Sulla totalità delle relazioni generalizzate di Hurwitz di una matrice quasi abeliana.

Memoria di FABIO CONFORTO (a Roma).

Sunto. - *Premesse alcune considerazioni generali sulla teoria aritmetica delle funzioni e delle varietà quasi abeliane, destinate a venir riprese ed esposte compiutamente in altri lavori, si approfondisce lo studio da un punto di vista strettamente aritmetico delle relazioni generalizzate di* HURWITZ *relative ad una matrice quasi abeliana* ω, *determinando che in una simile relazione, che è del tipo* $\Lambda\omega = \omega\mathrm{I}$ *(con la* I *matrice ad elementi interi e la* Λ *matrice ad elementi complessi), la* I *individua la* Λ *se e solo se* $\rho' = \delta_2$. *Inoltre la* I *può esser data ad arbitrio se e solo se* $\rho = \mathrm{p}$. *Se invece* $\rho < \mathrm{p}$, *la* I *si riduce in generale alla* $\gamma\mathrm{U}$ *(ove* γ *é un intero qualunque e la* U *è la matrice diagonale unitaria). Per valori particolari dei moduli alla soluzione* $\mathrm{I} = \gamma\mathrm{U}$ *possono tuttavia aggiungersi anche altre soluzioni.*

1. Introduzione. — Nella presente memoria proseguo l'esposizione di un complesso di ricerche, tendenti a trasportare al campo delle funzioni quasi abeliane, la cui teoria è stata recentemente costruita da SEVERI (1), quella parte della vasta teoria delle funzioni abeliane, che va sotto il nome di *teoria delle matrici di Riemann* (SCORZA (2)) o di *teoria aritmetica delle funzioni abeliane.* In modo più preciso, dirò che la maggior parte dei risultati, dei quali sono già in possesso, si aggirano in quel complesso di idee e di questioni, che, nel caso abeliano, è dominato dalla considerazione del cosiddetto *indice di moltiplicabilità.* Non sono invece ancora riuscito ad isolare nel caso quasi abeliano alcunchè di analogo all'*indice di singolarità*, che si introduce nella teoria delle matrici di RIEMANN.

Senonchè, anche limitandosi alle questioni di moltiplicabilità, si palesano differenze profonde tra il caso abeliano e quello quasi abeliano, che fanno sembrar lecito l'affermare che la *teoria aritmetica delle funzioni quasi abeliane* è destinata ad assumere un'ampiezza forse anche maggiore della corrispondente teoria abeliana, senza ad ogni modo ridursi affatto ad una più o meno ovvia generalizzazione di questa. Una delle anzidette differenze profonde, che ha carattere generale, è conseguenza del fatto che, mentre una matrice di RIEMANN ω *individua* un corpo di funzioni abeliane, e cioè il corpo costi-

(1) F. SEVERI, *Funzioni quasi abeliane,* « Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia », n. 4, 1947; tale Memoria sarà citata in seguito con F. Q. A.

(2) Cfr. le due fondamentali Memorie di G. SCORZA, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni,* « Rend. Palermo », t. 41, 1916 e *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann,* « Rend. Palermo », t. 45, 1921.

tuito da *tutte* le funzioni meromorfe con la tabella di periodi primitivi ω, avviene invece che vi possano essere *più* corpi di funzioni quasi abeliane con la *stessa* tabella ω di periodi (primitivi), tutti contenuti nel corpo più ampio di *tutte* le funzioni meromorfe con la tabella di periodi ω. Da ciò consegue che, mentre nel caso abeliano le proprietà aritmetiche della matrice ω si riflettono *univocamente* nel campo funzionale, può invece a priori avvenire nel caso quasi abeliano — ed effettivamente avviene — che una proprietà aritmetica della ω si interpreti *in modo diverso* in rapporto ai varî corpi quasi abeliani con la tabella di periodi ω. Mentre perciò la teoria delle matrici di RIEMANN può essere sviluppata, come ad es. avviene nelle classiche ricerche di SCORZA, lasciando completamente da parte ogni aspetto funzionale. senza che con questo venga sostanzialmente menomato il suo contenuto, l'aspetto funzionale deve invece essere tenuto sempre presente nel caso quasi abeliano, giacchè esso non è assorbito dall'aspetto aritmetico.

Scendendo ora a qualche considerazione più concreta, ricorderò che già in alcuni precedenti lavori ([3]) ho avuto occasione di introdurre le relazioni generalizzate di HURWITZ di una matrice quasi abeliana ω (dove intendo per matrice quasi abeliana ogni matrice a π righe ed a $\pi' \leq 2\pi$ colonne, la quale si possa considerare come la tabella dei periodi primitivi di un corpo di funzioni quasi abeliane; se $\pi' = 2\pi$ la matrice considerata diviene una matrice di RIEMANN di genere π ed il corpo un corpo di funzioni abeliane). Dicesi precisamente relazione generalizzata di HURWITZ della matrice quasi abeliana ω, ogni relazione del tipo:

$$\Lambda\omega = \omega I, \tag{1.1}$$

nella quale I è una matrice quadrata ad elementi interi d'ordine π' e Λ è una matrice quadrata ad elementi comunque complessi d'ordine π. È ben noto che, nel caso abeliano, le due matrici Λ ed I s'individuano reciprocamente e che per moduli generici l'unica scelta possibile per la I è la $I = \gamma U$, essendo γ un intero arbitrario ed U la matrice diagonale unitaria, d'ordine 2π. Per moduli particolari può tuttavia darsi che la I possa essere scelta anche in modo diverso dalla γU, mai però potendo essere data arbitrariamente. Ora, nel terzo dei lavori citati in ([3]) ho fatto vedere che anche nel caso quasi abeliano la Λ individua la I, mentre semplici esempî dimostrano che la I non individua sempre la Λ. Può inoltre avvenire che la I possa essere data arbitrariamente.

([3]) F. CONFORTO, *Sopra le trasformazioni in sè della varietà di Jacobi relativa ad una curva di genere effettivo diverso dal genere virtuale, in ispecie nel caso di genere effettivo nullo*, « Annali di Matematica », t. XXVII, 1948; *Alcune osservazioni sulla teoria delle funzioni e delle varietà quasi abeliane*, « Boll. dell'U. M. I. », serie III, anno IV, n. 1, 1949; *Sopra le corrispondenze univoche tra i punti di una varietà quasi abeliana di Picard, rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie*, « Rend. Acc. Lincei », serie VIII, Vol V, 1948.

