Intégration analytique d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier, II.

Par MASAHIRO IWANO (à Tokyo, Japon).

Résumé. - *Nous avons formé dans le premier mémoire une solution formelle de* (28.1) *ordonnée suivant les puissances entières des solutions de* (E). *En annulant les* Z_j *qui correspondent aux polynomes* $\Lambda_j(x) = \int_\infty^x \Lambda_j(x) x^{-\sigma-1} dx$ *de degrés différents de* $\sigma_\nu^*(<\sigma_1^*)$, *nous obtenons une solution formelle* (F_ν). *Dans le chapitre III, nous cherchons la condition suffisante pour la convergence uniforme de la série formelle* (F_ν). *Dans le chapitre IV, ce résultat est étendu au cas où la solution formelle dépend essentiellement des polynomes* $\Lambda_j(x)$ *de divers degrés. Le dernier chapitre est consacré à l'extension du théorème d'existence de* M. M. HUKUHARA *qui joue un rôle important dans notre Mémoire.*

Introduction.

28. Hypothèses. Comme au mémoire précédent, nous traiterons le système d'équations différentielles non linéaires

$$x^{\sigma+1} \frac{dy_j}{dx} = \lambda_j(x) y_j + x^\sigma h_j(x, y_1, \dots, y_n) \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{28.1}$$

sous les hypothèses 1°, 2°, 3° que nous allons expliquer ci-dessous.

1°. *Les* $h_j(x, y_1, \dots, y_n)$ $(j = 1, \dots, n)$ *sont des fonctions holomorphes de* $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ *dans le domaine*

$$x \in \mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r], \; |y_1| \leqq \eta, \dots, |y_n| \leqq \eta \; (^1) \tag{28.2}$$

de sorte que les séries entières

$$h_j(x, y_1, \dots, y_n) = \lambda_{j\sigma} y_j + \varepsilon_j y_{j+1} + x \Sigma'' a_{jk_1 \dots k_n}(x) y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} \quad (j = 1, \dots, n)$$

convergent absolument et uniformément pour (28.2) *et les* $a_{jk_1 \dots k_n}(x)$ *sont des fonctions holomorphes et développables asymptotiquement en séries entières de* x

$$a_{jk_1 \dots k_n}(x) \approx \Sigma\, a_{jk_0 k_1 \dots k_n} x^{k_0}$$

---

(1) Quant à la définition du domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r]$, voir M. IWANO [1].

dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r]$. 2° *Les* $\lambda_j(x)$ $(j=1, \dots, n)$ *sont des polynomes de* x *de degrés au plus égaux à* $\sigma - 1$; *l'une au moins des valeurs* $\lambda_1(0), \dots, \lambda_n(0)$ *est différente de zéro et* $\lambda_{j\sigma}$ $(j=1, \dots, n)$ *sont des constantes*; *si l'on a à la fois* $\lambda_j(x) = \lambda_k(x)$, $\lambda_{j\sigma} \equiv \lambda_{k\sigma}$ (mod. 1), *on a* $\lambda_{j\sigma} = \lambda_{k\sigma}$; *d'autre part, l'inégalité* $\varepsilon_j \neq 0$ *entraîne* $\lambda_j(x) = \lambda_{j+1}(x)$ *et* $\lambda_{j\sigma} = \lambda_{j+1\sigma}$. En faisant, s'il est nécessaire, une transformation linéaire à coefficients constants, on peut donner à ε_j une valeur positive aussi petite que l'on veut.

Posons

$$\Lambda_j(x) = \int_\infty^x \frac{\lambda_j(x)}{x^{\sigma+1}}\,dx = -\frac{1}{\sigma}\frac{\lambda_{j0}}{x^\sigma} - \dots - \frac{\lambda_{j\sigma-1}}{x}. \tag{28.3}$$

Nous désignons $\lambda_{j\sigma-\sigma_j}$ $(\neq 0)$ par λ_j, σ_j étant le degré de $\Lambda_j(x)$ en x^{-1}.

3°. *Soit* (θ_0) *une direction quelconque non singulière* (²) *des* $\Lambda_j(x)$ *et des* $\Lambda_{jk}(x) = \Lambda_j(x) - \Lambda_k(x)$ $(j, k = 1, \dots, n)$ *se trouvant entre les directions* (Θ_-) et (Θ_+). *Nous supposons que l'on ait les inégalités*

$$\mathfrak{R}\Lambda_1(x) \leqq \dots \leqq \mathfrak{R}\Lambda_\alpha(x) < 0 < \mathfrak{R}\Lambda_{\gamma+1}(x) \leqq \dots \leqq \mathfrak{R}\Lambda_n(x) \tag{H$_1$}$$

pour $\arg x = \theta_0$, $|x| \leqq \delta_0$ *et*

$$\mathfrak{R}\lambda_{\alpha+1\sigma} \geqq \dots \geqq \mathfrak{R}\lambda_{\beta\sigma} > 0 \geqq \mathfrak{R}\lambda_{\beta+1\sigma} \geqq \dots \geqq \mathfrak{R}\lambda_{\gamma\sigma},\ \Lambda_j(x) \equiv 0 \qquad (j = \alpha+1, \dots, \gamma)$$

et que les degrés σ_j *des polynomes* $\Lambda_j(x)$ *satisfassent aux inégalités*

$$\sigma_1 = \dots = \sigma_{\alpha_1} > \sigma_{\alpha_1+1} = \dots = \sigma_{\alpha_2} > \dots > \sigma_{\alpha_{h-1}+1} = \dots = \sigma_{\alpha_h} \quad (\alpha_0 = 0,\ \alpha_h = \alpha). \tag{H$_2$}$$

Nous écrivons brièvement $\sigma_k^* = \sigma_{\alpha_{k-1}+1} = \dots = \sigma_{\alpha_k}$ $(k = 1, \dots, h)$.

29. Transformation formelle et Solution formelle. Faisons une transformation formelle

$$y_j \approx z_j + \Sigma\, P_{jp_0'p_1\dots p_n} x^{p_0'} z_1^{p_1} \dots z_n^{p_n} \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{29.1}$$

Soit

$$x^{\sigma+1}\frac{dz_j}{dx} \approx \lambda_j(x) z_j + x^\sigma(\lambda_{j\sigma} z_j + \varepsilon_j z_{j+1}) + \tag{29.2}$$
$$+ x^{\sigma+1}\Sigma''\, c_{jp_0p_1\dots p_n} x^{p_0} z_1^{p_1} \dots z_n^{p_n} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

le système transformé de (28.1). Nous avons déjà remarqué (³) que l'*on peut*

(²) Cette hypothèse entraîne qu'aucun des degrés des $\Lambda_j(x)$ et $\Lambda_{jk}(x)$ ne se diminue quand on y pose $\arg x = \theta_0$.

(³) Voir M. IWANO [1].

déterminer les coefficients $P_{jp_0'p_1\cdots p_n}$ *des séries* (29.1) *de manière que l'on ait*

$$c_{jp_0p_1\cdots p_n}=0 \qquad (p_0=p_0'-\sigma-1)$$

sauf le cas où l'on a

$$(\mathrm{R}_\sigma) \qquad \Lambda_j(x)\equiv p_1\Lambda_1(x)+\dots+p_n\Lambda_n(x),$$

$$(\mathrm{R}_0) \qquad \lambda_{j\sigma}=p_0+1+p_1\lambda_{1\sigma}+\dots+p_n\lambda_{n\sigma}$$

pour $p_1+\dots+p_n\geqq 2$, c'est-à-dire, que $c_{jp_0p_1\cdots p_n}\neq 0$ entraîne (R_σ) et (R_0). On voit, en vertu de (H_1) et de (H_2), que les $n-\beta$ dernières des équations (29.2) sont satisfaites si l'on y pose

$$(29.3) \qquad z_{\beta+1}=\dots=z_n=0.$$

Les β premières des équations (29.2) deviennent [4]

$$(\mathrm{E}) \qquad x^{\sigma+1}\frac{dz_j}{dx}=\lambda_j(x)z_j+x^\sigma(\lambda_{j\sigma}z_j+\varepsilon_j z_{j+1})+ \\ +x^{\sigma+1}\Sigma'' c_{jp_0p_1\cdots p_\beta}x^{p_0}z_1^{p_1}\cdots z_\beta^{p_\beta} \qquad (j=1,\dots,\beta),$$

où

$$c_{jp_0p_1\cdots p_\beta}=c_{jp_0p_1\cdots p_\beta 0\cdots 0}\,.$$

Si

$$c_{jp_0p_1\cdots p_\beta}\neq 0,\ p_1+\dots+p_\beta\geqq 2,\ j\leqq\beta,$$

on a nécessairement

$$(\mathrm{R}_\sigma') \qquad \Lambda_j(x)\equiv p_1\Lambda_1(x)+\dots+p_\beta\Lambda_\beta(x),$$

$$(\mathrm{R}_0') \qquad \lambda_{j\sigma}=p_0+1+p_1\lambda_{1\sigma}+\dots+p_\beta\lambda_{\beta\sigma}\,.$$

Pour que l'on ait (R_σ') et (R_0'), on doit avoir

$$p_1=p_2=\dots=p_j=0,$$

c'est ce que l'on voit facilement d'après (H_1) et (H_2). On peut donc résoudre par quadratures la dernière des équations (E) et puis l'avant-dernière et ainsi de suite. On peut écrire la solution générale $z_j=\varphi_j(x,\ C_\beta,\dots,\ C_j)$ $(j=1,\dots,\beta)$ de (E) sous la forme

$$(29.4) \qquad \varphi_j(x,\ c)=e^{\Lambda_j(x)}x^{\lambda_{j\sigma}}[c_j+(\text{polynome en } c_{j+1},\dots,\ c_\beta,\ \log x)] \qquad (j=1,\dots,\beta).$$

Désignons par $z_j=Z_j(x,\ x_0,\ z_j^0)$ la solution holomorphe de (E) répondant

(4) Les seconds membres de (E) sont des polynomes en x, $z_1,\dots,z_\beta$. On peut donc remplacer l'égalité formelle $\approx$ par la vraie égalité.

aux valeurs initiales x_0, z_j^0. Si $C_1^0, \dots, C_\beta^0$ sont les valeurs de $C_1, \dots, C_\beta$ définies par les relations

$$z_j^0 = \varphi_j(x_0, C_\beta^0, \dots, C_j^0) \qquad (j = 1, \dots, \beta),$$

on a

$$\varphi_j(x, C_\beta^0, \dots, C_j^0) \equiv Z_j(x, x_0, z_j^0) \qquad (j = 1, \dots, \beta).$$

En portant les expressions (29.3) *et* (29.4) *dans la transformation formelle* (29.1), *on obtient une solution formelle du système* (28.1) *contenant* β *constantes arbitraires de la forme*

$$\text{(F)} \qquad y_j \approx \delta_j Z_j + \Sigma'' P_{jp_1 \dots p_\beta}(x) Z_1^{p_1} \dots Z_\beta^{p_\beta} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

où δ_j *est égale à* 1 *ou* 0 *suivant que* $j = 1, \dots, \beta$ *ou non.*

Nous avons démontré [5] que *la solution formelle* (F) *qui s'obtient en y posant* $C_{\alpha_1+1} = \dots = C_\beta = 0$ *est convergente dans un domaine contenant la direction* (θ_0). Le problème que nous allons résoudre, dans le chapitre III, est le suivant: *chercher les conditions pour que la solution formelle* (F) *où l'on pose* $C_k = 0$ $(k \neq \alpha_{\nu-1} + 1, \dots, \alpha_\nu;\ \nu > 1)$ *soit convergente dans un domaine angulaire contenant la direction* (θ_0). Mais, on rencontre de nouveau une difficulté. Je me contenterai de donner seulement des conditions suffisantes.

Le chapitre IV est la partie la plus importante de ce Mémoire. Dans la section I, nous considérons une solution formelle $(F_{\nu\mu})$ qui dépend des Z_j correspondant aux $\Lambda_j(x)$ de degrés différents: σ_ν^* et σ_μ^* $(\sigma_\nu^* < \sigma_\mu^*)$ et cherchons une condition suffisante pour la convergence. Le résultat obtenu dans cette section peut être étendu sans peine au cas plus général. Nous énoncerons seulement le théorème 7 sans démonstration, sous certaines conditions suffisantes qui me semblent des conditions les moins restrictives pour la convergence de la solution formelle $(F_{h_m \dots h_1})$ dédendant des Z_j qui correspondent aux $\Lambda_j(x)$ de divers degrés: $\sigma_{h_m}^*, \dots, \sigma_{h_1}^*$. Cette condition est appelée l'hypothèse H*. Le théorème 8 donne des conditions suffisantes pour que l'hypothèse H* soit vérifiée. Dans la section III, nous donnons deux exemples pour lesquels les conditions du théorème 8 sont vérifiées.

Dans le dernier chapitre, nous donnons, l'explication de la ligne de la démonstration du théorème d'existence, énoncé sans démonstration au **n. 10** dans le premier mémoire, par la méthode de M. M. HUKUHARA, par laquelle il a établi le théorème d'existence pour le système des équations différentielles linéaires.

En terminant cette Introduction, l'auteur se fait un honneur d'exprimer ses remercîments les plus vifs à Monsieur MASUO HUKUHARA, Professeur à

(5) Voir M. IWANO [1].

l'Université de Tokyo, pour l'intérêt qu'il m'a témoigné et pour les conseils qu'il m'a donnés au cours de la préparation de ce Mémoire. L'auteur remercie aussi Monsieur YASUTAKA SIBUYA à l'Université d'Ochanomizu de la bienceillance sincère en me donnant de diverses suggestions profitables.

CHAPITRE III. - CONDITIONS POUR QUE LA SOLUTION FORMELLE (F_ν) SOIT CONVERGENTE.

30. La solution formelle (F_ν). La solution formelle, dont nous allons chercher la convergence, est de la forme [6]

$$(F_\nu) \qquad y_j \approx \delta_j Z_j + \Sigma'' P_{j\mathfrak{p}}(x) Z_{\alpha'}^{p_{\alpha'}} \dots Z_{\alpha''}^{p_{\alpha''}} \qquad (j=1,\dots,n),$$

$$(30.1) \qquad P_{j\mathfrak{p}}(x) \approx \Sigma' P_{jp_0\mathfrak{p}} x^{p_0}$$

$$\delta_j = \begin{cases} 0 & (j \neq \alpha', \dots, \alpha'') \\ 1 & (j = \alpha', \dots, \alpha'') \end{cases}$$

et

$$\mathfrak{p} = (p_{\alpha'}, \dots, p_{\alpha''}),$$

Σ'' désignant la sommation étendue à tous les arrangements tels que $p_{\alpha'} + \dots + p_{\alpha''} \geqq 2$.

31. Le domaine où les développements asymptotiques des coefficients $P_{j\mathfrak{p}}(x)$ sont valables. Nous ordonnons l'ensemble des arrangements $(j;\ \mathfrak{p})$ de la même manière qu'au **n. 18.**

Supposons déjà déterminés tous les coefficients $P_{j\mathfrak{q}}(x)$ tels que $q_{\alpha'} + \dots + q_{\alpha''} < N$ comme des fonctions holomorphes et développables asymptotiquement en séries (30.1) dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r]$, dont la définition sera précisée plus tard. Les $P_{j\mathfrak{p}}(x)$ seront calculés pour $p_{\alpha'} + \dots + p_{\alpha''} = N$ comme il suit. En portant dans (28.1) les séries (F_ν), on a les équations différentielles linéaires du premier ordre

$$(31.1) \qquad x^{\sigma+1} \frac{dP_{j\mathfrak{p}}}{dx} = (\lambda_{j\mathfrak{p}}(x) + \lambda_{j\mathfrak{p}\sigma} x^\sigma) P_{j\mathfrak{p}} + x^\sigma Q_{j\mathfrak{p}}(x),$$

où $Q_{j\mathfrak{p}}(x)$ est une forme linéaire des $a_{jk_1\dots k_n}(x)$ tels que $k_1 + \dots + k_n \leqq N$ dont les coefficients sont des polynomes des $P_{k\mathfrak{q}}(x)$ tels que $(k;\ \mathfrak{q}) \prec (j;\ \mathfrak{p})$,

---

(6) Pour simplifier l'écriture, nous écrivons α', α'' au lieu de $\alpha_{\nu-1}+1$, α_ν, de sorte que $\sum_{k=\alpha'}^{\alpha''}$, par exemple, désigne la sommation étendue à tous les entiers k tels que $\alpha_{\nu-1} <$ $< k \leqq \alpha_\nu$.

$\lambda_{j\mathfrak{g}}(x)$ et $\lambda_{j\mathfrak{g}\sigma}$ désignant respectivement $\lambda_j(x) - \sum_{k=\alpha'}^{\alpha''} p_k\lambda_k(x)$ et $\lambda_{j\sigma} - \sum_{k=\alpha'}^{\alpha''} p_k\lambda_{k\sigma}$. On peut donc considérer $Q_{j\mathfrak{g}}(x)$ comme une fonction connue qui est holomorphe et développable asymptotiquement en série entière de x pour $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r]$. Si donc on suppose le domaine $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r]$ propre [7] pour $\Lambda_{j\mathfrak{g}}(x) \equiv \Lambda_j(x) - - \sum_{k=\alpha'}^{\alpha''} p_k\Lambda_k(x)$, on peut définir [8] les $P_{j\mathfrak{g}}(x)$ de manière qu'ils soient développables asymptotiquement en les séries (30.1) dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r]$, en supposant, bien entendu, l'inclusion $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r] \subseteqq \mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r]$. Pour définir $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r]$, il faut distinguer trois cas suivants.

1° Pour les j tels que $\sigma_j > \sigma_\nu{}^*$, une région propre pour $\Lambda_j(x)$ l'est aussi pour $\Lambda_{j\mathfrak{g}}(x)$. Nous désignons par $\mathfrak{D}_1$ l'intersection des régions propres maximales pour $\Lambda_j(x)(\sigma_j > \sigma_\nu{}^*)$ contenant la direction (θ_0).

(i) Pour les j tels que $j \geqq \gamma + 1$, cette direction est contenue dans une des régions à partie réelle non négative pour $\Lambda_j(x)$. Par suite, la fonction $\exp \Lambda_{j\mathfrak{g}}(x)$ tend vers l'infini pour $\arg x = \theta_0$, $x \to 0$. Cependant,

(ii) pour les j tels que $j = 1, \ldots, \alpha' - 1$, on a aussi $\sigma_j > \sigma_\nu{}^*$, mais la direction (θ_0) est contenue dans une des régions à partie réelle négative pour $\Lambda_j(x)$.

2° Considérons les indices j tels que $\sigma_j \leqq \sigma_\nu{}^*$. Si $\sigma_j = \sigma_\nu{}^*$, on suppose de plus $p_{\alpha'} + \ldots + p_{\alpha''} > N_\nu$, N_ν désignant un entier positif suffisamment grand. Désignons par $\mathfrak{D}_2$ l'intersection des régions propres maximales pour $-\Lambda_{\alpha'}(x), \ldots, -\Lambda_{\alpha''}(x)$ contenant la direction (θ_0). Lorsque le point x s'approche indéfiniment de l'origine le long de la direction (θ_0), la fonction $\exp \Lambda_{j\mathfrak{g}}(x)$ tend vers l'infini et $\mathfrak{D}_2$ est propre pour $\Lambda_{j\mathfrak{g}}(x)$.

3° Considérons enfin le cas où l'on a $\sigma_j = \sigma_\nu{}^*$ et $p_{\alpha'} + \ldots + p_{\alpha''} \leqq N_\nu$. Désignons par $\mathfrak{D}_3$ l'intersection des régions propres maximales pour $\Lambda_{j\mathfrak{g}}(x)$ $(p_{\alpha'} + \ldots + p_{\alpha''} \leqq N_\nu)$ contenant la direction (θ_0).

Nous prenons pour $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r] = \mathfrak{D}$ une région fermée contenue dans l'intersection des régions $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r]$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$. La série (30.1) représentant la solution formelle de (31.1), il existe au moins une solution de (31.1) développable asymptotiquement en la série (30.1) dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r]$. Dans les cas 1° (i) et 2°, elle se détermine d'une seule manière par la formule

$$(31.2) \qquad P_{j\mathfrak{g}}(x) = e^{\Lambda_{j\mathfrak{g}}(x)} x^{\lambda_{j\mathfrak{g}\sigma}} \int_0^x x^{-1} Q_{j\mathfrak{g}}(x) e^{-\Lambda_{j\mathfrak{g}}(x)} x^{-\lambda_{j\mathfrak{g}\sigma}} dx.$$

(7) Pour la définition, voir n. 7.

(8) M. HUKUHARA [1].

Il en est de même du cas 1° (ii) et le cas 3°, si le domaine $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r]$ contient une direction suivant laquelle $\exp \Lambda_{j\mathfrak{G}}(x)$ tend vers l'infini. Dans les autres cas, on doit définir la solution $P_{j\mathfrak{G}}(x)$ de (31.1) par la formule

$$(31.3) \qquad P_{j\mathfrak{G}}(x) = e^{\Lambda_{j\mathfrak{G}}(x)} x^{\lambda_{j\mathfrak{G}\sigma}} \left[p^0_{j\mathfrak{G}} + \int_{x^0_{j\mathfrak{G}}}^{x} x^{-1} Q_{j\mathfrak{G}}(x) e^{\Lambda_{j\mathfrak{G}}(x)} x^{-\lambda_{j\mathfrak{G}\sigma}} dx \right],$$

$x^0_{j\mathfrak{G}}$ désignant un point convenable sur l'extrémité radiale (⁹) de $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r]$ et $p^0_{j\mathfrak{G}} e^{\Lambda_{j\mathfrak{G}}(x^0_{j\mathfrak{G}})} (x^0_{j\mathfrak{G}})^{\lambda_{j\mathfrak{G}\sigma}}$ une valeur quelconque assez petite en module d'après le résultat de M. M. HUKUHARA [1].

Il peut arriver qu'une infinité de $P_{j\mathfrak{G}}(x)$ ne se déterminent pas d'une seule manière. Il en sera ainsi certainement, si, dans le cas 1° (ii), il existe au moins un indice j tel que le domaine $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r]$ est contenu dans une des régions à partie réelle négative pour $\Lambda_j(x)$ (¹⁰). Cette circonstence nous empêche de démontrer la convergence de la solution formelle (F_ν). Nous introduirons donc l'hypothèse suivante:

Hypothèse A_ν. *Dans l'intersection de la région* $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r]$ *et des régions à parties réelles négatives pour* $\Lambda_{\alpha'}(x), \dots, \Lambda_{\alpha''}(x)$, *se trouve, pour chaque* j *tel que* $1 \leqq j < \alpha'$, *au moins une des directions singulières du polynome* $\Lambda_j(x)$.

On a alors la

Proposition. *Si l'hypothèse* A_ν *est remplie, on peut déterminer les* $P_{j\mathfrak{G}}(x)$ *de proche en proche d'une seule manière à partir d'un certain rang comme solution de* (31.1) *développable asymptotiquement en les séries* (30.1) *dans le domaine* $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r]$.

32. Remarques sur l'hypothèse A_ν.

1. Supposons que l'on n'ait pas l'hypothèse A_ν. Si l'intersection de la région $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}. \Theta^*_{\nu+}, r]$ (¹¹) et des régions à parties réelles négatives pour $\Lambda_{\alpha'}(x), \dots, \Lambda_{\mathfrak{A}}(x) (\alpha' \leqq \mathfrak{A} < \alpha'')$, par exemple, contient, pour chaque j tel que $1 \leqq j < \alpha'$, une des directions singulières du polynome $\Lambda_j(x)$, on pourra faire une discussion tout à fait analogue pour ce qui suit si l'on annule les constantes C_k pour $\mathfrak{A} < k \leqq \alpha''$.

(⁹) Pour la définition de l'extrémité radiale, voir n. 7.

(¹⁰) C'est-à-dire il ne se trouve dans $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r]$ aucune direction suivant laquelle la fonction $\exp \Lambda_{j\mathfrak{G}}(x)$ tend vers l'infini pour $x \to 0$.

(¹¹) $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r]$ est un domaine angulaire fermé quelconque contenu dans l'intersection de $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r]$ et des régions propres maximales pour $\Lambda_j(x) - \sum_{k=\alpha'}^{\mathfrak{A}} p_k \Lambda_k(x)$.

2. Au n. **31**, nous avons supposé $\nu < h+1$. Si l'on pose $C_1 = \dots = C_\alpha = 0$ dans (F), nous obtenons une solution formelle (F_{h+1}) contenant $\beta - \alpha$ constantes arbitraires:

$$(F_{h+1}) \qquad y_j \approx \delta_j Z_j + \Sigma'' P_{j\mathfrak{P}'}(x) Z_{\alpha+1}^{p_{\alpha+1}} \dots Z_\beta^{p_\beta} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

$$(32.1) \qquad P_{j\mathfrak{P}'}(x) \approx \Sigma' P_{jp_0\mathfrak{P}'} x^{p_0},$$

où δ_j est égal à 1 ou 0 suivant que $j = \alpha+1, \dots, \beta$ ou non et $\mathfrak{P}'$ désigne $(p_{\alpha+1}, \dots, p_\beta)$.

Le domaine $\mathfrak{D}[\Theta^*_{h+1-}, \Theta^*_{h+1+}, r]$, où les développements asymptotiques des coefficients $P_{j\mathfrak{P}'}(x)$ sont valables, est une région fermée quelconque qui est contenue dans l'intersection de la région $\mathfrak{D}[\Theta_-; \Theta_+, r]$ et des régions propres maximales, contenant la direction (θ_0), pour les polynomes $\Lambda_j(x)$ tels que $\sigma_j > 0$.

Puisqu'on a $\Lambda_j(x) \equiv 0$ et $\mathfrak{R}\lambda_{j\sigma} > 0$ pour $j = \alpha+1, \dots, \beta$, l'hypothèse A_ν peut être remplacée par la suivante:

Hypothèse A_{h+1}. *Entre les directions* (Θ^*_{h+1-}) *et* (Θ^*_{h+1+}), *il existe au moins une des directions singulières de* $\Lambda_j(x)$ *pour chaque* j *tel que* $1 \leqq j \leqq \alpha$.

33. Inégalités. Posons

$$P_{jN}(x, z) = P_{jN}(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''}) =$$
$$= \delta_j z_j + \Sigma''_N P_{j\mathfrak{P}}(x) z_{\alpha'}^{p_{\alpha'}} \dots z_{\alpha''}^{p_{\alpha''}} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

où Σ''_N désigne la sommation étendue à tous les arrangements $(p_{\alpha'}, \dots, p_{\alpha''})$ tels que $2 \leqq p_{\alpha'} + \dots + p_{\alpha''}$, $p_{\alpha'}\mu_{\alpha'} + \dots + p_{\alpha''}\mu_{\alpha''} < N$, $\mu_k = \mathfrak{R}(\lambda_k/(\delta'_0 e^{i\theta_0})^{\sigma_k})$. Si r_0 et η_0 sont des nombres assez petits, les fonctions $h_j(x, y_1, \dots, y_n)$ $(j = 1, \dots, n)$ sont holomorphes pour

$$x \in \mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r_0], \ |y_1| \leqq \eta_0, \dots, |y_n| \leqq \eta_0.$$

Puisque $P_{jN}(x, z)$ $(j = 1, \dots, n)$ sont des polynomes en $z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''}$ sans terme constant et que les coefficients $P_{j\mathfrak{P}}(x)$ sont des fonctions holomorphes de x dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r_0]$, on peut choisir les nombres positifs δ, ζ_0 de manière que l'on ait les inégalités

$$|P_{jN}(x, z)| + \delta < \eta_0 \qquad (j = 1, \dots, n)$$

pour

$$x \in \mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\nu+}, r_0], \quad \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |z_k|^{1/\mu_k} \leqq \zeta_0.$$

Si le système (28.1) se transforme en

$$(33.1) \qquad x^{\sigma+1}\frac{dv_j}{dx} = \lambda_j(x) v_j + x^\sigma g_j(x, Z_{\alpha'}, \dots, Z_{\alpha''}, v_1, \dots, v_n) \qquad (j = 1, \dots, n)$$

par le changement des variables

$$y_j = P_{jN}(x,\ Z) + v_j \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{33.2}$$

on aura, après un calcul élémentaire, les égalités

$$\begin{aligned} &x^\sigma g_j(x,\ z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''},\ v_1, \dots, v_n) = \\ &= \lambda_j(x)[P_{jN}(x,\ z) - \delta_j z_j] + x^\sigma h_j(x,\ P_{1N} + v_1, \dots, P_{nN} + v_n) - \\ &- x^{\sigma+1}\frac{\partial P_{jN}}{\partial x} - \left[\sum_{k=\alpha'}^{\alpha''} \delta_{jk} x^{\sigma+1}\frac{dz_k}{dx} - \delta_j\lambda_j(x)z_j\right] - \\ &- \sum_{k=\alpha'}^{\alpha''} x^{\sigma+1}\frac{dz_k}{dx}\left[\frac{\partial P_{jN}}{\partial z_k} - \delta_{jk}\right] \qquad (j = 1, \dots, n), \end{aligned} \tag{33.1'}$$

où les $x^{\sigma+1}\dfrac{dz_k}{dx}$ doivent être remplacés par les seconds membres de (E). Tous les termes dans les seconds membres de (33.1') contiennent x^σ comme facteur. Par suite, $g_j(x,\ z,\ v)$ $(j = 1, \dots, n)$ sont des fonctions holomorphes de $(x,\ z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''},\ v_1, \dots, v_n)$ pour

$$\begin{gathered} x \in \mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu-},\ \Theta^*_{\nu+},\ r_0], \quad \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |\, z_k\,|^{1/\mu_k} \leqq \zeta_0, \\ |\, v_1\,| \leqq \delta, \dots, |\, v_n\,| \leqq \delta. \end{gathered} \tag{33.3}$$

Si l'on pose

$$v_j = e^{\Lambda_j(x)} u_j \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{33.4}$$

le système (33.1) se change en

$$x\frac{du_j}{dx} = g_j(x,\ Z_{\alpha'}, \dots, Z_{\alpha''},\ e^{\Lambda_1(x)}u_1, \dots, e^{\Lambda_n(x)}u_n)e^{-\Lambda_j(x)} \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{33.5}$$

Les séries

$$v_j \approx \sum_{|\mu\mathfrak{p}| \geqq N} P_{j\mathfrak{p}}(x) Z_{\alpha'}^{p_{\alpha'}} \dots Z_{\alpha''}^{p_{\alpha''}} \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{$F_{\nu N}$}$$

représentant une solution formelle de (33.1), les termes indépendants de $v_1, \dots, v_n$ dans les seconds membres de (33.1) ne peuvent contenir aucun terme de degrés moindres que N par rapport aux $Z_{\alpha'}^{1/\mu_{\alpha'}}, \dots, Z_{\alpha''}^{1/\mu_{\alpha''}}$. On en conclut que l'on a les inégalités

$$|\, g_j(x,\ z,\ v)\,| \leqq A \sum_{k=1}^{n} |\, v_k\,| + B_N \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |\, z_k\,|^{N/\mu_k} \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{33.6}$$

pour (33.3), A désignant une constante indépendante de N et telle que $A > |\,\lambda_{j\sigma}\,| + \varepsilon_j$ $(j = 1, \dots, n)$.

