Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane.

Memoria di Guido Stampacchia (a Genova)

A Giovanni Sansone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Si trovano alcune condizioni le quali assicurano che la soluzione di un problema al contorno per una equazione differenziale del secondo ordine, di tipo ellittico e con dati discontinui, è hölderiana.*

Sia $u(x)$ una funzione, definita in un insieme aperto Ω di R^m ed appartenente ad $H^1(\Omega)$, la quale, per ogni v di una opportuna varietà lineare V $(H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega))$ soddisfi una relazione del tipo (1):

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots m} a_{ij}(x) D_i u D_j v + \sum_{i=1}^{m} b_i(x) D_i u \cdot v \right\} dx = \int_\Omega \left\{ f_0 v + \sum_{i=1}^{m} f_i D_i v \right\} dx$$

ove i coefficienti $a_{ij}(x)$ sono misurabili e limitati in Ω e tali che, per ogni $x \in \Omega$, si abbia la (2.1).

Se: $f_0 = f_i = 0$, $b_i = 0$ $(i = 0, 1, \dots, m)$, E. De Giorgi [1] e J. Nash [13] hanno dedotto, con metodi differenti fra loro, l'hölderianità di $u(x)$ nell'interno di Ω. Nel caso più generale considerato, ho dimostrato, in un precedente lavoro [17], che se $b_i(x) \in L^\infty(\Omega)$ e $f_i(x) \in L^p(\Omega) (i = 0, 1, \dots, m)$ mentre Ω soddisfa ad una «condizione di cono», segue che: $u(x) \in L^q(\Omega) \left(\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{1}{m};\ q = \infty \text{ se } p > m\right)$.

In questo lavoro, supponendo che $f_i \in L^p(\Omega)$ con $p > m$ ed imponendo alcune restrizioni all'insieme Ω, deduco l'hölderianità di $u(x)$ in $\bar{\Omega}$. Per l'enunciato di questo risultato rimando al § 1 (2).

Il metodo di dimostrazione si avvale della tecnica introdotta da E. De Giorgi nel lavoro sopra citato [1]; in questa gioca essenzialmente la disuguaglianza (7.1), conseguenza della (2.1) e la validità di maggiorazioni nel tipo (3.1) analoghe a quelle, ben note, di Sobolev; la validità di queste maggiorazioni è assicurata in tutto Ω dalle ipotesi relative all'insieme Ω (cfr. def. (3.1)). Dalle suddette maggiorazioni si deducono opportune informazioni

(1) Per le notazioni rimandiamo al lavoro [12].

(2) cfr. anche [18].

sull'insieme ove la funzione $u(x)$ è maggiore [minore] di un numero k le quali permettono di dimostrare l'hölderianità della $u(x)$ stessa in tutto $\bar{\Omega}$.

I risultati qui raggiunti sfuggono a quei procedimenti di regolarizzazione i quali utilizzano la sommabilità delle derivate della funzione $u(x)$ di ordine troppo elevato (cfr. [12], cap. III) e perchè i coefficienti non sono necessariamente continui, e perchè Ω ha frontiera che non possiede necessariamente iperpiano tangente variabile con continuità e ancora perchè la varietà V non è necessariamente di tipo ($\mathfrak{N}$) (cfr. [12] pp. 305-306).

Recentemente C. B. MORREY [7], utilizzando la tecnica da lui stesso introdotta in [5], consistente nella valutazione della variazione dell'integrale di DIRICHLET su sfere di raggio variabile, – la quale ha già fornito risultati veramente pregevoli nel caso di due variabili (NIRENBERG [14]) e, nel caso di più variabili se i coefficienti sono supposti continui e l'insieme Ω è più regolare (C. MIRANDA [8] C. B. MORREY [6]) — ed utilizzando anche la tecnica di DE GIORGI, ha studiato il problema in questione nel caso che: $V = H_0^1(\Omega)$ ottenendo risultati più generali per quanto riguarda i coefficienti dell'equazione dei termini di ordine minore di 2 e meno generali per quanto riguarda l'insieme.

Sono venuto a conoscenza del lavoro citato di MORREY quando la stesura di questo lavoro era già terminata. L'uso di alcuni artifici utilizzati da MORREY permetterebbe di migliorare i risultati di questo lavoro anche per problemi al contorno diversi da quelli di DIRICHLET circa le ipotesi dei coefficienti dell'equazione.

Mi sono state molto utili per la forma della stesura del lavoro le conversazioni che ho avuto con MAGENES, MIRANDA e NIRENBERG e di queste sono loro molto grato.

§ 1. Premesse ed enunciati.

1. Sia R^m lo spazio euclideo ad m dimensioni i punti del quale indichiamo con $x \equiv (x_1, x_2, \ldots x_m)$; $y \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots$ Indichiamo con $I(y, \rho)$ la ipersfera aperta di R^m di centro y e raggio ρ e con $\Gamma(y, \rho)$ l'ipersuperficie sferica contorno di $I(y, \rho)$. Se Σ è un insieme misurabile di $\Gamma(y, 1)$, indichiamo con $|\Sigma|$ la sua misura $(m-1)$-dimensionale; in particolare:

$$|\Gamma(y, 1)| = \sigma_{m-1} = 2\sqrt{\pi^m}/\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$$

mentre, se $E \subset R^m$, indichiamo con mis E la misura secondo LEBESGUE dell'insieme E.

Sia Ω un insieme aperto e limitato di R^m e indichiamo con $\partial\Omega$ la sua frontiera e con $\overline{\Omega}$ la sua chiusura; poniamo:

$$\Omega(y, \rho) = \Omega \cap I(y, \rho) \quad \text{per } y \in \Omega.$$

Sia $C^1(\Omega)$ lo spazio delle funzioni reali $u(x)$ continue con le derivate parziali prime in Ω tali che: $u \in L^q(\Omega)$, $D_i u \in L^q(\Omega) (i = 1, 2 \ldots, m)$ $(q \geq 1)$ ed introduciamo la norma:

$$|||u|||_{1,q} = ||u||_{L^q(\Omega)} + \sum_{i=1}^{m} ||D_i u||_{L^q(\Omega)}.$$

Indichiamo con $H^{1,q}(\Omega)$ il completamento di $C^1(\overline{\Omega})$ rispetto alla norma $|||u|||_{1,q}$ (porremo per semplicità: $H^1(\Omega) = H^{1,2}(\Omega)$). Indichiamo poi con $H_0^{1,q}(\Omega)$ il sottospazio $H^{1,q}(\Omega)$ costituito dalla chiusura, in $H^{1,q}(\Omega)$, delle funzioni di $C^1(\overline{\Omega})$ che hanno supporto contenuto in Ω (porremo, per semplicità: $H_0^1(\Omega) = H_0^{1,2}(\Omega)$).

2. Sia V una varietà lineare di $H^1(\Omega)$ tale che:

$$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega).$$

Siano poi $a_{ij}(x)$, $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ funzioni reali, misurabili e limitate in Ω soddisfacenti la seguente condizione:

$$\mu \cdot \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \leq \sum_{i,j}^{1..m} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \leq M \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \quad \{\lambda_i \in R^1; \; x \in \Omega; \; \mu > 0\}, \tag{2.1}$$

$b_1(x), b_2(x), \ldots, b_m(x)$ funzioni misurabili e limitate in Ω con $|b_i(x)| \leq L$ e $f_0(x)$, $f_1(x) \ldots, f_m(x)$ $m+1$ funzioni $\in L^p(\Omega)$ con $p \geq 2$.

Poniamo ora, per $u, v \in H^1(\Omega)$:

$$a(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j}^{1\ldots m} a_{ij}(x) D_i u D_j v + \sum_{i=1}^{m} b_i(x) D_i u \cdot v \right\} dx$$

$$(f, v) = \int_\Omega \left\{ f_0 v + \sum_{i=1}^{m} f_i D_i v \right\} dx.$$

Una funzione $u(x) \in V$, la quale, per ogni $v \in V$, soddisfa la relazione

$$a(u, v) = (f, v) \tag{2.2}$$

sarà indicata, brevemente, con $u(x) \equiv \mathcal{E}(\Omega; V)$.

Indichiamo con $|u|^{k}$ [$|u|_{k}$] la funzione che si ottiene troncando superiormente [inferiormente] la funzione u, cioè la funzione definita nel modo seguente:

$$|u|^{k} = u \quad \text{se} \quad u \leq k \qquad [|u|_{k} = u \quad \text{se} \quad u \geq k]$$

$$|u|^{k} = k \quad \text{se} \quad u \geq k \qquad [|u|_{k} = k \quad \text{se} \quad u \leq k].$$

È noto che se $u \in H^{1}(\Omega)$ segue: $|u|^{k}$, $|u|_{k} \in H^{1}(\Omega)$ per $k \in R^{1}$.

DEFINIZIONE (2.1). – Indichiamo ora con $\mathcal{K}^{+}(y)$ [$\mathcal{K}^{-}(y)$] un insieme di valori $k \in R^{1}$ per i quali esiste $\bar{\rho}(y) > 0$ in modo che: $|u|^{k}\alpha(x) \in V$ [$|u|_{k}\alpha(x) \in V$] qualunque sia la funzione $u(x) \in V$ e la funzione $\alpha(x) \in C^{1}(R^{m})$ e con supporto contenuto in $I(y, \bar{\rho}(y))$.

$\mathcal{K}(y)$ può indicare a volte $\mathcal{K}^{+}(y)$ o $\mathcal{K}^{-}(y)$.

Se è: $V \equiv H^{1}(\Omega)$ è ovviamente:

$$\mathcal{K}^{+}(y) = \mathcal{K}^{-}(y) = (-\infty, +\infty)$$

e $\bar{\rho}(y)$ si può prendere indipendente da y; se V è il sottospazio delle funzioni di $H^{1}(\Omega)$ che hanno traccia nulla su una parte $\partial_{1}\Omega$ di $\partial\Omega$, posto $\partial_{2}\Omega = \partial\Omega - \partial_{1}\Omega$, si ha, per $y \in \overline{\partial_{1}\Omega}$:

$$\mathcal{K}^{+}(y) = (0, +\infty), \ \mathcal{K}^{-}(y) = (-\infty, 0)$$

con $\bar{\rho}(y)$ indipendente da y, mentre, per $y \in \partial_{2}\Omega$, si ha:

$$\mathcal{K}^{+}(y) = \mathcal{K}^{-}(y) = (-\infty, +\infty)$$

con $\bar{\rho}(y) = \text{dist.}(y, \partial_{1}\Omega)$ (3).

3. Fissato un numero $\beta > 0$ ed un insieme aperto A, indichiamo con

$$\mathcal{F}(\beta;\ A)$$

la famiglia dei sottoinsiemi B di $\bar{A}$ per cui si ha:

$$\|u\|_{L^{q^*}(A)} \leq \beta \sum_{i=1}^{m} \|D_{i}u\|_{L^{q}(A)} \quad \text{con} \quad \frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{m} \tag{3.1}$$

qualunque sia la funzione $u(x) \in C^{1}(\bar{A})$ e nulla su B e $1 < q \leq 2$.

È evidente che se $B_{1} \supset B_{2}$ e $B_{2} \in \mathcal{F}(\beta;\ A)$ allora anche $B_{1} \in \mathcal{F}(\beta;\ A)$.

---

(3) Con dist(y, E) indichiamo la distanza del punto y dall'insieme E.

Poniamo ora la seguente definizione:

DEFINIZIONE (3.1). - Diremo che Ω *è* λ*-ammissibile* $(0 < \lambda < 1)$ *rispetto alla varietà* V se esistono due numeri $\beta > 0$ e $\zeta > 0$ e, per ogni $y \in \partial\Omega$ è possibile determinare $\tilde{\rho}(y) > 0$ in modo che per ogni $\rho < \tilde{\rho}(y)$ è verificata una delle seguenti condizioni:

i) per ogni $u \in V$ si abbia: (4)

$$E[u = 0] \cap \overline{\Omega(y,\ \rho)} \in \mathfrak{F}(\beta;\ \Omega(y,\ \rho)),$$

ii) comunque si fissa un insieme misurabile $E \subset \Omega(y,\ \rho)$ soddisfacente la relazione:

$$\text{mis}\, E > \lambda\, \text{mis}\, \Omega(y,\ \rho)$$

si abbia:

$$E \in \mathfrak{F}(\beta;\ \Omega(y,\ \rho))$$

e inoltre si abbia:

$$\text{mis}\, \Omega(y,\ \rho) > \zeta\, \text{mis}\, I(y,\ \rho).$$

Indichiamo con $\partial_1\Omega$ l'insieme dei punti y di $\partial\Omega$ che soddisfano la condizione *i*) e con $\partial_2\Omega$ l'insieme di quelli che soddisfano la condizione *ii*).

Studieremo nel § 2 alcune proprietà della famiglia $\mathfrak{F}(\beta;\ A)$, mentre nel § 4 mostreremo che vaste categorie di insiemi Ω soddisfano la condizione (3.1).