Nella presente Memoria dò risposta completa alle varie questioni che così si pongono, determinando *la condizione necessaria e sufficiente perchè la* I *individui la* Λ *e perchè la* I *si possa dare arbitrariamente.* Viene altresì precisato il problema di *determinare tutte le* Λ *che, insieme ad una data* I, *danno luogo, per un'assegnata* ω, *ad una relazione* (1.1). La trattazione ha carattere esclusivamente aritmetico; e si conclude mettendo in evidenza il fatto che le matrici quasi abeliane, per le quali in rapporto alla questione trattata si hanno proprietà analoghe a quelle delle matrici di RIEMANN, sono quelle per cui i caratteri p, δ_1, δ_2, ρ introdotti da SEVERI soddisfano alle condizioni:

$$\rho < p, \qquad \rho = \delta_2 .$$

Il valore del carattere δ_1 non ha invece alcuna influenza.

L'aspetto funzionale delle ricerche qui esposte, in rapporto alle trasformazioni in sè (algebriche o no) delle varietà quasi abeliane di PICARD, alle involuzioni tracciate su una tale varietà (che siano o no birazionalmente equivalenti alla varietà data), alla teoria della moltiplicazione e della trasformazione delle funzioni quasi abeliane, sino all'introduzione di un indice di moltiplicabilità per ogni matrice quasi abeliana, sarà oggetto di altri lavori.

2. **Un'osservazione preliminare.** — È facile persuadersi che i problemi di determinare tutte le relazioni generalizzate di HURWITZ relative a due matrici quasi abeliane *equivalenti* coincidono. Per due matrici *equivalenti* [1] s'intende qui due matrici quasi abeliane ω ed ω', che siano legate tra loro da una relazione del tipo:

$$\omega' = \alpha\omega A, \tag{2.1}$$

essendo α una qualunque matrice quadrata d'ordine π a determinante non nullo ed A una qualunque matrice d'ordine π' unimodulare, ossia ad elementi interi col determinante ± 1.

La dimostrazione è identica a quella che si svolge nel caso abeliano, onde basterà accennarla rapidamente. Se:

$$\Lambda\omega = \omega I \tag{2.2}$$

è una relazione generalizzata di HURWITZ, relativa alla ω, da essa si deduce subito una relazione analoga per la ω'. Infatti, dalla (2.1) si ricava immediatamente:

$$\omega = \alpha^{-1}\omega' A^{-1}$$

(dove la A^{-1}, come inversa di una matrice unimodulare, sarà ancora unimodulare) e quindi:

$$\Lambda\omega = \Lambda\alpha^{-1}\omega' A^{-1}, \qquad \omega I = \alpha^{-1}\omega' A^{-1} I.$$

(1) F. Q. A., n. 48.

onde, per la (2.2) sarà anche:

$$\Lambda\alpha^{-1}\omega' A^{-1} = \alpha^{-1}\omega' A^{-1} I,$$

ossia, moltiplicando a sinistra per la α ed a destra per la A:

$$(\alpha\Lambda\alpha^{-1})\cdot\omega' = \omega'\cdot(A^{-1}IA), \tag{2.3}$$

che è una relazione di HURWITZ per la ω', essendo ovviamente la $A^{-1}IA$ una matrice ad elementi interi.

Inversamente, da una relazione:

$$\Lambda'\omega' = \omega' I'$$

per la ω', si ricava, tenuto conto della (2.1):

$$\Lambda'\alpha\omega A = \alpha\omega A I',$$

da cui:

$$(\alpha^{-1}\Lambda'\alpha)\cdot\omega = \omega\cdot(AI'A^{-1}),$$

che è una relazione di HURWITZ per la ω.

Non possono poi due *distinte* relazioni di HURWITZ per la ω, siano esse:

$$\Lambda_1\omega = \omega I_1, \qquad \Lambda_2\omega = \omega I_2, \tag{2.4}$$

dare luogo alla *stessa* relazione per la ω', giacchè, per la (2.3), dovrebbe allora essere:

$$\alpha\Lambda_1\alpha^{-1} = \alpha\Lambda_2\alpha^{-1}, \qquad A^{-1}I_1A = A^{-1}I_2A,$$

e da queste si ricava subito:

$$\Lambda_1 = \Lambda_2, \qquad I_1 = I_2,$$

sicchè le due relazioni (2.4) non sarebbero distinte.

Si conclude che vi è corrispondenza *biunivoca* tra le relazioni di HURWITZ per la ω e per la ω'; e con la coincidenza anzidetta dei due problemi della determinazione di tali relazioni per la ω e per la ω'.

3. **Alcuni richiami.** — In base a quanto detto al n. 2, sarà dunque sufficiente limitarsi alla determinazione di tutte le relazioni generalizzate di HURWITZ per una matrice quasi abeliana nella *forma normale di* SEVERI, ossia per le matrici quasi abeliane del tipo [5]:

$$\omega = \left\| \begin{matrix} A^{(p,p)} & \Omega^{(p,p)} & O^{(p,\delta_1)} \\ O^{(\delta_1,p)} & \Omega_1^{(\delta_1,p)} & B^{(\delta_1,\delta_1)} \\ O^{(\delta_2,p)} & \Omega_2^{(\delta_2,p)} & O^{(\delta_2,\delta_1)} \end{matrix} \right\|. \tag{3.1}$$

---

[5] In realtà la dimostrazione del fatto che ogni matrice quasi abeliana è equivalente ad una matrice in forma normale è subordinata al verificarsi di un'ipotesi, detta da SEVERI « l'ipotesi L », che potrà eventualmente essere restrittiva (cfr. F. Q. A., nn. 45 e 47). Se l'ipotesi L dovesse veramente risultare restrittiva vi potrebbero essere corpi di funzioni quasi abeliane, per i quali la matrice dei periodi non potrebbe essere ricondotta alla forma normale. Tali (eventuali) corpi si intendono comunque *esclusi* dalle considerazioni della presente memoria, nella quale la forma normale della matrice dei periodi ha un ufficio essenziale.

Nella (3.1) si è indicato con $A^{(r,s)}$ (e similmente con $\Omega^{(r,s)}$, $\Omega_1^{(r,s)}$, ecc.) una matrice ad r righe e ad s colonne; ($O^{(r,s)}$ rappresenta in particolare la matrice ad r righe e ad s colonne con gli elementi tutti nulli). Ne segue che la matrice ω nella (3.1) è una matrice a $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$ righe ed a $\pi' = 2p + \delta_1$ colonne. Inoltre $B^{(\delta_1, \delta_1)}$ è la matrice diagonale, i cui elementi sulla diagonale principale valgono $2\pi i$; e la matrice

$$(3.2) \qquad \left\| A^{(p,p)} \quad \Omega^{(p,p)} \right\|$$

è una matrice di RIEMANN *normale* di genere p, per guisa [6] che $A^{(p,p)}$ è la matrice diagonale:

$$(3.3) \qquad A^{(p,p)} = \left\| \begin{matrix} \frac{2\pi i}{d_1} & & & \\ & \frac{2\pi i}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{2\pi i}{d_p} \end{matrix} \right\|,$$

ove i *divisori elementari* d_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) sono interi positivi tali che $d_1 = 1$ e d_i ($i = 2, 3, \ldots, p$) è multiplo di d_{i-1}, mentre $\Omega^{(p,p)}$ è una matrice *simmetrica*, tale che le parti reali dei suoi elementi si possano prendere come i coefficienti di una forma quadratica definita e negativa in p variabili (reali).