34. Famille $\mathfrak{F}$ et Transformation $\mathfrak{T}$. Nous définirons au **n. 39** le domaine $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu-},\ \Delta_{\nu+},\ r_0)$, où la solution formelle (F_ν) est convergente. Il est, bien entendu, contenu dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_{\nu-}^*, \Theta_{\nu+}^*, r_0]$ où les coefficients $P_{j\mathfrak{g}}(x)$ sont holomorphes.

Nous considérons *la famille* $\mathfrak{F}$ *des systèmes de* n *fonctions* $\{\psi_1(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''}), \dots, \psi_n(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''})\}$ *satisfaisant à la condition suivante:*

Les $\psi_j(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''}) \equiv \psi_j(x, z)$ $(j = 1, \dots, n)$ *sont des fonctions holomorphes de* $(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''})$ *dans le domaine*

$$x \in \mathfrak{D}(\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r_0), \qquad \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |z_k|^{1/\mu_k} < \zeta_0 \tag{34.1}$$

et satisfont aux inégalités

$$|\psi_j(x, z)| \leqq K e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |z_k|^{N/\mu_k} \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{34.2}$$

K *étant un nombre positif tel que* $K\zeta_0^N < \delta$.

Puisque le système $\{0, \dots, 0\}$ appartient à $\mathfrak{F}$, la famille $\mathfrak{F}$ n'est pas vide. Posons

$$\Psi_j(x, x_0, z^0) \equiv \Psi_j(x, x_0, z^0_{\alpha'}, \dots, z^0_{\alpha''}) = \tag{34.3}$$

$$= \psi_j(x, Z_{\alpha'}(x, x_0, z^0_{\alpha'}), \dots, Z_{\alpha''}(x, x_0, z^0_{\alpha''})) \qquad (j = 1, \dots, n),$$

$$G_j(x, x_0, z^0) \equiv G_j(x, x_0, z^0_{\alpha'}, \dots, z^0_{\alpha''}) = \tag{34.4}$$

$$= g_j(x, Z_{\alpha'}, \dots, Z_{\alpha''}, e^{\Lambda_1(x)}\Psi_1, \dots, e^{\Lambda_n(x)}\Psi_n) \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Nous définissons les $\bar\psi_j(x_0, z^0) \equiv \bar\psi_j(x_0, z^0_{\alpha'}, \dots, z^0_{\alpha''})$ $(j = 1, \dots, n)$ par

$$\bar\psi_j(x_0, z^0) = \int_0^{x_0} x^{-1} G_j(x, x_0, z^0) e^{-\Lambda_j(x)} dx \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{34.5}$$

Nous démontrerons plus tard, en choisissant convenablement les chemins d'intégration Γ_{jx_0}, que, si (x_0, z^0) appartient au domaine (34.1), les intégrales (34.5) sont convergentes.

$\mathfrak{T}$ est alors la transformation qui fait correspondre au système des fonctions $\{\psi_1(x, z), \dots, \psi_n(x, z)\}$ le système des fonctions $\{\bar\psi_1(x, z), \dots, \bar\psi_n(x, z)\}$.

35. La démonstration de la convergence de la solution formelle (F_ν).

On voit immédiatement la proposition:

I. *La famille* $\mathfrak{F}$ *est fermée, convexe et normale.*

Nous démontrerons ensuite les propositions:

II. *Les intégrales* (34.5) *prises le long des chemins* Γ_{jx_0} *sont convergentes.*

III. *Le système* $\{\bar\psi_1(x, z), \dots, \bar\psi_n(x, z)\}$ *appartient à* $\mathfrak{F}$, *c'est-à-dire,*

III'. *On a les inégalités*

$$|\bar{\psi}_j(x, z)| \leqq Ke^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |z_k|^{N/\mu_k} \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{35.1}$$

et

III''. *Les fonctions* $\bar{\psi}_j(x, z)$ $(j = 1, \dots, n)$ *sont holomorphes dans le domaine* (34.1).

IV. *La transformation* $\mathfrak{T}$ *est continue.*

Alors on sait, d'après le théorème d'existence des points fixes (voir M. HUKUHARA [3]), qu'il existe un système de n fonctions tel que l'on ait

$$\{\psi_1(x, z), \dots, \psi_n(x, z)\} = \{\bar{\psi}_1(x, z), \dots, \bar{\psi}_n(x, z)\}.$$

Puis nous démontrerons la proposition suivante:

V. *Le système des fonctions* $\psi_j(x, Z(x, x_0, z^0))$ $(j = 1, \dots, n)$ *est une solution des équations* (33.5). Nous la désignons par $\bar{\varphi}_{jN}(x, Z)$ $(j = 1, \dots, n)$.

Alors, d'après les relations (33.2) et (33.4), le système des fonctions

$$\mathfrak{S}_{jN}(x, Z) = P_{jN}(x, Z) + \bar{\varphi}_{jN}(x, Z)e^{\Lambda_j(x)} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

est une solution des équations (28.1). Si $\mathfrak{S}_{jN}(x, Z)$ $(j = 1, \dots, n)$ sont indépendantes de N, la solution formelle (F_ν) est convergente. Donc, nous démontrerons la proposition suivante:

VI. *La solution du système des équations* (33.5) *telle que l'on ait*

$$u_j = O(e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k(x, x_0, z_k^0)|^{N/\mu_k}) \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{35.2}$$

est unique pourvu que N soit assez grand. Car, si $N' > N$, les expressions

$$u_j = e^{-\Lambda_j(x)}(P_{jN'}(x, Z) - P_{jN}(x, Z) + \bar{\varphi}_{jN'}(x, Z)e^{\Lambda_j(x)}) \qquad (j = 1, \dots, n)$$

représentent une solution des équations (33.5) satisfaisant aux relations (35.2) et l'on a

$$\mathfrak{S}_{jN'}(x, Z) = \mathfrak{S}_{jN}(x, Z) \qquad (j = 1, \dots, n).$$

36. Conditions imposées aux chemins d'intégration Γ_{jx_0}. Le point le plus délicat de la démonstration consiste à déterminer les chemins d'intégration Γ_{jx_0}. Nous les prenons de manière que l'on ait la condition suivante:

Soient x_0, $z^0_{\alpha'}, \dots, z^0_{\alpha''}$ *des valeurs quelconques appartenant au domaine* (34.1). *Les chemins* Γ_{jx_0} *sont contenus dans le domaine* $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r_0)$ *et toutes les fonctions* $x^{-1}G_j(x, x_0, z^0)e^{\Lambda_j(x)}$ *sont définies sur les chemins* Γ_{jx_0}.

Dans le cas le plus simple où l'on a étudié dans le mémoire précédent, nous avons pu déterminer le domaine $\mathfrak{D}(\Delta_-^*, \Delta_+^*, r_0)$ de manière que l'on puisse choisir les chemins Γ_{jx_0} satisfaisant à cette condition. Cependant, *dans le cas général, la possibilité de déterminer le domaine* $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r_0)$ *me semble douteuse si l'on ne suppose une certaine condition plus forte que la condition* (A_ν).

Nous désignons par ρ et φ les coordonées polaires du point variable x sur Γ_{jx_0}, par r et θ ceux du point x_0 et par s la longueur de l'arc de la courbe Γ_{jr_0} compté de l'origine jusqu'au point x.

On voit d'abord que la condition écrite ci-dessus est équivalente à la suivante:

Lorsque x *varie sur* Γ_{jx_0}, *les valeurs de* $(x, Z_{\alpha'}, \dots, Z_{\alpha''})$ *restent toujours dans le domaine* (34.1).

Pour que l'on ait cette condition, il suffit que l'*on puisse déterminer dans le domaine* $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r_0)$ *les chemins* Γ_{jx_0} *de manière que l'on ait à la fois les inégalités*

$$\frac{d}{ds}(\Re\Lambda_k(x)) \geqq \frac{|\lambda_k|}{\rho^{\sigma_k+1}} \sin \sigma_k \varepsilon \qquad (k = \alpha', \dots, \alpha'') \tag{36.1}$$

sur Γ_{jx_0}, ε *étant supposé assez petit.*

Si l'on a les inégalités (36.1), on voit que la valeur de $\max\limits_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{1/\mu_k}$ tend vers 0, en décroissant monotonement lorsque le point variable x sur Γ_{jx_0} tend vers l'origine.

D'autre part, (33,6), (34.2), (34.3) et (34.4) entraînent

$$|x^{-1}G_j(x, x_0, z^0)e^{-\Lambda_j(x)}| \leqq (nAK + B_N)|x|^{-1}e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

et la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{s_0} |x|^{-1}e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k} ds \tag{36.2}$$

entraîne II, s_0 désignant la longueur de la courbe Γ_{jx_0}. Pour les j tels que $\sigma_j \leqq \sigma_\nu^*$, la fonction à intégrer tend vers 0 lorsque x s'approche de l'origine le long de Γ_{jx_0}. Pour les j tels que $\sigma_j > \sigma_\nu^*$, le facteur $\exp(-\Re\Lambda_j(x))$ est prépondérant. Nous supposons donc en outre que l'*on a l'inégalité*

$$\frac{d}{ds}(-\Re\Lambda_j(x)) \geqq \frac{|\lambda_j|}{\rho^{\sigma_j+1}} \sin \sigma_j \varepsilon \tag{36.3}$$

sur Γ_{jx_0}. On voit alors que la fonction $\exp(-\Re\Lambda_j(x))$ tend vers 0, en décroissant monotonement lorsque x s'approche indéfiniment de l'origine le long de Γ_{jx_0}. La fonction à intégrer converge aussi vers 0 lorsque x tend vers 0 le long de Γ_{jx_0}. La condition II est donc remplie.

Pour démontrer III′, il suffit que l'on ait les inégalités

$$\text{(36.4)} \qquad \int_0^{s_0} (nAK + B_N) \, |x|^{-1} e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |z_k|^{N/\mu_k} ds \leqq$$

$$\leqq K e^{-\Re\Lambda_j(x_0)} \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k^0|^{N/\mu_k} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Les inégalités

$$\text{(36.4′)} \qquad (nAK + B_N)\rho^{-1} e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k} \leqq$$

$$\leqq K \frac{d}{ds}\Big(e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k}\Big)$$

sur Γ_{jx_0} entraînent (36.4).

Or, pour les j tels que $\sigma_j \leqq \sigma_\nu^*$, celles-ci découlent de (36.1). En effet, puisqu'on a

$$\frac{d}{ds}\Big(\max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k}\Big) = \frac{d}{ds} |Z_{k'}|^{N/\mu_{k'}}$$

pour un certain indice k' tel que $\alpha' \leqq k' \leqq \alpha''$, on a

$$\frac{d}{ds}\Big(\max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k}\Big) = \frac{N}{\mu_{k'}} \frac{d}{ds}\Big(\log |Z_{k'}|\Big) \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k} =$$

$$= \frac{N}{\mu_{k'}} \Big[\frac{1}{Z_{k'}} \frac{dZ_{k'}}{ds}\Big] \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k} >$$

$$> \frac{N}{2\mu_{k'}} \frac{d}{ds} (\Re\Lambda_{k'}(x)) \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k} \geqq \frac{N}{2} \min_{k=\alpha'}^{\alpha''} \Big\{\frac{1}{\mu_k} \frac{d}{ds} (\Re\Lambda_k(x))\Big\} \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k}.$$

On a donc

$$\frac{d}{ds}[e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k}] >$$

$$> e^{-\Re\Lambda_j(x)} \Big[\frac{N}{2} \min_{k=\alpha'}^{\alpha''} \Big\{\frac{1}{\mu_k} \frac{d}{ds} (\Re\Lambda_k(x))\Big\} - \frac{d}{ds} (\Re\Lambda_j(x))\Big] \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k},$$

d'où, puisque $\sigma_j \leqq \sigma_\nu^*$, on voit que cette dernière expression est plus grande que l'expression

$$\frac{N}{4} e^{-\Re\Lambda_j(x)} \min_{k=\alpha'}^{\alpha''} \Big\{\frac{1}{\mu_k} \frac{d}{ds} (\Re\Lambda_k(x))\Big\} \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k},$$

pourvu que N soit assez grand. Par suite, pour que l'on ait les inégalités (36.4), il suffit que l'on ait

$$\text{(36.5)} \qquad \rho^{-1}(nAK + B_N) < \frac{KN}{4} \min_{k=\alpha'}^{\alpha''} \Big\{\frac{1}{\mu_k} \frac{d}{ds} (\Re\Lambda_k(x))\Big\}.$$

En tenant compte de (36.1), l'inégalité (36.5) est évidemment satisfaite si l'on prend N et K suffisamment grands.

Puisque les inégalités (36.1) entraînent la croissance de $\max\limits_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{1/\mu_k}$ pour $\rho < r_0$, l'inégalité

$$\rho^{-1}(nAK + B_N) \leqq K \frac{d}{ds}(-\Re\Lambda_j(x))$$

entraîne (36.4'). Si $\sigma_j > \sigma_\nu^*$, cette inégalité est une conséquence immédiate de (36.3), si l'on prend r_0 suffisamment petit et K suffisamment grand.

En somme, on arrive à la conclusion:

Proposition. *Pour que l'on ait* II *et* III', *il suffit de déterminer un domaine* $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r_0)$ *et les chemins* Γ_{jx_0}, *pour un point quelconque* $x_0 \in \mathfrak{D}(\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r_0)$ *donné, de manière que, pour tous les* j, *on ait les inégalités* (36.1) *sur* Γ_{jx_0} *et que, pour les* j *tels que* $\sigma_j > \sigma_\nu^*$, *on ait en outre les inégalités* (36.3) *sur* Γ_{jx_0}.

37. Définition des chemins d'intégration Γ_{jx_0}. Soient (θ_{k+}) et (θ_{k-}) $(k = \alpha', \dots, \alpha'')$ les directions singulières de $\Lambda_k(x)$ $(k = \alpha', \dots, \alpha'')$ immédiatement supérieure et inférieure à la direction (θ_0) respectivement. (θ_{k+}) et (θ_{k-}) sont des directions singulières ascendante et descendante de $\Lambda_k(x)$ respectivement, car on a (H_1). Posons

$$\theta_{\nu-}^* = \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} \theta_{k-}, \quad \theta_{\nu+}^* = \min_{k=\alpha'}^{\alpha''} \theta_{k+}.$$

Pour les j tels que $\sigma_j \leqq \sigma_\nu^*$, nous définissons $\Delta_{j\nu}$ et $\Delta_{j\nu}'$ par

$$\Delta_{j\nu} = \max(\Theta_{\nu-}^*, \ \theta_{\nu-}^*), \quad \Delta_{j\nu}' = \min(\Theta_{\nu+}^*, \ \theta_{\nu+}^*).$$

Pour les j tels que $\sigma_j > \sigma_\nu^*$ et $j \geqq \gamma + 1$, nous désignons par (θ_{j+}) et (θ_{j-}) les directions singulières de $\Lambda_j(x)$ immédiatement inférieure et supérieure à la direction (θ_0) respectivement. (θ_{j+}) et (θ_{j-}) sont des directions singulières ascendante et descendante de $\Lambda_j(x)$ respectivement, car on a (H_1) et (H_2). Nous définissons alors $\Delta_{j\nu}$, $\Delta_{j\nu}'$ par

$$\Delta_{j\nu} = \max(\Theta_{\nu-}^*, \ \theta_{\nu-}^*, \ \theta_{j+}), \ \Delta_{j\nu}' = \min(\Theta_{\nu+}^*, \ \theta_{\nu+}^*, \ \theta_{j-}).$$

Considérons enfin les indices $j = 1, \dots, \alpha' - 1$. On a nécessairement $\sigma_j > \sigma_\nu^*$. Puisqu'on suppose l'hypothèse A_ν remplie, il existe au moins une direction singulière de $\Lambda_j(x)$ entre les directions $(\max(\Theta_{\nu-}^*, \ \theta_{\nu-}^*))$ et $(\min(\Theta_{\nu+}^*, \ \theta_{\nu+}^*))$ et puisqu'on suppose le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_{\nu-}^*, \Theta_{\nu+}^*, r_0]$ propre pour $\Lambda_j(x)$, il existe au plus deux directions singulières de $\Lambda_j(x)$ entre $(\max(\Theta_{\nu-}^*, \ \theta_{\nu-}^*))$ et $(\min(\Theta_{\nu+}^*, \ \theta_{\nu+}^*))$. S'il n'y en a qu'une, nous la désignons par (θ_{j-}) ou (θ_{j+}) suivant qu'elle est descendante ou ascendante. S'il y en a deux, l'une est descendante et l'autre ascendante. Nous les désignerons respectivement par (θ_{j-}), (θ_{j+}). Les quatre cas suivants seuls peuvent se présenter:

1° : $\theta_{j+} \leqq \max(\Theta^*_{\nu-}, \theta^*_{\nu-}) < \theta_{j-} < \theta_0$, où θ_{j+} est la direction singulière immédiatement inférieure à (θ_{j-});

2° : $\theta_0 < \theta_{j+} < \min(\Theta^*_{\nu+}, \theta^*_{\nu+}) \leqq \theta_{j-}$, où θ_{j-} est la direction singulière immédiatement supérieure à (θ_{j+});

3° : $\max(\Theta^*_{\nu-}, \theta^*_{\nu-}) < \theta_{j+} < \theta_{j-} < \theta_0$;

4° : $\theta_0 < \theta_{j+} < \theta_{j-} < \min(\Theta^*_{\nu+}, \theta^*_{\nu+})$.

Nous posons

$$\Delta_{j\nu} = \max(\Theta^*_{\nu-}, \theta^*_{\nu-}), \qquad \Delta'_{j\nu} = \theta_{j-}$$

dans le premier cas et

$$\Delta_{j\nu} = \theta_{j+} \quad , \qquad \Delta'_{j\nu} = \min(\Theta^*_{\nu+}, \theta^*_{\nu+})$$

dans le deuxième cas et

$$\Delta_{j\nu} = \theta_{j+} \quad , \qquad \Delta'_{j\nu} = \theta_{j-}$$

dans les deux derniers cas.

On voit immédiatement que, si N est suffisamment grand et si ε est suffisamment petit, la fonction $e^{-\Re\Delta_j(x)} \max\limits_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k}$ converge vers 0 exponentiellement, lorsque x s'approche de l'origine suivant une direction telle que $\Delta_{j\nu} + 2\varepsilon \leqq \varphi \leqq \Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon$.

Nous définirons au numéro suivant pour chaque j les angles $\Theta_{j\nu}$, $\Theta'_{j\nu}$ et la fonction $A_{j\nu}(\varphi)$ continue et satisfaisant à l'inégalité $\sin A_{j\nu}(\varphi) > 0$ dans les intervalles $[\Theta_{j\nu}, \Delta_{j\nu} + 2\varepsilon]$ et $[\Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon, \Theta'_{j\nu}]$.

Çela posé, les chemins Γ_{jx_0} seront définis comme il suit:

Si l'on a $\Delta_{j\nu} + 2\varepsilon \leqq \arg x_0 \leqq \Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon$, le chemin Γ_{jx_0} est le segment joignant x_0 à l'origine.

Si l'on a $\Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon < \arg x_0 \leqq \Theta'_{j\nu}$, le chemin Γ_{jx_0} est formé de la courbe

$$\rho = r \exp \int_\theta^\varphi \cot A_{j\nu}(\varphi) d\varphi\,, \qquad \Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon \leqq \varphi \leqq \theta \tag{37.1}$$

et du segment:

$$\rho \leqq r \exp \int_\theta^{\Delta'_{j\nu}-2\varepsilon} \cot A_{j\nu}(\varphi) d\varphi\,, \qquad \varphi = \Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon.$$

Si l'on a $\Theta_{j\nu} \leqq \arg x_0 < \Delta_{j\nu} + 2\varepsilon$, le chemin Γ_{jx_0} est formé de la courbe:

$$\rho = r \exp \int_\theta^\varphi \cot A_{j\nu}(\varphi) d\varphi, \qquad \theta \leqq \varphi \leqq \Delta_{j\nu} + 2\varepsilon \tag{37.1'}$$

et du segment:

$$\rho \leqq r \exp \int_\theta^{\Delta_{j\nu}+2\varepsilon} \cot A_{j\nu}(\varphi) d\varphi, \qquad \varphi = \Delta_{j\nu} + 2\varepsilon.$$

38. Définition de $\Theta_{j\nu}$, $\Theta'_{j\nu}$ et de $A_{j\nu}(\varphi)$. On a évidemment

$$\mathfrak{R}\Lambda_k(\rho e^{i\varphi}) = -\frac{|\lambda_k|}{\sigma_k} \frac{\cos(\omega_k - \sigma_k\varphi)}{\rho^{\sigma_k}} + o\left(\frac{1}{\rho^{\sigma_k}}\right), \tag{38.1}$$

où ω_k est l'argument du coefficient λ_k.

Sur la partie rectiligne de Γ_{jx_0}, on a $\Delta_{j\nu} + 2\varepsilon \leqq \varphi \leqq \Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon$, d'où l'on déduit $|\omega_k - \sigma_k\varphi| \leqq \pi/2 - 2\varepsilon\sigma_k$ pour $k = \alpha', \dots, \alpha''$, car $\theta^*_{\nu-} \leqq \Delta_{j\nu} < \Delta'_{j\nu} \leqq \theta^*_{\nu+}$. On a donc (36.1) pour tous les j. Pour les j tels que $\sigma_j > \dot{\sigma}_\nu^*$, on a en outre $|\omega_j - \sigma_j\varphi - \pi| \leqq \pi/2 - 2\varepsilon\sigma_j$, car on a $\theta_{j+} \leqq \Delta_{j\nu} < \Delta'_{j\nu} \leqq \theta_{j-}$, et puis (36.3).

Sur la partie curviligne de Γ_{jx_0}, ρ est une fonction de φ donnée par (37.1) ou (37.1'). En différentiant par φ la relation (38.1), nous obtenons

$$\frac{d}{d\varphi}\mathfrak{R}\Lambda_k(\rho e^{i\varphi}) = \frac{|\lambda_k|}{\rho^{\sigma_k}} \frac{\cos(A_{j\nu}(\varphi) + \omega_k - \sigma_k\varphi)}{\sin A_{j\nu}(\varphi)} + o\left(\frac{1}{\rho^{\sigma_k}}\right). \tag{38.2}$$

Or on a

$$ds = \rho d\varphi / \sin A_{j\nu}(\varphi) \quad \text{ou} \quad -\rho d\varphi / \sin A_{j\nu}(\varphi)$$

suivant que l'on a (37.1) ou (37.1'). La partie principale de $\dfrac{d}{ds}\mathfrak{R}\Lambda_k(\rho e^{i\varphi})$ est

$$\frac{|\lambda_k|}{\rho^{\sigma_k+1}} \cos(A_{j\nu}(\varphi) + \omega_k - \sigma_k\varphi) \qquad \text{pour (37.1)} \tag{38.3}$$

$$-\frac{|\lambda_k|}{\rho^{\sigma_k+1}} \cos(A_{j\nu}(\varphi) + \omega_k - \sigma_k\varphi) \qquad \text{pour (37.1').} \tag{38.3'}$$

Pour que l'on ait (36.1) sur la courbe (37.1), il suffit que l'on ait

$$\cos(A_{j\nu}(\varphi) + \omega_k - \sigma_k\varphi) \geqq \sin 2\sigma_\nu^*\varepsilon \qquad (k = \alpha', \dots, \alpha''). \tag{38.4}$$

Pour que l'on ait cette condition et $\sin A_{j\nu}(\varphi) > 0$, il suffit que l'on ait

$$\max(\sigma_\nu^*(\varphi - \theta^*_{\nu+} + 2\varepsilon),\ \sigma_\nu^*\varepsilon) \leqq A_{j\nu}(\varphi) \leqq \min(\sigma_\nu^*(\varphi - \theta^*_{\nu-} - 2\varepsilon),\ \pi - \sigma_\nu^*\varepsilon). \tag{38.5}$$

Il est clair que, si ε est suffisamment petit, on a

$$\sigma_\nu^*(\varphi - \theta^*_{\nu+} + 2\varepsilon) \leqq \sigma_\nu^*(\varphi - \theta^*_{\nu-} - 2\varepsilon).$$

Les inégalités

$$\sigma_\nu^*\varepsilon \leqq \sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu-}^* - 2\varepsilon), \qquad \sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu+}^* + 2\varepsilon) \leqq \pi - \sigma_\nu^*\varepsilon$$

sont équivalentes respectivement à

$$\theta_{\nu-}^* + 3\varepsilon \leqq \varphi, \qquad \varphi \leqq \theta_{\nu+}^* + \frac{\pi}{\sigma_\nu^*} - 3\varepsilon. \tag{38.5'}$$

Si l'on pose

$$\Theta'_{j\nu} = \theta_{\nu+}^* + \frac{\pi}{\sigma_\nu^*} - 3\varepsilon \tag{38.6}$$

pour $\sigma_j < \sigma_\nu^*$, on a

$$\theta_{\nu-}^* \leqq \Delta_{j\nu} < \Delta'_{j\nu} \leqq \theta_{\nu+}^* < \Theta'_{j\nu} \qquad (\sigma_j \leqq \sigma_\nu^*),$$

et puis (38.5') dans l'intervalle $[\Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon, \Theta'_{j\nu}]$, pourvu que ε soit un nombre positif assez petit. On définit $A_{j\nu}(\varphi)$ par

$$A_{j\nu}(\varphi) = \min\,(\sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu-}^* - 2\varepsilon),\ \pi - \sigma_\nu^*\varepsilon) \qquad (\sigma_j \leqq \sigma_\nu^*).$$

On a alors (38.5) et $\sin A_{j\nu}(\varphi) > 0$ dans l'intervalle $[\Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon, \Theta'_{j\nu}]$.