4. I teoremi principali, che dimostreremo al § 3, sono i seguenti:

TEOREMA (4.1). - *Sia* $u(x) \equiv \mathcal{E}(\Omega;\ V)$ *con* Ω $\frac{1}{2}$*-ammissibile rispetto a* V *e sia* $f_i(x) \in L^p(\Omega)(i = 0,\ 1, \ldots,\ m)$ *con* $p > m$.

Per ogni $y \in \partial_1\Omega$ *sia* $\mathcal{K}^+(y) = (0,\ +\infty)$ e $\mathcal{K}^-(y) = (-\infty,\ 0)$ *e, per ogni* $y \in \partial_2\Omega$ *sia* $\mathcal{K}^+(y) = \mathcal{K}^-(y) = (-\infty,\ +\infty)$. *Allora la funzione* $u(x)$ *è continua in* $\overline{\Omega}$.

TEOREMA (4.2). - *Se, nelle condizioni del teorema precedente, si suppone che esista* $\delta > 0$ *tale che per ogni* $y \in \partial_1\Omega$ *si abbia:*

$$\min\, [\bar{\rho}(y),\ \tilde{\rho}(y)] > \delta$$

e, per ogni $y \in \partial_2\Omega$, *si abbia*:

$$\min\, [\bar{\rho}(y),\ \tilde{\rho}(y)] > \min\, [\delta,\ \text{dist}\,(y,\ \partial_1\Omega)]$$

(4) Una funzione $u(x) \in H^1(\Omega)$ si annulla nell'insieme $E \subset \overline{\Omega}$ se esiste una successione di CAUCHY $\{u_n\}$ con $u_n(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ tale che $u_n \to u$ in $H^1(\Omega)$ e $u_n(x) = 0$ su E.

cioè, come diremo, si suppone che Ω sia uniformemente $\frac{1}{2}$-ammissibile rispetto a V, allora la funzione $u(x)$ è hölderiana in $\bar{\Omega}$.

Nel § 5 mostreremo l'applicazione di questi teoremi ad alcuni problemi al contorno per equazioni del secondo ordine con dati discontinui.

§ 2. **Alcune disuguaglianze per le funzioni di $H^{1,q}$.**

5. Prendiamo in esame la famiglia $\mathfrak{F}(\beta, A)$ dei sottoinsiemi B di $\bar{A}$ definita al n. 3 e cominciamo col dimostrare il seguente lemma:

LEMMA (5.1). - *Se $u(x) \in H^{1,q}(A)$ con $q > 1$ e $E[u = 0] \in \mathfrak{F}(\beta, A)$ segue:*

$$\|u\|_{L^{q^*}(A)} \leq \beta \sum_{i=1}^{m} \|D_i u\|_{L^q(A)} \quad \left(\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{m}\right). \tag{5.1}$$

Infatti, nella ipotesi del lemma esiste una successione di CAUCHY $\{u_n\}$ di funzioni di $C^1(\bar{A})$ tali che $E[u_n = 0] \in \mathfrak{F}(\beta, A)$ e per cui

$$\lim_{n \to \infty} |||u_n - u|||_{1,q} = 0.$$

Si può allora scrivere, per ogni n:

$$\|u_n\|_{L^{q^*}(A)} \leq \beta \sum_{i=1}^{m} \|D_i u_n\|_{L^q(A)}$$

e richiedere che la successione u_n converga quasi ovunque in A verso $u(x)$. Per il lemma di FATOU segue allora che $u \in L^{q^*}(A)$ e che sussiste la (5.1).

Dimostriamo ora i seguenti corollari del lemma precedente:

LEMMA (5.2). - *Se $u(x) \in H^{1,q}(A)$ con $q > 1$ e $E[u = 0] \in \mathfrak{F}(\beta, A)$, si ha:*

$$(\text{mis}\{E[|u| > \sigma]\})^{\frac{m-q}{m}} \leq \frac{\beta^q}{\sigma^q} \int_A \sum_{i=1}^{m} |D_i u|^q dx \tag{5.2}$$

$$\int_A |u|^q dx \leq \beta^q \int_A \sum_{i=1}^{m} |D_i u|^q dx \,(\text{mis}\, E[|u| > 0])^{q/m}. \tag{5.3}$$

Per dimostrare la (5.2) basta osservare che:

$$\sigma^{q^*} \text{mis}\, E[|u| > \sigma] \leq \int_A |u|^{q^*} dx$$

ed utilizzare la (5.1).

La (5.3) si ottiene anch'essa dalla (5.1) utilizzando la diseguaglianza di SCHWARZ.

Enunciamo ancora due lemmi che ci saranno utili nel seguito.

LEMMA (5.3). - *Sia $x' = T(x)$ una trasformazione bilipschitziana* ([5]) *che applica l'insieme aperto A nell'insieme aperto $T(A)$. Fissato $\beta > 0$ esiste $\beta' > 0$ tale che se $B \in \mathcal{F}(\beta, A)$ allora $T(B) \in \mathcal{F}(\beta', T(A))$.*

Sia infatti $v(x')$ una qualunque funzione di $C^1(T(A))$ nulla su $T(B)$; posto $u(x) = v(T(x))$, poichè $u(x)$ è lipschitziana in A e nulla su B si può, per il lemma (5.1), scrivere la (5.1). Di qui, mediante il cambiamento di variabili $x' = T(x)$ segue, per un opportuno $\beta' > 0$:

$$\| v \|_{L^{q^*}(T(A))} \leq \beta' \sum_{i=1}^{m} \| D_i v \|_{L^q(T(A))}.$$

LEMMA (5.4). - *Sia $A = I(y, \rho)$; fissato $\lambda > 0 (< 1)$ sia $\mathfrak{M}_\lambda(y, \rho)$ la famiglia dei sottoinsiemi misurabili E di $I(y, \rho)$ per cui:*

$$\text{mis}\, E > \lambda \,\text{mis}\, I(y, \rho).$$

Esiste un numero $\beta > 0$, indipendente da ρ, tale che si abbia:

$$\mathfrak{M}_\lambda(y, \rho) \subset \mathcal{F}(\beta, I(y, \rho)).$$

Non diamo qui la dimostrazione di questo lemma in quanto la proposizione è un caso particolare di un teorema più generale che dimostreremo al § 4 (teor. 10.3).

6 Fissata una funzione $u(x) \in H^{1,q}(\Omega) (q \geq 1)$ poniamo:

$$A^+(k) = E_x[u(x) > k]; \ A^-(k) = E_x[u(x) < k]$$

e, per $y \in \bar{\Omega}$, scriviamo:

$$A^+(k, \rho) = A^+(k) \cap \Omega(y, \rho); \ A^-(k, \rho) = A^-(k) \cap \Omega(y, \rho)$$

sottintendendo, nei simboli a primo membro, il punto y.

Il simbolo $A(k, \rho)$ starà poi ad indicare a volte $A^+(k, \rho)$ e a volte $A^-(k, \rho)$.

([5]) Cioè una trasformazione $x' = T(x)$ biunivoca tale che, per una costante $c > 0$, si abbia:

$$c^{-1} | x' - x'' | \leq | T(x') - T(x'') | \leq c | x' - x'' |.$$

Dimostriamo ora il seguente teorema [6].

TEOREMA (6.1). - *Sia* $u(x) \in H^{1,q}(\Omega)(q > 1)$ *con* Ω λ*-ammissibile rispetto alla varietà* V. *Si può trovare una costante* c_0 *tale che per ogni* $y \in \bar{\Omega}$, $\rho < \tilde{\rho}(y)$ *si abbia*:

$$\int_{A(k,\rho)} |u(x) - k|^q dx \leq c_0 \left\{ \sum_{i=1}^{m} |D_i u|^q dx \right\} [\text{mis}\, A(k, \rho)]^{q/m} \tag{6.1}$$

$$[\text{mis}\, A(h, \rho)]^{\frac{m-q}{m}} \leq \frac{c_0}{|h-k|^q} \int_{A(k,\rho)-A(h,\rho)} \Sigma\, |D_i u|^q dx \tag{6.2}$$

ove $A(k, \rho) = A^+(k, \rho)[A(k, \rho) = A^-(k, \rho)]$ *e* $h > k[h < k]$

i) *con ogni* k *positivo (negativo) se* $y \in \partial_1 \Omega$,

ii) *con ogni* k *positivo (negativo) tale che:*

$$\text{mis}\, A(k, \rho) \leq (1 - \lambda)\, \text{mis}\, \Omega(y, \rho) \tag{6.3}$$

se $y \in \Omega \cup \partial_2 \Omega$.

Incominciamo ad esaminare il teorema per valori positivi di k e consideriamo le funzioni:

$$t_k^+(u) = u - \{u\}^k, \quad t_{k,h}^+(u) = \{u\}^h - \{u\}^k (h > k) \tag{6.4}$$

che appartengono anch esse a $H^{1,q}(\Omega)$ ed osserviamo che esse sono nulle su $\Omega - A^+(k)$.

Se $y \in \partial_1 \Omega$, poichè $E[t_{k,h}^+(u) = 0] = E[t_k^+(u) = 0] \supset E[u = 0]$,

è

$$E[t_k^+(u) = 0] \cap \Omega(y, \rho) \in \mathfrak{F}(\beta, \Omega(y, \rho)). \tag{6.5}$$

Se $y \in \partial_2 \Omega^\tau$ oppure $y \in \Omega$, essendo:

$$E[t_k^+(u) = 0] \cap \Omega(y, \rho) \equiv \Omega(y, \rho) - A^+(k, \rho)$$

e, per la (6.3):

$$\text{mis}\, \{E[t_k^+(u) = 0] \cap \Omega(y, \rho)\} > \lambda\, \text{mis}\, \Omega(y, \rho),$$

si deduce ancora, per la definizione di Ω o per il lemma (5.4), la (6.5).

---

[6] I teoremi (6.1) e (6.2) generalizzano alcuni teoremi di DE GIORGI [1] (pp. 28 33). La dimostrazione da noi data mette in evidenza il legame delle maggiorazioni di DE GIORGI con quelle ben note di SOBOLEV [15].

In ogni caso utilizzando il lemma (5.2), mediante la (5.3) per la funzione $t_k^+(u)$ e mediante la (5.2) per la funzione $t_{k,h}^+(u)$ e assumendo per σ valori minori di $h-k$ che tendono a $h-k$, si deducono la (6.1) e la (6.2).

In modo analogo si esamina il teorema per valori negativi di k.

Dimostriamo ora il seguente corollario:

TEOREMA (6.2). - *Nelle ipotesi del teorema precedente e $q=2$ esiste una costante $c_1>0$ tale che:*

$$(6.6)\qquad [\text{mis}\, A(h,\,\rho)]^{\frac{2m-2}{m}} \leq \frac{c_1}{(h-k)^2}\left\{\int\limits_{A(k,\,\rho)} \sum_{i=1}^{m} |D_i u|^2 dx\right\}[\text{mis}\, A(k,\,\rho) - \text{mis}\, A(h,\,\rho)]$$

sotto le stesse condizioni per k dette al teorema precedente.

Infatti, per la diseguaglianza di SCHWARZ, dalla (6.2) per $q>1$, si ha:

$$[\text{mis}\, A(h,\,\rho)]^{\frac{2m-2q}{mq}} \leq \frac{c_0^{\frac{q}{2}}}{(h-k)^2}\left\{\int\limits_{A(k,\,\rho)} \sum_{i=1}^{m} |D_i u|^2 dx\right\}[\text{mis}\, A(k,\,\rho) - \text{mis}\, A(h,\,\rho)]^{\frac{2}{q}-1}.$$

Passando al limite per q tendente ad 1, si ottiene la (6.6).

§ 3. Maggiorazioni e proprietà di $u(x) \equiv \mathcal{E}(\Omega;\ V)$.

7. Ricordando le definizioni poste al n. 6, dimostriamo ora il seguente:

TEOREMA (7.1). - *Se $u \equiv \mathcal{E}(\Omega;\ V)$ è possibile determinare due costanti γ, Λ dipendenti da μ, M, L, tali che per $y \in \Omega$, $0<\rho<R<\bar{\rho}(y)$ e per ogni $k \in \mathcal{K}(y)$, si abbia:*

$$(7.1)\qquad \int\limits_{A(k,\,\rho)} \sum_{i=1}^{m} |D_i u|^2 dx \leq \frac{\gamma}{(R-\rho)^2}\int\limits_{A(k,\,R)} |u-k|^2 dx + \Lambda \int\limits_{A(k,\,R)} \sum_{i=0}^{m} f_i^2 dx$$

ove $\mathcal{K}(y) \equiv \mathcal{K}^{\pm}(y)$ e $A(k,\,\rho)$ è rispettivamente $A^+(k,\,\rho)$ e $A^-(k,\,\rho)$.

Dimostriamo il teorema supponendo $A(k,\,\rho)=A^+(k,\,\rho)$, $\mathcal{K}(y)=\mathcal{K}^+(y)$; in modo analogo si procede se $A(k,\,\rho)=A^-(k,\,\rho)$ e $\mathcal{K}(y)=\mathcal{K}^-(y)$.