Sia avvertito esplicitamente, una volta per tutte, che, nel seguito, quando occorrerà adoperare in modo corrente numerose matrici, si tralascerà la scrittura dei due indici indicanti il numero delle righe e delle colonne, ove ciò si possa fare senza creare ambiguità. Se così ad es. capiterà che, nel corso di un calcolo, gli interi p, δ_1, δ_2 siano fissi, la matrice (3.1) si scriverà semplicemente nella forma:

$$(3.4) \qquad \omega = \left\| \begin{matrix} A & \Omega & O \\ O & \Omega_1 & B \\ O & \Omega_2 & O \end{matrix} \right\|.$$

Accanto ai tre *caratteri interi* (positivi o nulli) p, δ_1, δ_2, SEVERI ha anche introdotto [7] un quarto *carattere intero* ρ (≥ 0), che rappresenta la caratteristica della matrice Ω_2, onde sarà sempre:

$$(3.5) \qquad \rho \leq p, \qquad \rho \leq \delta_2.$$

Introdotto il carattere ρ, si può subito costruire una matrice equivalente alla (3.1), che ha la stessa forma della (3.1) ma per la quale la Ω_2 ha l'aspetto:

$$(3.6) \qquad \Omega_2^{(\delta_2, p)} = \left\| \begin{matrix} C^{(\rho,\rho)} & \Omega'^{(\rho, p-\rho)}_2 \\ O^{(\delta_2-\rho, \rho)} & O^{(\delta_2-\rho, p-\rho)} \end{matrix} \right\|,$$

[6] Cfr. ad es. il mio volume: *Funzioni abeliane e matrici di Riemann*, p. I, « Corsi dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica », Roma, 1942, cap. I, n. 48.

[7] F. Q. A., n. 55.

dove la C è la matrice diagonale, che ha tutti gli elementi sulla diagonale principale eguali a $2\pi i$.

Nel seguito si farà costantemente riferimento alle matrici quasi abeliane della forma (3.1) o (3.4), per le quali la Ω_2 abbia l'espressione (3.6).

Occorre anche ricordare [8] che, compatibilmente con l'esistenza di un corpo K di funzioni quasi abeliane di π variabili, la matrice ω nella forma (3.1) può essere scelta *arbitrariamente*, nel senso che, scelti ad arbitrio: i tre interi (positivi o nulli) p, δ_1, δ_2, tali che $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$; una matrice di RIEMANN normale di genere p del tipo (3.2) con divisori elementari qualsiasi; due matrici $\Omega_1^{(\delta_1, p)}$, $\Omega_2^{(\delta_2, p)}$, e costruita con tali elementi la matrice (3.1), esiste sempre un corpo di funzioni quasi abeliane, cha ha la matrice (3.1) come matrice dei periodi primitivi.

Da quanto ora detto, consegue in particolare, con riferimento alla (3.6), che anche il carattere ρ può essere dato arbitrariamente, compatibilmente con le (3.5); e che arbitrariamente possono anche essere assegnati gli elementi della matrice Ω'_2 nella (3.6).

Si consideri infine la totalità delle matrici quasi abeliane di dati caratteri p, δ_1, δ_2, ρ, per le quali si immaginino inoltre fissati i divisori elementari, che nella (3.1) intervengono nella matrice $A^{(p,p)}$, definita dalla (3.3). Fissati p, δ_1, δ_2, ρ ed i divisori elementari, la anzidetta totalità si può ottenere lasciando variare in modo continuo:

$$\nu = \frac{p(p+1)}{2} + p\delta_1 + \rho(p-\rho)$$

moduli [9] tra loro indipendenti, che, riferendosi alle (3.1), (3.2) e (3.6), sono semplicemente gli elementi della matrice *simmetrica* Ω e gli elementi delle matrici Ω_1 ed Ω'_2. Detta variazione è in sostanza arbitraria, salvo la condizione di carattere qualitativo, esprimentesi cioè con disuguaglianze, che le parti reali degli elementi della Ω siano i coefficienti di una forma quadratica definita e negativa.

La totalità delle matrici quasi abeliane di dati caratteri e divisori elementari costituisce perciò un unico *continuo* a ν dimensioni. Ha perciò senso di parlare di matrice quasi abeliana *generica* o *a moduli generali*, ovvero anche di proprietà valide *in generale* per le matrici di detta totalità. Come al solito s'intenderà con ciò dire che le matrici della totalità che *non* soddisfano alla proprietà considerata, formano uno o più continui di dimensione minore di ν.

4. Sulla individuazione della Λ data la I. — Mi propongo ora di indagare anzitutto la possibilità di determinare la Λ data la I, quando sia soddi-

---

[8] F. Q. A., n. 54.

[9] F. Q. A., n. 55.

sfatta per una data matrice quasi abeliana ω una relazione generalizzata di HURWITZ del tipo (1.1).

Assunta all'uopo la ω nella forma (3.1), si ponga:

$$(4.1)\quad I = \begin{Vmatrix} I_{11}^{(p,p)} & I_{12}^{(p,p)} & I_{13}^{(p,\delta_1)} \\ I_{21}^{(p,p)} & I_{22}^{(p,p)} & I_{23}^{(p,\delta_1)} \\ I_{31}^{(\delta_1,p)} & I_{32}^{(\delta_1,p)} & I_{33}^{(\delta_1,\delta_1)} \end{Vmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{Vmatrix} \Lambda_{11}^{(p,p)} & \Lambda_{12}^{(p,\delta_1)} & \Lambda_{13}^{(p,\delta_2)} \\ \Lambda_{21}^{(\delta_1,p)} & \Lambda_{22}^{(\delta_1,\delta_1)} & \Lambda_{23}^{(\delta_1,\delta_2)} \\ \Lambda_{31}^{(\delta_2,p)} & \Lambda_{32}^{(\delta_2,\delta_1)} & \Lambda_{33}^{(\delta_2,\delta_2)} \end{Vmatrix},$$

con l'intesa che gli elementi della I_{hk} $(h, k = 1, 2, 3)$ siano interi. Esprimendo allora che è soddisfatta la (1.1), si perviene al sistema di nove relazioni tra matrici ([10]):

$$(4.2)\qquad \begin{cases} A\,I_{11} + \Omega I_{21} = \Lambda_{11}A \\ A\,I_{12} + \Omega I_{22} = \Lambda_{11}\Omega + \Lambda_{12}\Omega_1 + \Lambda_{13}\Omega_2 \\ A\,I_{13} + \Omega I_{23} = \Lambda_{12}B \\ \Omega_1 I_{21} + BI_{31} = \Lambda_{21}A \\ \Omega_1 I_{22} + BI_{32} = \Lambda_{21}\Omega + \Lambda_{22}\Omega_1 + \Lambda_{23}\Omega_2 \\ \Omega_1 I_{23} + BI_{33} = \Lambda_{22}B \\ \Omega_2 I_{21} = \Lambda_{31}A \\ \Omega_2 I_{22} = \Lambda_{31}\Omega + \Lambda_{32}\Omega_1 + \Lambda_{33}\Omega_2 \\ \Omega_2 I_{23} = \Lambda_{32}B. \end{cases}$$