Considérons ensuite le cas où $\sigma_j > \sigma_\nu^*$. On doit vérifier (36.1) et (36.3). Sur la courbe (37.1), on a (36.3) en vertu de

$$-\cos\,(A_{j\nu}(\varphi) + \omega_j - \sigma_j\varphi) \geqq \sin 2\sigma_j\varepsilon\,. \tag{38.7}$$

Alors, d'après (38.4) et (38.7), la condition, à laquelle doit satisfaire la fonction $A_{j\nu}(\varphi)$, peut s'écrire

$$\begin{aligned}\max\,(\sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu+}^* + 2\varepsilon),\ \sigma_j(\varphi - \theta_{j-} + 2\varepsilon),\ \sigma_\nu^*\varepsilon) &\leqq A_{j\nu}(\varphi) \leqq \\ \leqq \min\,(\sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu-}^* - 2\varepsilon),\ \sigma_j(\varphi - \theta_{j+} - 2\varepsilon),\ \pi - \sigma_\nu^*\varepsilon).&\end{aligned} \tag{38.8}$$

Il est clair que, si ε est un nombre suffisamment petit, on a

$$\sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu+}^* + 2\varepsilon) \leqq \sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu-}^* - 2\varepsilon), \quad \sigma_j(\varphi - \theta_{j-} + 2\varepsilon) \leqq \sigma_j(\varphi - \theta_{j+} - 2\varepsilon).$$

Les inégalités

$$\sigma_\nu^*\varepsilon \leqq \sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu-}^* - 2\varepsilon), \qquad \sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu+}^* + 2\varepsilon) \leqq \pi - \sigma_\nu^*\varepsilon,$$

$$\sigma_\nu^*\varepsilon \leqq \sigma_j(\varphi - \theta_{j+} - 2\varepsilon), \qquad \sigma_j(\varphi - \theta_{j-} + 2\varepsilon) \leqq \pi - \sigma_\nu^*\varepsilon,$$

$$\sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu+}^* + 2\varepsilon) \leqq \sigma_j(\varphi - \theta_{j+} - 2\varepsilon), \quad \sigma_j(\varphi - \theta_{j-} + 2\varepsilon) \leqq \sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu-}^* - 2\varepsilon)$$

sont équivalentes respectivement à

$$\theta^*_{\nu-} + 3\varepsilon \leqq \varphi \quad , \quad \varphi \leqq \theta^*_{\nu+} + \frac{\pi}{\sigma_\nu^*} - 3\varepsilon,$$

$$\theta_{j+} + \varepsilon\left(2 + \frac{\sigma_\nu^*}{\sigma_j}\right) \leqq \varphi \quad , \quad \varphi \leqq \theta_{j-} + \frac{\pi}{\sigma_j} - \varepsilon\left(2 + \frac{\sigma_\nu^*}{\sigma_j}\right),$$

$$\frac{\sigma_j\theta_{j+} - \sigma_\nu^*\theta^*_{\nu+}}{\sigma_j - \sigma_\nu^*} + 2\varepsilon_j \leqq \varphi \quad , \quad \varphi \leqq \frac{\sigma_j\theta_{j-} - \sigma_\nu^*\theta^*_{\nu-}}{\sigma_j - \sigma_\nu^*} - 2\varepsilon_j,$$

où $\varepsilon_j = \varepsilon(\sigma_j + \sigma_\nu^*)/(\sigma_j - \sigma_\nu^*)$. Or on a

$$\frac{\sigma_j\theta_{j+} - \sigma_\nu^*\theta^*_{\nu+}}{\sigma_j - \sigma_\nu^*} < \theta_{j+} \quad , \quad \theta_{j-} < \frac{\sigma_j\theta_{j-} - \sigma_\nu^*\theta^*_{\nu-}}{\sigma_j - \sigma_\nu^*}, \tag{38.9}$$

car ces inégalités sont équivalentes respectivement à $\theta_{j+} < \theta^*_{\nu+}$, $\theta_{j-} > \theta^*_{\nu-}$. De plus, d'après la définition de $\Delta_{j\nu}$, $\Delta'_{j\nu}$, on a

$$\max(\theta^*_{\nu-},\ \theta_{j+}) \leqq \Delta_{j\nu} < \Delta'_{j\nu} \qquad \text{pour } \sigma_j > \sigma_\nu^*.$$

On en conclut que l'inégalité (38.8), où l'on supprime $A_{j\nu}(\varphi)$, est remplie dans l'intervalle $[\Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon,\ \Theta'_{j\nu}]$, si l'on pose

$$\Theta'_{j\nu} = \min\left\{\theta^*_{\nu+} + \frac{\pi}{\sigma_\nu^*} - 3\varepsilon,\ \theta_{j-} + \frac{\pi}{\sigma_j} - \varepsilon_{j\nu},\ \frac{\sigma_j\theta_{j-} - \sigma_\nu^*\theta^*_{\nu-}}{\sigma_j - \sigma_\nu^*} - 2\varepsilon_j\right\}, \tag{38.10}$$

$\varepsilon_{j\nu}$ désignant $\varepsilon(2 + \sigma_\nu^*/\sigma_j)$. Nous définissons $A_{j\nu}(\varphi)$ par

$$A_{j\nu}(\varphi) = \min(\sigma_\nu^*(\varphi - \theta^*_{\nu-} - 2\varepsilon),\ \sigma_j(\varphi - \theta_{j+} - 2\varepsilon),\ \pi - \sigma_\nu^*\varepsilon).$$

La fonction $A_{j\nu}(\varphi)$ est continue et satisfait à l'inégalité (38.8) et à l'inégalité $\sin A_{j\nu}(\varphi) > 0$ dans l'intervalle $[\Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon,\ \Theta'_{j\nu}]$, où l'on a évidemment $\Delta'_{j\nu} < \Theta'_{j\nu}$ par la définition.

Posons

$$\Theta_{j\nu} = \theta^*_{\nu-} - \frac{\pi}{\sigma_\nu^*} + 3\varepsilon\,, \tag{38.6'}$$

$$A_{j\nu}(\varphi) = \max(\sigma_\nu^*(\varphi - \theta^*_{\nu+} + 2\varepsilon) + \pi,\ \sigma_\nu^*\varepsilon)$$

pour $\sigma_j \leqq \sigma_\nu^*$ et

$$\Theta_{j\nu} = \max\left\{\theta^*_{\nu-} - \frac{\pi}{\sigma_\nu^*} + 3\varepsilon,\ \theta_{j+} - \frac{\pi}{\sigma_j} + \varepsilon_{j\nu},\ \frac{\sigma_j\theta_{j+} - \sigma_\nu^*\theta^*_{\nu+}}{\sigma_j - \sigma_\nu^*} + 2\varepsilon_j\right\}, \tag{38.10'}$$

$$A_{j\nu}(\varphi) = \max(\sigma_\nu^*(\varphi - \theta^*_{\nu+} + 2\varepsilon) + \pi,\ \sigma_j(\varphi - \theta_{j-} + 2\varepsilon) + \pi,\ \sigma_\nu^*\varepsilon)$$

pour $\sigma_j > \sigma_\nu^*$. Alors, on verra comme ci-dessus que l'on a (36.1) sur la courbe (37.1') pour $j = 1, \dots, n$ et en outre (36.3) sur la même courbe pour $\sigma_j > \sigma_\nu^*$.

39. Définition du domaine $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r_0)$. Soient $\varphi_{\nu+}$ et $\varphi_{\nu-}$ les racines des équations linéaires en φ:

$$\sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu-}^* - 2\varepsilon) = \pi/2 \quad \text{et} \quad \sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu+}^* + 2\varepsilon) + \pi = \pi/2$$

respectivement. On voit sans peine $\varphi_{\nu-} < \varphi_{\nu+}$. Nous définissons $A_\nu(\varphi)$ par

$$A_\nu(\varphi) = \begin{cases} \max(\sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu+}^* + 2\varepsilon) + \pi,\ \sigma_\nu^*\varepsilon) & \text{pour} \quad \varphi \leqq \varphi_{\nu-} \\ \pi/2 & \text{pour} \quad \varphi_{\nu-} \leqq \varphi \leqq \varphi_{\nu+} \\ \min(\sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu-}^* - 2\varepsilon),\ \pi - \sigma_\nu^*\varepsilon) & \text{pour} \quad \varphi_{\nu+} \leqq \varphi. \end{cases}$$

Alors la fonction $A_\nu(\varphi)$ est continue dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et satisfait aux inégalités

$$A_{j\nu}(\varphi) \leqq A_\nu(\varphi) \qquad \text{pour} \quad \Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon \leqq \varphi \leqq \Theta'_{j\nu},$$
$$A_{j\nu}(\varphi) \geqq A_\nu(\varphi) \qquad \text{pour} \quad \Theta_{j\nu} \leqq \varphi \leqq \Delta_{j\nu} + 2\varepsilon,$$

car on a

$$\sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu+}^* + 2\varepsilon) + \pi > \sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu-}^* - 2\varepsilon).$$

On a toujours

$$\Theta_{j\nu} \leqq \Delta_{j\nu} < \Delta'_{j\nu} \leqq \Theta'_{j\nu}.$$

Pour les j tels que $\sigma_j \leqq \sigma_\nu^*$ ou tels que $\sigma_j > \sigma_\nu^*$ et $j \geqq \gamma + 1$, on a de plus

$$\Theta_{j\nu} < \theta_0 < \Theta'_{j\nu}, \tag{39.1}$$

mais l'inégalité (39.1) *n'est pas toujours satisfaite pour $j = 1, \ldots, \alpha' - 1$.* Il est nécessaire que l'on ait (39.1) pour tous les j et qu'il existe dans le domaine $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r_0)$ les directions singulières de $\Lambda_j(x)$ pour les $j = 1, \ldots, \alpha' - 1$ déjà définies au n. 37. Donc on suppose l'hypothèse plus forte que l'hypothèse A_ν.

Hypothèse B_ν. *L'inégalité*

$$\Delta_{\nu-} \equiv \max\left(\max_{j=1}^{n} \Theta_{j\nu},\ \Theta_{\nu-}^*\right) < \theta_0 < \min\left(\min_{j=1}^{n} \Theta'_{j\nu},\ \Theta_{\nu+}^*\right) \equiv \Delta_{\nu+}$$

est remplie. De plus il se trouve entre les directions $(\max(\Delta_{\nu-}, \theta_{\nu-}^*))$ *et* $(\min(\Delta_{\nu+}, \theta_{\nu+}^*))$ *une des directions singulières $\theta_{j\pm}$ pour chaque j* $(= 1, \ldots, \alpha' - 1)$.

Cela posé, soit $\mathfrak{D}[\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r_0]$ le domaine

$$0 < \rho \leqq r' \exp \int_{\theta'}^{\varphi} \cot A_\nu(\varphi) d\varphi \qquad \text{pour} \quad \Delta_{\nu-} \leqq \varphi \leqq \Delta_{\nu+},$$

(r', θ') désignant une des ses extrémités radiales.

On voit que, si l'on définit la partie curviligne de Γ_{jx_0} par (37.1) ou (37.1'), les deux propositions II, III' au **n. 35** sont certainement remplies dans le domaine $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r_0)$.

40. Remarque sur le cas de $\sigma_\nu^* = 0$. On suppose que l'hypothèse $A_{h'}$ $(h' = h+1)$, citée au **n. 32**, soit remplie. *Aux inégalités* (36.1) *correspondent dans ce cas les inégalités*

$$\frac{d}{ds}|x^{\lambda_{k\sigma}}| \geqq |x^{\lambda_{k\sigma}}| \frac{|\lambda_{k\sigma}|}{\rho} \sin \varepsilon \qquad (k = \alpha+1, \dots, \beta). \tag{40.1}$$

On voit que, si les inégalités (40.1) sont satisfaites, la fonction $\max\limits_{k=\alpha+1}^{\beta} |Z_k|^{1/\mu_k}$ tend vers 0, en décroissant monotonement lorsque x s'approche de l'origine le long de Γ_{jx_0}, μ_k désignant $\Re\lambda_{k\sigma}$ $(k = \alpha+1, \dots, \beta)$.

Nous pouvons définir de même les directions $(\Delta_{jh'})$ et $(\Delta'_{jh'})$ et les angles $\Theta_{jh'}$ et $\Theta'_{jh'}$ pour tous les j et la fonction $A_{jh'}(\varphi)$ pour chaque j. Puis on définit la partie curviligne de Γ_{jx_0} par (37.1) ou (37.1'). Il n'est nullement nécessaire de considérer la partie curviligne de Γ_{jx_0} tel que $\sigma_j = 0$.

Sur la partie rectiligne de Γ_{jx_0}, on voit sans peine que, pour les k tels que $\alpha + 1 \leqq k \leqq \gamma$, on a (40.1) seulement et que, pour les j tels que $\sigma_j > 0$, on a (40.1) et (36.3), où l'on pose $j = 1, \dots, \alpha, \gamma+1, \dots, n$. Pour les j tels que $\sigma_j = 0$, on peut prendre $\Delta_{jh'}$ et $\Delta'_{jh'}$ respectivement pour $\Theta_{jh'}$ et $\Theta'_{jh'}$.

On verra que l'on a

$$\Theta_{jh'} < \theta_0 < \Theta'_{jh'} \tag{40.2}$$

pour $j = \alpha+1, \dots, n$. Pour que l'on ait cette inégalité aussi pour $j = 1, \dots, \alpha$, il suffit de supposer au lieu de l'hypothèse B_ν la suivante:

Hypothèse $B_{h'}$. *L'inégalité*

$$\Delta_{h'-} \equiv \max(\max_{j=1}^{n} \Theta_{jh'}, \Theta^*_{h'-}) < \theta_0 < \min(\min_{j=1}^{n} \Theta'_{jh'}, \Theta^*_{h'+}) \equiv \Delta_{h'+}$$

est satisfaite. De plus il existe entre les directions $(\Delta_{h'-})$ *et* $(\Delta_{h'+})$ *au moins une des directions singulières de* $\Lambda_j(x)$ *déjà définies dans l'hypothèse* $A_{h'}$ *pour chaque* j *tel que* $1 \leqq j \leqq \alpha$.

41. Démonstration des propositions III'', IV, V **et** VI. Nous appliquons au système (33.5) les lemmes 1, 2 énoncés au **n. 25** dans le premier mémoire, en prenant pour les équations (25.1), les solutions Z_k $(k = 1, \dots, m)$ de (25.1), les fonctions $H_j(x, x_0, z^0)$ $(j = 1, \dots, n)$ et les intégrales (25.3) respectivement les équations (E) qui s'obtiennent en y posant $z_1 = \dots = z_{\alpha'-1} = z_{\alpha''+1} = \dots$ $\dots = z_\beta = 0$, les solutions $Z_k(x, x_0, z_k^0)$ $(k = \alpha', \dots, \alpha'')$ des équations ainsi trouvées, les fonctions $x^{-1}G_j(x,\ x_0,\ z^0)\exp(-\Lambda_j(x))$ $(j=1,\dots,n)$ et les intégrales (34.5). Les relations (25.4) deviennent alors

$$\bar{\psi}_j(x_0,\ z_0)=\int_{\Gamma_{jx_0}} x^{-1}G_j(x,\ x_0,\ z^0)e^{-\Lambda_j(x)}dx= \tag{41.1}$$

$$=\int_{\Gamma_{jx'_0}} x^{-1}G_j(x,\ x_0,\ z^0)e^{-\Lambda_j(x)}dx+\int_{x'_0}^{x_0} x^{-1}G_j(x,\ x_0,\ z^0)e^{-\Lambda_j(x)}dx \qquad (j=1,\dots,n).$$

On suppose ces relations démontrées. On voit, d'après (36.4), que les intégrales (34.5) sont uniformément convergentes par rapport aux $z^0_{\alpha'},\dots,z^0_{\alpha''}$ pour les valeurs telles que $\max\limits_{k=\alpha'}^{\alpha''}|z_k{}^0|^{1/\mu_k}<\zeta$. Donc la proposition III″ est une conséquence immédiate du lemme 2.

Pour démontrer la proposition IV, il suffit de démontrer que la convergence uniforme de $\psi_j(x,\ z)$ $(j=1,\dots,n)$ entraîne celle des fonctions $\bar{\psi}_j(x,\ z)$ $(j=1,\dots,n)$.

Considérons un système de valeurs $(x_0,\ z^0)$ appartenant à un ensemble fermé dans (34.1). Si Γ_{jx_j} est la partie rectiligne de Γ_{jx_0}, le rapport $|x_0|/|x_j|$ est borné lorsque x_0 parcourt $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu-},\ \Delta_{\nu+},\ r_0)$. $|x_j|$ reste donc supérieur à un nombre positif δ. Si $x\in\Gamma_{jx_j}$ est au plus égal à δ' en module, on a

$$|\bar{\psi}_j(x,\ Z)|\leq\int_0^{\delta'}(nAK+B_N)\rho^{-1}e^{-\Re\Lambda_j(x)}\max_{k=\alpha'}^{\alpha''}|Z_k|^{N/\mu_k}d\rho$$

et on peut déterminer δ' indépendant de x_0 et de z^0 de manière que le second membre soit inférieur à un nombre positif donné à l'avance. Désignons par x_j' le point de Γ_{jx_0} tel que $|x_j'|=\delta'$ et par $z_k^{(j)}$ la valeur de Z_k pour $x=x_j'$. La longueur de la courbe Γ_{jx_0} étant bornée lorsque x_0 parcourt $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu-},\ \Delta_{\nu+},\ r_0)$, la convergence uniforme de $\psi_j(x,\ z)$ entraîne celle de $\bar{\psi}_j(x_0,\ z^0)-\bar{\psi}_j(x'_j,\ z^{(j)})$. La continuité de la transformation $\mathfrak{T}$ est donc démontrée.

Grâce aux relations (41.1) la proposition V est aussi une conséquence immédiate du lemme 1.

Par suite, pour que l'on ait les propositions III″ et V, il suffit de démontrer que l'on a les relations (41.1).

Soient ξ_{j0} et ξ'_{j0} les points d'intersection de la circonférence $|x|=\eta'$, de rayon assez petit, avec les chemins Γ_{jx_0} et $\Gamma_{jx'_0}$ respectivement. Pour que l'on ait (41.1), il suffit que l'on ait

$$\left|\int_{\xi_{j0}}^{\xi'_{j0}} x^{-1}G_j(x,\ x_0,\ z^0)e^{-\Lambda_j(x)}dx\right|\to 0 \qquad (j=1,\dots,n) \tag{41.2}$$

pour $\eta' \to 0$, le chemin d'intégration étant l'arc de la circonférence de centre 0 et de rayon η'. D'après les inégalités (33.6), on a

$$|x^{-1}G_j(x, x_0, z^0)e^{-\Lambda_j(x)}| \leq (nAK + B_N)\rho^{-1}e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k}$$

sur l'arc $\widehat{\xi_{j0}\xi'_{j0}}$. Cet arc est contenu dans le secteur: $\Delta_{j\nu} + 2\varepsilon \leq \varphi \leq \Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon$ dans lequel la fonction $e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{N/\mu_k}$ tend vers 0 pour $x \to 0$. On a donc les relations (41.2).

Démontrons enfin la proposition VI. Les dérivées partielles des seconds membres de (33.6) par rapport à $v_1, \dots, v_n$ ne surpassent pas en module une certaine constante A sur le segment $\arg x = \Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon$, $|x| \leq \delta'$, si δ' est assez petit. La solution telle que $u_j = o(|x|^A)$ pour $\arg x = \Delta'_{j\nu} - 2\varepsilon$, $x \to 0$, est donc unique. La condition (35.2) entraîne $u_j = o(|x|^A)$ quelque grand que soit A. La proposition VI est donc établie.

42. Conclusion. En résumant le résultat obtenu pour le système (28.1), on peut énoncer le

Théorème 3. *Si l'on suppose les hypothèses* (H_1), (H_2) *et* B_ν *remplies, on peut écrire une solution sous la forme* $y_j = \Phi_{j\nu}(x, Z_{\alpha'}, \dots, Z_{\alpha''}) \equiv \Phi_{j\nu}(x, Z)$ $(j = 1, \dots, n)$ *où les* $\Phi_{j\nu}(x, z)$ *sont des fonctions développables en les séries*

$$(\mathrm{F}_\nu) \qquad \Phi_{j\nu}(x, z) = \delta_j z_j + \Sigma'' P_{j\mathfrak{P}}(x) z_{\alpha'}^{p_{\alpha'}} \dots z_{\alpha''}^{p_{\alpha''}} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

convergentes pour les valeurs de $x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''}$ *telles que*

$$(34.1) \qquad x \in \mathfrak{D}(\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r_0), \ \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |z_k|^{1/\mu_k} < \zeta_0,$$

δ_j *étant égal à* 1 *ou* 0 *suivant que* $j = \alpha', \dots, \alpha''$ *ou non;* $z_j = 0$ $(j \neq \alpha', \dots, \alpha'')$ *et* $z_k = Z_k$ $(k = \alpha', \dots, \alpha'')$ *représentent la solution holomorphe de* (E) *telle que la valeur initiale* z_j^0 *en* x_0 *soit nulle pour* $j \neq \alpha', \dots, \alpha''$ *et les coefficients* $P_{j\mathfrak{P}}(x)$ *sont des fonctions holomorphes et développables asymptotiquement en les séries* (30.1) *dans le domaine* $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r_0)$.

Dans le cas de $\sigma_1 = \dots = \sigma_{\alpha'-1} = \sigma_\nu^*$, *l'hypothèse* B_ν *n'introduit aucune restriction nouvelle et on retrouve le résultat que nous avons obtenu dans le mémoire précédent.*

Dans le cas de $\sigma_\nu^* = 0$, d'après les remarques des n^os^ **32**, **40**, on peut énoncer le

Théorème 4. *Si l'on suppose les hypothèses* (H_1), (H_2) *et* $\mathrm{B}_{h'}$ *remplies, on peut écrire une solution sous la forme* $y_j = \Phi_{jh'}(x, Z_{\alpha+1}, \dots, Z_\beta) \equiv \Phi_{jh'}(x, Z')$ $(j = 1, \dots, n)$ *où les* $\Phi_{jh'}(x, z')$ *sont des fonctions développables en les séires*

$$(\mathrm{F}_{h'}) \qquad \Phi_{jh'}(x, z') = \delta_j z_j + \Sigma'' P_{j\mathfrak{P}'}(x) z_{\alpha+1}^{p_{\alpha+1}} \dots z_\beta^{p_\beta} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

convergentes pour les valeurs de x, $z_{\alpha+1}, \dots, z_\beta$ *telles que*

$$x \in \mathfrak{D}(\Delta_{h'-}, \Delta_{h'+}, r_0), \quad \max_{k=\alpha+1}^{\beta} |z_k|^{1/\mu_k} < \zeta_0,$$

δ_j *étant égal à* 1 *ou* 0 *suivant que* $j = \alpha + 1, \dots, \beta$ *ou non*; Z' *a la signification analogue que* Z *et les coefficients* $P_{j\mathfrak{g}'}(x)$ *sont des fonctions holomorphes et développables asymptotiquement en les séires* (32.1) *dans le domaine* $\mathfrak{D}(\Delta_{h'-}, \Delta_{h'+}, r_0)$.

43. Exemples. Dans ce numéro, nous donnons des exemples satisfaisant à l'hypothèse B_ν ou $B_{h'}$ et un exemple ne satisfaisant jamais à l'hypothèse A_ν.

1. Exemple satisfaisant à l'hypothèse B_ν. Soient $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_6(x)$ les polynomes définis par

$$\lambda_1(x) = e^{\frac{\pi i}{6}} x^2, \qquad \lambda_2(x) = e^{-\frac{\pi i}{3}} x^2, \qquad \lambda_3(x) = x^3,$$

$$\lambda_4(x) = e^{i\varepsilon'} x^3, \qquad \lambda_5(x) = e^{-i\varepsilon'} x^3, \quad \lambda_6(x) = -1,$$

où ε' est un nombre positif suffisamment petit. Nous considérons le système des équations diffèrentielles non linéaires

$$x^5 \frac{dy_j}{dx} = \lambda_j(x) y_j + x^4 h_j(x, y_1, \dots, y_6) \qquad (j = 1, \dots, 6),$$

où les $h_j(x, y_1, \dots, y_6)$ $(j = 1, \dots, 6)$ sont des fonctions holomorphes de $x, y_1, \dots, y_6$ pour

$$x \in \mathfrak{D}\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, r\right], \ |y_1| \leqq \eta, \dots, |y_n| \leqq \eta.$$

Nous démontrons que l'hypothèse B_ν est remplie en prenant $\theta_0 = 0$ et $\alpha' = 3$, $\alpha'' = 5$.

On a d'abord

$$\Lambda_1(x) = -\frac{e^{\frac{\pi i}{6}}}{2x^2}, \qquad \Lambda_2(x) = -\frac{e^{-\frac{\pi i}{3}}}{2x^2}, \qquad \Lambda_3(x) = -\frac{1}{x},$$

$$\Lambda_4(x) = -\frac{e^{i\varepsilon'}}{x}, \qquad \Lambda_5(x) = -\frac{e^{-i\varepsilon'}}{x}, \qquad \Lambda_6(x) = \frac{1}{4x^4}.$$

On a donc évidemment l'inégalité

$$\Re\Lambda_1(x) < \Re\Lambda_2(x) < \Re\Lambda_3(x) < \Re\Lambda_4(x) = \Re\Lambda_5(x) < 0 < \Re\Lambda_6(x)$$

sur le segment: $\arg x = 0$, $|x| \leqq \delta'_0$. On a alors

$$\theta_{1+} = -\frac{2\pi}{3}, \quad \theta_{2+} = \frac{\pi}{12}, \quad \theta_{6+} = -\frac{\pi}{8},$$

$$\theta_{1-} = -\frac{\pi}{6}, \quad \theta_{2-} = \frac{7\pi}{12}, \quad \theta_{6-} = \frac{\pi}{8},$$

$$\theta_{3+} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{4+} = \frac{\pi}{2} + \varepsilon', \quad \theta_{5+} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon',$$

$$\theta_{3-} = -\frac{\pi}{2}, \quad \theta_{4-} = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon', \quad \theta_{5-} = -\frac{\pi}{2} - \varepsilon'.$$

Ces relations entraînent

$$\theta^*_{\nu-} = \max_{k=3}^{5} \theta_{k-} = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon', \quad \theta^*_{\nu+} = \min_{k=3}^{5} \theta_{k+} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon'$$

et on voit que la région propre maximale pour $\Lambda_j(x)$ $(j = 1, 2, 6)$ contenant la direction (0) est égale à l'intersection des $\mathfrak{D}\left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}, r\right)$, $\mathfrak{D}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{2}, r\right)$, $\mathfrak{D}\left(-\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}, r\right)$, c'est-à-dire à $\mathfrak{D}\left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, r\right)$ et que la région propre maximale pour $\Lambda_j(x) - \sum_{k=3}^{5} p_k \Lambda_k(x)$ $(j = 3, 4, 5)$ contient au moin le domaine $\mathfrak{D}\left(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon', \frac{\pi}{2} - \varepsilon', r\right)$. On a donc

$$\mathfrak{D}[\theta^*_{\nu-}, \theta^*_{\nu+}, r] = \mathfrak{D}\left[-\frac{3\pi}{8} + \delta', \frac{\pi}{3} - \delta', r\right],$$

δ' étant un nombre positif suffisamment petit.

D'après la définition de (θ_{1-}) et de (θ_{2+}), on voit facilement que l'hypothèse A_ν est satisfaite. Les angles $\Delta_{j\nu}$ et $\Delta'_{j\nu}$ sont définis par

$$\Delta_{1\nu} = -\frac{3\pi}{8} + \delta', \ \Delta_{2\nu} = \frac{\pi}{12}, \quad \Delta_{3\nu} = \Delta_{4\nu} = \Delta_{5\nu} = -\frac{3\pi}{8} + \delta', \ \Delta_{6\nu} = -\frac{\pi}{8},$$

$$\Delta'_{1\nu} = -\frac{\pi}{6}, \quad \Delta'_{2\nu} = \frac{\pi}{3} - \delta', \ \Delta'_{3\nu} = \Delta'_{4\nu} = \Delta'_{5\nu} = \frac{\pi}{3} - \delta', \ \Delta'_{6\nu} = \frac{\pi}{8}.$$

Si l'on calcule les valeurs de $\Theta'_{j\nu}$ et de $\Theta_{j\nu}$ par les formules (38.6), (38.10) et (38.6'), (38.10') respectivement, on obtient sans peine

$$\Theta_{1\nu} = -\frac{7\pi}{6} + \varepsilon' + \frac{5\varepsilon}{2}, \ \Theta_{2\nu} = -\frac{\pi}{3} + \varepsilon' + 6\varepsilon, \ \Theta_{3\nu} = \Theta_{4\nu} = \Theta_{5\nu} = -\frac{3\pi}{2} +$$

$$+ \varepsilon' + 3\varepsilon, \ \Theta_{6\nu} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\varepsilon'}{3} + \frac{10\varepsilon}{3}, \ \Theta'_{1\nu} = \frac{\pi}{6} - \varepsilon' - 6\varepsilon, \ \Theta'_{2\nu} = \frac{13\pi}{12} - \frac{5\varepsilon}{2},$$

$$\Theta'_{3\nu} = \Theta'_{4\nu} = \Theta'_{5\nu} = \frac{3\pi}{2} - \varepsilon' - 3\varepsilon, \ \Theta'_{6\nu} = \frac{\pi}{3} - \frac{\varepsilon'}{3} - \frac{10\varepsilon}{3}.$$

Par suite on a les inégalités

$$\Theta_{j\nu} < 0 < \Theta'_{j\nu} \qquad (j = 1, \dots, 6).$$

On peut alors poser

$$\Delta_{\nu-} = -\frac{\pi}{3} + \varepsilon' + 6\varepsilon, \qquad \Delta_{\nu+} = \frac{\pi}{6} - \varepsilon' - 6\varepsilon.$$

Les directions singulières (θ_{1-}) et (θ_{2+}) se trouvent évidemment entre les directions $(\max(\Delta_{\nu-}, \theta^*_{\nu-})) = \left(\max\left(-\frac{\pi}{3} + \varepsilon' + 6\varepsilon, -\frac{\pi}{2} + \varepsilon'\right)\right)$ et $(\min(\Delta_{\nu+}, \theta^*_{\nu+})) = \left(\min\left(\frac{\pi}{6} - \varepsilon' - 6\varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon'\right)\right)$. L'hypothèse B_ν est donc vérifiée.