Osserviamo anzitutto che, posto $t_k^+(u) = u - \{u\}^k$, si ha:

$$D_i t_k^+(u(x)) \equiv 0 \text{ q. ov. in } A^-(k,\,\rho) \text{ e } \equiv D_i u \text{ q. ov. in } A^+(k,\,\rho).$$

Sia poi $\alpha(r)$ una funzione non negativa, continua con la derivata prima per $0 \leq r < +\infty$ tale che $\alpha(r)=1$ per $r \leq \rho$ e $\alpha(r) \equiv 0$ per $r \geq R$ ed osserviamo che, per la definizione (2.1), per ogni $y \in \overline{\Omega}$, $0 < \rho < R < \bar{\rho}(y)$ la funzione:

$$v(x) = t_k^+(u(x))\alpha(|x-y|)$$

ove $r = |x-y|$ indica la distanza dei punti x ed y, appartiene a V, perchè $k \in \mathcal{K}(y)$.

Possiamo allora scrivere, essendo $u(x) \equiv \mathcal{E}(\Omega;\ V)$:

$$(7.2)\qquad \int\limits_{A(k,R)} \sum_{i,j}^{1\ldots m} \alpha(r) a_{ij}(x) D_i u D_j u\, dx + \int\limits_{A(k,R)} \sum_{i,j}^{1\ldots m} \alpha'(r) a_{ij}(x) D_i u [u(x)-k] \frac{x_j - y_j}{r}\, dx +$$

$$+ \int\limits_{A(k,R)} \sum_{i}^{1\ldots m} b_i(x) D_i u [u(x)-k] \alpha(r)\, dx = \int\limits_{A(k,R)} \sum_{i}^{1\ldots m} f_i \left\{ \alpha(r) D_i u + [u-k]\alpha'(r) \frac{x_i - y_i}{r} \right\} dx +$$

$$+ \int\limits_{A(k,R)} f_0 [u-k] \alpha(r)\, dx.$$

Per la (2.1) si può scrivere:

$$(7.3)\qquad \mu \int\limits_{A(k,R)} \alpha(r) \sum_{i=1}^{m} |D_i u|^2 dx \leq \sum_{i,j}^{1\ldots m} \int\limits_{A(k,R)} \alpha(r) a_{ij}(x) D_i u D_j u\, dx$$

mentre, per la diseguaglianza di SCHWARZ, si ha:

$$(7.4)\qquad \left| \sum_{i,j}^{1\ldots m} \int\limits_{A(k,R)} \alpha'(r) a_{ij}(x) D_i u [u(x)-k] \frac{x_j - y_j}{r}\, dx \right| \leq$$

$$\leq mM \left\{ \int\limits_{A(k,R)} \alpha(r) \sum_{i}^{1\ldots m} |D_i u|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int\limits_{A(k,R)} \frac{\alpha'^2(r)}{\alpha(r)} [u(x)-k]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$(7.5)\qquad \left| \int\limits_{A(k,R)} \sum_{i}^{1\ldots m} b_i(x) D_i u [u-k] \alpha(r)\, dx \right| \leq$$

$$\leq L \left\{ \int\limits_{A(k,R)} \alpha(r) \sum_{i=1}^{m} |D_i u|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int\limits_{A(k,R)} \alpha(r) |u(x)-k|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Con semplici considerazioni si deduce ancora:

$$(7.6)\qquad \left| \int\limits_{A(k,R)} f_i \alpha(r) D_i u\, dx \right| \leq \frac{\max \alpha(r)}{2\mu} \int\limits_{A(k,R)} f_i^2 dx + \frac{\mu}{2} \int\limits_{A(k,R)} \alpha(r) |D_i u|^2 dx$$

e, in modo analogo, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\left| \int_{A(k,R)} f_0[u-k]\alpha(r)dx \right| \leq \varepsilon \int_{A(k,R)} |u-k|^2 dx + \frac{\max \alpha(r)}{4\varepsilon} \int_{A(k,R)} f_0^2 dx. \tag{7.7}$$

Ancora, per la diseguaglianza di SCHWARZ, si ha:

$$\left| \int_{A(k,R)} f_i \alpha'(r)[u-k] \frac{x_i - y_i}{r} dx \right| \leq \left\{ \int_{A(k,R)} f_i^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{A(k,R)} \alpha'^2(r)[u-k]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{7.8}$$

Dalla (7.2), tenendo conto delle relazioni (7.3)...(7.8) si deduce:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \left\{ \int_{A(k,R)} \alpha(r) \sum_i^{m\ldots 1} |D_i u|^2 dx + \int_{A(k,R)} \sum_i^{1\ldots m} f_i^2 dx \right\} \leq \\ \leq \mathcal{H}(\rho, R)\gamma_1 \left\{ \int_{A(k,R)} \alpha(r) \sum_{i=1}^{m} |D_i u|^2 dx + \int_{A(k,R)} \sum_{i=1}^{m} f_i^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{A(k,R)} [u-k]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \\ + \Lambda_1(\mu, \varepsilon) \int_{A(k,R)} \sum_{i=1}^{m} f_i^2 dx + \frac{\max \alpha(r)}{4\varepsilon} \int_{A(k,R)} f_0^2 dx + \varepsilon \int_{A(k,R)} [u(x)-k]^2 dx. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Ove si è posto: $\mathcal{H}(\rho, R) = \max \left[\max_{\rho \leq r \leq R} \frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)}, \max_{\rho \leq r \leq R} \alpha'^2(r), \max_{\rho \leq r \leq R} \alpha(r) \right]$.

Per soddisfare le condizioni imposte alla funzione $\alpha(r)$ basta assumere, per $\rho \leq r \leq R$:

$$\alpha(r) = \frac{(R-r)^2(R-2r-3\rho)}{(R-\rho)^3}$$

e si trova, se $\bar{\rho}(y)$ è piccolo, $\mathcal{H}(\rho, R) \leq \frac{36}{(R-\rho)^2}$ e $\max \alpha(r) \leq 3$. Sostituendo tali valori nella (7.9) e ponendo $\varepsilon = \frac{1}{(R-\rho)^2}$, si ottiene la (7.1).

8. Dimostreremo intanto alcune proposizioni importanti per il seguito:

TEOREMA (8.1). - *Sia* $u(x) = \mathfrak{S}(\Omega; V)$ *e* Ω *sia* λ*-ammissibile rispetto a* V $(0 < \lambda < 1)$ *e, per* $p > m$, *si abbia:*

$$f_i \in L^p(\Omega) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m). \tag{8.1}$$

Fissato $0 < \sigma < 1$, *supponiamo che esista un numero* $k_1 > 0$ *tale che si abbia:*

$$(k_1, +\infty) \subset \mathcal{K}^+(y). \tag{8.2}$$

È allora possibile determinare un numero positivo $\vartheta = \vartheta(\sigma)$ *in modo che, fissato* $y \in \overline{\Omega}$, $\rho < min\,[\overline{\rho}(y), \tilde{\rho}(y)]$ *per ogni* $k > k_1$ *tale che:*

$$\text{mis}\, A^+(k, \rho) \leq \vartheta \text{ mis}\, \Omega(y, \rho), \tag{8.3}$$

si abbia:

$$\text{mis}\, A^+(k + \sigma d, \rho - \sigma\rho) = 0 \tag{8.4}$$

ove:

$$d^2 \geq \frac{1}{\vartheta \rho^m} \int_{A^+(k,\rho)} |u - k|^2 dx + \rho^{2\left(1 - \frac{m}{p}\right)} \left\{ \int_{A^+(k,\rho)} \sum_i^{0 \ldots m} |f_i|^p dx \right\}^{\frac{2}{p}}. \tag{8.5}$$

Determiniamo ϑ in modo che risultino verificate le limitazioni seguenti ove c_0, γ, Λ, ζ, sono le costanti considerate nei numeri precedenti e $\chi_m = \text{mis}\, I(0, 1)$:

$$\frac{\vartheta}{(1-\sigma)^m} \leq \zeta(1 - \lambda) \tag{8.6}$$

$$\vartheta^{\frac{2}{m}} \leq \frac{\sigma^2}{2^{(\mu+8)} c_0 \gamma \chi_m^{\frac{2}{m}}}; \qquad \vartheta^{\frac{2}{m} - \frac{2}{p}} \leq \frac{1}{2^{(\mu+1)} \Lambda \chi_m^{1 + \frac{2}{m} - \frac{2}{p}}}$$

$$\vartheta^{\frac{2}{m}} \leq \frac{\sigma^4}{2^{\nu \frac{m-2}{m} + 5} c_0 \gamma \chi_m^{\frac{m-2}{m}}}; \qquad \vartheta^{\frac{2}{m} - \frac{2}{p}} \leq \frac{\sigma^2}{2^{\nu \frac{m-2}{m} + 3} c_0 \Lambda \chi_m^{\frac{m-2}{m}}}$$

ove:

$$\begin{cases} \mu = \max\left(p \dfrac{m-2}{p-m} + 4,\ 2m\right) \\[2ex] \nu = \dfrac{(\mu - 4)m}{m - 2}. \end{cases} \tag{8.7}$$

Osserviamo ora che per le (8.7); si ha:

$$\nu \geq m; \quad \nu\left(1 + \frac{2}{m} - \frac{2}{p}\right) \geq \mu; \quad \mu - 4 = \nu \frac{m-2}{m}; \quad \nu\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p}\right) > 1. \tag{8.8}$$

Supponiamo dapprima che $y \in \partial_1\Omega$, cioè che in y sia soddisfatta la condizione *i*) della definizione (3.1); sussistono allora per il teorema (6.1) le (6.1) e (6.2) per ogni k positivo e queste, insieme alla (7.1), valida per ogni $k \in \mathcal{K}^+(y)$, forniscono le diseguaglianze seguenti:

$$\int_{A^+(h,\rho')} |u-h|^2 dx \leq \int_{A^+(k,\rho')} |u-k|^2 dx \leq \tag{8.9}$$

$$\leq \left\{ \frac{c_0 \gamma}{(\rho''-\rho')^2} \int_{A^+(k,\rho'')} |u-k|^2 dx + \Lambda \int_{A^+(k,\rho'')} \sum_{i=0}^{m} f_i^2 dx \right\} [\text{mis } A^+(k, \rho'')]^{\frac{2}{m}}.$$

$$[\text{mis } A^+(h, \rho)]^{\frac{m-2}{m}} \leq \frac{c_0}{(h-k)^2} \left\{ \frac{\gamma}{(\rho''-\rho')^2} \int_{A^+(k,\rho'')} |u-k|^2 dx + \Lambda \int_{A^+(k,\rho'')} \sum_{i=0}^{m} f_i^2 dx \right\} \tag{8.10}$$

per ogni $k > k_1$ e per ogni $\rho' < \rho''$ dell'intervallo $(\rho - \sigma\rho, \rho)$.

Supponiamo ora che $y \in \Omega \cup \partial_2\Omega$; per il lemma (5.4) possiamo dire che in y è soddisfatta la condizione *ii*) della definizione (3.1). Osserviamo allora che per ogni $k \in \mathcal{K}^+(y)$ che soddisfa la (8.3), per $h > k$ e per r tale che $\rho - \sigma\rho \leq r \leq \rho$ si ha:

$$\text{mis } A^+(h, r) \leq \text{mis } A^+(k, \rho) \leq \vartheta \text{ mis } \Omega(y, \rho) \leq \vartheta \text{ mis } I(y, 1)\rho^m \leq \vartheta \frac{\text{mis } I(y, 1) r^m}{(1-\sigma)^m} \leq$$
$$\leq \frac{\vartheta}{(1-\sigma)^m \zeta} \text{mis } \Omega(y, r) \leq (1-\lambda) \text{ mis } \Omega(y, r).$$

Sussistono ancora, per il teorema (6.1), le (6.1) e (6.2) per ogni k che soddisfa la (8.3). Si deduce, come precedentemente, che sono valide le diseguaglianze (8.9) e (8.10) per ogni $k > k_1$, che soddisfa le (8.3), per $h > k$ e per ogni $\rho' < \rho''$ dell'intervallo $(\rho - \sigma\rho, \rho)$.

