lunghezza della proiezione ortogonale su un iperpiano $y = \theta$ del vettore unitario normale alla ipersuperficie Γ_2. Ricordando che Γ_2 ha le equazioni (95) si ha

(101) $$\int_{\Gamma_2^*} \nu_y d\sigma \leq \int_{\Gamma_2} \nu_y d\sigma = \int_{T_\alpha} | \operatorname{grad} g(x) | \, dx_1 \dots dx_r .$$

Dalle (98), (100), (101) segue

(102) $$\int_{2\eta}^{\infty} \rho(\theta) d\theta < P(E) + \eta$$

e quindi si ha, a maggior ragione,

$$\int_{2\eta}^{1-\eta} \rho(\theta) d\theta < P(E) + \eta. \tag{103}$$

Consideriamo ora, per ogni valore di θ, la sezione del dominio D con l'iperpiano $y = \theta$ e indichiamola con $\Pi(\theta)$; se identifichiamo l'iperpiano $y = \theta$ con lo spazio S_r e quindi il generico punto $(x_1, \ldots, x_r, \theta)$ di tale iperpiano col punto $(x_1, \ldots, x_r) \in S_r$, troviamo che, per quasi tutti i valori di θ, l'insieme $\Pi(\theta)$, se non è vuoto, è un dominio poligonale di S_r; si ha evidentemente

$$\begin{cases} g(x) \geq \theta & \text{per } x \in \Pi(\theta) \\ g(x) < \theta & \text{per } x \in (T_\alpha - \Pi(\theta)). \end{cases} \tag{104}$$

Poichè, per $\theta \geq 2\eta$, l'iperpiano $y = \theta$ incontra la frontiera di D soltanto in punti appartenenti a Γ_2, per quasi tutti i valori di θ compresi fra 2η ed $(1 - \eta)$ $\left(\text{valori che riempiranno un intervallo, essendo per ipotesi } \eta < \frac{1}{4}\right)$ il perimetro $P(\Pi(\theta))$ risulterà uguale a $\rho(\theta)$. Esisterà allora per le (103) un valore $\bar{\theta}$, compreso fra 2η e $(1 - \eta)$, tale che risulti

$$P(\Pi(\bar{\theta})) = \rho(\bar{\theta}) < \frac{P(E) + \eta}{1 - 3\eta}, \tag{105}$$

essendo inoltre $\Pi(\bar{\theta})$ un dominio poligonale di S_r.

D'altra parte per la (104) avremo

$$\begin{cases} g(x) - \varphi(x \mid E) \geq \bar{\theta} > 2\eta, & \text{per } x \in (\Pi(\bar{\theta}) - E \cdot \Pi(\bar{\theta})) \\ \varphi(x \mid E) - g(x) \geq 1 - \bar{\theta} > \eta, & \text{per } x \in (E \cdot T_\alpha - E \cdot \Pi(\bar{\theta})), \end{cases} \tag{106}$$

mentre dalle (87), (97) segue

$$\int_{T_\alpha} \mid g(x) - \varphi(x \mid E) \mid dx_1 \ldots dx_r < 2\varepsilon; \tag{107}$$

quindi per le (106), (107) avremo

$$\text{mis}\,(E \cdot T_\alpha + \Pi(\bar{\theta}) - E \cdot \Pi(\bar{\theta})) < \frac{2\varepsilon}{\eta}. \tag{108}$$

Essendo per le (83)

$$\text{mis}\,(E - T_\alpha \cdot E) < \varepsilon, \tag{109}$$

avremo finalmente

$$\text{mis}\,(E + \Pi(\bar{\theta}) - E \cdot \Pi(\bar{\theta})) < \left(\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\eta}\right). \tag{110}$$

Data l'arbitrarietà con cui possono essere presi i due numeri ε, η, le (105), (110) ci assicurano che vale la

$$\lim_{\Pi \to E}{}' \, P(\Pi) \leq P(E), \tag{111}$$

quindi, ricordando la (84), troviamo la (85) e il nostro teorema è dimostrato.

Dai teoremi IV, VIII si vede immediatamente che *la nostra definizione del perimetro di un insieme è equivalente alla definizione data da Caccioppoli della misura* $(r-1)$*-dimensionale della frontiera orientata dell'insieme stesso.* Infatti, perchè un insieme $E \subset S_r$ sia approssimabile in media mediante domini poligonali le cui frontiere abbiano misure $(r-1)$-dimensionali equilimitate, occorre e basta che il suo perimetro sia finito; in questo caso il suo perimetro $P(E)$ è uguale alla variazione totale in S_r della funzione $\Phi(B)$ che soddisfa le condizioni a), b) del teorema II, la quale variazione coincide a sua volta con la misura $(r-1)$-dimensionale secondo Caccioppoli della frontiera orientata di E (vedi loc. cit. ([2])).