2. Exemple satisfaisant à l'hypothèse $B_{h'}$. Nous considérons le système des équations différentielles non linéaires

$$x^5 \frac{dy_j}{dx} = \lambda_j(x) y_j + x^4 h_j(x, y_1, \dots, y_6) \qquad (j = 1, \dots, 6)$$

dont les seconds membres sont holomorphes pour

$$x \in \mathfrak{D}\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, r\right], \ |y_1| \leqq \eta, \dots, |y_6| \leqq \eta.$$

Ici, $\lambda_j(x)$ $(j = 1, \dots, 6)$ sont des polynomes de x de sorte que les intégrales $\int_\infty^x \lambda_j(x) x^{-5} dx$, des polynomes de x^{-1} de degrés 4 au plus, s'écrivent sous la forme

$$\Lambda_1(x) = -\frac{e^{-\frac{5\pi i}{16}}}{3x^3}, \qquad \Lambda_2(x) = -\frac{e^{\frac{3\pi i}{8}}}{2x^2}, \qquad \Lambda_6(x) = \frac{1}{4x^4},$$

$$\Lambda_3(x) \equiv \Lambda_4(x) \equiv \Lambda_5(x) \equiv 0$$

et λ_{j4} $(j = 3, 4, 5)$ sont des constantes définies par

$$\lambda_{34} = 4, \qquad \lambda_{44} = 3e^{i\varepsilon'}, \qquad \lambda_{54} = 2e^{-i\varepsilon'},$$

ε' étant un nombre positif suffisamment petit.

Alors on a l'inégalité

$$\Re\Lambda_1(x) < \Re\Lambda_2(x) < 0 < \Re\Lambda_6(x)$$

pour $\arg x = 0$, $|x| \leqq \delta_0'$ et

$$\Re\lambda_{34} > \Re\lambda_{44} > \Re\lambda_{54} > 0 \qquad \text{et} \qquad \Lambda_j(x) \equiv 0 \qquad (j = 3, 4, 5),$$

δ_0' étant supposé assez petit.

On a alors

$$\theta_{1+}=\frac{\pi}{16}\quad,\quad \theta_{2+}=-\frac{9\pi}{16}\quad,\quad \theta_{6+}=-\frac{\pi}{8},$$

$$\theta_{1-}=\frac{19\pi}{48}\quad,\quad \theta_{2-}=-\frac{\pi}{16}\quad,\quad \theta_{6-}=\frac{\pi}{8},$$

d'où l'on déduit que la région propre maximale pour $\Lambda_1(x)$, $\Lambda_2(x)$, $\Lambda_6(x)$ contenant la direction (0) est égale à l'intersection des régions propres maximales

$$\mathfrak{D}\left(\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{3},\ \frac{19\pi}{48}+\frac{\pi}{3},\ r\right),\ \mathfrak{D}\left(-\frac{9\pi}{16}-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2},\ r\right),\ \mathfrak{D}\left(-\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4},\ r\right),$$

c'est-à-dire à $\mathfrak{D}\left(-\frac{13\pi}{48},\ \frac{3\pi}{8},\ r\right)$. La région $\mathfrak{D}[\Theta^*_{h'-},\ \Theta^*_{h'+},\ r]$ est donc égale à $\mathfrak{D}\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4},\ r\right]$.

L'hypothèse $A_{h'}$ est donc remplie en prenant $\theta_0=0$ et $\alpha+1=3$, $\beta=5$.

Nous définissons $\Delta_{jh'}$ et $\Delta'_{jh'}$ par

$$\Delta_{1h'}=\frac{\pi}{16}\quad,\quad \Delta_{2h'}=-\frac{\pi}{4}\quad,\quad \Delta_{3h'}=\Delta_{4h'}=\Delta_{5h'}=-\frac{\pi}{4}\quad,\quad \Delta_{6h'}=-\frac{\pi}{8},$$

$$\Delta'_{1h'}=\frac{\pi}{4}\quad,\quad \Delta'_{2h'}=-\frac{\pi}{16}\quad,\quad \Delta'_{3h'}=\Delta'_{4h'}=\Delta'_{5h'}=\frac{\pi}{4}\quad,\quad \Delta'_{6h'}=\frac{\pi}{8}.$$

Si l'on calcule les valeurs de Θ'_{jh} et de $\Theta_{jh'}$ par les formules correspondant à (38.6), (38.10) et à (38.6'), (38.10') respectivement, on a sans peine

$$\Theta_{1h'}=-\frac{5\pi}{48}+\frac{\varepsilon'}{3}+\frac{8\varepsilon}{3},\ \Theta'_{1h'}=\frac{9\pi}{16}-\frac{\varepsilon'}{3}-\frac{8\varepsilon}{3};\ \Theta_{2h'}=-\frac{13\pi}{16}+\frac{\varepsilon'}{2}+3\varepsilon,$$

$$\Theta'_{2h'}=\frac{3\pi}{16}-\frac{\varepsilon'}{2}-3\varepsilon;\ \Theta_{3h'}=\Theta_{4h'}=\Theta_{5h'}=-\frac{\pi}{4},\ \Theta'_{3h'}=\Theta'_{4h'}=\Theta'_{5h'}=\frac{\pi}{4};$$

$$\Theta_{6h'}=-\frac{\pi}{4}+\frac{\varepsilon'}{4}+\frac{5\varepsilon}{2},\ \Theta'_{6h'}=\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon'}{4}-\frac{5\varepsilon}{2},$$

d'où l'on déduit $\Theta_{jh}<0<\Theta'_{jh'}$ pour tous les j. On a de plus

$$\Delta_{h'-}=\max\left(\max_{j=1}^{6}\Theta_{jh'},\ \Theta^*_{h'-}\right)=\max\left(-\frac{5\pi}{48}+\frac{\varepsilon'}{3}+\frac{8\varepsilon}{3},\ -\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{5\pi}{48}+\frac{\varepsilon'}{3}+\frac{8\varepsilon}{3},$$

$$\Delta_{h'+}=\min\left(\min_{j=1}^{6}\Theta'_{jh'},\ \Theta^*_{h'+}\right)=\min\left(\frac{3\pi}{16}-\frac{\varepsilon'}{2}-3\varepsilon,\ \frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{16}-\frac{\varepsilon'}{2}-3\varepsilon.$$

Par suite les directions (θ_{1+}) et (θ_{2-}) se trouvent entre les directions $\left(-\frac{5\pi}{48}+\right.$ $\left.+\frac{\varepsilon'}{3}+\frac{8\varepsilon}{3}\right)$ et $\left(\frac{3\pi}{16}-\frac{\varepsilon'}{2}-3\varepsilon\right)$. L'hypothèse $B_{h'}$ est donc vérifiée, en prenant $\theta_0=0$ et $\alpha+1=3$, $\beta=5$.

3. *Nous donnons un exemple pour lequel l'hypothèse* A_ν *n'est jamais remplie.* Nous considérons les polynomes $\Lambda_1(x)$, $\Lambda_2(x), \dots, \Lambda_8(x)$ en x^{-1} définis par

$$\Lambda_1(x)=-\frac{i}{x^6},\quad \Lambda_2(x)=\frac{i}{x^6},\quad \Lambda_3(x)=-\frac{1}{x^3},\quad \Lambda_4(x)=\frac{1}{x^3},$$
$$\Lambda_5(x)=\frac{i}{x^2},\quad \Lambda_6(x)=-\frac{i}{x^2},\quad \Lambda_7(x)=\frac{1}{x},\quad \Lambda_8(x)=-\frac{1}{x}.$$

Nous démontrons que l'hypothèse A_ν n'est jamais remplie si l'on prend $\alpha'=7$, $\alpha''=8$.

Calculons d'abord les directions singulières des $\Lambda_j(x)$ $(j=1,\dots,8)$ se trouvant entre les directions $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. On a sans peine

$$\begin{array}{llll}
\theta_{1+}=\frac{2\pi}{3}+\frac{k\pi}{3} & (k=0,1,2), & \theta_{1-}=\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{3} & (k=0,1,2,3);\\
\theta_{2+}=\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{3} & (k=0,1,2,3), & \theta_{2-}=\frac{2\pi}{3}+\frac{k\pi}{3} & (k=0,1,2)\quad;\\
\theta_{3+}=\frac{5\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} & (k=0,1), & \theta_{3-}=\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3} & (k=0,1)\quad;\\
\theta_{4+}=\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3} & (k=0,1), & \theta_{4-}=\frac{5\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} & (k=0,1)\quad;\\
\theta_{5+}=\pi & , & \theta_{5-}=\frac{\pi}{2}+k\pi & (k=0,1)\quad;\\
\theta_{6+}=\frac{\pi}{2}+k\pi & (k=0,1), & \theta_{6-}=\pi & ;\\
\theta_{7+}=\frac{3\pi}{2} & , & \theta_{7-}=\frac{\pi}{2} & ;\\
\theta_{8+}=\frac{\pi}{2} & , & \theta_{8-}=\frac{3\pi}{2} & .
\end{array}$$

On peut alors trouver un système des régions $\mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},r\right)$, $\mathfrak{D}_2=$ $=\mathfrak{D}\left(\frac{2\pi}{3},\pi,r\right)$, $\mathfrak{D}_3=\mathfrak{D}\left(\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},r\right)$, $\mathfrak{D}_4=\mathfrak{D}\left(\pi,\frac{4\pi}{3},r\right)$, $\mathfrak{D}_5=\mathfrak{D}\left(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2},r\right)$ qui sont des régions propres pour les polynomes $\Lambda_1(x)$, $\Lambda_2(x),\dots,\Lambda_6(x)$ contenues dans $\mathfrak{D}\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},r\right)$.

On voit sans peine que les domaines $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{D}_5$ sont contenus respectivement dans une des régions à partie réelle négative pour $(\Lambda_3(x), \Lambda_5(x))$, $\Lambda_5(x)$, $\Lambda_4(x)$, $\Lambda_6(x)$, $(\Lambda_3(x), \Lambda_6(x))$.

Soit (θ_0) une direction quelconque se trouvant entre les directions $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. On voit alors que l'intersection de la région propre maximale pour $\Lambda_j(x)$ $(\sigma_j > 1)$ contenant la direction (θ_0) et de la région à partie réelle négative pour $\Lambda_7(x)$ contenant la direction (θ_0), c'est-à-dire de $\mathfrak{D}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, r\right)$, est contenue dans une des régions à partie réelle négative pour certain polynome $\Lambda_k(x)$ tel que $\sigma_k > 1$. Ce fait montre que l'hypothèse A_ν et à fortiori l'hypothèse B_ν n'est jamais remplie pour $\alpha' = \mathfrak{A} = 7$.

Il en sera de même si l'on permute les indices 7 et 8.

Par suite, *comme un exemple pour lequel l'hypothèse* A_ν *n'est pas remplie, il suffit de considérer le système des équations*

$$x^7 \frac{dy_j}{dx} = \lambda_j(x) y_j + x^6 h_j(x, y_1, \dots, y_8) \qquad (j = 1, \dots, 8),$$

où $\lambda_j(x) = x^7 \dfrac{d}{dx} \Lambda_j(x)$. *Pour ces équations, nous ne pouvons dire rien sur la convergence de la solution formelle contenant* Z_7 *ou* Z_8.

44. Complément. Pour que la solution formelle (F_ν) soit convergente, il suffit que les six propositions au **n. 35** soient valables. Pour cela, on a vu qu'il suffit de déterminer un domaine $\mathfrak{D}^*$ tel que, pour un point quelconque $x_0 \in \mathfrak{D}^*$ donné, on puisse choisir dans $\mathfrak{D}^*$ les chemins Γ_{jx_0} de manière que, pour les j tels que $\sigma_j \leqq \sigma_\nu^*$, on ait (36.1) seulement sur Γ_{jx_0} et que, pour les j tels que $\sigma_j > \sigma_\nu^*$, on ait (36.1) et (36.3) sur Γ_{jx_0}. Or, pour les j tels que $\sigma_j > \sigma_\nu^*$, les inégalités (36.3) jouent un rôle essentiel, mais les inégalités (36.1) ne sont pas nécessaires. En effet, il suffit que les valeurs de $(x, Z_{\alpha'}, \dots, Z_{\alpha''})$ restent toujours dans le domaine (34.1) lorsque x est sur les chemins Γ_{jx_0} de manière que l'on ait (36.3) sur Γ_{jx_0}.

On peut donc énoncer le théorème suivant un peu plus général que le théorème 3.

Théorème 5. *Soit* $\mathfrak{D}[\Theta_{\nu-}^*, \Theta_{\nu+}^*, r]$ *le domaine fermé quelconque qui est contenu dans l'intersection du domaine* $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r]$ *où les seconds membres des équations données sont holomorphes, et des régions propres maximales pour* $\Lambda_j(x)$ $(\sigma_j > \sigma_\nu^*)$ *et* $\Lambda_{j\mathfrak{F}}(x) \equiv \Lambda_j(x) - \sum_{k=\alpha'}^{\alpha''} p_k \Lambda_k(x)$ $(\sigma_j = \sigma_\nu^*)$ *contenant la direction* (θ_0).

Supposons qu'il existe dans $\mathfrak{D}[\Theta_{\nu-}^*, \Theta_{\nu+}^*, r]$ *un domaine* $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}(\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r_0)$ *satisfaisant à la condition suivante:*

Pour un point quelconque $x_0 \in \mathfrak{D}^*$ *donné, on peut choisir les chemins* Γ_{jx_0}

contenus dans $\mathfrak{D}^*$ *de manière que, pour les j tels que* $\sigma_j \leqq \sigma_\nu^*$, *on ait* (36.1) *seulement sur* Γ_{jx_0} *et que, pour les j tels que* $\sigma_j > \sigma_\nu^*$, *on ait* (36.3) *sur* Γ_{jx_0} *et les valeurs de* $(x, Z_{\alpha'}, \dots, Z_{\alpha''})$ *restent toujours dans le domaine* (34.1) *pour* $x \in \Gamma_{jx_0}$.

Alors la solution formelle (F_ν) *est convergente dans le domaine* (34.1).

Dans le cas de $\sigma_\nu^* = 0$ aussi, on peut énoncer un théorème analogue.

CHAPITRE IV. - CONVERGENCE DE LA SOLUTION FORMELLE.

I. Solution formelle $(\mathrm{F}_{\nu\mu})$.

45. La solution formelle $(\mathrm{F}_{\nu\mu})$. Nous considérons les solutions formelles (F_ν) et (F_μ) [12] où $\sigma_\nu^* < \sigma_\mu^*$. Dans le chapitre précédent, nous avons démontré que, si les hypothèses B_ν et B_μ sont remplies, les solutions formelles (F_ν) et (F_μ) sont convergentes respectivement dans les domaines $\mathfrak{D}_\nu^*$ et $\mathfrak{D}_\mu^*$ définis par [13]

$$\mathfrak{D}_\nu^*: \quad x \in \mathfrak{D}(\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r_0), \quad \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{1/\mu_k} < \zeta_0,$$

$$\mathfrak{D}_\mu^*: \quad x \in \mathfrak{D}(\Delta_{\mu-}, \Delta_{\mu+}, r_0), \quad \max_{k=\beta'}^{\beta''} |Z_k|^{1/\mu_k} < \zeta_0.$$

Dans cette section, nous cherchons la condition suffisante pour que la solution formelle $(\mathrm{F}_{\nu\mu})$, que l'on obtient en posant $C_k = 0$ $(k \neq \alpha', \dots, \alpha'', \beta', \dots, \beta''; 1 \leqq \mu < \nu \leqq h')$ dans (F), soit convergente. Naturellement, nous supposons les hypothèses B_ν et B_μ remplies. La solution formelle $(\mathrm{F}_{\nu\mu})$ dépend des Z_j auxquelles correspondent les polynomes $\Lambda_j(x)$ de degrés σ_ν^* et σ_μ^* et peut s'écrire sous la forme [14]

$$(\mathrm{F}_{\nu\mu}) \qquad y_j \approx \Phi_{j\nu}(x, Z_{\alpha'}, \dots, Z_{\alpha''}) + \delta_j Z_j + \Sigma' P_{j\mathfrak{P}'}(x, Z_{\alpha'}, \dots, Z_{\alpha''}) Z_{\beta'}^{p_{\beta'}} \dots Z_{\beta''}^{p_{\beta''}},$$

$$(45.1) \qquad P_{j\mathfrak{P}'}(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''}) \approx \Sigma'' P_{j\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}(x) z_{\alpha'}^{p_{\alpha'}} \dots z_{\alpha''}^{p_{\alpha''}},$$

$$(45.2) \qquad P_{j\mathfrak{P}'}(x) \approx \Sigma' P_{jp_0\mathfrak{P}\mathfrak{P}'} x^{p_0},$$

où

$$\mathfrak{P} = (p_{\alpha'}, \dots, p_{\alpha''}), \quad \mathfrak{P}' = (p_{\beta'}, \dots, p_{\beta''}),$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & (j = \beta', \dots, \beta''), \\ 0 & (j \neq \beta', \dots, \beta''). \end{cases}$$

---

[12] La solution formelle (F_μ) s'obtient en posant $C_j = 0$ pour $j \neq \alpha_{\mu-1}+1, \dots, \alpha_\mu$ dans (F).

[13] Pour simplifier l'écriture, nous écrivons $\beta', \dots, \beta''$ au lieu de $\alpha_{\mu-1}+1, \dots, \alpha_\mu$, de sorte que, $\sum_{k=\beta'}^{\beta''}$, par exemple, désigne la sommation étendue à tous les entiers k tels que $\alpha_{\mu-1} < k \leqq \alpha_\mu$.

[14] Les fonctions $\Phi_{j\nu}(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''})$ sont les mêmes qui se trouvent dans le théorème 3 ou le théorème 4 suivant que $\sigma_\nu^* > 0$ ou $\sigma_\nu^* = 0$. Par suite, elles sont holomorphes.

46. Le domaine où les développements asymptotiques des coefficients $P_{j\mathfrak{F}'}(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''})$ sont valables. Nous ordonnons l'ensemble des arrangements $(j;\ \mathfrak{F}')$ de la même manière qu'au **n. 18.**

Supposons déjà déterminés tous les coefficients $P_{j\mathfrak{F}'}(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''})$ pour $|\mathfrak{F}'| < N$ comme des fonctions holomorphes et développables en séires (45.1) convergentes pour

$$(46.1) \qquad x \in \mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu\mu-},\ \Theta^*_{\nu\mu+},\ r], \qquad \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |z_k|^{1/\mu_k} < \zeta_0'(\leqq \zeta_0).$$

La définition de ce domaine sera précisée plus tard. Les $P_{j\mathfrak{F}'}(x, Z_{\alpha'}, \dots, Z_{\alpha'})$ seront calculés pour $|\mathfrak{F}'| = N$ comme il suit: Si l'on porte dans (28.1) les séries $(\mathrm{F}_{\nu\mu})$, on a les équations différentielles linéaires du premier ordre

$$(46.2) \qquad x^{\sigma+1}\frac{dP_{j\mathfrak{F}'}}{dx} = (\lambda_{j\mathfrak{F}'}(x) + \lambda_{j\mathfrak{F}'\sigma}x^{\sigma})P_{j\mathfrak{F}'} + x^{\sigma}Q_{j\mathfrak{F}'}(x, Z_{\alpha'}, \dots, Z_{\alpha''}),$$

où $\lambda_{j\mathfrak{F}'}(x) = \lambda_j(x) - \sum_{k=\beta'}^{\beta''} p_k\lambda_k(x)$, $\lambda_{j\mathfrak{F}'\sigma} = \lambda_{j\sigma} - \sum_{k=\beta'}^{\beta''} p_k\lambda_{k\sigma}$ et $Q_{j\mathfrak{F}'}(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''})$ est une forme linéaire des $a_{jk_1\dots k_n}(x)$ $(k_1 + \dots + k_n \leqq N)$ dont les coefficients sont des polynomes des $P_{k\mathfrak{Q}'}(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''})$ $((k;\ \mathfrak{Q}') < (j;\ \mathfrak{F}'))$. On peut donc considérer $Q_{j\mathfrak{F}'}(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''})$ comme une fonction connue qui est holomorphe et développable en série de $z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''}$, convergente pour (46.1), dont les coefficients sont des fonctions développables asymptotiquement en séries entières de x dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu\mu-},\ \Theta^*_{\nu\mu+},\ r]$.

Si l'on pose

$$(46.3) \qquad P_{j\mathfrak{F}'} = e^{\Lambda_{j\mathfrak{F}'}(x)}x^{\lambda_{j\mathfrak{F}'\sigma}}V_{j\mathfrak{F}'},$$

les équations (46.2) se changent en

$$(46.4) \qquad x\frac{dV_{j\mathfrak{F}'}}{dx} = Q_{j\mathfrak{F}'}(x,\ x_0,\ z^0_{\alpha'}, \dots, z^0_{\alpha''})e^{-\Lambda_{j\mathfrak{F}'}(x)}x^{-\lambda_{j\mathfrak{F}'\sigma}},$$

où $Q_{j\mathfrak{F}'}(x,\ x_0,\ z^0_{\alpha'}, \dots, z^0_{\alpha''}) \equiv Q_{j\mathfrak{F}'}(x,\ Z_{\alpha'}(x,\ x_0,\ z^0_{\alpha'}), \dots,\ Z_{\alpha''}(x,\ x_0,\ z^0_{\alpha''}))$, x_0 et $z^0_{\alpha'}, \dots, z^0_{\alpha''}$ étant des points quelconques appartenant à (46.1). Supposons donc que le domaine $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu\mu-},\ \Theta^*_{\nu\mu+},\ r]$ est une région propre pour

$$\Lambda_{j\mathfrak{F}'}(x) = \int_{\infty}^{x}\frac{\lambda_{j\mathfrak{F}'}(x)}{x^{\sigma+1}}dx = -\frac{1}{\sigma_{j\mathfrak{F}'}}\frac{\lambda_{j\mathfrak{F}'}}{x^{\sigma_{j\mathfrak{F}'}}} + o\left(\frac{1}{x^{\sigma_{j\mathfrak{F}'}}}\right)$$

et contenue dans $\mathfrak{D}[\Delta_{\nu-},\ \Delta_{\nu+},\ r]$ telle que l'on puisse choisir toujours un chemin $\Gamma_{j\mathfrak{F}'x_0}$ contenu dans $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu\mu-},\ \Theta^*_{\nu\mu+},\ r]$ joignant x_0 à un point frontière de $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu\mu-}, \Theta^*_{\nu\mu+}, r]$ et satisfaisant aux conditions suivantes: 1° *on a l'inégalité*

$$\frac{d}{ds}(-\Re\Lambda_{j\mathfrak{F}'}(x)) \geqq \frac{|\lambda_{j\mathfrak{F}'}|}{\rho^{\sigma_{j\mathfrak{F}'}+1}} \sin \sigma_{j\mathfrak{F}'}\varepsilon$$

sur $\Gamma_{j\mathfrak{F}'x_0}$; 2° *la valeur de la fonction* $\max\limits_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{1/\mu_k} / \max\limits_{k=\alpha'}^{\alpha''} |z_k^0|^{1/\mu_k}$ *ne surpasse pas un certain nombre fini lorsque* x *est sur* $\Gamma_{j\mathfrak{F}'x_0}$. On peut alors définir la fonction $V_{j\mathfrak{F}'}(x, x_0, z^0_{\alpha'}, \dots, z^0_{\alpha''}) \equiv V_{j\mathfrak{F}'}(x, x_0, z^0)$ de manière que la fonction $P_{j\mathfrak{F}'}(x, z)$ définie par

$$P_{j\mathfrak{F}'}(x, z) = \tilde{V}_{j\mathfrak{F}'}(x, z) e^{\Lambda_{j\mathfrak{F}'}(x)} x^{\lambda_{j\mathfrak{F}'\sigma}},$$

$$\tilde{V}_{j\mathfrak{F}'}(x, z) = V_{j\mathfrak{F}'}(x, x, z)$$

soit développable asymptotiquement en série (45.1) dans $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu\mu-}, \Theta^*_{\nu\mu+}, r]$. Pour définir le chemin $\Gamma_{j\mathfrak{F}'x_0}$, il faut distinguer trois cas:

(1) Pour les j tels que $\sigma_j > \sigma_\mu^*$, une région propre pour $\Lambda_j(x)$ l'est aussi pour $\Lambda_{j\mathfrak{F}'}(x)$. De plus l'intersection du domaine $\mathfrak{D}[\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r]$ et de la région propre pour $\Lambda_{j\mathfrak{F}'}(x)$ contient la direction singulière (θ_{j-}) ou (θ_{j+}) qui se trouve dans l'hypothèse B_ν. On prend la courbe $\Gamma_{j\mathfrak{F}'x_0} = \Gamma_{jx_0}$ qui est définie au **n. 37.**

(2) Considérons les j tels que $\sigma_j \leqq \sigma_\mu^*$. Si $\sigma_j = \sigma_\mu^*$, on suppose de plus $|\mathfrak{F}'| \geqq N_\mu$, N_μ étant un entier positif suffisamment grand. L'intersection des régions propres pour $-\Lambda_j(x)$ $(j = \beta', \dots, \beta'')$ est propre pour $\Lambda_{j\mathfrak{F}'}(x)$. D'autre part, les hypothèses B_ν et B_μ entraînent l'existence du chemin $\Gamma_{j\mathfrak{F}'x_0}$, satisfaisant aux conditions 1° et 2°, dont la démonstration sera renvoyée au **n. 49.**

(3) Considérons enfin les j tels que $\sigma_j = \sigma_\mu^*$ et $|\mathfrak{F}'| < N_\mu$. Dans le cas où entre les deux directions [15] $(\max(\Delta_{\nu-}, \theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\mu-}))$ et $(\min(\Delta_{\nu+}, \theta^*_{\nu+}, \Theta^*_{\mu+}))$ ne se trouve aucune direction telle que $\exp \Lambda_{j\mathfrak{F}'}(x) \to \infty$ pour $x \to 0$, il me semble douteux que l'on puisse définir $V_{j\mathfrak{F}'}(x, x_0, z^0_{\alpha'}, \dots, z^0_{\alpha''})$. En effet, dans ce cas, puisque l'on doit donner la condition initiale en un point $x^0{}_{j\mathfrak{F}'}$ sur l'extrémité radiale de $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu\mu-}, \Theta^*_{\nu\mu+}, r]$, la valeur de $\max\limits_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{1/\mu_k} / \max\limits_{k=\alpha'}^{\alpha''} |z_k^0|^{1/\mu_k}$ sur $\Gamma_{j\mathfrak{F}'x_0}$ surpasse toujours un nombre déterminé donné à l'avance, quelque petit que soit $|z_k^0|$. On suppose donc la condition suivante remplie:

Hypothèse $C_{\nu\mu}$. *Il existe entre les directions* [16] $(\max(\Delta_{\nu-}, \theta^*_{\nu-}, \Theta^*_{\mu-}, \tilde{\theta}_{\mu-}))$ *et* $(\min(\Delta_{\nu+}, \theta^*_{\nu+}, \Theta^*_{\mu+}, \tilde{\theta}_{\mu+}))$ *une direction telle que* $\exp \Lambda_{j\mathfrak{F}'}(x) \to \infty$ *pour* $x \to 0$.

---

[15] $\Theta^*_{\mu-}$ et $\Theta^*_{\mu+}$ ont la même signification que $\theta^*_{\nu-}, \theta^*_{\nu+}$.

[16] Nous définissons $\tilde{\theta}_{\mu-}$ par $\min\limits_j \theta_{j-}$ pour les j tels que θ_{j-} se trouvent entre $(\max(\Delta_{\nu-}, \theta^*_{\nu-}))$ et $(\min(\Delta_{\nu+}, \theta^*_{\nu+}))$ pour $j = \beta', \dots, \beta''$. On définit de même $\tilde{\theta}_{\mu+}$.

On verra alors, d'après le raisonnement aux **nos 36, 37, 38, 39,** l'existence du chemin $\Gamma_{j\mathfrak{Z}'x_0}$ tel que les fonctions $\max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{1/\mu_k}$ et $\exp(-\Re\Lambda_{j\mathfrak{Z}'}(x))$ tendent vers 0 en décroissant monotonement lorsque $x \to 0$.