In relazione ai numeri σ e d di cui all'enunciato ed ai numeri ρ e k che intervengono nella (8.3), poniamo:

$$\rho_n = \rho - \sigma\rho + \frac{\sigma\rho}{2^n}; \quad k_n = k + \sigma d - \frac{\sigma d}{2^n}.$$

$$u_n = \int_{A^+(k_n,\rho_n)} |u-k|^2 dx \tag{8.11}$$

$$a_n = \text{mis } A^+(k_n, \rho_n).$$

Otteniamo allora dalle (8.9) e (8.10) e dalla diseguaglianza di SCHWARZ:

(8.12)
$$u_{n+1} \leq \frac{c_0 \gamma 2^{2(n+1)}}{\sigma^2 \rho^2} u_n a_n^{\frac{2}{m}} + \Lambda \Gamma a_n^{1+\frac{2}{m}-\frac{2}{p}}$$

$$a_{n+1}^{\frac{m-2}{m}} \leq \frac{c_0 2^{2(n+1)}}{d^2 \sigma^2} \left\{ \frac{\gamma 2^{2(n+1)}}{\sigma^2 \rho^2} u_n + \Lambda \Gamma a_n^{1-\frac{2}{p}} \right\}.$$

ove si è posto:

(8.13)
$$\int_\Omega \sum_{i=0}^{m} |f_i|^p dx \leq \Gamma^{\frac{p}{2}}.$$

Dimostriamo ora, per induzione, che per ogni n, si ha:

(8.14)
$$a_n \leq \frac{\vartheta \rho^m}{2^{\nu n}} \operatorname{mis} I(0,\, 1)$$

(8.15)
$$u_n \leq \frac{\vartheta \rho^m}{2^{\mu n}} d^2.$$

Le (8.14) e (8.15) sono verificate per $n = 0$ a causa delle (8.3) e (8.6); supponiamo che esse siano verificate per valori non maggiori di n; si ha allora, per le (8.12):

$$u_{n+1} \leq \frac{c_0 \gamma 2^{2(n+1)}}{\sigma^2 \rho^2} \frac{\vartheta \rho^m}{2^{\mu n}} \frac{\vartheta^{\frac{2}{m}} \chi^{\frac{2}{m}} \rho^2}{2^{\frac{2\nu n}{m}}} + \frac{\Gamma \Lambda \vartheta^{1+\frac{2}{m}-\frac{2}{p}} \rho^{m\left(1+\frac{2}{m}-\frac{2}{p}\right)} \chi_m^{1+\frac{2}{m}-\frac{2}{p}}}{2^{\nu\left(1+\frac{2}{m}-\frac{2}{p}\right)n}}$$

$$a_{n+1}^{\frac{m-2}{m}} \leq \frac{\beta 2^{2(n+1)}}{d^2 \sigma^2} \left\{ \frac{\gamma 2^{2(n+1)}}{\sigma^2 \rho^2} \frac{\vartheta \rho^m d^2}{2^{\mu m}} + \frac{\Lambda \Gamma \vartheta^{1-\frac{2}{p}} \rho^{m\left(1-\frac{2}{p}\right)}}{2^{\nu\left(1-\frac{2}{p}\right)m}} \chi_m^{1-\frac{2}{p}} \right\}.$$

Ora a causa delle (8.6), (8.7),(8.8), segue:

$$u_{n+1} \leq \frac{\vartheta \rho^m d^2}{2^{\mu(n+1)}}; \quad a_{n+1} \leq \frac{\vartheta \rho^m}{2^{\nu(n+1)}} \operatorname{mis} I(0,\, 1).$$

Le (8.14) e (8.15) sono quindi verificate per ogni n; passando al limite per $n \to +\infty$ si trova la (8.4).

In modo analogo si dimostra il seguente:

TEOREMA (8.2). - *Sia* $u(x)\mathcal{E}(\Omega;\ V)$ *e* Ω λ-*ammissibile rispetto a* $V(0<\lambda<1)$ *e, per* $p>m$, *si abbia:*

$$(8.1)\qquad f_i \in L^p(\Omega) \qquad (i=0,\ 1, \ldots,\ m).$$

Fissato $0<\sigma<1$, *supponiamo che esista* $k_2 \leq 0$ *tale che si abbia:*

$$(8.16)\qquad (-\infty,\ k_2) \subset \mathcal{K}^-(y);$$

è allora possibile determinare un numero positivo $\vartheta = \vartheta(\sigma)$ *in modo che, fissato* $y \in \overline{\Omega}$, $\rho < \min\,[\bar{\rho}(y),\ \tilde{\rho}(y)]$, *per ogni* $k<k_2$, *tale che:*

$$(8.17)\qquad \text{mis}\ A^-(k,\ \rho) \leq \vartheta\ \text{mis}\ \Omega(y, \rho),$$

si abbia:

$$(8.18)\qquad \text{mis}\ A^-(k-\sigma d,\ \rho-\sigma\rho)=0$$

ove:

$$(8.5')\qquad d^2 \geq \frac{1}{\vartheta\rho^m}\int |u-k|^2 dx + \rho^{2\left(1-\frac{m}{p}\right)}\left\{\int_{A^-(k,\rho)} \sum_{i=0}^{m} |f_i|^p dx\right\}^{\frac{2}{p}}.$$

Una prima conseguenza dei teoremi precedenti è il seguente:

TEOREMA (8.3). - *Sia* $u(x) \equiv \mathcal{E}(\Omega;\ V)$ *con* Ω λ-*ammissibile* $(0<\lambda<1)$ *rispetto a* V *e, per* $p>m$, *si abbia la* (8.1). *Esistano due numeri* $k_1 \geq 0$, $k_2 \leq 0$ *tali che si abbia:*

$$(-\infty,\ k_2) \subset \mathcal{K}^-(y); \quad (k_1,\ +\infty) \subset \mathcal{K}^+(y).$$

Allora la funzione $u(x)$ *è limitata in* $\overline{\Omega}$.

Poichè $\overline{\Omega}$ è limitato (e chiuso) è possibile trovare un numero finito di punti di $\overline{\Omega}$: $y_1,\ y_2, \ldots,\ y_N$ tali che si abbia:

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{N} \overline{\Omega}(y_i,\ \rho(y_i)-\sigma\rho(y_i))$$

ove $\rho(y_i) < \min\,[\bar{\rho}(y_i),\ \tilde{\rho}(y_i)]$. Detto poi $\bar{k}$ $[\bar{\bar{k}}]$ un numero positivo $>k_1$ [negativo $<k_2$] tale che per $i=1,\ 2, \ldots,\ N$ si abbia:

$$\text{mis}\ A^+(\bar{k},\ \rho(y_i)) \leq \vartheta\ \text{mis}\ \Omega(y_i,\ \rho(y_i))$$

$$[\text{mis}\ A^-(\bar{\bar{k}},\ \rho(y_i)) \leq \vartheta\ \text{mis}\ \Omega(y_i,\ \rho(y_i))]$$

si deduce che q. ov. in $\overline{\Omega}(y_i, \rho(y_i) - \sigma\rho(y_i))$ si ha:

$$\bar{k} - \sigma d \leq u \leq \bar{k} + \sigma d$$

ove:

$$d^2 \geq \frac{1}{\vartheta \min\limits_{1\ldots N} \rho(y_i)} \int\limits_{\Omega} |u|^2 dx + [\text{diam}\ \Omega]^{2\left(1-\frac{p}{m}\right)} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=0}^{m} |f_i|^p dx$$

e di qui la tesi [7].

Dai teoremi precedenti si deduce il seguente:

TEOREMA (8.40). - *Sia* $u(x) \equiv \mathcal{E}(\Omega); V)$ *ove* Ω *è* λ-*ammissibile* $(0 < \lambda < 1)$ *rispetto a* V *e, per* $p > m$, *si abbia la* (8.1). *Fissato* $y \in \overline{\Omega}$ *e* $4\rho < \min[\bar{\rho}(y), \tilde{\rho}(y)]$ *sia:*

(8.19) $$l_1 = \sup_{x \in \Omega(y,\, 4\rho)} u(x), \qquad l_2 = \inf_{x \in \Omega(y,\, 4\rho)} u(x)$$

e

(8.20) $$\omega = \text{osc}\ (u,\ 4\rho) = l_1 - l_2$$

e per $\eta < 1$ *sia*

(8.21) $$(l_1 - \eta\omega,\ +\infty) \subset \mathcal{K}^+(y) \qquad \frac{\text{mis}\ A^+(l_1 - \eta\omega\,;\ 2\rho)}{\text{mis}\ \Omega(y,\ 2\rho)} \leq \vartheta$$

oppure

(8.22) $$(-\infty,\ l_2 + \eta\omega) \subset \mathcal{K}^-(y) \qquad \frac{\text{mis}\ A^-(l_2 + \eta\omega\,;\ 2\rho)}{\text{mis}\ \Omega(y,\ 2\rho)} \leq \vartheta$$

ove ϑ *è il numero determinato ai teoremi* (8.1) *e* (8.2) *in relazione a* $\sigma = \frac{1}{2}$. *Allora esistono due numeri* $\bar{\eta}$ *ed* $N(\bar{\eta} < 1)$, *indipendenti da* ρ *e da* y, *per cui si ha:*

(8.23) $$\text{osc}\,(u,\ \rho) \leq \bar{\eta}\ \text{osc}\,(u,\ 4\rho) + N\rho^{1-\frac{m}{p}}.$$

Supponiamo, per fissare le idee, che siano verificate le (8.21). Potremo allora determinare un numero $\eta_1 > 0$ in modo che, per $k_1 = l_1 - \eta_1\omega$ sia

(7) Per un teorema analogo cfr. [17] p. 231.

verificata la (8.2) e inoltre si abbia:

$$\text{mis } A^+(l_1 - \eta_1\omega;\ 2\rho) \leq \vartheta \quad \text{mis } \Omega(y,\ 2\rho).$$

Pertanto per il teorema (8.1), poichè utilizzando la (8.13), si ha:

$$\frac{1}{\vartheta(2\rho)^m}\int\limits_{A^+(l_1-\eta_1\omega;\ 2\rho)} (u - l_1 + \eta_1\omega)^2\ dx + \rho^{2\left(1-\frac{m}{p}\right)}\left\{\int\limits_{A^+(l_1-\eta_1\omega;\ 2\rho)} \sum_{i=0}^{m} |f_i|^p dx\right\}^{\frac{2}{p}} \leq \left[\eta_1\omega + \Gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{1-\frac{m}{p}}\right]^2 = d^2$$

segue, che q. ov. in $\Omega(y,\ \rho)$, si ha:

$$u(x) \leq l_1 - \eta_1\omega + \frac{1}{2}\eta_1\omega + \frac{1}{2}\Gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{1-\frac{m}{p}} = l_1 - \frac{1}{2}\eta_1\omega + \frac{1}{2}\Gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{1-\frac{m}{p}}$$

e quindi:

$$\text{osc } (u,\ \rho) \leq \sup_{x\in\Omega(y,\ \rho)} u - l_2 \leq (1 - \frac{1}{2}\eta_1)\omega + \frac{1}{2}\Gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{1-\frac{m}{p}}$$

e così la (8.23). Alla stessa conclusione si giunge se in luogo della (8.21) si suppongono verificate le (8.22).

Dimostriamo ora il teorema seguente:

TEOREMA (8.5). - *Sia $u(x) \equiv \mathcal{E}(\Omega,\ V)$ con Ω $\frac{1}{2}$— ammissibile rispetto a V e, per $p > m$, si abbia la* (8.1). *Fissato $y \in \bar{\Omega}$ sia $\mathcal{K}^{\pm}(y) = (-\infty,\ +\infty)$ se $y \in \partial_2\Omega$ e $\mathcal{K}^+(y) = (0,\ +\infty)$, $\mathcal{K}^-(y) = (-\infty,\ 0)$ se $y \in \partial_1\Omega$. Allora per ogni $\rho < min\,[\bar{\rho}(y),\ \tilde{\rho}(y)]$ è verificata la tesi del teor.* (8.4), *cioè la* (8.23).

Cominciamo a supporre dapprima che $y \in \Omega + \partial_2\Omega$ per modo che $\mathcal{K}^+(y) \equiv \mathcal{K}^-(y) = (-\infty,\ +\infty)$. Posto allora $\bar{l} = \dfrac{l_1 + l_2}{2}$ (cfr. teor. precedente), una almeno delle due relazioni è soddisfatta:

$$\text{mis } A^+(\bar{l},\ 2\rho) \leq \frac{1}{2} \text{ mis } \Omega(y,\ 2\rho) \tag{8.24}$$

$$\text{mis } A^-(\bar{l},\ 2\rho) \leq \frac{1}{2} \text{ mis } \Omega(y,\ 2\rho). \tag{8.25}$$

Per fissare le idee, supponiamo che sia verificata la (8.24); a più forte ragione sarà:

$$\text{mis } A^+(l_1 - \eta\omega;\ 2\rho) \leq \frac{1}{2} \text{ mis } \Omega(y,\ 2\rho) \tag{8.26}$$

se $\eta < \frac{1}{2}$; quindi per il teorema (6.2) sussiste la (6.6).

Se invece $y \in \partial_1\Omega$, uno almeno dei numeri l_1, $-l_2$ supera $\frac{\omega}{2}$; per fissare le idee, sia $l_1 > \frac{\omega}{2}$; allora sarà:

$$l_1 - \eta\omega > 0$$

per $\eta < \frac{1}{2}$ e quindi ancora per il teorema (6.2) sussiste la (6.6).

Premesso ciò dimostreremo ora che per ogni $y \in \overline{\Omega}$, sussiste la (8.23).