Per vedere se e sino a qual punto la I individui la Λ, si concepiscano nelle (4.2) le I_{hk} $(h, k = 1, 2, 3)$ come date e si cerchi di risolvere detto sistema rispetto alle matrici Λ_{hk} $(h, k = 1, 2, 3)$.

A questo scopo si osservi che le matrici A e B, essendo (n. 3) diagonali con gli elementi sulla diagonale principale tutti non nulli, son certo dotate di inversa A^{-1} e B^{-1}. Dalla prima, terza, quarta, sesta, settima e nona delle (4.2) si può quindi senz'altro ricavare:

$$(4.3)\qquad \begin{cases} \Lambda_{11} = (A\,I_{11} + \Omega I_{21})A^{-1} \\ \Lambda_{12} = (A\,I_{13} + \Omega I_{23})B^{-1} \\ \Lambda_{21} = (\Omega_1 I_{21} + BI_{31})A^{-1} \\ \Lambda_{22} = (\Omega_1 I_{23} + BI_{33})B^{-1} \\ \Lambda_{31} = \Omega_2 I_{21} A^{-1} \\ \Lambda_{32} = \Omega_2 I_{23} B^{-1}. \end{cases}$$

Ne consegue che *la matrice* I *individua le matrici* Λ_{11}, Λ_{12}, Λ_{21}, Λ_{22}, Λ_{31} Λ_{32}, ossia, per la seconda delle (4.1), *le prime due colonne della matrice* Λ.

Per determinare la terza colonna della matrice Λ, ossia le matrici Λ_{13}, Λ_{23}, Λ_{33}, rimangono la seconda, la quinta e la ottava delle equazioni (4.2).

([10]) Già indicate al n. 4 del primo dei miei lavori citati alla nota ([3]).

Tali equazioni, sostituendo in esse le espressioni (4.3) per le Λ_{11}, Λ_{12}, Λ_{21}, Λ_{22}, Λ_{31}, Λ_{32}, divengono:

$$\Lambda_{13}\Omega_2 = L^{(p,p)}, \qquad \Lambda_{23}\Omega_2 = M^{(\delta_1,p)}, \qquad \Lambda_{33}\Omega_2 = N^{(\delta_2,p)}, \tag{4.4}$$

ove si è posto:

$$\left\{\begin{aligned} L &= AI_{12} + \Omega I_{22} - (AI_{11} + \Omega I_{21})A^{-1}\Omega - (AI_{13} + \Omega I_{23})B^{-1}\Omega_1 \\ M &= \Omega_1 I_{22} + BI_{32} - (\Omega_1 I_{21} + BI_{31})A^{-1}\Omega - (\Omega_1 I_{23} + BI_{33})B^{-1}\Omega_1 \\ N &= \Omega_2 I_{22} - \Omega_2 I_{21} A^{-1}\Omega - \Omega_2 I_{23} B^{-1}\Omega_1 . \end{aligned}\right. \tag{4.5}$$

Data la I e la ω, le matrici L, M, N son da riguardarsi come note.

Non è ora da pensare che dalle (4.4) si possano ricavare le Λ_{13}, Λ_{23}, Λ_{33}, moltiplicando a destra per l'inversa di Ω_2: anzitutto perchè la Ω_2 può essere una matrice rettangolare, essendo a δ_2 righe e a p colonne; e d'altronde, quand'anche la Ω_2 fosse quadrata, essa potrebbe non essere dotata di inversa.

Per fare una trattazione generale, occorre perciò procedere al modo seguente.

Introdotto (n. 3) il carattere ρ ed assunta la Ω_2 nella forma (3.6), si ponga

$$\left\{\begin{aligned} \Lambda_{13}^{(p,\delta_2)} &= \| P_1^{(p,\rho)} \;\; P_2^{(p,\delta_2-\rho)} \| \\ \Lambda_{23}^{(\delta_1,\delta_2)} &= \| Q_1^{(\delta_1,\rho)} \;\; Q_2^{(\delta_1,\delta_2-\rho)} \| \\ \Lambda_{33}^{(\delta_2,\delta_2)} &= \| R_1^{(\delta_2,\rho)} \;\; R_2^{(\delta_2,\delta_2-\rho)} \| \end{aligned}\right. \tag{4.6}$$

ed:

$$\left\{\begin{aligned} L^{(p,p)} &= \| L_1^{(p,\rho)} \;\; L_2^{(p,p-\rho)} \| \\ M^{(\delta_1,p)} &= \| M_1^{(\delta_1,\rho)} \;\; M_2^{(\delta_1,p-\rho)} \| \\ N^{(\delta_2,p)} &= \| N_1^{(\delta_2,\rho)} \;\; N_2^{(\delta_2,p-\rho)} \| \end{aligned}\right. ; \tag{4.7}$$

la prima delle (4.4), tenuto conto della (3.6) e delle (4.6) e (4.7), diviene:

$$\| P_1 \;\; P_2 \| \left\| \begin{matrix} C & \Omega'_2 \\ O & O \end{matrix} \right\| = \| L_1 \;\; L_2 \| ,$$

dalla quale si deducono le equazioni:

$$P_1 C = L_1 , \qquad P_1 \Omega'_2 = L_2 .$$

Procedendo in modo simile per le ultime due delle (4.4), il sistema delle equazioni (4.4) si traduce alla fine nel sistema equivalente di sei equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} P_1 C &= L_1 , \qquad & P_1\Omega'_2 &= L_2 \\ Q_1 C &= M_1 , \qquad & Q_1\Omega'_2 &= M_2 \\ R_1 C &= N_1 , \qquad & R_1\Omega'_2 &= N_2 . \end{aligned}\right. \tag{4.8}$$

Ora, tenuto conto (n. 3) che la C è una matrice diagonale con tutti gli elementi sulla diagonale principale non nulli e quindi dotata di inversa, dalle tre equazioni della prima colonna delle (4.8), si ricava:

$$P_1 = L_1 C^{-1}, \qquad Q_1 = M_1 C^{-1}, \qquad R_1 = N_1 C^{-1}. \tag{4.9}$$

Le (4.9), tenuto conto delle (4.5) e (4.6), mostrano che *la matrice* I *individua la prima colonna delle matrici* Λ_{13}, Λ_{23}, Λ_{33}, *scritte nella forma* (4.6), ossia le matrici P_1, Q_1, R_1. Le matrici P_2, Q_2, R_2, che costituiscono la seconda colonna rispettivamente delle Λ_{13}, Λ_{23}', Λ_{33} nella forma (4.6), non intervengono invece affatto nelle (4.8), onde esse rimangono assolutamente arbitrarie.