Cela posé, dans tous les cas, la fonction $V_{j\mathfrak{Z}'}(x, x_0, z^0)$ se détermine d'une seule manière par la formule

$$V_{j\mathfrak{Z}'}(x, x_0, z^0) = \int_0^x x^{-1} Q_{j\mathfrak{Z}'}(x, x_0, z^0)\, e^{-\Lambda_{j\mathfrak{Z}'}(x)}\, x^{-\lambda_{j\mathfrak{Z}'\sigma}}\, dx. \tag{46.5}$$

Il nous reste à démontrer les propositions suivantes:

1. $\tilde{V}_{j\mathfrak{Z}'}(x, Z)$ *est une solution de l'équation* (46.4); **2.** $\tilde{V}_{j\mathfrak{Z}'}(x, z)$ *est une fonction holomorphe de* $x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''}$ *pour* (46.1).

Ces deux propositions entraînent la convergence des séires (45.1). Or, d'après le raisonnement tout à fait analogue à celui du **n. 41**, on pourra établir aisément ces deux propositions.

On arrive donc à la conclusion:

Proposition. *Si l'on suppose les hypothèses* B_ν, B_μ *et* $\mathrm{C}_{\nu\mu}$ *remplies, on peut déterminer de proche en proche d'une seule manière les séries* (45.1) *convergentes pour* (46.1) *avec les coefficients* $P_{j\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'}(x)$ *développables asymptotiquement en les séries* (45.2) *dans* $\mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu\mu-}, \Theta^*_{\nu\mu+}, r]$ *de sorte qu'elles représentent les solutions de* (46.2) *si l'on y remplace les* z *par les* Z.

47. Convergence. Pour démontrer la convergence de la solution formelle $(\mathrm{F}_{\nu\mu},)$ nous raisonnons comme aux **nos 33, 34** et **35**.

1. Inégalités. Posons [17]

$$P_{jN}(x, z, \tilde{z}) \equiv P_{jN}(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''}, z_{\beta'}, \dots, z_{\beta''}) = \Phi_{j\nu}(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''}) +$$
$$+ \delta_j z_j + \sum_{|\mu\mathfrak{Z}'|<N} P_{j\mathfrak{Z}'}(x, z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''}) z_{\beta'}^{p_{\beta'}} \dots z_{\beta''}^{p_{\beta''}} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

où $\mu = \{\mu_{\beta'}, \dots, \mu_{\beta''}\}$, μ_k désignant la partie réelle de $\lambda_k/\sigma_k(\delta_0' e^{i\theta_0})^{\sigma_k}$ $(k = \beta', \dots, \beta'')$. Si les deux transformations succesives

$$y_j = P_{jN}(x, Z, \tilde{Z}) + v_j \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{47.1}$$
$$v_j = u_j e^{\Lambda_j(x)} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

amènent le système (28.1) en

$$x\frac{du_j}{dx} = g_j(x, Z, \tilde{Z}, e^{\Lambda_1(x)} u_1, \dots, e^{\Lambda_n(x)} u_n) e^{-\Lambda_j(x)} \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{47.2}$$

---

[17] $z = \{z_{\alpha'}, \dots, z_{\alpha''}\}$, $\tilde{z} = \{z_{\beta'}, \dots, z_{\beta''}\}$.

on verra de même que *les* $g_j(x, z, \tilde{z}, v_1, \dots, v_n) \equiv g_j(x, z, \tilde{z}, v)$ *sont des fonctions holomorphes de* $x, z, \tilde{z}, v$ *pour*

$$(47.3) \qquad x \in \mathfrak{D}[\Theta^*_{\nu\mu-}, \Theta^*_{\nu\mu+}, r], \quad \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |z_k|^{1/\mu_k} \leqq \zeta_1, \quad \max_{k=\beta'}^{\beta''} |z_k|^{1/\mu_k} \leqq \zeta_1,$$

$$|v_1| \leqq \delta, \dots, |v_n| \leqq \delta$$

et qu'*elles satisfont aux inégalités*

$$(47.4) \qquad |g_j(x, z, \tilde{z}, v)| \leqq A \sum_{k=1}^{n} |v_k| + B_N \max_{k=\beta'}^{\beta''} |z_k|^{N/\mu_k} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

pour (47.3), A et B_N ayant la même signification qu'au **n. 33**.

2. Famille $\mathfrak{F}$. Nous considérons *la famille* $\mathfrak{F}$ *des systèmes* $\{\psi_1(x, z, \tilde{z}), \dots$ $\dots, \psi_n(x, z, \tilde{z})\}$ *de* n *fonctions qui sont des fonctions holomorphes de* $x, z, \tilde{z}$ *dans le domaine*

$$(47.5) \qquad x \in \mathfrak{D}(\Delta_{\nu\mu-}, \Delta_{\nu\mu+}, r_1), \quad \max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |z_k|^{1/\mu_k} < \zeta_1, \quad \max_{k=\beta'}^{\beta''} |z_k|^{1/\mu_k} < \zeta_1$$

et satisfont aux inégalités

$$(47.6) \qquad |\psi_j(x, z, \tilde{z})| \leqq K e^{-\Re \Lambda_j(x)} \max_{k=\beta'}^{\beta''} |z_k|^{N/\mu_k} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

K étant un nombre positif tel que $K\zeta_1^N < \delta$. Les nombres ζ_1 et δ sont supposés assez petits; les angles $\Delta_{\nu\mu-}$, $\Delta_{\nu\mu+}$ seront définis plus tard.

Puisque le système $\{0, \dots, 0\}$ appartient à $\mathfrak{F}$, la famille $\mathfrak{F}$ n'est pas vide. Posons

$$(47.7) \qquad \Psi_j(x, x_0, z^0, \tilde{z}^0) = \psi_j(x, Z(x, x_0, z^0), \tilde{Z}(x, x_0, \tilde{z}^0)),$$

$$(47.8) \qquad G_j(x, x_0, z^0, \tilde{z}^0) = g_j(x, Z, \tilde{Z}, e^{\Lambda_1(x)}\Psi_1, \dots, e^{\Lambda_n(x)}\Psi_n).$$

Nous définissons les $\bar{\psi}_j(x_0, z^0, \tilde{z}^0) \equiv \bar{\psi}_j(x, x_0, z^0_{\alpha'}, \dots, z^0_{\alpha''}, z^0_{\beta'}, \dots, z^0_{\beta''})$ par

$$(47.9) \qquad \bar{\psi}_j(x_0, z^0, \tilde{z}^0) = \int_0^{x_0} x^{-1} G_j(x, x_0, z^0, \tilde{z}^0) e^{-\Lambda_j(x)} dx \qquad (j = 1, \dots, n),$$

où l'intégration est prise le long des chemins Γ_{jx_0}. Nous démontrerons au **n. 48** que les intégrales (47.9) sont convergentes.

$\mathfrak{T}$ est alors la transformation qui fait correspondre au système $\{\psi_1(x, z, \tilde{z}), \dots$ $\dots, \psi_n(x, z, \tilde{z})\}$ le système $\{\bar{\psi}_1(x, z, \tilde{z}), \dots, \bar{\psi}_n(x, z, \tilde{z})\}$.

3. Convergence. On voit immédiatement la proposition:

I. *La famille* $\mathfrak{F}$ *est fermée, convexe et normale.*

Nous démontrerons ensuite les propositions:

II. *Les intégrales* (47.9) *convergent.*

III. *Le système* $\{\bar{\psi}_1(x, z, \tilde{z}), \dots, \bar{\psi}_n(x, z, \tilde{z})\}$ *appartient à* $\mathfrak{F}$; c'est-à-dire,

III'. *On a les inégalités*

$$|\bar{\psi}_j(x, z, \tilde{z})| \leqq Ke^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\beta'}^{\beta''} |z_k|^{N/\mu_k} \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{47.10}$$

et

III''. *Les fonctions* $\bar{\psi}_j(x, z, \tilde{z})$ $(j = 1, \dots, n)$ *sont holomorphes pour* (47.5).

IV. *La transformation* $\mathfrak{T}$ *est continue.*

On sait alors qu'il existe un système de n fonctions tel que

$$\{\psi_1(x, z, \tilde{z}), \dots, \psi_n(x, z, \tilde{z})\} = \{\bar{\psi}_1(x, z, \tilde{z}), \dots, \bar{\psi}_n(x, z, \tilde{z})\}.$$

Enfin, nous démontrerons les deux propositions:

V. *Le système des fonctions* $\bar{\psi}_j(x, Z, \tilde{Z})$ $(j = 1, \dots, n)$ *est une solution de* (47.2).

VI. *La solution du système des équations* (47.2) *telle que*

$$u_j = O\left(e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\beta'}^{\beta''} |Z_k|^{N/\mu_k}\right) \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{47.11}$$

est unique pourvu que N soit assez grand.

La convergence de la solution formelle $(F_{\nu\mu})$ résulte de ces propositions.

48. Condition imposée aux chemins d'intégration Γ_{jx_0}. Nous prenons les chemins Γ_{jx_0} de manière que l'on ait la condition suivante:

Soient $x_0, z^0_{\alpha'}, \dots, z^0_{\alpha''}, z^0_{\beta'}, \dots, z^0_{\beta''}$ *des valeurs quelconques telles que l'on ait* (47.5). *Les chemins* Γ_{jx_0} *sont contenus dans* $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu\mu-}, \Delta_{\nu\mu+}, r_1)$ *et toutes les fonctions* $x^{-1}G_j(x, x_0, z^0, \tilde{z}^0) \exp(-\Lambda_j(x))$ *sont définies sur* Γ_{jx_0}.

Cette condition est équivalente à:

Lorsque x *varie sur* Γ_{jx_0}, *les valeurs de* $(x, Z_{\alpha'}, \dots, Z_{\alpha''}, Z_{\beta'}, \dots, Z_{\beta''})$ *restent toujours dans le domaine* (47.5).

Il suffit, pour obtenir cette condition, que l'*on puisse déterminer dans* $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu\mu-}, \Delta_{\nu\mu+}, r_1)$ *les chemins* Γ_{jx_0} *de manière que l'on ait à la fois les inégalités*

$$\frac{d}{ds}(\Re\Lambda_k(x)) \geqq \frac{|\lambda_k|}{\rho^{\sigma_k+1}} \sin \sigma_k \varepsilon \qquad (k = \alpha', \dots, \alpha'', \beta', \dots, \beta'') \tag{48.1}$$

sur Γ_{jx_0}, ε *étant supposé assez petit.* Ces inégalités entraînent la croissance monotone des fonctions $\max_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{1/\mu_k}$ et $\max_{k=\beta'}^{\beta''} |Z_k|^{1/\mu_k}$.

D'après les inégalités (47.4) et (47.6), on a

$$|x^{-1}G_j(x, x_0, z^0, \tilde{z}^0)e^{-\Lambda_j(x)}| \leqq (nAK + B_N)|x|^{-1}e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\beta'}^{\beta''} |Z_k|^{N/\mu_k} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

et la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{s_0} |x|^{-1}e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max_{k=\beta'}^{\beta''} |Z_k|^{N/\mu_k} ds \qquad (j = 1, \dots, n)$$

entraîne la condition II. Pour les j tels que $\sigma_j \leqq \sigma_\mu^*$, la fonction à intégrer tend vers 0 lorsque le point variable x sur Γ_{jx_0} s'approche de l'origine. *Pour les j tels que $\sigma_j > \sigma_\mu^*$, la fonction* $\exp(-\Re\Lambda_j(x))$ *étant prépondérant, on suppose en outre que l'on ait l'inégalité*

$$\frac{d}{ds}(-\Re\Lambda_j(x)) \geqq \frac{|\lambda_j|}{\rho^{\sigma_j+1}} \sin \sigma_j \varepsilon \tag{48.2}$$

sur Γ_{jx_0}. La fonction à intégrer tend aussi vers 0 en décroissant monotonement lorsque x tend vers 0 le long de Γ_{jx_0}. La condition II est donc établie.

La condition III' résulte de l'inégalité (48.1) pour $\sigma_j \leqq \sigma_\mu^*$ et des (48.1) et (48.2) pour $\sigma_j > \sigma_\mu^*$.

Pour le voir, on peut discuter de la même manière qu'au **n. 36**, en remarquant que l'on a l'inégalité

$$\frac{d}{ds}\left\{\max_{k=\beta'}^{\beta''} |Z_k|^{N/\mu_k}\right\} > \frac{N}{2} \min_{k=\beta'}^{\beta''}\left(\frac{1}{\mu_k}\frac{d}{ds}\Re\Lambda_k(x)\right)\cdot \max_{k=\beta'}^{\beta''} |Z_k|^{N/\mu_k}$$

sur Γ_{jx_0}.

On a donc la

Proposition. *Pour que l'on ait* II *et* III', *il suffit de déterminer un domaine* $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu\mu-}, \Delta_{\nu\mu+}, r_1)$, *qui est, bien entendu, contenu dans l'intersection de* $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu-}, \Delta_{\nu+}, r)$ *et de* $\mathfrak{D}(\Delta_{\mu-}, \Delta_{\mu+}, r)$, *et les chemins* Γ_{jx_0}, *pour un point quelconque* $x_0 \in \mathfrak{D}(\Delta_{\nu\mu-}, \Delta_{\nu\mu+}, r_1)$ *donné, de manière que, pour tous les j, on ait les inégalités* (48.1) *sur* Γ_{jx_0} *et que, pour les j tels que* $\sigma_j > \sigma_\mu^*$, *on ait en outre les inégalités* (48.2) *sur* Γ_{jx_0}.

Si l'on suppose l'existence de tels chemins Γ_{jx_0}, on pourra aisément établir les propositions III'', IV, V et VI sans aucune modification essentielle dans la démonstration au **n. 41.**

49. Vérification des inégalités (48.1) **et** (48.2). Nous démontrons, sous les hypothèses B_ν et B_μ, l'existence du domaine $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu\mu-}, \Delta_{\nu\mu+}, r_1)$ et des chemins Γ_{jx_0}.

1. Définition des chemins Γ_{jx_0}. Pour tous les j, nous définissons les angles $\Delta_{j\nu\mu}$ et $\Delta'_{j\nu\mu}$ par $\max(\Delta_{j\nu}, \Delta_{j\mu})$ et $\min(\Delta'_{j\nu}, \Delta'_{j\mu})$ respectivement.

D'autre part, pour les $j = 1, \dots, \beta' - 1$, puisque l'on suppose les hypothèses B_ν et B_μ remplies, on a $\Delta'_{j\nu}=\Delta'_{j\mu}=\theta_{j-}$ dans le premier cas [18] et $\Delta_{j\nu}=\Delta_{j\mu}=\theta_{j+}$ dans le deuxième cas et $\Delta_{j\nu}=\Delta_{j\mu}=\theta_{j+}$, $\Delta'_{j\nu}=\Delta'_{j\mu}=\theta_{j-}$ dans les deux derniers cas.

D'après la définition des $\Delta_{j\nu\mu}$, $\Delta'_{j\nu\mu}$, on a

$$\max(\theta^*_{\nu-},\ \theta^*_{\mu-}) \leqq \Delta_{j\nu\mu} < \Delta'_{j\nu\mu} \leqq \min(\theta^*_{\nu+},\ \theta^*_{\mu+}).$$

On voit donc que, si N est suffisamment grand et si ε est suffisamment petit, les fonctions $e^{-\Re\Lambda_j(x)} \max\limits_{k=\beta'}^{\beta''} |Z_k|^{N/\mu_k}$ et $\max\limits_{k=\alpha'}^{\alpha''} |Z_k|^{1/\mu_k}$ convergent vers 0 exponentiellement, lorsque x tend vers l'origine suivant une direction φ telle que $\Delta_{j\nu\mu}+2\varepsilon \leqq \varphi \leqq \Delta'_{j\nu\mu}-2\varepsilon$.

Cela posé, les chemins Γ_{jx_0} seront définis comme au **n. 37**, où l'on remplace $\Delta_{j\nu}$, $\Delta'_{j\nu}$, $\Theta_{j\nu}$, $\Theta'_{j\nu}$ et $A_{j\nu}(\varphi)$ par $\Delta_{j\nu\mu}$, $\Delta'_{j\nu\mu}$, $\Theta_{j\nu\mu}$, $\Theta'_{j\nu\mu}$ et $A_{j\nu\mu}(\varphi)$, $A_{j\nu\mu}(\varphi)$ ayant la même signification que $A_{j\nu}(\varphi)$.

2. Définition de $A_{j\nu\mu}(\varphi)$, $\Theta_{j\nu\mu}$ et $\Theta'_{j\nu\mu}$. Sur la partie rectiligne de Γ_{jx_0}, on aura (48.1) pour tous les j et en outre (48.2) pour les j tels que $\sigma_j > \sigma_\mu^*$, puisqu'on a $\Delta_{j\nu\mu}+2\varepsilon \leqq \varphi \leqq \Delta'_{j\nu\mu}-2\varepsilon$.

Sur la partie curviligne de Γ_{jx_0}, ρ est une fonction de φ donnée par (37.1) ou (37.1'), où l'on pose $\Delta_{j\nu}=\Delta_{j\nu\mu}$, $\Delta'_{j\nu}=\Delta'_{j\nu\mu}$, $\Theta_{j\nu}=\Theta_{j\nu\mu}$, $\Theta'_{j\nu}=\Theta'_{j\nu\mu}$, $A_{j\nu}(\varphi)=A_{j\nu\mu}(\varphi)$.

Pour que l'on ait (48.1) sur la courbe (37.1), il suffit que l'on ait

$$\cos(A_{j\nu\mu}(\varphi)+\omega_k-\sigma_k\varphi) \geqq \sin 2\sigma_k\varepsilon \qquad (k=\alpha', \dots, \alpha'', \beta', \dots, \beta''),$$

c'est ce que l'on voit facilement d'après (38.2), (38.3). Pour que l'on ait cette condition et $\sin A_{j\nu\mu}(\varphi) > 0$, il suffit

$$\text{(49.1)} \qquad \max(\sigma_\nu^*(\varphi-\theta^*_{\nu+}+2\varepsilon),\ \sigma_\mu^*(\varphi-\theta^*_{\mu+}+2\varepsilon),\ \sigma_\nu^*\varepsilon) \leqq A_{j\nu\mu}(\varphi) \leqq$$
$$\leqq \min(\sigma_\nu^*(\varphi-\theta^*_{\nu-}-2\varepsilon),\ \sigma_\mu^*(\varphi-\theta^*_{\mu-}-2\varepsilon),\ \pi-\sigma_\nu^*\varepsilon).$$

Les inégalités

$$\sigma_\nu^*\varepsilon \leqq \sigma_\lambda^*(\varphi-\theta^*_{\lambda-}-2\varepsilon), \qquad \sigma_\lambda^*(\varphi-\theta^*_{\lambda+}+2\varepsilon) \leqq \pi-\sigma_\nu^*\varepsilon, \qquad (\lambda=\nu,\ \mu),$$
$$\sigma_\nu^*(\varphi-\theta^*_{\nu+}+2\varepsilon) \leqq \sigma_\mu^*(\varphi-\theta^*_{\mu-}-2\varepsilon), \qquad \sigma_\mu^*(\varphi-\theta^*_{\mu+}+2\varepsilon) \leqq \sigma_\nu^*(\varphi-\theta^*_{\nu-}-2\varepsilon)$$

sont équivalentes respectivement à

$$\theta^*_{\lambda-}+\varepsilon\left(2+\frac{\sigma_\nu^*}{\sigma_\lambda^*}\right) \leqq \varphi, \quad \varphi \leqq \theta^*_{\lambda+}+\frac{\pi}{\sigma_\lambda^*}-\varepsilon\left(2+\frac{\sigma_\nu^*}{\sigma_\lambda^*}\right), \qquad (\lambda=\nu,\ \mu),$$

$$\text{(49.2)} \quad \frac{\sigma_\mu^*\theta^*_{\mu-}-\sigma_\nu^*\theta^*_{\nu+}}{\sigma_\mu^*-\sigma_\nu^*}+2\varepsilon\frac{\sigma_\mu^*+\sigma_\nu^*}{\sigma_\mu^*-\sigma_\nu^*} \leqq \varphi, \quad \varphi \leqq \frac{\sigma_\mu^*\theta^*_{\mu+}-\sigma_\nu^*\theta^*_{\nu-}}{\sigma_\mu^*-\sigma_\nu^*}-2\varepsilon\frac{\sigma_\mu^*+\sigma_\nu^*}{\sigma_\mu^*-\sigma_\nu^*}.$$

---

(18) Puisqu'on suppose l'hypothèse B_μ remplie, pour les $j=1, \dots, \beta'-1$, les quatre cas, ayant la même signification qu'au **n. 37**, peuvent se présenter.

Or on a

$$\frac{\sigma_\mu^*\theta_{\mu-}^* - \sigma_\nu^*\theta_{\nu+}^*}{\sigma_\mu^* - \sigma_\nu^*} < \max(\theta_{\nu-}^*,\ \theta_{\mu-}^*),\ \min(\theta_{\nu+}^*,\ \theta_{\mu+}^*) < \frac{\sigma_\mu^*\theta_{\mu+}^* - \sigma_\nu^*\theta_{\nu-}^*}{\sigma_\mu^* - \sigma_\nu^*}, \tag{49.3}$$

car ces inégalités découlent de $\theta_{\nu-}^* < \theta_{\nu+}^*$, $\theta_{\mu-}^* < \theta_{\nu+}^*$, $\theta_{\nu-}^* < \theta_{\mu+}^*$.

Si l'on pose

$$\Theta'_{j\nu\mu} = \min\left\{\theta_{\lambda+}^* + \frac{\pi}{\sigma_\lambda^*} - \varepsilon\left(2 + \frac{\sigma_\nu^*}{\sigma_\lambda^*}\right),\ \frac{\sigma_\mu^*\theta_{\mu+}^* - \sigma_\nu^*\theta_{\nu-}^*}{\sigma_\mu^* - \sigma_\nu^*} - 2\varepsilon\frac{\sigma_\mu^* + \sigma_\nu^*}{\sigma_\mu^* - \sigma_\nu^*}\right\} \tag{49.4}$$

pour $\sigma_j \leqq \sigma_\mu^*$, on a

$$\max(\theta_{\nu-}^*,\ \theta_{\mu-}^*) \leqq \Delta_{j\nu\mu} < \theta_0 < \Delta'_{j\nu\mu} \leqq \min(\theta_{\nu+}^*,\ \theta_{\mu+}^*) < \Theta'_{j\nu\mu} \qquad (\sigma_j \leqq \sigma_\mu^*)$$

et puis (49.2) dans l'intervalle $[\Delta'_{j\nu\mu} - 2\varepsilon,\ \Theta'_{j\nu\mu}]$, si ε est un nombre positif suffisamment petit. On pose

$$A_{j\nu\mu}(\varphi) = \min\{A_{j\nu}(\varphi),\ \sigma_\mu^*(\varphi - \theta_{\mu-}^* - 2\varepsilon)\} \qquad (\sigma_j \leqq \sigma_\mu^*).$$

On a alors (49.1) et $\sin A_{j\nu\mu}(\varphi) > 0$ dans l'intervalle $[\Delta'_{j\nu\mu} - 2\varepsilon,\ \Theta'_{j\nu\mu}]$.

Considérons ensuite le cas où $\sigma_j > \sigma_\mu^*$. Pour ces indices, on doit considérer (48.1) et (48.2). Sur la courbe (37.1), on voit, d'après (38.7) et (49.1), que la condition à laquelle doit satisfaire la fonction $A_{j\nu\mu}(\varphi)$, peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\max(\sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu+}^* + 2\varepsilon),\ \sigma_\mu^*(\varphi - \theta_{\mu+}^* + 2\varepsilon),\ \sigma_j(\varphi - \theta_{j-} + 2\varepsilon),\ \sigma_\nu^*\varepsilon) \leqq \\ &\leqq A_{j\nu\mu}(\varphi) \leqq \min(\sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu-}^* - 2\varepsilon),\ \sigma_\mu^*(\varphi - \theta_{\mu}^* - 2\varepsilon),\ \sigma_j(\varphi - \theta_{j+} - 2\varepsilon),\ \pi - \sigma_\nu^*\varepsilon). \end{aligned} \tag{49.5}$$

Les inégalités

$$\sigma_\nu^*\varepsilon \leqq \sigma_\lambda^*(\varphi - \theta_{\lambda-}^* - 2\varepsilon), \qquad \sigma_\lambda^*(\varphi - \theta_{\lambda+}^* + 2\varepsilon) \leqq \pi - \sigma_\nu^*\varepsilon, \qquad (\lambda = \nu,\ \mu),$$

$$\sigma_\nu^*\varepsilon \leqq \sigma_j(\varphi - \theta_{j+} - 2\varepsilon), \qquad \sigma_j(\varphi - \theta_{j-} + 2\varepsilon) \leqq \pi - \sigma_\nu^*\varepsilon,$$

$$\sigma_\lambda^*(\varphi - \theta_{\lambda+}^* + 2\varepsilon) \leqq \sigma_j(\varphi - \theta_{j+} - 2\varepsilon), \quad \sigma_j(\varphi - \theta_{j-} + 2\varepsilon) \leqq \sigma_\lambda^*(\varphi - \theta_{\lambda-}^* - 2\varepsilon), \quad (\lambda = \nu,\ \mu),$$

$$\sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu+}^* + 2\varepsilon) \leqq \sigma_\mu^*(\varphi - \theta_{\mu-}^* - 2\varepsilon), \quad \sigma_\mu^*(\varphi - \theta_{\mu+}^* + 2\varepsilon) \leqq \sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu-}^* - 2\varepsilon)$$

sont équivalentes respectivement à

$$\theta_{\lambda-}^* + \varepsilon\left(2 + \frac{\sigma_\nu^*}{\sigma_\lambda^*}\right) \leqq \varphi, \qquad \varphi \leqq \theta_{\lambda+}^* + \frac{\pi}{\sigma_\lambda^*} - \varepsilon\left(2 + \frac{\sigma_\nu^*}{\sigma_\lambda^*}\right), \qquad (\lambda = \nu,\ \mu),$$

$$\theta_{j+} + \varepsilon\left(2 + \frac{\sigma_\nu^*}{\sigma_j}\right) \leqq \varphi, \qquad \varphi \leqq \theta_{j-} + \frac{\pi}{\sigma_j} - \varepsilon\left(2 + \frac{\sigma_\nu^*}{\sigma_j}\right),$$

$$\frac{\sigma_j\theta_{j+} - \sigma_\lambda^*\theta_{\lambda+}^*}{\sigma_j - \sigma_\lambda^*} + 2\varepsilon\frac{\sigma_j + \sigma_\lambda^*}{\sigma_j - \sigma_\lambda^*} \leqq \varphi, \quad \varphi \leqq \frac{\sigma_j\theta_{j-} - \sigma_\lambda^*\theta_{\lambda-}^*}{\sigma_j - \sigma_\lambda^*} - 2\varepsilon\frac{\sigma_j + \sigma_\lambda^*}{\sigma_j - \sigma_\lambda^*}, \quad (\lambda = \nu,\ \mu),$$

$$\frac{\sigma_\mu^*\theta_{\mu-}^* - \sigma_\nu^*\theta_{\nu+}^*}{\sigma_\mu^* - \sigma_\nu^*} + 2\varepsilon\frac{\sigma_\mu^* + \sigma_\nu^*}{\sigma_\mu^* - \sigma_\nu^*} \leqq \varphi, \quad \varphi \leqq \frac{\sigma_\mu^*\theta_{\mu+}^* - \sigma_\nu^*\theta_{\nu-}^*}{\sigma_\mu^* - \sigma_\nu^*} - 2\varepsilon\frac{\sigma_\mu^* + \sigma_\nu^*}{\sigma_\mu^* - \sigma_\nu^*}.$$

Or, on a les inégalités (38.9) où l'on remplace ν par λ $(=\nu, \mu)$. On a donc, d'après (49.3), l'inégalité

$$\max(\theta^*_{\nu-}, \theta^*_{\mu-}, \theta_{j+}) \leqq \Delta_{j\nu\mu} < \Delta'_{j\nu\mu} < \Theta'_{j\nu\mu} \qquad (\sigma_j > \sigma_\mu^*),$$

si l'on pose

$$(49.6) \qquad \Theta'_{j\nu\mu} = \min\left\{ \theta^*_{\lambda+} + \frac{\pi}{\sigma_\lambda^*} - \varepsilon\left(2 + \frac{\sigma_\nu^*}{\sigma_\lambda^*}\right),\ \theta_{j-} + \frac{\pi}{\sigma_j} - \varepsilon\left(2 + \frac{\sigma_\nu^*}{\sigma_j}\right),\right.$$
$$\left. \frac{\sigma_\mu^*\theta^*_{\mu+} - \sigma_\nu^*\theta^*_{\nu-}}{\sigma_\mu^* - \sigma_\nu^*} - 2\varepsilon\frac{\sigma_\mu^* + \sigma_\nu^*}{\sigma_\mu^* - \sigma_\nu^*},\ \frac{\sigma_j\theta_{j-} - \sigma_\lambda^*\theta^*_{\lambda-}}{\sigma_j - \sigma_\lambda^*} - 2\varepsilon\frac{\sigma_j + \sigma_\lambda^*}{\sigma_j - \sigma_\lambda^*}\right\}.$$

Nous définissons $A_{j\nu\mu}(\varphi)$ par

$$A_{j\nu\mu}(\varphi) = \min\{A_{j\nu}(\varphi),\ \sigma_\mu^*(\varphi - \theta^*_{\mu-} - 2\varepsilon),\ \sigma_j(\varphi - \theta_{j+} - 2\varepsilon)\} \qquad (\sigma_j > \sigma_\mu^*).$$

On en conclut que l'on a l'inégalité (49.5) et la condition $\sin A_{j\nu\mu}(\varphi) > 0$ dans l'intervalle $[\Delta'_{j\nu\mu} - 2\varepsilon, \Theta'_{j\nu\mu}]$.