Consideriamo invero la successione:

$$\eta_0 = \frac{1}{2}, \quad \eta_1 = \frac{1}{2^2} \dots, \quad \eta_j = \frac{1}{2^{j+1}}$$

ed, in corrispondenza ai numeri $h = l_1 - \eta_{j+1}\omega$, $k = l_1 - \eta_j\omega$ scriviamo, per la (6.6)

$$[\text{mis}\, A^+(l_1 - \eta_{j+1}\omega;\ 2\rho)]^{\frac{2m-2}{m}} \leq \frac{c_1 2^{2(j+2)}}{\omega^2} \int\limits_{A^+(l_1-\eta_j\omega;\, 2\rho)} \sum_{i=1}^{m} |D_i u|^2 dx \,\text{mis}\, \{A^+(l_1 - \eta_j\omega;\, 2\rho) -$$

$$- A^+(l_1 - \eta_{j+1}\omega;\ 2\rho)\}.$$

Ma, per il teorema (7.1), possiamo scrivere ancora:

$$[\text{mis}\, A^+(l_1 - \eta_{j+1}\omega;\ 2\rho)]^{\frac{2m-2}{m}} \leq \frac{c_1 2^{2(j+2)}}{\omega^2} \left\{ \frac{\gamma}{4\rho} \int\limits_{A^+(l_1-\eta_j\omega;\, 2\rho)} (u - l_1 + \eta_j\omega)^2 dx + \chi_m \Lambda \Gamma (4\rho)^{m\left(1-\frac{2}{p}\right)} \right\} \cdot$$

$$\cdot\, \text{mis}\, \{ A^+(l_1 - \eta_j\omega;\ 2\rho) - A^+(l_1 - \eta_{j+1}\omega;\ 2\rho) \}.$$

Se ora $j \leq n$, si ha, maggiorando:

$$[\text{mis}\, A^+(l_1 - \eta_n\omega;\ 2\rho)]^{\frac{2m-2}{m}} \leq \chi_m \left\{ c_1\gamma 4^{m-1} + c_1 \Lambda \Gamma 4^{m\left(1-\frac{2}{p}\right)} 2^{2n+4} \left(\frac{\rho^{1-\frac{m}{p}}}{\omega} \right)^2 \right\} \rho^{m-2} \cdot$$

$$\cdot\, \text{mis}\, \{ A^+(l_1 - \eta_j\omega;\ 2\rho) - A^+(l_1 - \eta_{j+1}\omega;\ 2\rho) \}$$

e, sommando rispetto ad j da 1 ad n, si ha:

$$n[\text{mis}\, A^+(l_1 - \eta_n\omega;\ 2\rho)]^{\frac{2m-2}{m}} \leq \chi_m^2 \left\{ c_1\gamma 4^{m-1} + c_1 \Lambda \Gamma 4^{m\left(1-\frac{2}{p}\right)} \left(2^{n+2} \frac{\rho^{1-\frac{m}{p}}}{\omega} \right)^2 \right\} \rho^{2m-2}. \tag{8.26}$$

Posto ora:

$$R = \frac{\chi_m^2 c_1}{2^{2m-2}} \left\{ \gamma 4^{m-1} + \Lambda \Gamma 4^{m\left(1-\frac{2}{p}\right)} \right\},$$

fissiamo n in modo che, detto ϑ il numero determinato per $\sigma = \frac{1}{2}$ nei teoremi (8.1) e (8.2), si abbia:

$$\frac{R^{\frac{m}{2m-2}}}{\chi_m^{\bar{n}\frac{m}{2m-2}}} \leq \vartheta. \tag{8.27}$$

Ciò posto, se:

$$\omega(\rho) \leq 2^{\bar{n}+2} \rho^{1-\frac{m}{p}}$$

la (8.23) risulta verificata; se invece si ha:

$$\omega(\rho) > 2^{\bar{n}+2} \rho^{1-\frac{m}{p}}$$

segue dalla (8.26) e dalla (8.27)

$$\text{mis } A^+(l_1 - \eta_n \omega;\ 2\rho) \leq \frac{R^{\frac{m}{2m-2}}}{\chi_m^{\bar{n}\frac{m}{2m-2}}} \text{ mis } \Omega(y,\ 2\rho) \leq \vartheta \text{ mis } \Omega(y,\ 2\rho).$$

Dal teorema (8.4) allora, essendo in ogni caso:

$$(l_1 - \eta_n \omega,\ +\infty) \subset \mathcal{H}^+(y)$$

si ha la (8.23). Alla stessa conclusione si giunge se in luogo della (8.24) è verificata la (8.25) oppure invece di $l_1 > \frac{\omega}{2}$ si ha $-l_2 > \frac{\omega}{2}$.

Possiamo ora facilmente dedurre il teorema seguente:

TEOREMA (8.6). - *Sia $u(x) \equiv \mathcal{E}(\Omega;\ V)$ con Ω $\frac{1}{2}$-ammissibile rispetto a V e, per $p > m$, si abbia la (8.1). Supponiamo inoltre che $\mathcal{H}^-(y) = (-\infty,\ 0)$, $\mathcal{H}^+(y) = (0,\ +\infty)$ se $y \in \partial_1\Omega$ e che $\mathcal{H}^+(y) \equiv \mathcal{H}^-(y) = (-\infty,\ +\infty)$ se $y \in \partial_2\Omega$. Esistono allora tre numeri $\mathcal{H} > 0$ ed α con $0 < \alpha < 1$ e $\delta(y) > 0$ tali che per ogni $y \in \bar{\Omega}$ e per ogni $\rho < \delta(y)$ si abbia:*

$$\omega(\rho) = \text{osc}\,(u,\ \rho) = \sup_{x \in \bar{\Omega}(y,\rho)} u(x) - \inf_{x \in \bar{\Omega}(y,\rho)} u(x) \leq \mathcal{H} \rho^\alpha. \tag{8.28}$$

Infatti posto $r(y) = \min[1, \bar{\rho}(y), \tilde{\rho}(y)]$, per il teorema (8.5) si ha la (8.23) per ogni $\rho < r(y)$ con $\bar{\eta}$ ed N indipendenti da y.

Detto a un numero con $\bar{\eta} < a < 1$, scegliamo $\bar{\alpha}$ in modo che $4^{\bar{\alpha}}\bar{\eta} = a < 1$ e poniamo:

$$\alpha = \min\left[\bar{\alpha},\ 1 - \frac{m}{p}\right].$$

Sia poi, per $\frac{r(y)}{4} \leq \rho \leq r(y)$

$$\omega(\rho) \leq M\rho^{\alpha};$$

allora, dalla (8.23) si deduce, se $\frac{r(y)}{4^2} \leq \rho \leq \frac{r(y)}{4}$, poichè $\rho^{1-\frac{m}{p}} \leq \rho^{\alpha}$:

$$\omega(\rho) \leq \bar{\eta}4^{\alpha}M\rho^{\alpha} + N\rho^{\alpha}$$

e, in generale, per $\frac{r(y)}{4^{i+1}} \leq \rho \leq \frac{r(y)}{4^i}$ si deduce analogamente:

$$\omega(\rho) \leq \left\{ M(4^{\alpha}\bar{\eta})^i + N\sum_{s=0}^{i-1}(4^{\alpha}\bar{\eta})^s \right\}\rho^{\alpha} \leq \left\{ Ma^i + \frac{N}{1-a} \right\}\rho^{\alpha}.$$

Detto $\bar{i}$ un numero tale che

$$Ma^{\bar{i}} \leq 1$$

si deduce che, se $\rho < \delta(y) = \frac{r(y)}{4^{\bar{i}}}$, si ha la (8.28), ove:

$$\mathcal{H} = \left\{ 1 + \frac{N}{1-a} \right\}.$$

Dal teorema (8.6) si deduce immediatamente che la funzione $u(x) \equiv \mathcal{S}(\Omega;\ \Gamma)$ è continua in $\bar{\Omega}$ e quindi è dimostrato il teor. (4.1).

Ma, di più, se $\delta(y)$, cioè $\bar{\rho}(y)$ e $\rho(y)$ hanno un estremo inferiore δ in $\bar{\Omega}$ positivo, si deduce anche che la funzione $u(x)$ è hölderiana in $\bar{\Omega}$, nel senso che esiste una costante T tale che, comunque si fissano due punti x_1 e x_2 in $\bar{\Omega}$, si ha:

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^{\alpha}} \leq T \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Basta invero assumere $T = \max\left[\frac{2 \max |u(x)|}{\delta^\alpha}, \mathcal{H}\right]$ ed osservare che, se $|x_1 - x_2| \geq \delta$, si ha:

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} \leq \frac{2 \max |u(x)|}{\delta_\alpha}$$

mentre, se $|x_1 - x_2| < \delta$, si ha, per la (8.28):

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|) \leq \mathcal{H} |x_1 - x_2|^\alpha.$$

Ma, nelle applicazioni la condizione richiesta che sia $\delta(y) \geq \delta > 0$ non è sempre soddisfatta e pertanto dobbiamo sostituirla con una condizione più generale.

Supporremo allora che l'insieme Ω sia $\frac{1}{2}$ — ammissibile rispetto a V e soddisfi inoltre la condizione seguente:

Esista un numero $\delta > 0$ *tale che:*

$$\min[\tilde{\rho}(y), \bar{\rho}(y)] > \delta > 0 \quad \textit{per ogni} \quad y \in \partial_1\Omega$$

e:

$$\min[\bar{\rho}(y), \tilde{\rho}(y)] \geq \min[\delta, \operatorname{dist}(y, \partial_1\Omega)] \ \textit{per ogni} \ y \in \partial_2\Omega.$$

Diremo allora che Ω è *uniformemente* $\frac{1}{2}$ — *ammissibile rispetto a V.*

In queste condizioni il numero $\delta(y)$ del teorema (8.6) è inferiormente limitato da un numero positivo $\bar{\delta}$ per $y \in \partial_1\Omega$ e si può assumere (cfr. lemma (5.4)):

$$\delta(y) \geq \min[\bar{\delta}, \operatorname{dist}(y, \partial_1\Omega)] \qquad \text{per } y \in \Omega \cup \partial_2\Omega.$$

Come nel caso precedente, possiamo limitarci a considerare punti x_1, x_2 di $\bar{\Omega}$ tali che $|x_1 - x_2| < \bar{\delta}$.

Indichiamo con $\Omega_{\bar{\delta}}$ l'insieme di punti di $\bar{\Omega}$ che distano da $\partial_1\Omega$ per non meno di $\bar{\delta}$

$$\Omega_{\bar{\delta}} = E_{y \in \bar{\Omega}}[\operatorname{dist}(y, \partial_1\Omega) \geq \bar{\delta}].$$

Se uno dei due punti x_1, x_2, sia x_1, appartiene a $\Omega_{\bar{\delta}}$ si ha:

$$|x_2 - x_1| \leq \bar{\delta} < \operatorname{dist}(x, \partial_1\Omega) \leq \delta(x_1)$$

e quindi per il teorema (8.6)

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq \mathcal{H} |x_1 - x_2|^\alpha. \tag{8.29}$$

Se x_1 e x_2 non appartengono a $\Omega_{\overline{\delta}}$, ma uno dei due, sia x_1, appartiene a $\partial_1\Omega$, segue, come prima, la (8.29).

Se invece x_1 e x_2 non appartengono a $\Omega_{\overline{\delta}}$ e nessuno dei due appartiene a $\partial_1\Omega$ si possono presentare due casi:

a) $|x_1 - x_2| \leq \max[\operatorname{dist}(x_1, \partial_1\Omega), \operatorname{dist}(x_2, \partial_1\Omega)]$

b) $|x_1 - x_2| > \max[\operatorname{dist}(x_1, \partial_1\Omega), \operatorname{dist}(x_2, \partial_1\Omega)]$.

Nel caso *a*) per almeno uno dei due punti, sia x_1, è:

$$|x_1 - x_2| \leq \operatorname{dist}(x_1, \partial_1\Omega) \leq \delta(x_1)$$

e quindi la (8.29).

Nel caso *b*) esiste almeno un punto $\bar{x}_1 \in \partial_1\Omega$ per cui

$$|\bar{x}_1 - x_1| \leq |x_1 - x_2|$$

e quindi:

$$|\bar{x}_1 - x_2| \leq 2|x_1 - x_2|;$$

si ha allora, essendo la (8.29) già provata se uno dei due punti è in $\partial_1\Omega$

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq |u(x_1) - u(\bar{x}_1)| + |u(\bar{x}_1) - u(x_2)| \leq 3\mathcal{H}|x_1 - x_2|^\alpha.$$

Abbiamo così completamente dimostrato il teorema (4.2).

9. Prima di terminare questo paragrafo facciamo rapidamente alcune osservazioni ai teoremi precedenti.

È noto che, come abbiamo già richiamato nella introduzione, supponendo i coefficienti $a_{ij}(x)$ continui in Ω e l'insieme aperto Ω più regolare di quanto è stato qui supposto, si dimostra (cfr. [8], [6]) che se $f_i(x) \in L^p(\Omega)$ con $p > m$, esistono due costanti positive L ed ν $(0 < \nu < 1)$ tali che per $u(x) \equiv \mathcal{E}(\Omega; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))$, si ha:

$$\int_{\Omega(\rho,\, y)} \sum_{i=1}^{m} |D_i u|^2 dx \leq L\rho^{m-2+2\nu} \qquad (\rho < r,\ y \in \Omega) \tag{8.30}$$

con $\nu = 1 - \dfrac{m}{p}$.

Di qui, utilizzando un ben noto teorema di MORREY (cfr. ad es. [6], p. 111), si deduce che $u(x)$ è hölderiana con esponente $\nu = 1 - \frac{m}{p}$ in $\bar{\Omega}$.