Dopo ciò, tenuto conto delle (4.1), (4.3), (4.5), (4.6), (4.7), (4.9), si può concludere col

TEOREMA I – *Tutte e sole le matrici* Λ, *le quali, insieme ad una determinata* I, *soddisfano ad una relazione generalizzata di Hurwitz della matrice quasi abeliana* (3.1) (per la quale la Ω_2 ha la forma (3.6)), *sono le matrici della forma:*

$$\Lambda = \left\| \begin{matrix} (AI_{11} + \Omega I_{21})A^{-1} & (AI_{13} + \Omega I_{23})B^{-1} & L_1 C^{-1} & P_2 \\ (\Omega_1 I_{21} + BI_{31})A^{-1} & (\Omega_1 I_{23} + BI_{33})B^{-1} & M_1 C^{-1} & Q_2 \\ \Omega_2 I_{21} A^{-1} & \Omega_2 I_{21} B^{-1} & N_1 C^{-1} & R_2 \end{matrix} \right\|, \tag{4.10}$$

dove L_1, M_1, N_1 *sono rispettivamente le matrici formate dalle prime* ρ *colonne delle matrici* L, M, N *definite dalle* (4.5) *e* P_2, Q_2, R_2 *sono matrici a* $\delta_2 - \rho$ *colonne e rispettivamente a* p, δ_1, δ_2 *righe, assolutamente arbitrarie.*

Nella matrice (4.10) intervengono così in totale:

$$(p + \delta_1 + \delta_2)(\delta_2 - \rho) = \pi(\delta_2 - \rho)$$

parametri arbitrarî onde si può dire che *le matrici* Λ *che, insieme ad una determinata* I, *soddisfano ad una relazione generalizzata di Hurwitz della matrice quasi abeliana* (3.1) *sono* $\infty^{\pi(\delta_2-\rho)}$.

Dal Teorema I risulta evidente che la matrice *I non individua* di regola la Λ. Perchè tale individuazione abbia luogo occorre e basta che nella (4.10) vengano a mancare le matrici P_2, Q_2, R_2. Ora ciò succede o quando $p = \delta_1 = \delta_2 = 0$, ovvero quando $\rho = \delta_2$. Il primo caso è da scartare perchè allora sarebbe $p + \delta_1 + \delta_2 = \pi = 0$. Occorre dunque e basta che sia $\rho = \delta_2$; e si può perciò concludere col

TEOREMA II – *Condizione necessaria e sufficiente perchè nelle relazioni generalizzate di Hurwitz di una matrice quasi abeliana la matrice* I *individui la matrice* Λ *è che sia:*

$$\rho = \delta_2 .$$

5. **Le equazioni di condizione per la matrice** *I*. — Sorge ora la questione di determinare tutte le matrici *I*, che, in rapporto ad una data matrice ω quasi abeliana possono entrare in una relazione generalizzata di HURWITZ (1.1).

Per decidere su questo argomento, si ricordi che il sistema (4.2) è equivalente al sistema delle (4.3) e delle (4.8). Ora le (4.3) e le tre equazioni della prima colonna delle (4.8) permettono, nei limiti in cui ciò è possibile, la determinazione della Λ data la *I*. Ma rimane da considerare l'ufficio delle tre equazioni della seconda colonna delle (4.8), le quali, tenute presenti le (4.9) si scrivono:

(5.1) $$L_1 C^{-1}\Omega'_2 = L_2, \qquad M_1 C^{-1}\Omega'_2 = M_2, \qquad N_1 C^{-1}\Omega'_2 = N_2.$$

Per le (4.5) e (4.7), le (5.1) non involgono più gli elementi della matrice Λ ma rappresentano *relazioni tra gli elementi delle matrici* ω *ed* I. in numero di *al più*:

$$p\,p-\rho) + \delta_1(p-\rho) + \delta_2(p-\rho) = (p+\delta_1+\delta_2)(p-\rho) = \pi(p-\rho).$$

Per l'equivalenza tra il sistema delle (4.2) ed il sistema delle (4.3) e (4.8), le (5.1) sono *le sole* relazioni, a cui debbono soddisfare gli elementi della I.

Si tratta ora di indagare se e quando le (5.1) siano *effettivamente vincolanti* per la matrice I.

All'uopo si osservi che le (5.1) vengono a mancare se $p = \delta_1 = \delta_2 = 0$, ovvero se $\rho = p$. Ma la prima ipotesi va scartata perchè implica $\pi = 0$, sicchè le (5.1) non esistono allora e solo allora che sia $\rho = p$. In tal caso, la matrice I può ovviamente venir scelta ad arbitrio, non essendoci alcun vincolo da rispettare.

Proverò ora che il caso $\rho = p$ è l'unico, in cui la I può esser data ad arbitrio.

Poichè, per la prima delle (3.5), è $\rho \leq p$, se non è $\rho = p$ sarà $\rho < p$. Sia dunque $\rho < p$ e suppongansi le (5.1) risolubili con *qualsiasi* matrice I del tipo indicato dalla prima delle (4.1). Si troverà un assurdo, sicchè deve essere proprio $\rho = p$.

Poichè $\rho \geq 0$ e $\rho < p$, sarà certo $p \geq 1$, sicchè la matrice I_{12} è certo presente nella I, definita dalla prima delle (4.1). Si scelgano allora nella I nulle tutte le matrici che la compongono, tranne la I_{12}, che si riduca alla matrice diagonale unitaria. Per la prima delle (4.5) sarà allora:

$$L = A$$

sicchè, posto, tenuto conto che la A è per la (3.3) una matrice diagonale:

(5.2) $$A = \begin{Vmatrix} A_1^{(\rho,\rho)} & O^{(\rho,p-\rho)} \\ O^{(p-\rho,\rho)} & A_2^{(p-\rho,p-\rho)} \end{Vmatrix},$$

si avrà dalle (4.7):

(5.3) $$L_1 = \begin{Vmatrix} A_1^{(\rho,\rho)} \\ O^{(p-\rho,\rho)} \end{Vmatrix}, \qquad L_2 = \begin{Vmatrix} O^{(\rho,p-\rho)} \\ A_2^{(p-\rho,p-\rho)} \end{Vmatrix}.$$

Ciò premesso, la prima delle (5.1) deve essere, per ipotesi, soddisfatta da qualunque matrice I e quindi anche dalla I costruita nel modo anzidetto.