Posons ensuite

$$(49.4') \qquad \Theta_{j\nu\mu} = \max\left\{ \theta^*_{\lambda-} - \frac{\pi}{\sigma_\lambda^*} + \varepsilon\left(2 + \frac{\sigma_\nu^*}{\sigma_\lambda^*}\right),\ \frac{\sigma_\mu^*\theta^*_{\mu-} - \sigma_\nu^*\theta^*_{\nu+}}{\sigma_\mu^* - \sigma_\nu^*} - 2\varepsilon\frac{\sigma_\mu^* + \sigma_\nu^*}{\sigma_\mu^* - \sigma_\nu^*}\right\}$$

$$A_{j\nu\mu}(\varphi) = \max\{A_{j\nu}(\varphi),\ \sigma_\mu^*(\varphi - \theta^*_{\mu+} + 2\varepsilon) + \pi\}$$

pour $\sigma_j \leqq \sigma_\mu^*$ et

$$(49.6') \qquad \Theta_{j\nu\mu} = \max\left\{ \theta^*_{\lambda-} - \frac{\pi}{\sigma_\lambda^*} + \varepsilon\left(2 + \frac{\sigma_\nu^*}{\sigma_\lambda^*}\right),\ \theta_{j+} - \frac{\pi}{\sigma_j} + \varepsilon\left(2 + \frac{\sigma_\nu^*}{\sigma_j}\right),\right.$$
$$\left. \frac{\sigma_\mu^*\theta^*_{\mu-} - \sigma_\nu^*\theta^*_{\nu+}}{\sigma_\mu^* - \sigma_\nu^*} + 2\varepsilon\frac{\sigma_\mu^* + \sigma_\nu^*}{\sigma_\mu^* - \sigma_\nu^*},\ \frac{\sigma_j\theta_{j+} - \sigma_\lambda^*\theta^*_{\lambda+}}{\sigma_j - \sigma_\lambda^*} + 2\varepsilon\frac{\sigma_j + \sigma_\lambda^*}{\sigma_j - \sigma_\lambda^*}\right\},$$

$$A_{j\nu\mu}(\varphi) = \max\{A_{j\nu}(\varphi),\ \sigma_\mu^*(\varphi - \theta^*_{\mu+} + 2\varepsilon) + \pi,\ \sigma_j(\varphi - \theta_{j-} + 2\varepsilon) + \pi\}$$

pour $\sigma_j > \sigma_\mu^*$. Alors, on verra comme ci-dessus que l'on a (48.1) sur la courbe (37.1′) pour tous les j et en outre (48.2) sur la même courbe pour $\sigma_j > \sigma_\mu^*$.

3. Vérification de l'existence du domaine $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu\mu-}, \Delta_{\nu\mu+}, r_1)$. Soient $\varphi_{\nu\mu+}$ et $\varphi_{\nu\mu-}$ les racines des équations linéaires en φ:

$$\min\{\sigma_\nu^*(\varphi - \theta^*_{\nu-} - 2\varepsilon),\ \sigma_\mu^*(\varphi - \theta^*_{\mu-} - 2\varepsilon)\} = \pi/2$$

et

$$\max\{\sigma_\nu^*(\varphi - \theta^*_{\nu+} + 2\varepsilon) + \pi,\ \sigma_\mu^*(\varphi - \theta^*_{\mu+} + 2\varepsilon) + \pi\} = \pi/2$$

respectivement. On aura alors

$$\varphi_{\nu\mu+} = \max(\varphi_{\nu+}, \varphi_{\mu+}), \qquad \varphi_{\nu\mu-} = \min(\varphi_{\nu-}, \varphi_{\mu-}),$$

d'où $\varphi_{\nu\mu-} < \varphi_{\nu\mu+}$. Posons

$$A_{\nu\mu}(\varphi) = \begin{cases} \min\{\sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu-}^* - 2\varepsilon),\ \sigma_\mu^*(\varphi - \theta_{\mu-}^* - 2\varepsilon),\ \pi - \sigma_\nu^*\varepsilon\}, & \varphi_{\nu\mu+} \leqq \varphi \\ \pi/2 & , \quad \varphi_{\nu\mu-} \leqq \varphi \leqq \varphi_{\nu\mu+} \\ \max\{\sigma_\nu^*(\varphi - \theta_{\nu+}^* + 2\varepsilon) + \pi,\ \sigma_\mu^*(\varphi - \theta_{\mu+}^* + 2\varepsilon) + \pi,\ \sigma_\nu^*\varepsilon\}, & \varphi \leqq \varphi_{\nu\mu-}. \end{cases}$$

Alors $A_{\nu\mu}(\varphi)$ est une fonction continue dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et satisfaisant aux inégalités $A_{j\nu\mu}(\varphi) \leq A_{\nu\mu}(\varphi)$ pour $\Delta'_{j\nu\mu} - 2\varepsilon \leqq \varphi \leqq \Theta'_{j\nu\mu}$ et $A_{j\nu\mu}(\varphi) \geqq A_{\nu\mu}(\varphi)$ pour $\Theta_{j\nu\mu} \leq \varphi \leq \Delta_{j\nu\mu} + 2\varepsilon$.

Puisqu'on suppose les hypothèses B_ν et B_μ remplies, on a toujours

$$\Theta_{j\nu\mu} < \theta_0 < \Theta'_{j\nu\mu} \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{49.7}$$

car on a les inégalités (49.3) et $(\sigma_j\theta_{j+} - \sigma_\lambda^*\theta_{\lambda+}^*)/(\sigma_j - \sigma_\lambda^*) < \theta_0 < (\sigma_j\theta_{j-} - \sigma_\lambda^*\theta_{\lambda-}^*)/ /(\sigma_j - \sigma_\lambda^*)$ $(\lambda = \nu, \mu)$. La dernière inégalité est une conséquence immédiate des hypothèses B_ν et B_μ.

Les inégalités (49.7) entraînent

$$\Delta_{\nu\mu-} \equiv \max\left(\max_{j=1}^{n} \Theta_{j\nu\mu},\ \Theta_{\nu\mu-}^*\right) < \theta_0 < \min\left(\min_{j=1}^{n} \Theta'_{j\nu\mu},\ \Theta_{\nu\mu+}^*\right) \equiv \Delta_{\nu\mu+}.$$

De plus on a

$$\max(\Delta_{\nu\mu-},\ \theta_{\nu-}^*,\ \theta_{\mu-}^*) = \max(\Delta_{\nu-},\ \theta_{\nu-}^*,\ \Delta_{\mu-},\ \theta_{\mu-}^*),$$

$$\min(\Delta_{\nu\mu+},\ \theta_{\nu+}^*,\ \theta_{\mu+}^*) = \min(\Delta_{\nu+},\ \theta_{\nu+}^*,\ \Delta_{\mu+},\ \theta_{\mu+}^*),$$

puisqu'on a (49.3). Par suite, on a la

Proposition. *Les hypothèses* B_ν *et* B_μ *entraînent la* **condition** $B_{\nu\mu}$: *Il existe entre les directions* $(\max(\Delta_{\nu\mu-},\ \theta_{\nu-}^*,\ \theta_{\mu-}^*))$ *et* $(\min(\Delta_{\nu\mu+},\ \theta_{\nu+}^*,\ \theta_{\mu+}^*))$ *une des directions singulières* $\theta_{j\pm}$ *pour chaque* $j = 1, \dots, \beta' - 1$.

Par conséquent, le domaine $\mathfrak{D}(\Delta_{\nu\mu-},\ \Delta_{\nu\mu+},\ r_1)$ est défini de la même manière qu'au **n. 39**, où l'on remplace $A_\nu(\varphi)$ par $A_{\nu\mu}(\varphi)$.

50. Conclusion. En résumant le résultat obtenu pour le système (28.1), on peut énoncer le

Théorème 6. *Si l'on suppose les hypothèses* (H_1), (H_2), B_ν, B_μ *et* $C_{\nu\mu}$ *remplies, on peut écrire une solution sous la forme* $y_j = \Phi_{j\nu\mu}(x, Z_{\alpha'}, \dots, Z_{\alpha''}, Z_{\beta'}, \dots, Z_{\beta''}) \equiv \Phi_{j\nu\mu}(x, Z, \tilde{Z})$ $(j = 1, \dots, n)$ *où les* $\Phi_{j\nu\mu}(x, z, \tilde{z})$ *sont des fonctions développables en les séires*

$$\Phi_{j\nu\mu}(x, z, \tilde{z}) = \delta_j z_j + \Sigma P_{j\mathfrak{g}\mathfrak{g}'}(x) z_{\alpha'}^{p_{\alpha'}} \dots z_{\beta''}^{p_{\beta''}} \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{$F_{\nu\mu}$}$$

convergentes pour (47.5), δ_j *étant égal à* 1 *ou* 0 *suivant que* $j = \alpha', \dots, \alpha''$,

$\beta', \dots, \beta''$ *où non;* $z_j = 0$ $(j \neq \alpha', \dots, \alpha'', \beta', \dots, \beta'')$ *et* $z_k = Z_k$ $(k = \alpha', \dots, \alpha'', \beta', \dots, \beta'')$ *représentent la solution holomorphe de* (E) *telle que la valeur initiale* z_j^0 *en* x_0 *soit nulle pour* $j \neq \alpha', \dots, \alpha'', \beta', \dots, \beta''$.

Remarque. Dans le cas de $\sigma_\nu^* = 0$, on suppose l'hypothèse $B_{h'}$ remplie. *Aux inégalités* (48.1) *correspondent dans ce cas les inégalités*

$$(50.1) \quad \begin{aligned} &\frac{d}{ds}(\Re \Lambda_k(x)) \geqq \frac{|\lambda_k|}{\rho^{\sigma_k+1}} \sin \sigma_k \varepsilon & (k = \beta', \dots, \beta'') \\ &\frac{d}{ds}|x^{\lambda_{k\sigma}}| \geqq |x^{\lambda_{k\sigma}}| \frac{|\lambda_{k\sigma}|}{\rho} \sin \varepsilon & (k = \alpha + 1, \dots, \beta). \end{aligned}$$

Nous définissons de la manière analogue les directions $(\Delta_{jh'\mu})$, $(\Delta'_{jh'\mu})$, les angles $\Theta_{jh'\mu}$, $\Theta'_{jh'\mu}$ et les fonctions $A_{jh'\mu}(\varphi)$, $A_{h'\mu}(\varphi)$ pour chaque j. Le théorème 6 peut alors s'étendre à ce cas.

II. Extension au cas général.

On peut étendre les résultats de la section précédente au cas plus général. Le calcul devient plus compliqué Mais la difficulté essentiellement nouvelle ne se produit pas. Nous nous contenterons donc d'énoncer seulement les résultats.

51. Notations. Pour simplifier l'écriture, nous introduisons les notations suivantes:

E_ν est l'ensemble dont les éléments sont $\alpha_{\nu-1} + 1, \dots, \alpha_\nu$; $\mathfrak{F}_\nu$ est l'arrangement $(p_{\alpha_{\nu-1}+1}, \dots, p_{\alpha_\nu})$; $|\mathfrak{F}_\nu|$ désigne $\sum_k p_k$ $(k \in E_\nu)$; z_{E_ν} est l'ensemble dont les éléments sont $z_{\alpha_{\nu-1}+1}, \dots, z_{\alpha_\nu}$; $\lambda_{j\mathfrak{F}_\nu}(x)$ et $\lambda_{j\mathfrak{F}_\nu\sigma}$ représentent respectivement $\lambda_j(x) - \sum_k p_k \lambda_k(x)$ et $\lambda_{j\sigma} - \sum_k p_k \lambda_{k\sigma}$, où k parcourt l'ensemble E_ν; $\Lambda_{j\mathfrak{F}_\nu}(x)$ est le polynome en x^{-1} défini par

$$\Lambda_{j\mathfrak{F}_\nu}(x) = \int_\infty^x \frac{\lambda_{j\mathfrak{F}_\nu}(x)}{x^{\sigma+1}} dx = -\frac{1}{\sigma_{j\mathfrak{F}_\nu}} \frac{\lambda_{j\mathfrak{F}_\nu}}{x^{\sigma_{j\mathfrak{F}_\nu}}} + o\left(\frac{1}{x^{\sigma_{j\mathfrak{F}_\nu}}}\right);$$

$\mathfrak{D}(\Theta_{\nu-}^*, \Theta_{\nu+}^*, r)$ est une région propre maximale contenant la direction (θ_0) pour les polynomes $\Lambda_j(x)$ $(\sigma_j > \sigma_\nu^*)$ et les polynomes $\Lambda_{j\mathfrak{F}_\nu}(x)$ $(\sigma_j \leqq \sigma_\nu^*, |\mathfrak{F}_\nu| < N_\nu)$, où N_ν est un entier positif suffisamment grand tel qu'une région propre pour $-\Lambda_j(x)$ $(j \in E_\nu)$ l'est aussi pour $\Lambda_{j\mathfrak{F}_\nu}(x)$ et réciproquement; $\mathfrak{D}(\theta_{\nu-}^*, \theta_{\nu+}^*, r)$ est l'intersection des régions à parties réelles négatives pour les polynomes $\Lambda_k(x)$ $(k \in E_\nu)$ contenant la direction (θ_0). Posons enfin

$$\mu_k = \begin{cases} \Re(\lambda_k / \sigma_k(\delta_0' e^{i\theta_0})^{\sigma_k}) & (k = 1, \dots, \alpha) \\ \Re \lambda_{k\sigma} & (k = \alpha + 1, \dots, \beta). \end{cases}$$

52. La solution formelle $(\mathrm{F}_{h_m\dots h_1})$. Soient $h_1, \dots, h_m$ des entiers quelconques tels que $1 \leqq h_1 < h_2 < \dots < h_m \leqq h'$. Les équations (E) sont satisfaites pour $j \notin E_{h_1}, \dots, E_{h_m}$ si l'on y pose $z_j = 0$ $(j \notin E_{h_1}, \dots, E_{h_m})$. Les autres équations forment un système (E'). Les séries (F) où l'on pose $C_j = 0$ pour $j \notin E_{h_1}, \dots, E_{h_m}$ représentent une solution formelle de (28.1) que nous désignons par $(\mathrm{F}_{h_m\dots h_1})$. Elle contient $\sum_{k=1}^{m} (\alpha_{h_k} - \alpha_{h_{k-1}})$ constantes arbitraires. Nous désignons E_{h_ν} et $\mathfrak{F}_{h_\nu}$ respectivement par K_ν et $\mathfrak{Q}_\nu$.

53. Théorème fondamental. Hypothèse H^*: *Il existe des domaines* $\mathfrak{D}_{h_\nu} = \mathfrak{D}[\Delta^*_{h_\nu-}, \Delta^*_{h_\nu+}, r]$ $(\nu = 1, \dots, m)$ *satisfaisant à la condition suivante:*

$\mathfrak{D}_{h_m}$ *coïncide avec* $\mathfrak{D}[\Delta_{h_m-}, \Delta_{h_m+}, r]$; *le domaine* $\mathfrak{D}_{h_\nu}$ $(\nu < m)$ *est contenu dans l'intersection de* $\mathfrak{D}_{h_{\nu+1}}$ *et de* $\mathfrak{D}(\Theta^*_{h_\nu-}, \Theta^*_{h_\nu+}, r)$ *et, pour un point quelconque* $x_0 \in \mathfrak{D}_{h_\nu}$ *donné, on peut choisir les chemins* $\Gamma^{(\nu)}_{jx_0}$ *contenus dans* $\mathfrak{D}_{h_\nu}$ *de manière* 1° *que, pour les* j *tels que* $\sigma_j \leqq \sigma^*_{h_\nu}$, *on ait les inégalités* (48.1), *où* $k \in K_\nu$, *ou* (50.1) *sur* $\Gamma^{(\nu)}_{jx_0}$ *suivant que* $\sigma^*_{h_\nu} > 0$ *ou* $\sigma^*_{h_\nu} = 0$, *les valeurs de* $\{x, Z_{K_{\nu+1}}, \dots, Z_{K_m}\}$ *restant toujours dans le domaine* $\mathfrak{D}_\nu^{(\nu+1)}$: $x \in \mathfrak{D}_{h_\nu}$, $\max_{k \in K_\tau} |Z_k|^{1/\mu_k} < \zeta$ $(\tau = \nu+1, \dots, m)$ *pour* $x \in \Gamma^{(\nu)}_{jx_0}$, 2° *que, pour les* j *tels que* $\sigma_j > \sigma^*_{h_\nu}$, *on ait l'inégalité* (48.2) *sur* $\Gamma^{(\nu)}_{jx_0}$, *les valeurs de* $\{x, Z_{K_\nu}, \dots, Z_{K_m}\}$ *restant toujours dans le domaine* $\mathfrak{D}_\nu^{(\nu)}$ *pour* $x \in \Gamma^{(\nu)}_{jx_0}$, 3° *que, pour les* $(j; \mathfrak{Q}_\nu)$ *tels que* $\sigma_j = \sigma^*_{h_\nu}$, $|\mathfrak{Q}_\nu| < N_{h_\nu}$, *on ait les inégalités* (48.2), *où l'on remplace* $\Lambda_j(x)$ *et* σ_j *par* $\Lambda_{j\mathfrak{Q}_\nu}(x)$ *et* $\sigma_{j\mathfrak{Q}_\nu}$, *sur* $\Gamma^{(\nu)}_{jx_0} = \Gamma^{(\nu)}_{j\mathfrak{Q}_\nu x_0}$, *les valeurs de* $\max_{k \in K_\tau} |Z_k|^{1/\mu_k} / \max_{k \in K_\tau} |z_k{}^0|^{1/\mu_k}$ $(\tau = \nu+1, \dots, m)$ *ne surpassant pas un certain nombre fini pour* $x \in \Gamma^{(\nu)}_{jx_0}$; $\Gamma^{(\nu)}_{jx_0}$ *est une courbe joignant le point* x_0 *à l'origine ou à un point convenable sur l'extrémité radiale de* $\mathfrak{D}_{h_\nu}$ *suivant qu'il se trouve dans* $\mathfrak{D}_{h_\nu}$ *une direction telle que* $\exp \Lambda_{j\mathfrak{Q}_\nu}(x) \to \infty$ *pour* $x \to 0$ *ou non.*

On peut alors énoncer le

Théorème 7. *Si l'on suppose les hypothèses* (H_1), (H_2), *et* H^* *remplies, on peut écrire une solution de* (28.1) *sous la forme* $y_j = \Phi_{jh_m\dots h_1}(x, Z_{K_1}, \dots, Z_{K_m})$ *où* $\Phi_{jh_m\dots h_1}(x, z_{K_1}, \dots, z_{K_m})$ *sont des fonctions développables en séires* $(\mathrm{F}_{h_m\dots h_1})$ *convergentes pour les valeurs de* $x, z_{K_1}, \dots, z_{K_m}$ *telles que*

$$x \in \mathfrak{D}(\Delta^*_{h_1-}, \Delta^*_{h_1+}, r_1), \quad \max_{k \in K_\tau} |z_k|^{1/\mu_k} < \zeta_1 \qquad (\tau = 1, \dots, m), \tag{53.1}$$

dont les coefficients $P_{j\mathfrak{Q}_m\dots\mathfrak{Q}_1}(x)$ *sont des fonctions holomorphes et développables asymptotiquement en séries entières de* x *dans le domaine* $\mathfrak{D}[\Delta^*_{h_1-}, \Delta^*_{h_1+}, r_1]$.

54. Conditions suffisantes. Hypothèse $\mathrm{C}^*_{h_{\nu+1}h_\nu}$: *Il existe entre les directions*

$$\left(\max\left(\Delta^*_{h_{\nu+1}-}, \max_{k=\nu+1}^{m} \theta^*_{h_k-}, \Theta^*_{h_\nu-}, \tilde{\theta}_{h_\nu-}\right)\right) \text{ et } \left(\min\left(\Delta^*_{h_{\nu+1}+}, \min_{k=\nu+1}^{m} \theta^*_{h_k+}, \Theta^*_{h_\nu+}, \tilde{\theta}_{h_\nu+}\right)\right)$$

une direction telle que la fonction $\exp(-\Re\Lambda_{j\mathfrak{Q}_\nu}(x))$ *pour chaque* $(j;\ \mathfrak{Q}_\nu)$, $|\mathfrak{Q}_\nu| < N_{h_\nu}$ *converge vers* 0 *pour* $x \to 0$.

Remarque. Si $h_{\nu+1} = h_m$, cette condition se réduit à la condition $C_{h_m h_\nu}$ au **n. 46.**

On aura alors le

Théorème 8. *Si l'on suppose les hypothèses* (H_1), (H_2), $B_{h_1}, \dots, B_{h_m}$ *et* $C^*_{h_m h_{m-1}}, \dots, C^*_{h_2 h_1}$ *remplies, toutes les hypothèses* (H_1), (H_2), H^* *sont vérifiées. Plus précisément, les extrémités inférieure et supérieure de* $\mathfrak{D}(\Delta^*_{h_\nu}-,\ \Delta^*_{h_\nu}+,\ r)$ *sont définies par les relations:*

$$\Delta^*_{h_m}- = \Delta_{h_m}-, \qquad \Delta^*_{h_m}+ = \Delta_{h_m}+,$$

$$\Delta^*_{h_\nu}- = \max\left\{\Delta^*_{h_{\nu+1}}-,\ \Delta_{h_\nu}-,\ \max_{\nu<k\leq m}\frac{\sigma^*_{h_\nu}\theta^*_{h_\nu}- - \sigma^*_{h_k}\theta^*_{h_k}+ + 2\varepsilon(\sigma^*_{h_\nu}+\sigma^*_{h_k})}{\sigma^*_{h_\nu}-\sigma^*_{h_k}}\right\} \tag{54.1}$$

$$\Delta^*_{h_\nu}+ = \min\left\{\Delta^*_{h_{\nu+1}}+,\ \Delta_{h_\nu}+,\ \min_{\nu<k\leq m}\frac{\sigma^*_{h_\nu}\theta^*_{h_\nu}+ - \sigma^*_{h_k}\theta^*_{h_k}- - 2\varepsilon(\sigma^*_{h_\nu}+\sigma^*_{h_k})}{\sigma^*_{h_\nu}-\sigma^*_{h_k}}\right\}, \tag{54.1'}$$

pour $1 \leq \nu \leq m-1$.

La démonstration sera faite comme au **n. 46.**

III. Exemples.

55. Exemple. Nous donnons des exemples satisfaisant à l'hypothèse du théorème 8. Soient $\Lambda_1(x), \Lambda_2(x), \dots, \Lambda_8(x)$ les polynomes définis par

$$\Lambda_1(x) = -\frac{e^{-\frac{3\pi i}{8}}}{x^3},\quad \Lambda_2(x) = -\frac{e^{\frac{5\pi i}{16}}}{2x^3},\quad \Lambda_3(x) = -\frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{x^2},\quad \Lambda_4(x) = -\frac{e^{\frac{\pi i}{6}}}{5x^2},$$

$$\Lambda_5(x) = -\frac{3}{x}\quad,\quad \Lambda_6(x) = -\frac{2e^{i\varepsilon'}}{x},\quad \Lambda_7(x) = -\frac{e^{-i\varepsilon'}}{x},\quad \Lambda_8(x) = \frac{1}{x^6}\quad,$$

ε' étant un nombre positif suffisamment petit.

Si $\delta_0'(>0)$ est assez petit, on a évidemment l'inégalité

$$\Re\Lambda_1(x) < \Re\Lambda_2(x) < \dots < \Re\Lambda_6(x) < \Re\Lambda_7(x) < 0 < \Re\Lambda_8(x) \tag{55.1}$$

sur le segment: $\arg x = 0$, $|x| \leq \delta_0'$. Nous désignons $\lambda_j(x)$ par $x^7 \dfrac{d}{dx}\Lambda_j(x)$. Alors les $\lambda_j(x)$ sont des polynomes de x de degrés au plus égaux à 5 et l'une au moins des valeurs $\lambda_1(0), \dots, \lambda_8(0)$ n'est pas différente de zéro. Par suite la condition imposée aux $\lambda_j(x)$ est aussi vérifiée.

Nous considérons le système des équations différentielles non linéaires

(55.2) $$x^7 \frac{dy_j}{dx} = \lambda_j(x)y_j + \lambda_{j8}x^6 y_j + x^7 h_j(x, y_1, \dots, y_8) \qquad (j=1, \dots, 8),$$

où les $h_j(x, y_1, \dots, y_8)$ $(j=1, \dots, 8)$ sont des fonctions holomorphes pour

$$x \in \mathfrak{D}\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, r\right], \ |y_1| \leqq \eta, \dots, |y_8| \leqq \eta,$$

de sorte que les développements suivant les puissances de $y_1, \dots, y_8$ commencent par les termes de degrés au moins égaux à 2.

D'après le premier mémoire, on sait qu'il existe une solution formelle de la forme

(F) $$y_j \approx \delta_j Z_j + \Sigma'' P_{jp_1\dots p_7}(x) Z_1^{p_1} \dots Z_7^{p_7} \qquad (j=1, \dots, 8),$$

δ_j étant égal à 1 ou 0 suivant que $j=1, \dots, 7$ ou 8. Les Z_j ont la même signification que celles qui se trouvent dans les sections précédentes.

56 Vérification de la convergence de la solution formelle (F). Nous allons démontrer la proposition suivante:

La solution formelle (F) *converge toujours dans le domaine*

$$x \in \mathfrak{D}\left(-\frac{\pi}{8} + 10\varepsilon, \ \frac{7\pi}{48} - 10\varepsilon, \ r_1\right), \ \max_{k=1}^{7} |Z_k|^{1/\mu_k} < \zeta_1.$$

E_1, E_2, E_3 représentent respectivement les ensembles (1, 2), (3, 4), (5, 6, 7) et $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ respectivement les arrangements $(p_1, p_2, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, p_3, p_4, 0, 0, 0)$, $(0, \dots, 0, p_5, p_6, p_7)$.

Pour que l'on ait la proposition, il suffit de vérifier que toutes les hypothèses B_1, B_2, B_3 et C_{32}^*, C_{21}^* sont remplies en posant $\sigma_1^* = 3$, $\sigma_2^* = 2$, $\sigma_3^* = 1$.

57. Sur l'hypothèse B_3.

1. Si l'on désigne par (θ_{k+}) et (θ_{k-}) les directions singulières des $\Lambda_k(x)$ $(k=5, 6, 7)$ immédiatement supérieure et inférieure à la direction (0) respectivement, on a

$$\theta_{5-} = -\frac{\pi}{2}, \ \theta_{5+} = \frac{\pi}{2}; \ \theta_{6-} = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon', \ \theta_{6+} = \frac{\pi}{2} + \varepsilon'; \ \theta_{7-} = -\frac{\pi}{2} - \varepsilon', \ \theta_{7+} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon',$$

d'où l'on a

$$\theta_{3-}^* = \max_{k=5}^{7} \theta_{k-} = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon', \ \theta_{3+}^* = \min_{k=5}^{7} \theta_{k+} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon'.$$

2. Le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_{3-}^*, \Theta_{3+}^*, r]$, où les développements asymptotiques des coefficients $P_{j\mathfrak{F}_3}(x)$ sont valables, est $\mathfrak{D}\left[-\frac{\pi}{4} + \delta', \frac{\pi}{4} - \delta', r\right]$, δ' étant un nombre positif suffisamment petit. En effet, les régions propres maximales contenant la direction (0) pour $\Lambda_1(x)$, $\Lambda_2(x)$, $\Lambda_3(x)$, $\Lambda_4(x)$ et $\Lambda_8(x)$ sont définies respectivement par

$$\mathfrak{D}\left(\frac{\pi}{24}-\frac{\pi}{3},\ \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{3},\ r\right) = \mathfrak{D}\left(-\frac{7\pi}{24},\ \frac{17\pi}{24},\ r\right),$$

$$\mathfrak{D}\left(-\frac{19\pi}{48}-\frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{3},\ r\right) = \mathfrak{D}\left(-\frac{35\pi}{48},\ \frac{13\pi}{48},\ r\right),$$

$$\mathfrak{D}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{8}+\frac{\pi}{2},\ r\right) = \mathfrak{D}\left(-\frac{3\pi}{8},\ \frac{9\pi}{8},\ r\right),$$

$$\mathfrak{D}\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2},\ r\right) = \mathfrak{D}\left(-\frac{7\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ r\right),$$

$$\mathfrak{D}\left(-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6},\ r\right) = \mathfrak{D}\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4},\ r\right).$$

De plus les degrés des $\Lambda_{j\mathfrak{S}_3}(x)$ $(j=5,\ 6,\ 7)$ en x^{-1} étant égaux à 1, la région propre maximale contenant la direction (0) pour $\Lambda_{j\mathfrak{S}_3}(x)$ peut contenir toujours le domaine $\mathfrak{D}\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4},\ r\right)$.