Nelle ipotesi da noi poste nel teorema (8.6) si può ancora dedurre per $u(x) \equiv \mathcal{G}(\Omega; H_0^1(\Omega))$ una limitazione del tipo (8.30) con $\nu \leq 1 - \frac{m}{p}$, localmente. Ciò si dimostra osservando che in $\Omega(y, \rho)$ per la funzione $u(x) - u(y)$ si può scrivere una diseguaglianza del tipo (7.1) con $k = 0$ (cfr. C. MIRANDA [8] pp. 102–103) e da questa, tenendo conto della (8.28), si deduce la (8.30) con ν coincidente con il valore α considerato nel teorema (8.6).

In altre parole qui la (8.30) è una conseguenza del teorema (8.6) anzicchè essere una premessa come nel caso dei coefficienti $a_{ij}(x)$ continui.

Si osservi ancora che, a differenza di quanto accade nel caso dei coefficienti continui, l'esponente di HÖLDER di $u(x)$ può effettivamente essere più piccolo di $1 - \frac{m}{p}$.

§ 4. - Alcuni insiemi Ω λ-ammissibili rispetto a V.

10. Accanto alla famiglia $\mathfrak{F}(\beta; A)$, definita al n. 3 ([8]), consideriamo la nuova famiglia dei sottoinsiemi B di un insieme aperto A definita nel modo seguente:

Fissato un numero $\beta > 0$ ed un insieme aperto A, indichiamo con:

$$\mathfrak{S}(\beta; A)$$

la famiglia dei sottoinsiemi $B \subset \bar{A}$ per cui si ha in A:

$$|u(x)| \leq \beta \int_A \sum_{i=1}^{m} |D_i u| \frac{1}{|x-t|^{m-1}} dt \tag{10.1}$$

per ogni funzione $u(x) \in C^1(\bar{A})$ e nulla su B.

Dimostriamo allora il seguente teorema, conseguenza immediata di noti risultati di SOBOLEV:

TEOREMA (10.1) - *Fissato* $\beta > 0$ *e un insieme* A *esiste un numero* $\beta' > 0$ *tale che:*

$$\mathfrak{S}(\beta; A) \subset \mathfrak{F}(\beta'; A).$$

([8]) Osserviamo che se A soddisfa l'ipotesi di cono (o è di tipo ($\mathfrak{S}$), cfr. [17], p. 225) allora nella definizione di $\mathfrak{F}$ (β, A) si può assumere nella (3.1) $q^* = q$.

Infatti se $B \in \mathfrak{S}(\beta;\ A)$ ed $u(x)$ è una qualunque funzione di $C^1(\bar{A})$ nulla su B, si ha la (10.1) e quindi, per un teorema di SOBOLEV [15], segue la (3.1) con un opportuno valore β' di β; ciò implica che $B \in \mathfrak{F}(\beta';\ A)$.

Fissato ora un insieme A di R^m ed un punto x di A ed un insieme chiuso E contenuto in A, consideriamo l'insieme dei raggi che escono da x, passano per un punto generico P di E e sono tali che il segmento di estremi x e P appartenga per intero ad $\bar{A}$. Tale insieme di raggi interseca $\Gamma(x,\ 1)$ in un insieme chiuso la cui misura $(m-1)$ dimensionale sarà indicata con:

$$\operatorname{ang}\{x,\ E,\ A\}$$

e si chiamerà *angolo sotto il quale si vede da x l'insieme E in A.*

Se poi E non è chiuso porremo:

$$\operatorname{ang}\{x,\ E,\ A\} = \sup_{F \subset E} \operatorname{ang}\{x,\ F,\ A\}$$

ove F è un qualsiasi insieme chiuso contenuto in E.

Evidentemente se $E_1 \subset E_2$, $A_1 \subset A_2$ e $x \in A_1$ si ha:

$$\operatorname{ang}\{x,\ E_1,\ A_1\} \leq \operatorname{ang}\{x,\ E_2,\ A_2\}.$$

Premesso ciò dimostriamo il seguente:

TEOREMA (10.2). - *Se esiste una costante $\varphi > 0$ tale che per ogni $x \in A$ si ha:*

$$\operatorname{ang}\{x,\ B,\ A\} > \varphi$$

si può trovare una costante $\beta\left(\leq \dfrac{2}{\varphi}\right)$ *per cui:*

$$B \in \mathfrak{S}(\beta,\ A) \qquad [B \in \mathfrak{F}(\beta,\ A)].$$

Fissato $x \in A$, diciamo e un insieme chiuso e limitato contenuto in B tale che:

$$\operatorname{ang}\{x,\ e,\ A\} \geq \frac{\varphi}{2} \tag{10.2}$$

e sia $u(x)$ una funzione di $C^1(A)$ e nulla su B. Se $x \in e$ la (10.1) è ovvia; se invece $x \notin e$ sia $\Sigma(x)$ l'insieme di $\Gamma(x,\ 1)$ tale che i raggi, uscenti da x e passanti per i punti di esso incontrano almeno un punto P di e in modo tale che il segmento di estremi x e P appartiene ad $\bar{A}$; è allora per la (10.2):

$$|\Sigma(x)| > \frac{\varphi}{2}. \tag{10.3}$$

Per ogni t di A poniamo $r = |x - t|$ e, detto ξ il punto di $\Gamma(x, 1)$ che si proietta da x in t, poniamo ancora:

$$u(t) = u(r, \xi).$$

Si ha allora, per ogni punto ξ di $\Sigma(x)$:

$$u(x) = u(0, \xi) = -\int_0^{r(\xi)} \frac{d}{dr} u(r, \xi) dr$$

essendo $u(r(\xi), \xi) = 0$.

Integrando primo e secondo membro rispetto a ξ su $\Sigma(x)$ e, utilizzando la (10.3), si ha:

$$|u(x)| \leq \frac{2}{\varphi} \int_A \sum_{i=1}^{m} |D_i u| \frac{1}{|x - t|^{m-1}} dt.$$

Poichè questa relazione vale per ogni $x \in A$ e per ogni $u(x) \in C^1(\bar{A})$ e nulla su B segue:

$$B \in \mathcal{S}(\beta, A)$$

e quindi, per il teorema (10.1), variando eventualmente β:

$$B \in \mathcal{F}(\beta, A).$$

Dimostriamo ancora il seguente teorema:

Teorema (10.3). - *Sia A un insieme aperto e ζ un numero positivo tale che*:

$$\zeta < \frac{\text{mis } A}{(\text{diam } A)^m}.$$

Supponiamo che per ogni $x \in A$ e per un valore $\bar{\lambda}$ con $(0 < \bar{\lambda} < 1)$, si abbia:

$$A = A_1(x) \cup A_2(x)$$

con $A_1(x)$ contenente x e stellare rispetto ad x [9] *e*

$$\text{mis } A_2(x) < \bar{\lambda} \text{ mis } A.$$

---

[9] Cioè tale che i raggi uscenti da x incontrano $\partial\Omega$ in un unico punto.

Fissato allora una costante $\lambda > \bar{\lambda}$, *esiste una costante* $\varphi > 0$ *tale che, per ogni insieme* $B \subset A$, *per cui*

$$\text{mis } B > \lambda \text{ mis } A$$

si abbia:

$$\text{ang}\{x, B, A\} \geq \varphi$$

qualunque sia $x \in A$.

Fissato $x \in A$, poniamo:

$$B = B_1(x) \cup B_2(x)$$

ove $B_1(x) = A_1(x) \cap B$ e $B_2(x) = A_2(x) \cap B$.

Poichè:

$$\text{mis } B_2(x) \leq \text{mis } A_2(x) < \bar{\lambda} \text{ mis } A$$

segue:

$$\text{mis } B_1(x) = \text{mis } B - \text{mis } B_2(x) > (\lambda - \bar{\lambda}) \text{ mis } A.$$

Detto $\Sigma(x)$ la proiezione di $B_1(x)$ da x su $\Gamma(x, 1)$ si ha:

$$\zeta(\lambda - \bar{\lambda})(\text{diam } A)^m \leq (\lambda - \bar{\lambda}) \text{ mis } A < \text{mis } B_1(x) \leq \int_{\Sigma(x)} d\omega \int_0^{\text{diam } A} r^{m-1} dr = \frac{(diam\ A)^m}{m} |\Sigma(x)|$$

e quindi

$$\text{ang}\{x, B, A\} > \text{ang}\{x, B_1, A\} > \zeta m(\lambda - \bar{\lambda}).$$

Poichè x è un punto qualunque di A, segue la tesi del teorema.

Da questo teorema e dal teorema (10.2) discende immediatamente il lemma (5.4). Se infatti $A = I(y, \rho)$ si può assumere $\zeta = \chi_m = \text{mis} I(y, 1)$ e $A_1 = A$ e quindi $\bar{\lambda} = 0$.

11. Consideriamo ora alcuni esempi di insiemi Ω λ-ammisibili rispetto a V.

ESEMPIO (11.). - Sia Ω un insieme aperto ed esistano due costanti ζ e $\bar{\lambda}$, comprese da 0 ed 1, tali che per ogni $y \in \partial\Omega$ esista $\tilde{\rho}(y) > 0$ in modo che per ogni $\rho < \tilde{\rho}(y)$ si abbia:

$$\frac{\operatorname{mis}\Omega(y, \rho)}{\operatorname{mis} I(y, \rho)} \geq \zeta > 0$$

e inoltre, detto E_x l'insieme dei punti di $\Omega(y, \rho)$ che si vedono da x in $\Omega(y, \rho)$, si abbia:

$$\operatorname{mis} E_x > (1 - \bar{\lambda}) \operatorname{mis} \Omega(y, \rho) \qquad \text{per ogni } x \in \Omega(y, \rho).$$

Allora Ω *è λ-ammissibile rispetto ad $H^1(\Omega)$ per ogni* $\lambda > \bar{\lambda}$. Infatti si ha:

$$\operatorname{mis} \{ \Omega(y, \rho) - E_x \} < \bar{\lambda} \operatorname{mis} \Omega(y, \rho)$$

e quindi per il teor. (10.3) e per il teorema (10.2) ogni insieme E per cui:

$$\operatorname{mis} E > \lambda \operatorname{mis} \Omega(y, \rho) \qquad \text{con } \lambda > \bar{\lambda}$$

appartiene a $\mathcal{F}(\beta, \Omega(y, \rho))$ per un β opportuno.

Per ogni punto $y \in \partial\Omega$ è quindi soddisfatta la condizione ii) della definizione (3.1).

Mostriamo che *l'insieme* Ω *considerato nell'esempio* (11.1) *è anche di tipo* ($\mathfrak{S}$) ([10]).

Poichè $\bar{\Omega}$ è un compatto, è possibile determinare un numero finito di punti $y_1, y_2, \ldots y_N$ e, in corrispondenza di essi, dei numeri $\rho_1, \ldots \rho_N [\rho_i < \bar{\rho}(y_i)]$ in modo che si abbia:

$$\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{N} \Omega(y_i, \rho_i).$$

Indichiamo ora con $\bar{\rho}$ un numero che soddisfa la condizione seguente:

$$\operatorname{mis} I(0, \bar{\rho}) < (1 - \lambda) \min_{1, 2, \ldots, N} \operatorname{mis} \Omega(y_i, \rho_i).$$

([10]) Cfr. [17], n. 1, p. 225; se è soddisfatta «l'ipotesi di cono» risulta evidentemente che Ω è di tipo ($\mathfrak{S}$).

Fissato $x \in \Omega$, esiste di certo un valore di $i (1 \leq i \leq N)$ in modo che: $x \in \Omega(y_i, \rho_i)$ e inoltre, posto: $E = \Omega(y_i, \rho_i) - I(x, \bar{\rho})$ si ha:

$$\operatorname{mis} E > \lambda \operatorname{mis} \Omega(y_i, \rho_i)$$

e quindi, per il teorema (10.3), esiste $\varphi > 0$ tale che

$$\operatorname{ang} \{ x, E, \Omega(y_i, \rho_i) \} > \varphi.$$

Esistono quindi due numeri φ, $\bar{\rho}$ e, in corrispondenza ad ogni $x \in \Omega$, un insieme $\Sigma(x)$ di $\Gamma(x, 1)$ con $|\Sigma(x)| > \varphi$ per cui l'insieme dei punti di $I(x, \bar{\rho})$ che si proiettano da x in $\Sigma(x)$ appartengono ad Ω.

Si osservi a questo proposito, che un insieme Ω di tipo $(\mathfrak{S})$ può anche non essere del tipo considerato all'esempio (11.1). Infatti l'insieme aperto Ω del piano ottenuto togliendo dai punti interni ad un cerchio una poligonale è di tipo $(\mathfrak{S})$, ma non rientra nell'esempio (11.1) per valori di λ che dipendono dagli angoli della poligonale.

Esempio (11.2) - Diremo che Ω ha frontiera lipschitziana se per ogni $y \in \partial\Omega$ esiste un numero ρ tale che l'insieme $\partial\Omega \cap I(y, \rho)$ ammette una rappresentazione del tipo:

$$\xi_m = \Xi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}) \tag{11.1}$$

rispetto ad un opportuno sistema di assi ortogonali $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ con l'origine in y ove la funzione $\Xi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1})$ è lipschitziana ed i punti per cui $\xi_m = \Xi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}) + \varepsilon$ appartengono o no ad Ω secondo che ε, piccolo, è positivo o negativo.