Per le (5.3), sarà perciò:

$$\begin{Vmatrix} A_1 \\ O \end{Vmatrix} C^{-1}\Omega'_2 = \begin{Vmatrix} O \\ A_2 \end{Vmatrix},$$

che si scinde nelle due equazioni:

$$A_1 C^{-1}\Omega'_2 = O, \qquad O = A_2 .$$

Ora, la seconda di tali equazioni (che, per essere $\rho < p$, non svanisce certamente) è manifestamente *assurda*, tenuta presente la (5.2) e la forma (3.3) per la matrice A.

Si conclude pertan o che è certo $\rho = p$; e si può enunciare il

Teorema III – *Condizione necessaria e sufficiente perchè nelle relazioni generalizzate di Hurwitz di una matrice quasi abeliana si possa dare ad arbitrio la matrice* I *è che sia:*

$$\rho = p.$$

6. **Il caso** $\rho < p$. — In base al Teorema III, le equazioni (5.1) sono *effettivamente vincolanti* la I quando e solo quando sia $\rho < p$. Anche in tal caso vi possono essere tuttavia matrici I, per le quali le (5.1) risultino soddisfatte per *tutte* le matrici quasi abeliane (di dati caratteri p. δ_1, δ_2, ρ e di dati divisori elementari nella matrice A), per le quali cioè le (5.1) risultino *identicamente soddisfatte*, al variare della matrice quasi abeliana ω. Di matrici siffatte ne esistono certamente, giacchè la (1.1) risulta certo soddisfatta, *qualunque sia la* ω, ponendo per la Λ e la I le matrici diagonali unitarie (d'ordini rispettivi π e π'). In quanto segue, le matrici del tipo anzidetto verranno determinate *tutte*.

Si tratta dunque di determinare tutte le matrici I, per le quali le (5.1) siano soddisfatte per *tutte* le ω del tipo (3.1), essendo la A data dalla (3.3) e la Ω_2 del tipo (3.6).

All'uopo si ricordi (n. 3) che nella (3.1) gli elementi delle matrici Ω_1 ed Ω'_2 possono essere dati arbitrariamente. Suppongasi allora di scegliere gli elementi di Ω'_2 tutti nulli. Le prime due delle (5.1), dovendo essere soddisfatte, forniscono necessariamente, tenuto conto che, come risulta dalle (4.5), gli elementi della Ω'_2 non entrano nelle matrici L, M (e quindi neanche nelle L_2, M_2):

$$L_2 = O, \qquad M_2 = O. \tag{6.1}$$

Dovendo essere soddisfatte le (6.1), le prime due delle (5.1) si possono scrivere nella forma:

$$L_1 C^{-1}\Omega'_2 = O, \qquad M_1 C^{-1}\Omega'_2 = O, \tag{6.2}$$

che debbono ancora valere qualunque siano gli elementi di Ω'_2. Si scelgano allora gli elementi di Ω'_2 tutti nulli, tranne quello che occupa l'i-esimo posto $(1 \leq i \leq \rho)$ nella prima colonna. Dalle (6.2) segue allora che debbono essere nulli tutti gli elementi della i-esima colonna delle matrici $L_1 C^{-1}$, $M_1 C^{-1}$; e poichè i può variare da 1 a ρ (se $\rho = 0$ le (6.2) non esistono), si conclude che deve essere:

$$L_1 C^{-1} = O, \qquad M_1 C^{-1} = O,$$

ossia, moltiplicando a destra per la C:

$$L_1 = O, \qquad M_1 = O. \tag{6.3}$$

Tenute presenti le (4.7), le (6.1) e (6.3) equivalgono a dire che deve essere:

$$L = O, \qquad M = O,$$

ossia, per le (4.5):

$$\begin{cases} AI_{12} + \Omega I_{22} - (AI_{11} + \Omega I_{21})A^{-1}\Omega - (AI_{13} + \Omega I_{23})B^{-1}\Omega_1 = O \\ \Omega_1 I_{22} + BI_{32} - (\Omega_1 I_{21} + BI_{31})A^{-1}\Omega - (\Omega_1 I_{23} + BI_{33})B^{-1}\Omega_1 = O. \end{cases} \tag{6.4}$$

Le (6.4) devono essere ora verificate scegliendo ancora arbitrariamente gli elementi della Ω_1. Scegliendo tali elementi tutti nulli, dovrà perciò essere:

$$\begin{cases} AI_{12} + \Omega I_{22} = (AI_{11} + \Omega I_{21})A^{-1}\Omega \\ BI_{32} = BI_{31}A^{-1}\Omega. \end{cases} \tag{6.5}$$

Si consideri anzitutto la prima delle (6.5). La matrice Ω ha certamente determinante non nullo perchè altrimenti si potrebbe trovare una matrice $\tau^{(1,p)}$ ad elementi non tutti nulli, per cui $\tau\Omega$ sia nulla; e ciò si palesa subito in contrasto con la nota disuguaglianza di RIEMANN. Si può quindi parlare della inversa Ω^{-1} della Ω. Dalla prima delle (6.5) si deduce allora:

$$(AI_{12} + \Omega I_{22})\Omega^{-1} = (AI_{11} + \Omega I_{21})A^{-1}.$$

Posto:

$$\alpha = (AI_{12} + \Omega I_{22})\Omega^{-1} = (AI_{11} + \Omega I_{21})A^{-1},$$

sarà dunque:

$$\alpha A = AI_{11} + \Omega I_{21}, \qquad \alpha\Omega = AI_{12} + \Omega I_{22}$$

e quindi:

$$\alpha \, \| A \ \Omega \| = \| A \ \Omega \| \begin{Vmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{Vmatrix}. \tag{6.6}$$

La (6.6) ha la forma di una relazione di HURWITZ per la matrice di RIEMANN $\| A \ \Omega \|$; e ciò, tenuto conto che tale matrice di RIEMANN può ancora variare arbitrariamente (rimanendo però fissi i divisori elementari, che compaiono nella A), porta alla conseguenza che deve essere ([11]):

$$I_{11} = \gamma U, \qquad I_{12} = O, \qquad I_{21} = O, \qquad I_{22} = \gamma U, \tag{6.7}$$

essendo U la matrice diagonale unitaria d'ordine p e γ un intero arbitrario (positivo, negativo o nullo).