Ici nous remarquons en passant que l'on a

$$\theta_{1-}=\frac{3\pi}{8},\quad \theta_{2-}=-\frac{\pi}{16}\ ,\quad \theta_{3-}=\frac{5\pi}{8},\quad \theta_{4-}=-\frac{\pi}{6}\ ,\quad \theta_{8-}=\frac{\pi}{12},$$

$$\theta_{1+}=\frac{\pi}{24},\quad \theta_{2+}=-\frac{19\pi}{48},\quad \theta_{3+}=\frac{\pi}{8}\ ,\quad \theta_{4+}=-\frac{2\pi}{3},\quad \theta_{8+}=-\frac{\pi}{12}.$$

3. Calcul des angles Θ'_{j3} et Θ_{j3}. D'après les formules (38.6), (38.10) et (38.6'), (38.10'), ces valeurs sont calculées comme il suit:

$$\Theta'_{13}=\min\left\{\frac{\pi}{2}-\varepsilon'+\pi-3\varepsilon,\ \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{3}-\frac{7\varepsilon}{3},\ \frac{3\left(\frac{3\pi}{8}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon'\right)}{3-1}-4\varepsilon\right\}=$$

$$=\min\left\{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon'-3\varepsilon,\ \frac{17\pi}{24}-\frac{7\varepsilon}{3},\ \frac{13\pi}{16}-\frac{\varepsilon'}{2}-4\varepsilon\right\}\qquad=\frac{17\pi}{24}-\frac{7\varepsilon}{3},$$

$$\Theta_{13}=\max\left\{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon'-\pi+3\varepsilon,\ \frac{\pi}{24}-\frac{\pi}{3}+\frac{7\varepsilon}{3},\ \frac{3\left(\frac{\pi}{24}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon'\right)}{3-1}+4\varepsilon\right\}=$$

$$=\max\left\{-\frac{3\pi}{2}+\varepsilon'+3\varepsilon,\ -\frac{7\pi}{24}+\frac{7\varepsilon}{3},\ -\frac{3\pi}{16}+\frac{\varepsilon'}{2}+4\varepsilon\right\}\qquad=-\frac{3\pi}{16}+\frac{\varepsilon'}{2}+4\varepsilon;$$

$$\Theta'_{23}=\min\left\{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon'-3\varepsilon,\ -\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{3}-\frac{7\varepsilon}{3},\ \frac{3\left(-\frac{\pi}{16}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon'\right)}{3-1}-4\varepsilon\right\}=$$

$$=\min\left\{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon'-3\varepsilon,\ \frac{13\pi}{48}-\frac{7\varepsilon}{3},\ \frac{5\pi}{32}-\frac{\varepsilon'}{2}-4\varepsilon\right\}\qquad=\frac{5\pi}{32}-\frac{\varepsilon'}{2}-4\varepsilon,$$

$$\Theta_{23}=\max\left\{-\frac{3\pi}{2}+\varepsilon'+3\varepsilon,\ -\frac{19\pi}{48}-\frac{\pi}{3}+\frac{7\varepsilon}{3},\ \frac{3\left(-\frac{19\pi}{48}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon'\right)}{3-1}+4\varepsilon\right\}=$$

$$=\max\left\{-\frac{3\pi}{2}+\varepsilon'+3\varepsilon,\ -\frac{35\pi}{48}+\frac{7\varepsilon}{3},\ -\frac{27\pi}{32}+\frac{\varepsilon'}{2}+4\varepsilon\right\}\qquad=-\frac{35\pi}{48}+\frac{7\varepsilon}{3};$$

$$\Theta'_{33}=\min\left\{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon'-3\varepsilon,\ \frac{5\pi}{8}+\frac{\pi}{2}-\frac{5\varepsilon}{2},\ 2\left(\frac{5\pi}{8}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon'\right)-6\varepsilon\right\}=$$

$$=\min\left\{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon'-3\varepsilon,\ \frac{9\pi}{8}-\frac{5\varepsilon}{2},\ \frac{7\pi}{4}-\varepsilon'-6\varepsilon\right\}\qquad=\frac{9\pi}{8}-\frac{5\varepsilon}{2},$$

$$\Theta_{33}=\max\left\{-\frac{3\pi}{2}+\varepsilon'+3\varepsilon,\ \frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}+\frac{5\varepsilon}{2},\ 2\left(\frac{\pi}{8}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon'\right)+6\varepsilon\right\}=$$

$$=\max\left\{-\frac{3\pi}{2}+\varepsilon'+3\varepsilon,\ -\frac{3\pi}{8}+\frac{5\varepsilon}{2},\ -\frac{\pi}{4}+\varepsilon'+6\varepsilon\right\}\qquad=-\frac{\pi}{4}+\varepsilon'+6\varepsilon;$$

$$\Theta'_{43}=\min\left\{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon'-3\varepsilon,\ -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}-\frac{5\varepsilon}{2},\ 2\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon'\right)-6\varepsilon\right\}=$$

$$=\min\left\{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon'-3\varepsilon,\ \frac{\pi}{3}-\frac{5\varepsilon}{2},\ \frac{\pi}{6}-\varepsilon'-6\varepsilon\right\}\qquad=\frac{\pi}{6}-\varepsilon'-6\varepsilon,$$

$$\Theta_{43}=\max\left\{-\frac{3\pi}{2}+\varepsilon'+3\varepsilon,\ -\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\frac{5\varepsilon}{2},\ 2\left(-\frac{2\pi}{3}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon'\right)+6\varepsilon\right\}=$$

$$=\max\left\{-\frac{3\pi}{2}+\varepsilon'+3\varepsilon,\ -\frac{7\pi}{6}+\frac{5\varepsilon}{2},\ -\frac{11\pi}{6}+6\varepsilon+\varepsilon'\right\}\qquad=-\frac{7\pi}{6}+\frac{5\varepsilon}{2};$$

$$\Theta'_{53}=\Theta'_{63}=\Theta'_{73}=\frac{\pi}{2}-\varepsilon'+\pi-3\varepsilon\qquad=\frac{3\pi}{2}-\varepsilon'-3\varepsilon,$$

$$\Theta_{53}=\Theta_{63}=\Theta_{73}=-\frac{\pi}{2}+\varepsilon'-\pi+3\varepsilon\qquad=-\frac{3\pi}{2}+\varepsilon'+3\varepsilon;$$

$$\Theta'_{83}=\min\left\{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon'-3\varepsilon,\ \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}-\frac{13\varepsilon}{6},\ \frac{6\left(\frac{\pi}{12}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon'\right)}{6-1}-\frac{14\varepsilon}{5}\right\}=$$

$$=\min\left\{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon'-3\varepsilon,\ \frac{\pi}{4}-\frac{13\varepsilon}{6},\ \frac{\pi}{5}-\frac{\varepsilon'}{5}-\frac{14\varepsilon}{5}\right\}\qquad=\frac{\pi}{5}-\frac{\varepsilon'}{5}-\frac{14\varepsilon}{5},$$

$$\Theta_{82} = \max\left\{-\frac{3\pi}{2}+\varepsilon'+3\varepsilon,\ -\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}+\frac{13\varepsilon}{6},\ \frac{6\left(-\frac{\pi}{12}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon'\right)}{6-1}+\frac{14\varepsilon}{5}\right\}=$$

$$=\max\left\{-\frac{3\pi}{2}+\varepsilon'+3\varepsilon,\ -\frac{\pi}{4}+\frac{13\varepsilon}{6},\ -\frac{\pi}{5}+\frac{\varepsilon'}{5}+\frac{14\varepsilon}{5}\right\} \qquad =-\frac{\pi}{5}+\frac{\varepsilon'}{5}+\frac{14\varepsilon}{5}.$$

4. On a donc

$$\Delta_{3+} = \min\left(\min_{j=1}^{8}\Theta'_{j3},\ \Theta^*_{3+}\right)=\frac{5\pi}{32}-\frac{\varepsilon'}{2}-4\varepsilon,$$

$$\Delta_{3-} = \max\left(\max_{j=1}^{8}\Theta_{j3},\ \Theta^*_{3-}\right)=-\frac{3\pi}{16}+\frac{\varepsilon'}{2}+4\varepsilon.$$

Alors on voit immédiatement qu'il existe entre les directions $(\max(\Delta_{3-},\ \theta^*_{3-}))=$ $=\left(-\frac{3\pi}{16}+\frac{\varepsilon'}{2}+4\varepsilon\right)$ et $(\min(\Delta_{3+},\ \theta^*_{3+}))=\left(\frac{5\pi}{32}-\frac{\varepsilon'}{2}-4\varepsilon\right)$ les directions singulières (θ_{1+}), (θ_{2-}), (θ_{3+}), (θ_{4-}) des $\Lambda_j(x)$ ponr $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$. L'hypothèse B_3 est donc vérifiée. Par conséquent, d'après le théorème 3, la solution formelle (F) où $Z_j=0$ pour $j\notin E_3$ converge dans le domaine $\mathfrak{D}\left(-\frac{3\pi}{16}+\frac{\varepsilon'}{2}+4\varepsilon,\ \frac{5\pi}{32}-\frac{\varepsilon'}{2}-4\varepsilon,\ r\right)$.

58. Sur les hypothèses B_2 et C^*_{32}.

1. Si l'on désigne par (θ'_{k-}) et (θ'_{k+}) les directions singulières des $\Lambda_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ immédiatement inférieure et supérieure à la direction (0) respectivement, on a

$$\theta'_{1+}=\frac{\pi}{24}\quad,\quad \theta'_{2+}=\frac{13\pi}{48}\quad,\quad \theta'_{3+}=\frac{\pi}{8}\quad,\quad \theta'_{4+}=\frac{\pi}{3},$$

$$\theta'_{1-}=-\frac{7\pi}{24}\quad,\quad \theta'_{2-}=-\frac{\pi}{16}\quad,\quad \theta'_{3-}=-\frac{3\pi}{8}\quad,\quad \theta'_{4-}=-\frac{\pi}{6},$$

d'où l'on déduit

$$\theta^*_{1-}=\max_{k=1}^{2}\theta'_{k-}=-\frac{\pi}{16}\quad,\quad \theta^*_{1+}=\min_{k=1}^{2}\theta'_{k+}=\frac{\pi}{24};$$

$$\theta^*_{2-}=\max_{k=3}^{4}\theta'_{k-}=-\frac{\pi}{6}\quad,\quad \theta^*_{2+}=\min_{k=3}^{4}\theta'_{k+}=\frac{\pi}{8}.$$

2. Les développements asymptotiques des coefficients $P_{j\mathfrak{F}_2}(x)$ sont valables toujours dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta^*_{2-},\ \Theta^*_{2+},\ r]=\mathfrak{D}\left[-\frac{\pi}{4}+\delta',\ \frac{\pi}{4}-\delta',\ r\right]$. En effet, $\Lambda_{j\mathfrak{F}_2}(x)\,(j=3,\ 4)$ étant des polynomes de x^{-1} de degrés égaux à 2, ce domaine est certainement propre pour $\Lambda_{j\mathfrak{F}_2}(x)$.

3. Calcul des Θ'_{j2} et Θ_{j2}. D'après (38.6) (38.10) et (38.6'), (38.10'), on a:

$$\Theta'_{12} = \min\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}-3\varepsilon,\ \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{3}-\frac{8\varepsilon}{3},\ 3\left(\frac{3\pi}{8}\right)-2\left(-\frac{\pi}{6}\right)-10\varepsilon\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{5\pi}{8}-3\varepsilon,\ \frac{17\pi}{24}-\frac{8\varepsilon}{3},\ \frac{35\pi}{24}-10\varepsilon\right\} = \frac{5\pi}{8}-3\varepsilon,$$

$$\Theta_{12} = \max\left\{-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+3\varepsilon,\ \frac{\pi}{24}-\frac{\pi}{3}+\frac{8\varepsilon}{3},\ 3\left(\frac{\pi}{24}\right)-2\left(\frac{\pi}{8}\right)+10\varepsilon\right\} =$$

$$= \max\left\{-\frac{2\pi}{3}+3\varepsilon,\ -\frac{7\pi}{24}+\frac{8\varepsilon}{3},\ -\frac{\pi}{8}+10\varepsilon\right\} = -\frac{\pi}{8}+10\varepsilon;$$

$$\Theta'_{22} = \min\left\{\frac{5\pi}{8}-3\varepsilon,\ -\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{3}-\frac{8\varepsilon}{3},\ 3\left(-\frac{\pi}{16}\right)-2\left(-\frac{\pi}{6}\right)-10\varepsilon\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{5\pi}{8}-3\varepsilon,\ \frac{13\pi}{48}-\frac{8\varepsilon}{3},\ \frac{7\pi}{48}-10\varepsilon\right\} = \frac{7\pi}{48}-10\varepsilon,$$

$$\Theta_{22} = \max\left\{-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+3\varepsilon,\ -\frac{19\pi}{48}-\frac{\pi}{3}+\frac{8\varepsilon}{3},\ 3\left(-\frac{19\pi}{48}\right)-2\left(\frac{\pi}{8}\right)+10\varepsilon\right\} =$$

$$= \max\left\{-\frac{2\pi}{3}+3\varepsilon,\ -\frac{35\pi}{48}+\frac{8\varepsilon}{3},\ -\frac{23\pi}{16}+10\varepsilon\right\} = -\frac{2\pi}{3}+3\varepsilon;$$

$$\Theta'_{32} = \Theta'_{42} = \Theta'_{52} = \Theta'_{62} = \Theta'_{72} = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}-3\varepsilon = \frac{5\pi}{8}-3\varepsilon,$$

$$\Theta_{32} = \Theta_{42} = \Theta_{52} = \Theta_{62} = \Theta_{72} = -\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+3\varepsilon = -\frac{2\pi}{3}+3\varepsilon;$$

$$\Theta'_{82} = \min\left\{\frac{5\pi}{8}-3\varepsilon,\ \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}-\frac{7\varepsilon}{3},\ \frac{6\left(\frac{\pi}{12}\right)-2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{6-2}-4\varepsilon\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{5\pi}{8}-3\varepsilon,\ \frac{\pi}{4}-\frac{7\varepsilon}{3},\ \frac{5\pi}{24}-4\varepsilon\right\} = \frac{5\pi}{24}-4\varepsilon,$$

$$\Theta_{82} = \max\left\{-\frac{2\pi}{3}+3\varepsilon,\ -\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}+\frac{7\varepsilon}{3},\ \frac{6\left(-\frac{\pi}{12}\right)-2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{6-2}+4\varepsilon\right\} =$$

$$= \max\left\{-\frac{2\pi}{3}+\cdot\,\varepsilon,\ -\frac{\pi}{4}+\frac{7\varepsilon}{3},\ -\frac{3\pi}{16}+4\varepsilon\right\} = -\frac{3\pi}{16}+4\varepsilon.$$

4. On a donc

$$\Delta_{2-}=\max(\max_{j=1}^{8}\Theta_{j2},\ \Theta^*_{2-})=-\frac{\pi}{8}+10\varepsilon,\ \ \Delta_{2+}=\min(\min_{j=1}^{8}\Theta'_{j2},\ \Theta^*_{2+})=\frac{7\pi}{48}-10\varepsilon.$$

Alors on voit sans peine qu'il existe, entre les directions $(\max(\Delta_{2-},\ \theta^*_{2-}))=$ $=\left(-\frac{\pi}{8}+10\varepsilon\right)$ et $(\min(\Delta_{2+},\ \theta^*_{2+}))=\left(\frac{\pi}{8}\right)$, les directions singulières (θ_{1+}), (θ_{2-}). L'hypothèse B_2 est donc aussi vérifiée.

Soient (θ_{3p+}) les directions singulières ascendantes des $\Lambda_3(x)-p\Lambda_4(x)$ telles que $\theta_{3p+}=\frac{\pi}{8}$ pour $p=0$ et (θ_{4p-}) les directions singulières descendantes $\Lambda_4(x)-p\Lambda_3(x)$ telles que $\theta_{4p-}=-\frac{\pi}{6}$ pour $p=0$. Alors on a

$$\tilde{\theta}_{2-}=\theta_{4-}=-\frac{\pi}{6}<\theta_{3p+}\leqq\frac{\pi}{8}=\theta_{3+}=\tilde{\theta}_{2+}\ \text{ et }\ -\frac{\pi}{6}\leqq\theta_{4p-}<\frac{\pi}{8}.$$

D'autre part, on a

$$\max(\Delta^*_{3-},\ \theta^*_{3-},\ \Theta^*_{2-},\ \tilde{\theta}_{2-})=\max\left(-\frac{3\pi}{16}+\frac{\varepsilon'}{2}+4\varepsilon,\ -\frac{\pi}{2}+\varepsilon',\ -\frac{\pi}{4}+\delta',\ -\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{6},$$

$$\min(\Delta^*_{3+},\ \theta^*_{3+},\ \Theta^*_{2+},\ \tilde{\theta}_{2+})=\min\left(\frac{5\pi}{32}-\frac{\varepsilon'}{2}-4\varepsilon,\ \frac{\pi}{2}-\varepsilon',\ \frac{\pi}{4}-\delta',\frac{\pi}{8}\right)\qquad=\ \frac{\pi}{8}.$$

La condition C^*_{32} est donc vérifiée.

59. Sur l'hypothèse C^*_{21}. On voit d'après le théorème 2 dans le premier mémoire, la solution formelle F où l'on pose $Z_j=0$ pour $j\notin E_1$ est convergente toujours dans le domaine $\mathfrak{D}\left(-\frac{\pi}{6}+\delta',\ \frac{\pi}{6}-\delta',\ r\right)$. Les extrémités de ce domaine sont calculées comme il suit:

On voit d'abord que les développements asymptotiques des coefficients $P_{j\mathfrak{g}_1}(x)$ sont valables dans le domaine $\mathfrak{D}\left[-\frac{\pi}{6}+\delta',\ \frac{\pi}{6}-\delta',\ r\right]$, δ' étant supposé un nombre positif suffisamment petit.

Puis on a

$$\Theta'_{11}=\Theta'_{21}=\Theta'_{31}=\Theta'_{41}=\Theta'_{51}=\Theta'_{61}=\Theta'_{71}=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{3}-3\varepsilon\ =\ \frac{3\pi}{8}-3\varepsilon,$$

$$\Theta_{11}=\Theta_{21}=\Theta_{31}=\Theta_{41}=\Theta_{51}=\Theta_{61}=\Theta_{71}=-\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{3}+3\varepsilon=-\frac{19\pi}{48}+3\varepsilon;$$

$$\Theta_{81}'=\min\left\{\frac{3\pi}{8}-3\varepsilon,\ \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}-\frac{5\varepsilon}{2},\ \frac{6\left(\frac{\pi}{12}\right)-3\left(-\frac{\pi}{16}\right)}{6-3}-6\varepsilon\right\}=$$

$$=\min\left\{\frac{3\pi}{8}-3\varepsilon,\frac{\pi}{4}-\frac{5\varepsilon}{2},\ \frac{11\pi}{48}-6\varepsilon\right\}\qquad=\ \frac{11\pi}{48}-6\varepsilon$$

$$\Theta_{81} = \max\left\{-\frac{19\pi}{48}+3\varepsilon,\ -\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}+\frac{5\varepsilon}{2},\ \frac{6\left(-\frac{\pi}{12}\right)-3\left(\frac{\pi}{24}\right)}{6-3}+6\varepsilon\right\} =$$

$$= \max\left\{-\frac{19\pi}{48}+3\varepsilon,\ -\frac{\pi}{4}+\frac{5\varepsilon}{2},\ -\frac{5\pi}{24}+6\varepsilon\right\} \qquad = -\frac{5\pi}{24}+6\varepsilon,$$

d'où l'on déduit

$$\Delta_{1-} = \max\left(\max_{j=1}^{8}\Theta_{j1},\ \Theta_{1-}^{*}\right) = \max\left(-\frac{19\pi}{48}+3\varepsilon,\ -\frac{5\pi}{24}+6\varepsilon,\ -\frac{\pi}{6}+\delta'\right) = -\frac{\pi}{6}+\delta'$$

$$\Delta_{1+} = \min\left(\min_{j=1}^{8}\Theta'_{j1},\ \Theta_{1+}^{*}\right) = \min\left(\frac{3\pi}{8}-3\varepsilon,\ \frac{11\pi}{48}-6\varepsilon,\ \frac{\pi}{6}-\delta'\right) \qquad = \frac{\pi}{6}-\delta'.$$

Si l'on désigne par (θ_{1p+}) les directions singulières ascendantes des $\Lambda_1(x)-p\Lambda_2(x)$ telles que $\theta_{1p+}=\frac{\pi}{24}$ pour $p=0$ et par (θ_{2p-}) les directions singulières descendantes des $\Lambda_2(x)-p\Lambda_1(x)$ telles que $\theta_{2p-}=-\frac{\pi}{16}$ pour $p=0$, on a sans peine

$$\tilde{\theta}_{1-} = \theta_{2-} = -\frac{\pi}{16} < \theta_{1p+} \leqq \frac{\pi}{24} = \theta_{1+} = \tilde{\theta}_{1+},\quad -\frac{\pi}{16} \leqq \theta_{2p-} < \frac{\pi}{24}.$$

D'autre part, on a

$$\max\left(\Delta_{2-}^{*},\ \theta_{2-}^{*},\ \theta_{3-}^{*},\ \Theta_{1-}^{*},\ \tilde{\theta}_{1-}\right) =$$

$$= \max\left(-\frac{\pi}{8}+10\varepsilon,\ -\frac{\pi}{6},\ -\frac{\pi}{2}+\varepsilon',\ -\frac{\pi}{6}+\delta',\ -\frac{\pi}{16}\right) = -\frac{\pi}{16},$$

$$\min\left(\Delta_{2+}^{*},\ \theta_{2+}^{*},\ \theta_{3+}^{*},\ \Theta_{1+}^{*},\ \tilde{\theta}_{1+}\right) =$$

$$= \min\left(\frac{7\pi}{48}-10\varepsilon,\ \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{2}-\varepsilon',\ \frac{\pi'}{6}-\delta',\ \frac{\pi}{24}\right) = \frac{\pi}{24},$$

dont les valeurs de Δ_{2-}^{*}, Δ_{2+}^{*} seront calculées au **n. 60.** L'hypothèse C_{21}^{*} est donc vérifiée.

60. Définition du domaine $\mathfrak{D}(\Delta_{1-}^{*},\ \Delta_{1+}^{*},\ r)$ où la série formelle (F) converge uniformément. On a vu que les hypothèses B_1, B_2, B_3 et C_{32}^{*}, C_{21}^{*} sont remplies. La série formelle (F) est donc convergente dans le domaine $\mathfrak{D}(\Delta_{1-}^{*},\ \Delta_{1+}^{*},\ r)$.

Calculons les angles Δ^*_{2-}, Δ^*_{2+} et Δ^*_{1-}, Δ^*_{1+}: Grâce aux formules (54.1) et (54.1'), on a:

$$\nu=1,\ k=2:\quad \frac{3\left(\frac{\pi}{24}\right)-2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{3-2}-10\varepsilon=\frac{11\pi}{24}-10\varepsilon,$$

$$\frac{3\left(-\frac{\pi}{16}\right)-2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{3-2}+10\varepsilon=-\frac{7\pi}{16}+10\varepsilon;$$

$$\nu=1,\ k=3:\quad \frac{3\left(\frac{\pi}{24}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon'\right)}{3-1}-4\varepsilon=\frac{5\pi}{16}-\frac{\varepsilon'}{2}-4\varepsilon,$$

$$\frac{3\left(-\frac{\pi}{16}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon'\right)}{3-1}+4\varepsilon=-\frac{11\pi}{32}+\frac{\varepsilon'}{2}+4\varepsilon;$$

$$\nu=2,\ k=3:\quad \frac{2\left(\frac{\pi}{8}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon'\right)}{2-1}-6\varepsilon=\frac{3\pi}{4}-\varepsilon'-6\varepsilon,$$

$$\frac{2\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon'\right)}{2-1}+6\varepsilon=-\frac{5\pi}{6}+\varepsilon'+6\varepsilon,$$

d'où l'on déduit

$$\Delta^*_{2-}=\max\left(-\frac{3\pi}{16}+\frac{\varepsilon'}{2}+4\varepsilon,\ -\frac{\pi}{8}+10\varepsilon,\ -\frac{5\pi}{6}+\varepsilon'+6\varepsilon\right)=-\frac{\pi}{8}+10\varepsilon,$$

$$\Delta^*_{2+}=\min\left(\frac{5\pi}{32}-\frac{\varepsilon'}{2}-4\varepsilon,\ \frac{7\pi}{48}-10\varepsilon,\ \frac{3\pi}{4}-\varepsilon'-3\varepsilon\right)=\frac{7\pi}{48}-10\varepsilon;$$

$$\Delta^*_{1-}=\max\left(-\frac{\pi}{8}+10\varepsilon,\ -\frac{\pi}{6}+\delta',\ -\frac{7\pi}{16}+10\varepsilon,\ -\frac{11\pi}{32}+\frac{\varepsilon'}{2}+4\varepsilon\right)=-\frac{\pi}{8}+10\varepsilon,$$

$$\Delta^*_{1+}=\min\left(\frac{7\pi}{48}-10\varepsilon,\ \frac{\pi}{6}-\delta',\ \frac{11\pi}{24}-10\varepsilon,\ \frac{5\pi}{16}-\frac{\varepsilon'}{2}-4\varepsilon\right)=\frac{7\pi}{48}-10\varepsilon.$$

Il nous reste à définir l'extrémité radiale du domaine $\mathfrak{D}\left(-\frac{\pi}{8}+10\varepsilon,\ \frac{7\pi}{48}-10\varepsilon,\ r\right)$. Pour cela, il suffit de définir la fonction $A_{321}(\varphi)$.

61. Dans l'exemple étudié, il n'y a aucun polynome tel que $\Lambda_j(x)\equiv 0$. Nous donnons de nouveau un exemple dont la solution formelle (F), qui dépend des Z_j correspondant à $\Lambda_j(x)\equiv 0$, converge.

Nous considérons le système d'équations différentielles non linéaires

$$x^4\frac{dy_j}{dx}=\lambda_j(x)y_j+\lambda_{j3}x^3y_j+x^4h_j(x,\ y_1,\dots,\ y_5)\qquad (j=1,\dots,\ 5), \tag{61.1}$$

où les $h_j(x,\ y_1,\dots,\ y_5)$ sont des fonctions holomorphes dans le domaine

$$x\in\mathfrak{D}\left[-\frac{7\pi}{12},\ \frac{7\pi}{20},\ r\right],\ |y_1|\leqq\eta,\dots,\ |y_5|\leqq\eta$$

et les $\lambda_j(x)$ sont des polynomes de x de degrés au plus égaux à 2, de sorte que les intégrales $\Lambda_j(x)=\int_\infty^x\lambda_j(x)x^{-4}dx$ sont des polynomes de x^{-1}:

$$\Lambda_1(x)=-\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{x^2},\quad \Lambda_2(x)=-\frac{e^{\frac{\pi i}{8}}}{x},\quad \Lambda_3(x)=-\frac{e^{-\frac{7\pi i}{16}}}{x},\quad \Lambda_5(x)=\frac{e^{-\frac{5\pi i}{16}}}{x^3},$$

$\Lambda_4(x)\equiv 0$ et $\lambda_{43}=1$. Alors on a l'inégalité

$$\Re\Lambda_1(x)<\Re\Lambda_2(x)<\Re\Lambda_3(x)<0<\Re\Lambda_5(x),\quad \Lambda_4(x)\equiv 0,\ \Re\lambda_{43}>0$$

sur le segment: $\arg x=0,\ |x|\leq\delta_0'$.

D'après le théorème 1 dans le premier mémoire, on voit qu'il existe une solution formelle de la forme

$$y_j\approx\delta_jZ_j+\Sigma P_{j\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3}(x)Z_1^{p_1}\dots Z_4^{p_4}\qquad (j=1,\dots,\ 5), \tag{F}$$

où $\mathfrak{F}_1=(p_1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $\mathfrak{F}_2=(0,\ p_2,\ p_3,\ 0)$, $\mathfrak{F}_3=(0,\ 0,\ 0,\ p_4)$ et δ_j est égal à 1 ou 0 suivant que $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ ou 5.