Si può dimostrare facilmente che *se Ω ha frontiera lipschitziana e le funzioni* (11.1) *hanno coefficiente di Lipschitz sufficientemente piccolo,* Ω è del tipo degli insiemi considerati all'esempio (11.1) e quindi *λ-ammissibile rispetto a $H^1(\Omega)$*.

In particolare *se Ω ha frontiera dotata di iperpiano tangente che varia con continuità esso è λ-ammissibile rispetto a $H^1(\Omega)$ con ogni valore di* $\lambda (0 < \lambda < 1)$.

L'affermazione precedente discende dal fatto che per ogni punto y di $\partial\Omega$ esiste un «cono» $\gamma(y)$ di ampiezza abbastanza grande, avente asse parallelo all'asse ξ_m tale che:

$$\operatorname{mis} \gamma(y) \cap \Omega(y, \rho) > (1 - \bar{\lambda}) \operatorname{mis} \Omega(y, \rho).$$

Osserviamo però che non si può prescindere del tutto dalla condizione che i coefficienti di LIPSCHITZ siano abbastanza piccoli. Basta per questo considerare, nel caso bidimensionale, l'insieme Ω come in figura:

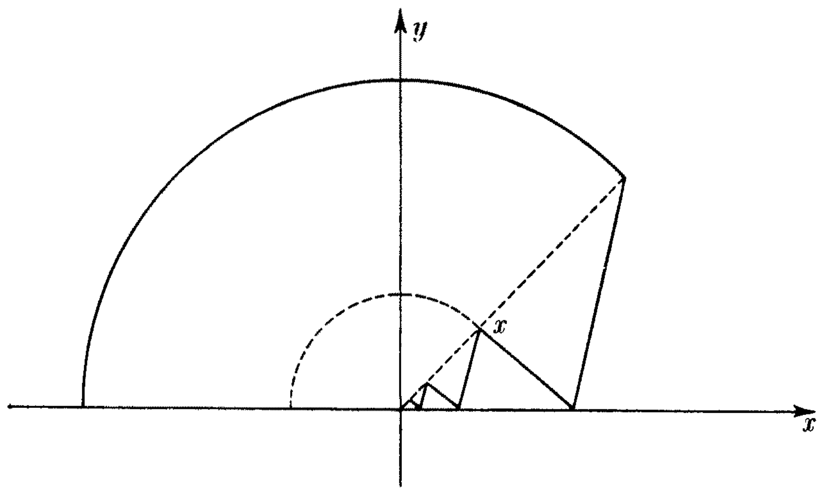

Fig. 1

il quale possiede frontiera lipschitziana, ma non è del tipo di quelli considerati all'esempio (11.1) (pure essendo di tipo $(\mathcal{S})$) in quanto vi sono valori di ρ, piccoli quanto si vuole, tali che in $\Omega(y, \rho)$ vi sono punti x dai quali si «vede» una porzione di $\Omega(y, \rho)$ di misura piccola ad arbitrio.

Ma si osservi che questo esempio non esclude che un insieme Ω λ- ammissibile possa avere dei punti ove non esiste l'iperpiano tangente, come spigoli etc.

12. Consideriamo ora alcuni esempi di insiemi Ω λ-ammissibili rispetto a $H_0^1(\Omega)$.

Se esistono due costanti $\beta > 0$ e $\tilde{\rho} > 0$ tali che per ogni $y \in \partial\Omega$ e per ogni $\rho < \tilde{\rho}$ si ha:

$$\partial\Omega \cap I(y, \rho) \in \mathcal{F}(\beta, \Omega(y, \rho))$$

allora Ω è ammissibile rispetto a $H_0^1(\Omega)$. (In questo caso la definizione di Ω«λ-ammissibile» è indipendente da λ).

Infatti per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$ si ha $u = 0$ su $\partial\Omega$ ([4]) e pertanto la condizione imposta equivale alla condizione i) della definizione (3.1).

ESEMPIO (12.1) - In base al teorema (10.2) possiamo affermare che Ω è ammissibile rispetto a $H_0^1(\Omega)$ se esistono due numeri $\varphi > 0$ e $\tilde{\rho} > 0$ tali che per ogni $y \in \partial\Omega$ si abbia:

$$\operatorname{ang} \{x, \partial\Omega \cap I(y, \rho), \Omega(y, \rho)\} \geq \varphi \qquad \text{qualunque sia } x \in \Omega(y, \rho).$$

È facile provare che *se Ω ha frontiera lipschitziana, Ω è ammissibile rispetto ad $H_0^1(\Omega)$.*

Se $m = 2$ e diciamo L un numero che maggiora i coefficienti di LIPSCHITZ delle funzioni (11.1) si ha, per ogni $x \in \Omega(y, \rho)$:

$$\operatorname{ang} \{x, \partial\Omega \cap I(y, \rho), \Omega(y, \rho)\} > \pi - 2 \operatorname{arctg} L.$$

È interessante osservare però che possono esserci anche degli insiemi Ω ammissibili rispetto a $H_0^1(\Omega)$ la cui frontiera non è lipschitziana. Per $m = 2$ consideriamo l'insieme Ω dei punti del rettangolo $R\{-1 < x < 1, 0 < y < 1\}$ che sono esterni ai cerchi di raggio unitario e di centri nei punti $(-1, +1)$ e $(1, 1)$. La frontiera di quest'insieme non è lipschitziana ma è ammissibile rispetto a $H_0^1(\Omega)$.

Si osservi anche che questo insieme, presentando dei punti cuspidali, non è di tipo $(\mathcal{S})$.

Si può facilmente vedere che un insieme Ω ammissibile rispetto ad $H_0^1(\Omega)$ non può presentare delle cuspidi «rientranti» come nel caso seguente: Ω è costituito dai punti del rettangolo R e dai punti dei due cerchi prima considerati. Infatti per $y = (0, 1) \in \partial\Omega$, in $\Omega(y, \rho)$ vi sono punti che vedono $\partial\Omega \cap I(y, \rho)$ sotto un angolo suscettibile di divenire piccolo quando ρ tende a zero.

L'esclusione di domini siffatti è ben naturale se si pensa al classico esempio di LEBESGUE che mostra l'impossibilità di risolvere con funzioni continue il problema di DIRICHLET ordinario.

Nel lavoro citato di C. B. MORREY [7] gli insiemi Ω presi in considerazione sono della classe $\mathcal{S}^*(\alpha, \tilde{\rho})$ $(0 < \alpha < 1)$ cioè sono tali che:

$$\operatorname{mis} [I(y, \rho) - \Omega(y, \rho)] > \alpha \operatorname{mis} I(y, \rho) \quad \text{per ogni } \rho < \tilde{\rho} \text{ e } y \notin \Omega.$$

Si può facilmente mostrare ripetendo i ragionamenti del teorema (10.3) che se Ω è della classe $\mathcal{S}^*(\alpha, \rho)$ allora esiste una costante $\beta > 0$ tale che:

$$\partial\Omega \cap I(y, \rho) \in \mathcal{S}(\beta, \Omega(y, \rho)) \quad \text{per } \rho < \tilde{\rho} \text{ e } y \in \partial\Omega.$$

e quindi se Ω è della classe $\mathcal{S}^*(\alpha, \tilde{\rho})$ allora Ω è ammissibile rispetto ad $H_0^1(\Omega)$.

Non è difficile d'altra parte costruire un esempio di insieme Ω che è ammissibile rispetto a $H_0^1(\Omega)$, ma che non è della classe $\mathcal{S}^*(\alpha, \tilde{\rho})$.

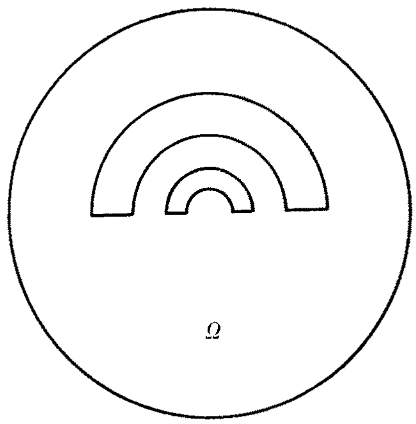

Fig. 2

Esso si ottiene togliendo da un cerchio C una infinità numerabile di semicorone circolari (cfr. figura) concentriche con C e che costituiscono un insieme di densità nulla nel centro.

13. Consideriamo ora la varietà V delle funzioni di $H_0^1(\Omega)$ che hanno traccia nulla su una parte $\partial_1\Omega$ chiusa di $\partial\Omega$ e diamo degli esempi di insiemi λ-ammissibili rispetto alla suddetta classe.

È chiaro che se in ogni punto $y \in \partial_1\Omega$ è verificata la condizione dell'esempio (12.1) e, per ogni punto di $\partial_2\Omega = \partial\Omega, - \partial_1\Omega$, quella dell'esempio (11.1), allora Ω è λ-ammissibile rispetto alla varietà considerata.

Diciamo Γ l'insieme di $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cap \overline{\partial_2\Omega}$ e vediamo sotto quali condizioni si può assicurare che nei punti di esso è verificata la condizione dell'esempio (12.1).

Supponiamo che Γ sia una varietà a $(m-2)$ dimensioni regolare e che, per ogni $y \in \Gamma$ e $\rho < \tilde{\rho}$, $\Omega(y, \rho)$ si possa trasformare, mediante un'applicazione bilipschitziana, in un sottoinsieme B_ρ dell'insieme:

$$x_m > 0, \; x_{m-1} > 0$$

in modo che Γ si muti nella varietà $x_m = 0$, $x_{m-1} = 0$, $\partial_1\Omega$ nell'iperpiano $x_m = 0$ e $\partial_2\Omega$ nell'iperpiano $x_{m-1} = 0$; supponiamo ancora che in B_ρ la porzione di iperpiano $x_m = 0$ si veda sotto un angolo positivo.

In tali condizioni, per il lemma (5.3), si ha, per un β opportuno:

$$\partial_1\Omega \cap I(y, \rho) \in \mathcal{F}(\beta, \Omega(y, \rho))$$

e quindi nei punti $y \in \Gamma$ è soddisfatta la condizione *i*) della definizione (3.1).

Mostriamo ora che tale condizione è soddisfatta anche se $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega$ ammette nei punti della varietà regolare Γ iperpiano tangente. Supporremo, senza ledere la generalità, che $\partial\Omega$ sia in un intorno di $y \in \Gamma$ l'iperpiano $x_m = 0$ e che Γ coincida con la varietà $x_m = 0$, $x_{m-1} = 0$ per modo che, in $\partial_1\Omega$, si abbia $x_{m-1} \geq 0$ e, in $\partial_2\Omega$, $x_{m-1} < 0$.

Supponiamo dapprima $m = 2$. Allora $\Omega(y, \rho)$ si trasforma mediante l'applicazione bilipschitziana $x = T(\xi)$

$$x_1 = \xi_1$$

$$x_2 = \begin{cases} \xi_2 & \text{se } \xi_1 \leq 0 \\ \xi_2 - \xi_1 & \text{se } \xi_1 > 0 \end{cases}$$

nell'insieme B_ρ, unione dei due insiemi:

$$\begin{cases} -\rho \leq \xi_1 \leq 0 \\ 0 \leq \xi_2 \leq \sqrt{\rho^2 - \xi_1^2} \end{cases}; \qquad \begin{cases} 0 \leq \xi_1 \leq \rho \\ \xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_1 + \sqrt{\rho^2 - \xi_1^2} \end{cases}$$

ove il segmento, immagine di $\partial_1\Omega$, è visto da tutti i punti di B_ρ, inB_ρ, sotto un angolo inferiormente limitato da $\frac{\pi}{8}$.

Nel caso di m qualunque si ragiona analogamente; $\Omega(y, \rho)$ viene trasformato, mediante l'applicazione bilipschitziana:

$$x_i = \xi_i; \qquad i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$x_m = \begin{cases} \xi_m & \text{se } \xi_{m-1} \leq 0 \\ \xi_m - \xi_{m-1} & \text{se } \xi_{m-1} \leq 0 \end{cases}$$

in un insieme B_ρ che è l'unione dei due insiemi:

$$B_\rho^{(1)} = \left\{ \xi_m \geq 0;\ \xi_{m-1} \leq 0;\ \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \leq \rho^2 \right\}$$

$$B_\rho^{(2)} = \left\{ \xi_{m-1} \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i^2 \leq \rho^2;\ \xi_{m-1} \leq \xi_m \leq \xi_{m-1} + \left(\rho^2 - \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

mentre $\partial_1\Omega \cap I(y, \rho)$ è trasformato nell'insieme A_ρ:

$$A_\rho \equiv \left\{ \xi_m = \xi_{m-1}, \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i^2 \leq \rho^2;\ \xi_{m-1} \geq 0 \right\}.$$

Mostriamo che da ogni punto di B_ρ si vede in B_ρ l'insieme A_ρ sotto un angolo inferiormente limitato da un numero positivo, indipendente da ρ. Ricordiamo, a questo proposito, che l'angolo sotto il quale si vede in R^m dal punto x_0 l'insieme A_ρ è dato da:

$$\frac{1}{|\Gamma(x_0,\ 1)|} \int_{A_\rho} \frac{1}{|x-y|^{m-1}} \cos \varphi d\sigma \tag{13.1}$$

ove φ è l'angolo che il vettore $x-y$ forma con la normale all'iperpiano che contiene A_ρ. Osserviamo ora che cos φ si annulla solo se x_0 appartiene all'iperpiano di A_ρ e che l'integrale (13.1) calcolato su due punti $x_0^{(1)}$ e $x_0^{(2)}$ la cui congiungente passa per un punto y di A_ρ assume valore minore in quel punto che dista di più da y. È di qui segue facilmente quanto asserito.