Dalla seconda delle (6.5) si ricava invece anzitutto, moltiplicando a sinistra per la B^{-1}:

$$I_{31}A^{-1}\Omega = I_{32}. \tag{6.8}$$

Se, in quest ultima relazione, si prendono, come è possibile (n. 3), gli elementi di Ω tutti *reali*, la $A^{-1}\Omega$ è ad elementi immaginari puri, onde, es-

([11]) Cfr. ad es. loco citato in ([6]), cap. II, n. 18.

sendo le I_{31} ed I_{32} ad elementi interi e quindi reali, il primo membro della (6.8) è ad elementi immaginari puri ed il secondo ad elementi reali. Ne segue:

$$I_{31}A^{-1}\Omega = O, \qquad I_{32} = O,$$

ossia, moltiplicando la prima di queste a destra per la $\Omega^{-1}A$:

$$I_{31} = O, \qquad I_{32} = O. \tag{6.9}$$

Tenuto conto che debbono così essere necessariamente verificate le (6.7) e le (6.9), le (6.4) forniscono:

$$\left\{ \begin{array}{l} (AI_{13} + \Omega I_{23})B^{-1}\Omega_1 = O \\ (\Omega_1 I_{23} + BI_{33})B^{-1}\Omega_1 = \gamma\Omega_1, \end{array} \right. \tag{6.10}$$

le quali debbono ancora essere soddisfatte prendendo arbitrariamente gli elementi di Ω_1 e di Ω, questi ultimi però con la condizione della simmetria e col vincolo che le loro parti reali siano i coefficienti di una forma quadratica definita e negativa.

Si prendano allora, come caso particolare, gli elementi di Ω e di Ω_1 tutti *reali*. Tenuto conto che le matrici A e B sono diagonali ad elementi immaginari puri (per guisa che lo stesso si può dire della B^{-1}), segue che le:

$$AI_{13}B^{-1}\Omega_1, \qquad BI_{33}B^{-1}\Omega_1 - \gamma\Omega_1$$

sono ad elementi reali, mentre le:

$$\Omega I_{23}B^{-1}\Omega_1, \qquad \Omega_1 I_{23}B^{-1}\Omega_1$$

sono ad elementi immaginari puri.

Dalle (6.10) segue perciò:

$$\left\{ \begin{array}{ll} AI_{13}B^{-1}\Omega_1 = O, & (BI_{33}B^{-1} - \gamma U)\Omega_1 = O \\ \Omega I_{23}B^{-1}\Omega_1 = O, & \Omega_1 I_{23}B^{-1}\Omega_1 = O. \end{array} \right. \tag{6.11}$$

Ma se, per una matrice a δ_1 colonne, S, è:

$$S\Omega_1 = O,$$

dove Ω_1 è una matrice a δ_1 righe ed a p colonne ad elementi reali arbitrari, si ricava subito:

$$S = O.$$

Infatti l'i-esima colonna di S ($i = 1, 2, \ldots, \delta_1$) si prova subito essere tutta nulla prendendo nella Ω_1 nulli tutti gli elementi tranne l'i-esimo nella prima colonna.

Dalle (6.11) segue perciò:

$$AI_{13}B^{-1} = O, \qquad BI_{33}B^{-1} = \gamma U, \qquad \Omega I_{23}B^{-1} = O.$$

Dalla prima di queste, moltiplicando a sinistra per A^{-1} ed a destra per B, segue: $I_{13} = O$. Dalla seconda, moltiplicando a sinistra per B^{-1} ed a destra per B, segue: $I_{33} = \gamma U$. Dalla terza, moltiplicando a sinistra per Ω^{-1} ed a destra per B, si ha infine: $I_{23} = O$.

Alle (6.7) e (6.9) sono quindi da aggiungere le:

$$I_{13} = O, \qquad I_{23} = O, \qquad I_{33} = \gamma U. \tag{6.12}$$

Per le (6 7), (6.9) e (6 12) la I data dalla prima delle (4.1) diviene:

$$I = \begin{Vmatrix} \gamma U^{(p,p)} & O & O \\ O & \gamma U^{(p,p)} & O \\ O & O & \gamma U^{(\delta_1,\delta_1)} \end{Vmatrix} = \gamma U^{(2p+\delta_1,\, 2p+\delta_1)}. \tag{6.13}$$

Perchè dunque una I sia tale che le (5.1) siano identicamente soddisfatte, è *necessario* che la I abbia la forma (6.13), essendo γ un intero arbitrario.

É ora facile verificare che, se la I ha la forma (6.13), le (5.1) sono sempre soddisfatte.

Invero, quando la I ha la forma (6.13), dalle (4.5) si ricava subito:

$$L = O, \qquad M = O, \qquad N = \gamma\Omega_2,$$

sicchè, per le (4.7), tenuto conto della (3.6), si avrà:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = O, \qquad L_2 = O, \qquad M_1 = O, \qquad M_2 = O \\ N_1 = \begin{Vmatrix} \gamma C \\ O \end{Vmatrix}, \qquad N_2 = \begin{Vmatrix} \gamma \Omega'_2 \\ O \end{Vmatrix}. \end{array} \right. \tag{6.14}$$

Le prime due delle (5.1) sono quindi senz'altro soddisfatte, mentre per la terza si ha:

$$\begin{Vmatrix} \gamma C \\ O \end{Vmatrix} C^{-1}\Omega'_2 = \begin{Vmatrix} \gamma \Omega'_2 \\ O \end{Vmatrix},$$

che si scinde nelle:

$$\gamma C C^{-1}\Omega'_2 = \gamma\Omega'_2, \qquad O \cdot C^{-1}\Omega'_2 = O,$$

le quali, essendo sempre soddisfatte, mostrano che anche la terza delle (5.1) è identicamente soddisfatta.

Si può dunque concludere còl

TEOREMA IV - *Se* $\rho < p$, *tutte e sole le matrici* I, *per le quali è soddisfatta una relazione generalizzata di Hurwitz:*

$$\Lambda\omega = \omega I$$

qualunque sia la matrice quasi abeliana ω *(di dati caratteri), sono le matrici che si ottengono moltiplicando la matrice diagonale unitaria per un intero arbitrario.*

Per il Teorema I, scelta la I a norma del Teorema IV, tutte e sole le Λ corrispondenti ad una data I, ossia ad un dato γ, hanno (tenute presenti le (6.14)) la forma:

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \gamma U^{(p,p)} & O & O & P_2 \\ O & \gamma U^{(\delta_1,\delta_1)} & O & Q_2 \\ O & O & \gamma U^{(\rho,\rho)} & R'^{(\rho,\delta_2-\rho)}_2 \\ O & O & O & R''^{(\delta_2-\rho,\delta_2-\rho)}_2 \end{Vmatrix}, \tag{6.15}$$

con gli elementi delle P_2, Q_2, R'_2, R''_2 arbitrari.