9. Accanto al perimetro $P(E)$ di un insieme $E \subset S_r$, possiamo considerare le *proiezioni del perimetro* $P(E)$ sugli iperpiani coordinati, che indicheremo con $P_1(E), \ldots, P_r(E)$ e saranno definite dalle

$$P_h(E) = \lim_{\lambda \to 0} \int_{S_r} \left| \frac{\partial}{\partial x_h} W_\lambda \varphi(x \mid E) \right| dx_1 \ldots dx_r, \qquad (\text{per } h = 1, \ldots, r); \tag{112}$$

l'esistenza del limite (112) si prova in maniera del tutto analoga a quella seguita per provare l'esistenza del limite (13). Vale evidentemente la relazione

$$\sum_{h=1}^{r} P_h(E) \geq P(E), \tag{113}$$

mentre, per ogni valore dell'indice h, risulta

$$P(E) \geq P_h(E). \tag{114}$$

Sussistono i teoremi seguenti:

Teorema IX. - *Dato un insieme $E \subset S_r$, se per un certo valore dell'indice h risulta finito $P_h(E)$, esiste una funzione d'insieme $\Phi_h(B)$ soddisfacente le condizioni seguenti:*

a) *$\Phi_h(B)$ è definita per ogni insieme $B \subset S_r$ ed è completamente additiva ed a variazione totale limitata.*

b) *Per ogni funzione $g(x)$ continua in S_r insieme alle sue derivate parziali prime ed infinitesima, insieme ad esse, per $|x| \to \infty$, d'ordine non inferiore a quello di $|x|^{-(r+1)}$, risulta*

$$\int_E \frac{\partial g}{\partial x_h} dx_1 \ldots dx_r = \int_{S_r} g(x) d\Phi_h. \tag{115}$$

Teorema X. - *Dato un insieme* $E \subset S_r$ *se esiste una funzione* $\Phi_h(B)$ *soddisfacente le condizioni* a), b) *del teorema IX,* $P_h(E)$ *è finito e risulta*

$$P_h(E) = \int_{S_r} |\, d\Phi_h \,| . \tag{116}$$

Teorema XI. - *Sia dato un insieme* $E \subset S_r$ *tale che, per un certo valore dell'indice* h*, risulta finito* $P_h(E)$ *e sia* $\Phi_h(B)$ *la funzione soddisfacente le condizioni* a), b) *del teorema IX; per ogni insieme* L *sulle cui frontiere sia nulla la variazione totale della funzione* $\Phi_h(B)$ *si ha allora*

$$\Phi_h(L) = -\lim_{\lambda \to 0} \int_L \frac{\partial}{\partial x_h} W_\lambda \varphi(x \mid E) dx_1 \dots dx_r . \tag{117}$$

Data la successione di insiemi $E_1, E_2, \dots$ convergente verso l'insieme E, per ogni valore dell'indice h definiamo la funzione d'insieme $\Phi_h(B)$ come nel teorema IX, e indichiamo con $\Phi_h^{(n)}(B)$ l'analoga funzione per l'insieme E_n. Sussiste il

Teorema XII. - *Data una successione di insiemi*

$$E_1, \dots, E_n, \dots \tag{118}$$

convergente verso un insieme E*, si ha*

$$\lim_{n \to \infty}{}' P_h(E_n) \geq P_h(E) ; \tag{119}$$

se per un certo valore dell'indice h *è limitata la successione*

$$P_h(E_1), \dots, P_h(E_n), \dots , \tag{120}$$

risulta debolmente convergente verso $\Phi_h(B)$ *la successione*

$$\Phi_h^{(1)}(B), \dots, \Phi_h^{(n)}(B), \dots . \tag{121}$$

La dimostrazione di questi teoremi è perfettamente analoga a quella dei teoremi II, IV, V, VII; basta sostituire in tutte le considerazioni ai gradienti le derivate parziali rispetto ad x_h.

Osserviamo infine che dalla (113) e dai teoremi VIII, XII, si deduce immediatamente un risultato (enunciato da Caccioppoli (4) come semplice presunzione) che, seguendo le notazioni usate in questo lavoro può enunciarsi nel modo seguente:

Dato un insieme $E \subset S_r$*, se, per ogni valore dell'indice* h*, è possibile costruire una successione di domini poligonali*

$$\Pi_1^h, \dots, \Pi_n^h, \dots \tag{122}$$

(4) Vedi loc. cit. (2), Nota I, n. 8, nota (10).

convergente in media verso l'insieme E, tale che risultino equilimitate le quantità

$$P_h(\Pi_1^h), \ldots, P_h(\Pi_n^h), \ldots \tag{123}$$

allora $P(E)$ ***è finito e quindi l'insieme*** E ***può essere approssimato in media mediante una successione di domini poligonali***

$$\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \ldots \tag{124}$$

aventi i perimetri

$$P(\Pi_1), \ldots, P(\Pi_n), \ldots \tag{125}$$

equilimitati.