§ 5. Continuità delle soluzioni di alcuni problemi al contorno.

14. In questo numero accenniamo rapidamente a qualche applicazione allo studio dei problemi al contorno per equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico.

Teorema (14.1). - *Sia* Ω *un insieme aperto uniformemente ammissibile rispetto ad* $H_0^1(\Omega)$ (cfr. pag. 21); *siano* $a_{ij}(x)$ $[a_{ij} = a_{ji}]$, $b_i(x)$ *funzioni misurabili e limitate in* Ω *e sia soddisfatta la* (2.1) *e si abbia* $f_i(x) \in L^p(\Omega)$ *con* $p > m$ $(i = 0, 1, ..., m)$. *Se la funzione* $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ *soddisfa la relazione*:

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{ij}^{1...m} a_{ij}(x) D_i u D_j v + \sum_{i=1}^{m} b_i(x) D_i u \cdot v \right\} dx = \int_\Omega \left\{ f_0(x) v + \sum_{i=1}^{m} f_i(x) D_i v \right\} dx \tag{14.1}$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, *allora la funzione* $u(x)$ *è hölderiana in* $\overline{\Omega}$.

Il teorema discende immediatamente dal teorema (4.2).

Esso fornisce un teorema di regolarizzazione per le soluzioni (in senso debole) del problema di Dirichlet per l'equazione:

$$Au = -\sum_{j}^{1...m} D_j\Big(\sum_{i}^{1...m} a_{ij}(x)\, D_i u\Big) + \sum_{i}^{1...m} b_i(x) D_i u = \sum_{i}^{1...m} D_i f_i \tag{14.2}$$

con dati al contorno omogenei.

Dimostriamo ancora il teorema:

TEOREMA (14.2). - *Sia Ω un insieme aperto con frontiera localmente lipschitziana, siano $a_{ij}(x)$ $[a_{ij}(x) = a_{ji}(x)]$, $b_i(x)$, $c(x)$ funzioni misurabili e limitate in Ω e sia soddisfatta la* (2.1) *e inoltre si abbia:*

$$(14.3) \qquad 4\mu c(x) - \sum_{i=1}^{m} b_i^2(x) \geq \nu > 0, \ f_i(x) \in L^p(\Omega) \ \text{con} \ p > m.$$

Esiste allora una funzione $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ che soddisfa la relazione:

$$(14.4) \qquad \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j}^{1\ldots m} a_{ij}(x) D_i u \, D_j v + \sum_{i=1}^{m} b_i(x) D_i u \cdot v + c(x) uv \right\} dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} f_i(x) D_i v dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ e tale funzione $u(x)$ è hölderiana in $\overline{\Omega}$; di più esistono due costanti $\alpha (0 < \alpha < 1)$ e C dipendenti da Ω e dalle costanti μ e M che compaiono nella (2.1) *tali che si abbia:*

$$(14.5) \qquad |u|_\alpha \leq C \sum_{i=1}^{m} \| f_i \|_{L^p(\Omega)}$$

ove $|u|_\alpha$ indica il coefficiente di HÖLDER *della funzione $u(x)$ in $\overline{\Omega}$.*

Infatti se Ω ha una frontiera localmente lipschitziana, Ω è di tipo $(\mathfrak{S})$ e inoltre è uniformemente ammissibile rispetto ad $H_0^1(\Omega)$.

Per la proposizione (5.1) di [17] si deduce che $u(x)$ esiste ed è limitata in $\overline{\Omega}$. Ponendo allora $f_0(x) = - c(x)\, u(x)$, per il teorema (14.1), si deduce che $u(x)$ è hölderiana in $\overline{\Omega}$.

Il teorema del grafico chiuso permette poi di assicurare la validità della (14.5).

Dimostriamo ora:

TEOREMA (14.3). - *Nelle stesse ipotesi del teorema* (14.2), *se $\psi(x)$ è la traccia di una funzione $\bar{u}$ avente in Ω derivate prime (nel senso delle distribuzioni) in $L^p(\Omega)$, si deduce, per ogni funzione: $u(x) \in H^1(\Omega)$ avente traccia ψ su $\partial\Omega$ e soddisfacente la* (14.4) *per ogni funzione $v \in H_0^1(\Omega)$, che esistono due costanti $\alpha (0 < \alpha < 1)$ e C tali che:*

$$(14.6) \qquad |u|_\alpha \leq C \left\{ \sum_{i=1}^{m} \| f_i \|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{m} \| D_i \bar{u} \|_{L^p(\Omega)} + \| \bar{u} \|_{L^p(\Omega)} \right\}.$$

Tenendo conto di un risultato di E. GAGLIARDO [4], la maggiorazione precedente può essere sostituita dalla seguente:

$$| u |_\alpha \leq C \left\{ \sum_{i=1}^{m} \| f_i \|_{L^p(\Omega)} + |\!|\!| \psi |\!|\!| \right\}$$

ove:

$$|\!|\!| \psi |\!|\!| = \| \psi \|_{L^p(\partial\Omega)} + \left[\iint_{\partial\Omega \times \partial\Omega} \frac{| \psi(P) - \psi(Q) |^p}{\overline{PQ}^{m+p-2}} d_P\sigma \, d_Q\sigma \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Il teorema si deduce facilmente osservando che la funzione $w = u - \bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ soddisfa le ipotesi del teorema (14.2).

Relativamente al problema di NEUMANN ci limitiamo ad enunciare il seguente teorema, la dimostrazione del quale è analoga a quella del teorema (14.2).

TEOREMA (14.4). - *Sia* Ω *un insieme aperto che soddisfa le ipotesi dell'esempio* (11.1) *con* $\bar{\lambda} = \frac{1}{2}$ *e le funzioni* $a_{ij}(x)$ $[a_{ij}(x) = a_{ji}(x)]$, $c(x)$ *siano misurabili e limitate in* Ω *con* $c(x) \geq \nu > 0$ *mentre si abbia:* $g(x) \in L^p(\Omega)$ *con* $p > m$. *Esiste allora una funzione* $u(x) \in H^1(\Omega)$ *e hölderiana in* $\bar{\Omega}$ *che soddisfa la relazione:*

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j}^{1..m} a_{ij}(x) D_i u D_j v + c(x) u v \right\} dx = \int_\Omega g v dx \tag{14.7}$$

qualunque sia $v \in H^1(\Omega)$; *di più si ha; per* $\alpha (0 < \alpha < 1)$ *e* C *costanti opportune* (*dipendenti da* μ, M *e da* Ω):

$$| u |_\alpha \leq C \| g \|_{L^p(\Omega)}. \tag{14.8}$$

L'importanza dei teoremi precedenti consiste nel fatto che l'hölderianità della soluzione è assicurata in ipotesi molto generale sui coefficienti e sul dominio Ω. Nel teorema che ora enuncereremo relativo al problema misto la natura stessa del problema presenta discontinuità nei dati del problema anche nel caso che i coefficienti e, la frontiera di Ω e i termini noti siano molto regolari. Per interessanti esposizioni relative a questo problema rimando a [11] e a [10].

TEOREMA (14.5) - *Sia* $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$ *con* $\partial_1\Omega$ *localmente lipschitziana e posto* $\Gamma = \overline{\partial_1\Omega} \cap \overline{\partial_2\Omega}$ *supponiamo che siano verificate le condizioni del n.* 13. *Se sono soddisfatte inoltre le condizioni del teorema* (14.4) *esiste una funzione* $u(x) \in H^1(\Omega)$ *con traccia nulla su* $\partial_1\Omega$ *che soddisfa la* (14.7) *qualunque sia* $v \in H^1(\Omega)$ *e con traccia nulla su* $\partial_1\Omega$; $u(x)$ *è hölderiana in* $\bar{\Omega}$ *e soddisfa inoltre una limitazione del tipo* (14.8).

Questo risultato, per dati al contorno nulli, si collega con un pregevole risultato di C. MIRANDA [9], ma non richiede che le porzioni $\partial_1\Omega$ e $\partial_2\Omega$ si congiungano fra loro in modo particolare. Questo stesso risultato si collega anche ad un teorema enunciato da G. FICHERA [2] ([11]) precisando il carattere hölderiano della soluzione. ([12])

Aggiungiamo ancora che per il problema di trasmissione considerato in [16] (p. 4) *utilizzando il teorema* (4.2) si può concludere che, oltre quanto dimostrato in [16], le soluzioni sono hölderiane in $\bar{D}_s (1 = 1, 2)$.

Non ci occupiamo qui delle numerose applicazioni che il teorema (4.2) trova anche in problemi al contorno relativi ad equazioni non lineari; fra questi ricorderemo un problema relativo al moto di un fluido compressibile irrotazionale considerato da R. FINN e D. GILBARG [3] e l'estensione del teorema di DE GIORGI relativo all'analicità delle estremali di un integrale multiplo al caso più generale in cui sull'integrando compaiano sia la variabile indipendente che la funzione estremale oltre alle derivate di queste.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. DE GIORGI, *Sulla differenziabilità e l'analicità delle estremali degli integrali multipli regolari*, «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino», s. 3ª, to. 3, parte I, pp. 25-43 (1957).

[2] G. FICHERA, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari*, Atti del Congresso Internazionale sulle equazioni alle derivate parziali, Trieste, pp. 174-227 (1955).

[3] R. FINN e D. GILBARG, *Three-dimensional subsonic flows and asymptotic estimates for elliptic partial differential equation*, «Acta Math.», vol. 98, pp. 267-296 (1957).

[4] E. GAGLIARDO, *Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili*, «Rend. Semin. Mat. di Padova», vol. 27, pp. 284-305 (1957).

[5] C. B. MORREY, *On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations*, «Trans Am. Math. Soc.», vol. 43, pp. 126-166 (1938).

[6] C. B. MORREY, *Second order elliptic systems of differential equations*, in *Contributions to the theory of partial differential equations*, «Annals of Mathem.», Studies n. 33, Princeton (1954).

[7] C. B. MORREY, *Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity*, «Math. Zeitschr», vol. 72, pp. 146-164 (1959).

[8] C. MIRANDA, *Sui sistemi di tipo ellittico di equazioni lineari a derivate parziali del primo ordine in n variabili indipendenti*, «Mem. Acc. Naz. Lincei», s. 8, vol. 3, pp. 85-121 (1953).

([11]) Il risultato di FICHERA poggia sulla presunta risoluzione del problema di NEUMANN con frontiere che hanno iperpiano tangente discontinuo.

([12]) Si veda a proposito di questi teoremi anche [10] pp. 347-348. Il risultato da noi ottenuto rimuove in parte la congettura avanzata da MIRANDA che il raccordo di $\partial_1\Omega$ e di $\partial_2\Omega$ sia incompatibile con la ricerca di soluzioni hölderiane.

[9] C. MIRANDA, *Sul problema misto per le equazioni lineari ellittiche*, « Annali di Matem. » s. 4, vol. 39, pp. 279-303 (1955).

[10] C. MIRANDA, *Sù alcuni aspetti della teoria delle equazioni ellittiche*, « Bull. Soc. Math. France », 86, pp. 331-354 (1958).

[11] E. MAGENES, *Recenti sviluppi nella teoria dei problemi misti per le equazioni lineari ellittiche*, « Rend. Semin. Mat. e Fis. di Milano », vol. 27 (1955-56).

[12] E. MAGENES e G. STAMPACCHIA, *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*, « Annali Scuola Normale Sup. Pisa », s. 3 vol. 12, pp. 247-358 (1958).

[13] J. NASH, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, « Am. Journ. of Math ». pp. 931-954 (1958).

[14] L. NIRENBERG, *On non linear elliptic differential equations and Hölder continuity*, « Comm. on Pure and Applied Math. », vol 6, pp. 103-159 (1953).

[15] S. L. SOBOLEV, *Su un teorema di analisi funzionale* (in russo). « Matem. Sbornik », 4 (46), pp. 471-497 (1938).

[16] G. STAMPACCHIA, *Su un problema relativo alle equazioni di tipo ellittico del secondo ordine*, « Ricerche di matematica », vol. 5, pp. 3-24 (1956).

[17] G. STAMPACCHIA, *Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellittiche*, « Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa », s. 3, vol. 12, pp. 223-244 (1958).

[18] G. STAMPACCHIA, *Solutions continues de problèmes elliptiques à données discontinues*, « C. R. de la Acc. Sc. Paris » to. 250, février 1960.