Nous démontrons que la solution formelle (F) est convergente toujours dans le domaine $\mathfrak{D}\left(-\frac{5\pi}{16}+6\varepsilon,\ \frac{\pi}{8}-6\varepsilon,\ r\right)$. Pour démontrer cette proposition, *il suffit que les hypothèses* B_1, B_2, B_3 *et* C_{32}^*, C_{21}^* *soient vérifiées.*

Soient (θ_{j+}) et (θ_{j-}) respectivement les directions singulières ascendante et descendante des $\Lambda_j(x)$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ 5)$ définies par

$$\theta_{1-}=-\frac{\pi}{8},\quad \theta_{2-}=-\frac{3\pi}{8},\quad \theta_{3-}=\frac{17\pi}{16},\quad \theta_{5-}=\frac{\pi}{16},$$

$$\theta_{1+}=-\frac{5\pi}{8},\quad \theta_{2+}=-\frac{11\pi}{8},\quad \theta_{3+}=\frac{\pi}{16},\quad \theta_{5+}=-\frac{13\pi}{48}.$$

Si l'on désigne par (θ'_{j-}) et (θ'_{j+}) respectivement les directions singulières des $\Lambda_j(x)$ $(j=1,\ 2,\ 3)$ immédiatement inférieure et supérieure à la direction (0), on obtient

$$\theta'_{1+}=\frac{3\pi}{8},\ \theta'_{1-}=-\frac{\pi}{8};\ \theta'_{2+}=\frac{5\pi}{8},\ \theta'_{2-}=-\frac{3\pi}{8};\ \theta'_{3+}=\frac{\pi}{16},\ \theta'_{3-}=-\frac{15\pi}{16},$$

d'où l'on déduit

$$\theta^*_{1+}=\frac{3\pi}{8},\ \theta^*_{1-}=-\frac{\pi}{8};\ \theta^*_{2+}=\min_{k=2}^{3}\theta'_{k+}=\frac{\pi}{16},\ \theta^*_{2-}=\max_{k=2}^{3}\theta'_{k-}=-\frac{3\pi}{8}.$$

1. Sur l'hypothèse B_3. On voit sans peine que le domaine $\mathfrak{D}[\Theta^*_{3-},\ \Theta^*_{3+},\ r]$, où les développements asymptotiques des coefficients $P_{j\mathfrak{F}_3}(x)$ sont valables, est $\mathfrak{D}\left[-\frac{7\pi}{12},\ \frac{7\pi}{20},\ r\right]$.

Puisque $\lambda_{43}=1$, les formules (38.10) et (38.10') deviennent respectivement

$$\Theta'_{j3}=\theta_{j-}+\frac{\pi}{2\sigma_j}-2\varepsilon\left(1+\frac{1}{\sigma_j}\right),\ \Theta_{j3}=\theta_{j+}-\frac{\pi}{2\sigma_j}+2\varepsilon\left(1+\frac{1}{\sigma_j}\right),$$

d'où

$$\Theta_{13}=-\frac{7\pi}{8}+3\varepsilon,\ \Theta'_{13}=\frac{\pi}{8}-3\varepsilon;\ \Theta_{23}=-\frac{15\pi}{8}+4\varepsilon,\ \Theta'_{23}=\frac{\pi}{8}-4\varepsilon;\ \Theta_{33}=-\frac{7\pi}{16}+$$

$$+4\varepsilon,\ \Theta'_{33}=\frac{25\pi}{16}-4\varepsilon;\ \Theta_{43}=-\frac{7\pi}{12},\ \Theta'_{43}=\frac{7\pi}{20};\ \Theta_{53}=-\frac{7\pi}{16}+\frac{8\varepsilon}{3},\ \Theta'_{53}=\frac{11\pi}{48}-\frac{8\varepsilon}{3}.$$

Par suite on a

$$\Delta_{3-}=\max\left(\max_{j=1}^{5}\Theta_{j3},\ \Theta^*_{3-}\right)=-\frac{7\pi}{16}+4\varepsilon,\quad \Delta_{3+}=\min\left(\min_{j=1}^{5}\Theta'_{j3},\ \Theta^*_{3+}\right)=\frac{\pi}{8}-4\varepsilon.$$

Les directions singulières (θ_{1-}), (θ_{2-}), (θ_{3+}) sont contenues dans le domaine $\mathfrak{D}(\Delta_{3-},\ \Delta_{3+},\ r)$. L'hypothèse B_3 est donc vérifiée.

2. Sur les hypothèses B_2 et C^*_{32}. On voit que les développements asymptotiques des coefficients $P_{j\mathfrak{F}_2}(x)$ sont valables toujours dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta^*_{2-},\ \Theta^*_{2+},\ r]=\mathfrak{D}\left[-\frac{\pi}{2}+\delta',\ \frac{7\pi}{20},\ r\right]$, δ' étant supposé assez petit.

Puis nous calculons les valeurs des Θ'_{j2} et Θ_{j2}. D'après (38.6), (38.10), et (38.6'), (38.10') on a sans peine

$$\Theta'_{12}=\frac{\pi}{8}-6\varepsilon,\qquad \Theta'_{22}=\Theta'_{32}=\Theta'_{42}=\frac{17\pi}{16}-3\varepsilon,\quad \Theta'_{52}=\frac{9\pi}{32}-4\varepsilon,$$

$$\Theta_{12}=-\frac{9\pi}{8}+\frac{5\varepsilon}{2},\quad \Theta_{22}=\Theta_{32}=\Theta_{42}=-\frac{11\pi}{8}+3\varepsilon,\ \Theta_{52}=-\frac{7\pi}{16}+4\varepsilon,$$

d'où l'on déduit

$$\Delta_{2+}=\min\left(\min_{j=1}^{5}\Theta'_{j2},\ \Theta^*_{2+}\right)=\frac{\pi}{8}-6\varepsilon,\ \Delta_{2-}=\max\left(\max_{j=1}^{5}\Theta_{j2},\ \Theta^*_{2-}\right)=-\frac{7\pi}{16}+4\varepsilon.$$

On voit alors qu'il existe entre les directions $(\max(\Delta_{2-},\ \theta^*_{2-}))=\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$ et $(\min(\Delta_{2+},\ \theta^*_{2+}))=\left(\frac{\pi}{16}\right)$ la direction singulière descendante (θ_{1-}) de $\Lambda_1(x)$. L'hypothèse B_2 est donc vérifiée.

D'autre part, on a

$$\tilde{\theta}_{2-} = \theta_{2-} = -\frac{3\pi}{8} \leqq \theta_{2p-} < \frac{\pi}{16} = \theta_{3+} = \tilde{\theta}_{2+}, \qquad -\frac{3\pi}{8} < \theta_{3p+} \leqq \frac{\pi}{16},$$

où (θ_{2p-}) sont des directions singulières descendantes des $\Lambda_2(x) - p\Lambda_3(x)$ telles que $\theta_{2p-} = -\frac{3\pi}{8}$ pour $p = 0$ et (θ_{3p+}) sont des directions singulières ascendantes des $\Lambda_3(x) - p\Lambda_2(x)$ telles que $\theta_{3p+} = \frac{\pi}{16}$ pour $p = 0$. On a de plus

$$\max(\Delta^*_{3-}, \theta^*_{3-}, \Theta^*_{2-}, \tilde{\theta}_{2-}) = -\frac{3\pi}{8}, \ \min(\Delta^*_{3+}, \theta^*_{3+}, \Theta^*_{2+}, \tilde{\theta}_{2+}) = \frac{\pi}{16}.$$

Par suite l'hypothèse C^*_{32} est aussi vérifiée.

3. Sur l'hypothèse C^*_{21}. Les développements asymptotiques des coefficients $P_{j\mathfrak{F}_1}(x)$ sont toujours valables dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta^*_{1-}, \Theta^*_{1+}, r] = \mathfrak{D}\left[-\frac{7\pi}{12}, \frac{7\pi}{20}, r\right]$.

On a de plus

$$\Theta'_{11} = \Theta'_{21} = \Theta'_{31} = \Theta'_{41} = \frac{7\pi}{8} - 3\varepsilon, \quad \Theta'_{51} = \frac{19\pi}{48} - \frac{8\varepsilon}{8},$$

$$\Theta_{11} = \Theta_{21} = \Theta_{31} = \Theta_{41} = -\frac{5\pi}{8} + 3\varepsilon, \quad \Theta_{51} = -\frac{29\pi}{48} + \frac{8\varepsilon}{8},$$

d'où l'on a

$$\Delta_{1+} = \min(\min_{j=1}^{5} \Theta'_{j1}, \Theta^*_{1+}) = \frac{7\pi}{20}, \quad \Delta_{1-} = \max(\max_{j=1}^{5} \Theta_{j1}, \Theta^*_{1-}) = -\frac{7\pi}{12}.$$

Dans ce cas, l'hypothèse C^*_{21} n'introduit aucune restriction nouvelle, car on a $\Lambda_{1\mathfrak{F}_1}(x) = \Lambda_1(x) - p\Lambda_1(x) = -(p-1)\Lambda_1(x)$.

4. Nous avons vu que les hypothèses B_1, B_2, B_3 et C^*_{32}, C^*_{21} sont remplies.

Par suite la série formelle (F) est convergente dans le domaine $\mathfrak{D}(\Delta^*_{1-}, \Delta^*_{1+}, r)$ dont les extrémités Δ^*_{1-} et Δ^*_{1+} sont calculées d'après les formules (54.1) et (54.1') comme il suit:

$$\nu = 1,\ k = 3: \quad \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4} - 3\varepsilon = \frac{5\pi}{8} - 3\varepsilon, \qquad -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} + 3\varepsilon = -\frac{3\pi}{8} + 3\varepsilon;$$

$$\nu = 2,\ k = 3: \quad \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} - 4\varepsilon = \frac{9\pi}{16} - 4\varepsilon, \qquad -\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{2} + 4\varepsilon = -\frac{7\pi}{8} + 4\varepsilon;$$

$$\nu = 1,\ k = 2: \quad 2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \left(-\frac{3\pi}{8}\right) - 6\varepsilon = \frac{9\pi}{8} - 6\varepsilon, \ 2\left(-\frac{\pi}{8}\right) - \left(\frac{\pi}{16}\right) + 6\varepsilon = -\frac{5\pi}{16} + 6\varepsilon.$$

On a donc

$$\Delta_{1+}^{*} = \min\left(\frac{\pi}{8} - 4\varepsilon,\ \frac{\pi}{8} - 6\varepsilon,\ \frac{7\pi}{20},\ \frac{5\pi}{8} - 3\varepsilon,\ \frac{9\pi}{16} - 4\varepsilon,\ \frac{9\pi}{8} - 6\varepsilon\right) = \frac{\pi}{8} - 6\varepsilon\,,$$

$$\Delta_{1-}^{*} = \max\left(-\frac{7\pi}{16} + 4\varepsilon,\ -\frac{7\pi}{16} + 4\varepsilon,\ -\frac{7\pi}{12},\ -\frac{3\pi}{8} + 3\varepsilon,\ -\frac{7\pi}{8} + 4\varepsilon,\ -\frac{5\pi}{16} + 6\varepsilon\right) = \\ = -\frac{5\pi}{16} + 6\varepsilon\,.$$

CHAPITRE V. - THÉORÈME D'EXISTENCE.

62. Le premier problème. Nous allons maintenant résoudre le premier problème, que nous avons énoncé dans l'introduction du premier mémoire, c'est la recherche d'une solution développable asymptotiquement en série entière de x. Ce problème, pour les équations différentielles linéaires, a été résolu complètement, en 1942, par M. le Prof. MASUO HUKUHARA. L'extension pour les équations différentielles non linéaires est immédiate sans aucune modification essentielle dans ses raisonnements.

Soit donné le système des équations différentielles non linéaires

$$(62.1) \qquad x^{\sigma+1}\frac{dy_j}{dx} = b_j(x) + \lambda_j(x)y_j + x^{\sigma}h_j(x,\ y_1, \dots,\ y_n) \qquad (j = 1, \dots,\ n).$$

Nous supposons 1° *que les* $h_j(x,\ y_1, \dots,\ y_n) \equiv h_j(x,\ y)$ *sont des fonctions holomorphes pour*

$$(62.2) \qquad x \in \mathfrak{D}(\Theta_-,\ \Theta_+,\ r),\quad |y_1| < \eta, \dots,\quad |y_n| < \eta\,,$$

de sorte que l'on a les développements

$$h_j(x,\ y) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)y_k + x\,\Sigma''\, a_{jk_1\dots k_n}(x)y_1^{k_1}\dots y_n^{k_n} \qquad (j = 1, \dots,\ n)$$

uniformément et absolument convergents pour

$$(62.2') \qquad x \in \mathfrak{D}[\Theta_-,\ \Theta_+,\ r],\quad |y_1| \leqq \eta, \dots,\quad |y_n| \leqq \eta\,,$$

2° *que les coefficients* $a_{jk}(x)$ *et* $a_{jk_1\dots k_n}(x)$ *sont des fonctions développables asymptotiquement en séries entières de* x *dans le domaine* $\mathfrak{D}[\Theta_-,\ \Theta_+,\ r]$, 3° *que les* $\lambda_j(x)$ *ont la même signification qu'aux chapitres précédents*, 4° *que*

$b_j(x)$ est une fonction développable asymptotiquement en série entière de x [19]

$$b_j(x) = x^\sigma a_j(x) \approx x^\sigma \sum_{m=0}^{\infty} a_{jm} x^m , \tag{62.3}$$

et 5° qu'il existe une solution formelle

$$y_j \approx \sum_{m=1}^{\infty} d_{jm} x^m \qquad (j = 1, \ldots , n). \tag{62.4}$$

Théorème 9. (Théorème d'existence). *Si le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r]$ est propre pour les polynomes $\Lambda_1(x)$, $\Lambda_2(x)$ ..., $\Lambda_n(x)$, il existe une solution développable asymptotiquement en les séries* (62.4) *dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r]$. Le degré de liberté de la solution est égal au nombre des indices j tels que le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, \infty]$ soit contenu dans une des régions à partie réelle négative pour $\Lambda_j(x)$.*

63. Détermination des angles θ'_j et inégalités. Soient $1, \ldots, \alpha' (\leq \alpha)$ les indices tels que le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, \infty]$ soit contenu dans une des régions à partie réelle négative pour $\Lambda_j(x)$ et soit (θ_0) une direction quelconque telle que $\Theta_- < \theta_0 < \Theta_+$. Si (θ_{j-}) et (θ_{j+}) sont respectivement les directions singulières de $\Lambda_j(x)$, pour $j = 1, \ldots, \alpha'$, immédiatement inférieure et supérieure à la direction (θ_0), (θ_{j-}) et (θ_{j+}) sont respectivement des directions singulières descendante et ascendante de $\Lambda_j(x)$ et l'on a

$$\theta_{j-} \leq \Theta_- < \Theta_+ \leq \theta_{j+} \qquad (j = 1, \ldots, \alpha').$$

Nous définissons les angles θ_j' $(j = 1, \ldots, \alpha')$ par les relations [20]

$$\frac{\theta_{j+} - \Theta_+}{\Theta_- - \theta_{j-}} = \frac{\Theta_+ - \theta'_j}{\theta'_j - \Theta_-} \qquad (j = 1, \ldots, \alpha'), \tag{63.1}$$

que nous appelons « **relation de Hukuhara** ». On en déduit immédiatement

$$\theta_{j-} \leq \Theta_- \leq \theta_j' \leq \Theta_+ \leq \theta_{j+} \qquad (j = 1, \ldots, \alpha').$$

Puis nous définissons x_j^0 $(j = 1, \ldots, \alpha')$ par

$$x_j^0 = r_j' e^{i\theta'_j} \qquad (j = 1, \ldots, \alpha'),$$

---

(19) Le développement de $b_j(x)$ commence en général par un terme de degré 1. Mais, dans le cas où il existe une solution formelle développable formellement en séires entières formelles de x, le système peut se transformer facilement à un système des équations de la forme (62.1).

(20) Si $\theta_{j-} = \Theta_-$ et $\Re\Lambda_j(r' e^{i\theta_{j-}}) < 0$ pour r' assez petit, on prend θ_j' égal à Θ_-. L'indice j est alors compté parmi $(1, \ldots, \alpha')$. Dans ce cas, on a nécessairement $\Theta_+ < \theta_{j+}$. Si $\theta_{j-} = \Theta_-$ et $\Re\Lambda_j(r' e^{i\theta_{j-}}) > 0$, l'indice j n'appartient pas à $(1, \ldots, \alpha')$. Il en est de même du cas de $\theta_{j+} = \Theta_+$.

$r^{j'}$ étant les nombres tels que les points x_j^0 soient sur l'extrémité radiale de $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, {}^{\prime}r]$.

Si l'on fait comme d'habitude successivement les deux transformations

$$(63.2) \qquad \begin{cases} y_j = \sum_{m=1}^{N+\sigma-1} d_{jm}x^m + v_j & (j=1, \ldots, n), \\ v_j = u_j e^{\Lambda_j(x)} & (j=1, \ldots, n), \end{cases}$$

le système (62.1) se change en un système de la forme

$$(63.3) \qquad x\frac{du_j}{dx} = [b_j'(x) + H_j(x, e^{\Lambda_1(x)}u_1, \ldots, e^{\Lambda_n(x)}u_n)]e^{-\Lambda_j(x)} \quad (j=1, \ldots, n),$$

où les $b_j'(x)$ et $H_j(x, v_1, \ldots, v_n) \equiv H_j(x, v)$ sont des fonctions continues pour $x \in \mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r_0]$, $|v_1| \leqq \eta_0, \ldots, |v_n| \leqq \eta_0$ et holomorphes dans le domaine: $x \in \mathfrak{D}(\Theta_-, \Theta_+, r_0)$, $|v_1| < \eta_0, \ldots, |v_n| < \eta_0$ $(r_0 \leqq r,\ \eta_0 \leqq \eta)$ et satisfont aux inégalités

$$(63.4) \qquad |b_j'(x)| \leqq B_N |x|^N, \quad |H_j(x, v)| \leqq A\sum_{k=1}^{n}|v_k|. \qquad (j=1, \ldots, n).$$

Pour que l'on ait le théorème 9, il suffit de démontrer la proposition suivante:

Si $nA < N$, il existe une et une seule solution de (63.3) *satisfaisant aux conditions*

$$u_j = O(|x|^N e^{-\Lambda_j(x)}) \qquad (j=1, \ldots, n)$$

et aux conditions initiales

$$u_j^0 = u_j(x_j^0) \qquad (j=1, \ldots, \alpha').$$

64. Démonstration de la proposition. Nous considérons *la famille $\mathfrak{F}$ de n fonctions $u_j(x)$ $(j=1, \ldots, n)$ holomorphes dans le domaine $\mathfrak{D}(\Theta_-, \Theta_+, r_0)$,* continue dans le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r_0]$ et satisfaisant aux inégalités

$$(64.1) \qquad |u_j(x)| \leqq K|x|^N e^{-\mathfrak{R}\Lambda_j(x)} \qquad (j=1, \ldots, n).$$

Nous définissons $U_j(x_0)$ par

$$(64.2) \qquad U_j(x_0) = u_j^0 + \int_{x_j^0}^{x_0} x^{-1}[b_j'(x) + H_j(x, e^{\Lambda(x)}u(x))]e^{-\Lambda_j(x)}dx \qquad (j=1, \ldots, \alpha'),$$

$$(64.3) \qquad U_j(x_0) = \int_0^{x_0} x^{-1}[b_j'(x) + H_j(x, e^{\Lambda(x)}u(x))]e^{-\Lambda_j(x)}dx \qquad (j=\alpha'+1, \ldots, n),$$

où les chemins d'intégration Γ_{jx_0} seront définis au n. suivant, x_0 étant un point quelconque appartenant à $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r_0]$.

Il suffit de démontrer que les fonctions $U_j(x_0)$ satisfont aux inégalités

$$|U_j(x_0)| \leq K |x_0|^N e^{-\Re \Lambda_j(x_0)} \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{64.4}$$

D'abord on suppose

$$|u_j^0| \leqq \frac{K}{2} |x_j^0|^N e^{-\Re\Lambda_j(x_j^0)} \qquad (j = 1, \dots, \alpha').$$

En tenant compte des inégalités (63.4), il suffit, pour obtenir (64.4), que l'on ait

$$(nAK + B_N)\rho^{N-1} e^{-\Re\Lambda_j(x)} \leqq \frac{K}{2} \frac{d}{ds} \{ |x|^N e^{-\Re\Lambda_j(x)} \}, \tag{64.5}$$

s désignant la longeur de l'arc de la courbe compté jusqu'au point x du point x_j^0 ou de l'origine suivant que l'on a (64.2) ou (64.3).

D'autre part, on a

$$\frac{d}{ds} \{ |x|^N e^{-\Re\Lambda_j(x)} \} = |x|^{N-1} e^{-\Re\Lambda_j(x)} \left\{ N \frac{d}{ds} |x| + |x| \frac{d}{ds} (-\Re\Lambda_j(x)) \right\}.$$

Par suite, *il suffit, pour obtenir* (64.5), *de déterminer les chemins* Γ_{jx_0}, *pour un point quelconque* $x_0 \in \mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r_0]$ *donné, contenus dans* $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r_0]$, *de manière que, pour les j tels que* $\sigma_j > 0$, *on ait l'inégalité*

$$\frac{d}{ds}(-\Re\Lambda_j(x)) \geqq \frac{|\lambda_j|}{\rho^{\sigma_j+1}} \sin \sigma_j \varepsilon \tag{64.6}$$

sur Γ_{jx_0}, *et que, pour les j tels que* $\Lambda_j(x) \equiv 0$, *on ait l'inégalité*

$$\frac{d}{ds} |x| \geqq \sin \varepsilon \tag{64.7}$$

sur Γ_{jx_0}, ε *étant un nombre positif suffisamment petit.*

65. Définition des chemins Γ_{jx_0}. Nous définissons les chemins Γ_{jx_0} comme au **n. 37.**

D'abord nous définissons les angles Δ_j et Δ'_j.

1. Pour $j = 1, \dots, \alpha'$, nous posons

$$\Delta_j = \theta'_j = \Delta'_j.$$

Pour les j tels que $j = \alpha' + 1, \dots, n$, il existe entre les directions (Θ_-) et (Θ_+) au moins une pour laquelle la fonction $\exp \Re\Lambda_j(x)$ tend vers l'infini pour $x \to 0$ ou bien l'on a $\Lambda_j(x) \equiv 0$.

2. Pour les j tels que le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r_0]$ soit contenu dans une des régions à partie réelle non négative pour $\Lambda_j(x)$ tout entier, nous posons

$$\Delta_j = \Theta_-, \qquad \Delta'_j = \Theta_+.$$

3. Pour les j tels qu'il n'existe, entre les directions (Θ_-) et (Θ_+), qu'une direction singulière descendante (θ_{j-}) de $\Lambda_j(x)$, nous posons

$$\Delta_j = \Theta_-, \qquad \Delta'_j = \theta_{j-} - 2\varepsilon.$$

En particulier, si $\theta_{j-} = \Theta_-$ [21], nous posons

$$\Delta_j = \theta_{j-} = \Delta'_j.$$

4. Pour les j tels qu'il n'existe, entre les directions (Θ_-) et (Θ_+), qu'une direction singulière ascendante (θ_{j+}) de $\Lambda_j(x)$, nous posons

$$\Delta_j = \theta_{j+} + 2\varepsilon, \quad \Delta'_j = \Theta_+.$$

En particulier, si $\theta_{j+} = \Theta_+$, nous posons

$$\Delta_j = \theta_{j+} = \Delta'_j.$$

5. Pour les j tels qu'il existe, entre les directions (Θ_-) et (Θ_+) des directions singulières descendante (θ_{j-}) et ascendante (θ_{j+}) de $\Lambda_j(x)$, nous posons

$$\Delta_j = \theta_{j+} + 2\varepsilon, \qquad \Delta'_j = \theta_{j-} - 2\varepsilon.$$

Des raisonnements plus haut, il suit que $\Theta_- \leqq \Delta_j \leqq \Delta'_j \leqq \Theta_+$.

Cela posé, les chemins Γ_{jx_0} seront définis comme il suit:

Si l'on a $\Delta_j \leqq \arg x_0 \leqq \Delta'_j$, le chemin Γ_{jx_0} est un segment joignant le point x_0 à l'origine ou le point x_j^0.

Si l'on a $\Delta'_j < \arg x_0 \leqq \Theta_+$, le chemin Γ_{jx_0} est formé de la courbe:

$$\rho = r \exp \int_\theta^\varphi \cot A_j(\varphi)d\varphi, \qquad \Delta'_j \leqq \varphi \leqq \theta \tag{65.1}$$

et du segment:

$$\rho \begin{cases} \geqq \\ \leqq \end{cases} r \exp \int_\theta^{\Delta'_j} \cot A_j(\varphi)d\varphi, \qquad \varphi = \Delta'_j, \qquad \begin{matrix} \text{pour (64.2)} \\ \text{pour (64.3).} \end{matrix}$$

Si l'on a $\Theta_- \leqq \arg x_0 < \Delta_j$, le chemin Γ_{jx_0} est formé de la courbe:

$$\rho = r \exp \int_\theta^\varphi \cot A_j(\varphi)d\varphi, \qquad \theta \leqq \varphi \leqq \Delta_j \tag{65.1'}$$

et du segment:

$$\rho \begin{cases} \geqq \\ \leqq \end{cases} r \exp \int_\theta^{\Delta_j} \cot A_j(\varphi)d\varphi, \qquad \varphi = \Delta_j. \qquad \begin{matrix} \text{pour (64.2)} \\ \text{pour (64.3).} \end{matrix}$$

---

[21] Par exemple, si $\theta_{j-} = \Theta_-$, on suppose que la fonction $\exp \mathfrak{R}\Lambda_j(x)$ tend vers l'infini pour $x \to 0$, $\arg x = \theta_{j-}$.

L'extrémité radiale du domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r_0]$ est définie par la courbe

$$\rho = r' \exp \int_{\theta'}^{\varphi} \cot A(\varphi) d\varphi, \qquad \Theta_- \leqq \varphi \leqq \Theta_+,$$

le point $r'e^{i\theta'}$ étant sur l'extrémité radiale du domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r_0]$. $x_j{}^0 = r_j' e^{i\theta'_j}$ étant sur l'extrémité radiale du domaine, on a

$$r_j' = r' \exp \int_{\theta'}^{\theta'_j} \cot A(\varphi) d\varphi .$$

66. Sur les fonctions $A_j(\varphi)$ **et** $A(\varphi)$. Sur la partie rectiligne des chemins Γ_{jx_0}, on a sans peine (64.6) pour $\sigma_j > 0$ et (64.7) pour $\Lambda_j(x) \equiv 0$, puisque $s = \rho$,

Le problème à résoudre est le suivant: *déterminer les fonctions* $A_j(\varphi)$ *et* $A(\varphi)$ *de manière que, pour les* j *tels que* $\sigma_j > 0$, *on ait l'inégalité* (64.6) *sur* Γ_{jx_0} *et que l'on ait l'inégalité* $\sigma_j \varepsilon \leqq A_j(\varphi) \leqq A(\varphi) \leqq \pi - \sigma_j \varepsilon$ *dans l'intervalle* $[\Delta_j', \Theta_+]$ *et l'inégalité* $\sigma_j \varepsilon \leqq A(\varphi) \leqq A_j(\varphi) \leqq \pi - \sigma_j \varepsilon$ *dans l'intervalle* $[\Theta_-, \Delta_j]$.

Prof. MASUO HUKUHARA a résolu le problème. Pour le résoudre, il faut faire un calcul délicat. Ici, on doit remarquer que la détermination des angles θ_j' par (63.1) est très efficace. Si l'on définit les angles θ_j' autrement, on ne pourrait s'attendre au théorème 9 et le domaine, où les développements asymptotiques de la solution sont valables, devieudrait en général moins étendu que le domaine $\mathfrak{D}[\Theta_-, \Theta_+, r_0]$.

J'ai beaucoup profité les deux mémoires [1], [2] de M. M. HUKUHARA, qui m'ont mis sur la voie pour résoudre le premier et le deuxième problèmes, sans quoi je n'aurais pas pu achever le présent travail.

J'ajoute que les résultats principaux de notre travail sont achevés pendant que je prenais, de 1954 à 1956, des leçons de Monsieur le Professeur MASUO HUKUHARA à l'Université de Tokyo.

BIBLIOGRAPHIE

M. M. HUKUHARA

[1] *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires*, III. « Mem Fac. Sci. Kyusyu Univ. », 2 (1942), 125-137.

[2] *Intégration formelle d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier.* « Annali di Matematica pura ed Applicata », Serie 4, **19** (1940), 35-44.

[3] *Renzokuna Kansû no Zoku to Syazô.* « Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. ». Ser. A, **5** (1950), 61-63.

M. IWANO

[1] *Intégration analytique d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier.* » Annali di Matematica pura ed Applicata », Serie 4, **44** (1957), 261-292.