Dalla (6.15) scende subito il

TEOREMA V – *Quando sia:*

$$I = \gamma U^{(2p+\delta_1, 2p+\delta_1)}$$

con γ *intero arbitrario, tutte e sole le* Λ *che insieme a tale* I *entrano in una relazione generalizzata di Hurwitz sono le matrici della forma:*

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \gamma U^{(p+\delta_1+\rho,\, p+\delta_1+\rho)} & V^{(p+\delta_1+\rho,\, \delta_2-\rho)} \\ O^{(\delta_2-\rho,\, p+\delta_1+\rho} & W^{(\delta_2-\rho,\, \delta_2-\rho)} \end{Vmatrix}$$

dove gli elementi delle matrici V *e* W *sono assolutamente arbitrari.*

Quando si fissi una determinata I e questa non si riduca alla $\gamma U^{(2p+\delta_1, 2p+\delta_1)}$, le equazioni (5.1), in base al Teorema IV, non possono essere soddisfatte da *qualunque* ω, onde in tal caso le (5.1), che non risultano identicamente soddisfatte, rappresentano le equazioni di una varietà, a priori anche vuota, *subordinata* al continuo ν-dimensionale (n. 3) rappresentativo di tutte le matrici ω (di dati caratteri). Ciò significa che una (eventuale) ω, per la quale, in corrispondenza alla determinata I, risultino soddisfatte le (5.1), è una matrice quasi abeliana non più generica ma *a moduli particolari.* Per una ω *a moduli generali* non possono invece esistere altre I all'infuori della $\gamma U^{(2p+\delta_1, 2p+\delta_1)}$, perchè appunto per una I distinta dalla $\gamma U^{(2p+\delta_1, 2p+\delta_1)}$ le (5.1) possono essere soddisfatte solo da ω *particolari.* Il teorema IV si può perciò anche enunciare al modo seguente:

TEOREMA VI – *Quando sia* $\rho < \mathrm{p}$, *tutte e sole le relazioni generalizzate di Hurwitz, alle quali soddisfa la matrice quasi abeliana generica di dati caratteri e divisori elementari sono quelle per cui la matrice* I *è la matrice diagonale unitaria moltiplicata per un intero arbitrario.*

7. Alcune considerazioni comparative e critiche. – Nella teoria ora svolta rientra come caso particolare il caso delle matrici di RIEMANN per le quali si ha:

$$p > 0, \qquad \delta_1 = \delta_2 = 0, \tag{7.1}$$

È perciò interessante ricavare come caso particolare, anche per conferma dei risultati ottenuti, i risultati noti a proposito delle matrici di RIEMANN.

Per la seconda delle (3.5) e delle (7.1), sarà per una tal matrice:

$$\rho \leq \delta_2 = 0.$$

e quindi:

$$\rho = \delta_2 = 0.$$

La $\rho = 0$, combinata con la prima delle (7.1), mostra che è anche

$$\rho < p.$$

Si possono quindi applicare i Teoremi II e VI, ritrovando così le proprietà note che per una matrice di RIEMANN la I individua la Λ (per essere $\rho = \delta_2$), mentre, se la matrice è *generica*, la I si riduce alla sola $\gamma U^{(2p,2p)}$ (per essere $\rho < p$). Il Teorema III indica poi che, nel caso di una matrice di RIEMANN *anche particolare*, la I non può *mai* essere data arbitrariamente.

Poichè poi in base alle (4.7) la L si riduce alla L_2, mentre le L_1, M_1, M_2, N_1, N_2 vengono a mancare (per essere $\rho = \delta_1 = \delta_2 = 0$), le (5.1) si riducono alla $L = 0$, ossia, per le (4.5) (tenuto conto che la Ω_1 viene ora a mancare), all'equazione tra matrici:

$$AI_{12} + \Omega I_{22} = (AI_{11} + \Omega I_{21})A^{-1}\Omega, \tag{7.2}$$

che si riduce a p^2 equazioni, che legano tra loro gli elementi della Ω e gli elementi della I.

La (7.2) coincide con la prima delle (6.5) che si può portare alla forma (6.6). Se ora M è una matrice a coefficienti interi costruita con i coefficienti di una forma principale della matrice di RIEMANN:

$$\omega = \| A \;\; \Omega \|,$$

in modo che sia:

$$\omega M \omega_{-1} = O, \tag{7.3}$$

la (6.6) si scrive:

$$\alpha\omega = \omega I \tag{7.4}$$

e moltiplicando a destra per la matrice $M\omega_{-1}$, tenuto conto della (7.3), la (7.4) si riduce alla:

$$\omega M' \omega_{-1} = O \tag{7.5}$$

dove:

$$M' = IM$$

è ancora una matrice ad elementi interi. La (7.5) rappresenta una *reciprocità riemanniana* della ω; ed appunto dalla (7.5) prende le mosse SCORZA per studiare le questioni di moltiplicabilità delle matrici di RIEMANN.

Un secondo caso particolare interessante è quello in cui $p = 0$, che ho approfondito nel primo dei lavori citati in ([3]). Per la prima delle (3.5) risulta qui: $\rho = p = 0$. I Teoremi II e III assicurano allora che la I può essere sempre data arbitrariamente (per essere $\rho = p$) e che la Λ risulta individuata o no dalla I a seconda che sia $\delta_2 = 0$ o $\delta_2 > 0$. Nel primo caso si ha infatti $\rho = \delta_2$ e nel secondo $\rho < \delta_2$. Tutto ciò è in perfetto accordo con i risultati del n. 5 della Memoria ora citata.

Infine, giova mettere esplicitamente in evidenza che, in base ai teoremi trovati, *le matrici quasi abeliane che presentano le più strette analogie con le matrici di* RIEMANN (individuazione della Λ data la I, riduzione della I alla γU per la matrice generica, possibilità di I diverse dalla γU per moduli particolari) *sono quelle per cui:*

$$\rho = \delta_2, \qquad \rho < p.$$

Le matrici di RIEMANN rientrano come caso particolare tra tali matrici quasi abeliane.

Come è ben noto dalla teoria delle matrici di RIEMANN, si possono effettivamente trovare matrici particolari, per le quali la I sia distinta dalla γU; ed anzi, se si impone la condizione che la I sia *unimodulare,* le I distinte dalla $\pm U$ possono essere in numero finito o infinito. Si può domandare se tali circostanze si presentino anche per una matrice *effettivamente* quasi abeliana, per la quale sia cioè $\delta_1 \neq 0$ o $\delta_2 \neq 0$. La risposta è affermativa, come risulta da varî esempi, che sono già in mio possesso. Se la I si suppone tuttavia unimodulare, sono riuscito soltanto a costruire esempi particolari per le quali le possibili I sono in numero *infinito.* Rimane dunque aperta la questione se possano esistere matrici effettivamente quasi abeliane, per le quali esiste (oltre alla $\pm U$) un numero *finito* di I unimodulari.

Ma sul vasto campo delle questioni, che così si aprono, come anche sul significato funzionale dei risultati della presente Memoria, ritornerò in altri lavori.