Una analisi Fisico-Matematica del processo del cambiamento di fase.

Memoria di DEMORE QUILGHINI (a Firenze) (*).

Summary. - *In this paper we study the phenomenon of the change of phase from a mathematical-physics point of view.*

We consider a medium bounded by two parallel planes and suppose that the thermal properties (e g. the mass density) are different in the two phases and that the critical temperature is depending on the particle. This study has been done upon making use of a suitable mathematical model to which any particular case can be reduced.

§ 1. - Posizione di un nuovo problema del tipo di Stefan.

In due recenti lavori (cfr. [7] (1) e [8]) ho studiato un problema unidimensionale del tipo di STEFAN relativo ad un semispazio, supponendo che la temperatura critica alla quale avviene il cambiamento di stato sia funzione del posto mostrando l'importanza fisica di questa ipotesi. Infatti nei citati lavori, pur avendo fatto ammissioni fisicamente restrittive, quale ad esempio, l'aver supposto costanti ed uguali le caratteristiche termiche nelle due fasi, ho mostrato l'influenza della legge che definisce la temperatura critica come funzione del posto sul comportamento asintotico delle soluzioni giungendo a risultati fisicamente espressivi.

Proseguendo nel programma di ricerche inteso a formulare in modo sempre più corretto, dal punto di vista fisico-matematico, i problemi del tipo di STEFAN, mi sono proposto di analizzare il processo del cambiamento di fase togliendo alcune restrizioni fatte nei citati lavori e sempre nella ipotesi che la temperatura critica, alla quale il fenomeno si realizza, sia diversa da particella del mezzo materiale (2).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del VI° Gruppo di Ricerca Matematica del C.N.R. presso l'Istituto Matematico «U. Dini» della Università di Firenze, Viale G. B. Morgagni, 67/a.

(1) I numeri in neretto ed in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

(2) Nei citati lavori si suppone che la densità materiale sia costante e uguale nelle due fasi. Quindi, poichè la posizione di ogni particella resta immutata nel tempo, ha senso parlare di temperatura critica funzione del posto. Qui invece, poichè ci porremo nell'ipotesi che la densità sia diversa da fase a fase, il che implica il moto delle particelle che si trovano in una fase rispetto a quelle che si trovano nell'altra, allo spostarsi del fronte di separazione, è più opportuno parlare di temperatura critica funzione della particella. Questo concetto sarà meglio precisato nel seguito del paragrafo.

Precisamente, oltre a supporre che il sistema materiale in studio occupi uno strato piano indefinito, anzichè un semispazio, supporremo che le caratteristiche termiche del mezzo, quali la conduttività, il calore specifico e la densità materiale, pur essendo costanti siano diverse per le due fasi.

Siano S il sistema materiale in esame, α e β e le due fasi nelle quali supponiamo che si presenti la materia costituente S, naturalmente quando la temperatura è compresa entro certi limiti, caratteristici del corpo in questione ([3]) e che supponiamo rispettati, e siano S_α ed S_β le parti di S che si trovano rispettivamente nella fase α e nella fase β. Indichiamo poi con k_α, c_α e ρ_α, nell'ordine, la conduttività, il calore specifico e la densità materiale per la fase α e con k_β, c_β e ρ_β le corrispondenti costanti per la fase β. Sia poi P una particella di S e siano $v(P, t)$ la sua temperatura all'istante t e $u(P)$ la temperatura critica alla quale P può cambiare di fase. Senza alterare la generalità possiamo supporre, salvo una inversione della scala delle temperature, che ove risulti $v(P, t) < u(P)$ la particella P si trovi, all'istante t, nella fase α e viceversa, analogamente supporremo poi $v(P, t) > u(P)$ se è $P \in S_\beta$ e viceversa. Naturalmente con ciò supponiamo che non si verifichino fenomeni, del tipo della soprafusione (cfr. [1], n. 321, pp. 745-748), di persistenza della materia di S nella fase α al di sopra, e nella fase β al di sotto, della temperatura critica. Indicato con Σ il fronte di separazione tra le due fasi avremo poi $v(P, t) = u(P)$ se la parlicella P si trova, all'istante t, su Σ.

Riassumendo si ha:

$$\begin{gathered} v(P, t) < u(P) \quad \text{per} \quad P \in S_\alpha, \quad v(P, t) > u(P) \quad \text{per} \quad P \in S_\beta, \\ v(P, t) = u(P) \quad \text{per} \quad P \in \Sigma. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Ciò premesso sia $t = 0$ l'istante dal quale ha inizio il cambiamento di fase e, tanto per fissare le ipotesi, supponiamo che inizialmente sia $S \equiv S_\beta$. Manifestamente se $\rho_\alpha \neq \rho_\beta$ il volume di S varia quando una fase avanza sull'altra e, a priori, può variare anche la forma di S. Noi ci limiteremo però a studiare un problema unidimensionale. Per questo ci poniamo nelle seguenti ipotesi:

1) Inizialmente S occupa uno strato piano indefinito C_0 di spessore $s_0 > 0$,

([3]) Ad esempio l'uranio allo stato solido può presentarsi in tre fasi cristalline distinte. La prima è stabile fino a circa 665°C, la seconda tra 665°C e 770°C mentre la terza è stabile al di sopra di 770°C. È poi interessante il fatto che nella seconda e nella terza fase le caratteristiche termiche sono pressochè costanti (cfr. [2], Tome XV, f.le I^e, pp. 283-294).

2) La temperatura iniziale delle particelle P di S dipende da P al più tramite la distanza da uno dei piani che limitano C_0,

3) Le condizioni per la temperatura sulle facce che limitano S per $t > 0$ dipendono, al più, soltanto dal tempo t,

4) Per ogni fissata particella P di S la temperatura critica $u(P)$ alla quale può cambiare di fase è costante nel tempo e dipende da P soltanto tramite la distanza alla quale si trova inizialmente P da uno dei piani che limitano C_0.

In queste ipotesi il fenomeno della conduzione del calore in S e del cambiamento di stato è necessariamente unidimensionale e, anche per $t > 0$, S occupa uno strato piano indefinito C il cui spessore s è una funzione del tempo, $s = s(t) > 0$, $s(0) = s_0$, a priori incognita, legata allo stato di avanzamento della fase α in formazione sulla fase β preesistente.

A priori, poichè la temperatura critica non è la stessa per tutte le particelle e nonostante che inizialmente sia $S \equiv S_\beta$, potrebbero verificarsi per $t > 0$, inclusioni di una fase nell'altra, come del resto si verifica in molti casi presenti in natura nei quali le diverse fasi sotto le quali si presenta un dato corpo materiale non sono separate nettamente da un unico fronte di separazione ma sono variamente commiste tra loro.

Noi supporremo però che il cambiamento di fase avvenga in S in modo regolare, supporremo cioè che S_α ed S_β siano sempre nettamente separate nel senso di trovarsi da parti opposte di un unico fronte di separazione senza che si verifichino mai inclusioni di una fase nell'altra. Le condizioni perchè ciò accada dipendono, sempre nelle ipotesi di compatibilità riassunte dalle (1.1), in modo essenziale, come vedremo nel § 4, sia dalla legge che definisce la temperatura critica che dalla temperatura iniziale e da quella sulle facce che limitano S per $t > 0$. Anzi lo studio di alcune condizioni sufficienti perchè il processo sia regolare è uno degli elementi della analisi che intendiamo svolgere in questo lavoro (cfr. § 4).

Sia adesso $\Omega \equiv (x, y, z)$ un riferimento cartesiano ortogonale tale che i piani di equazione $x = 0$ e $x = s(t)$ coincidano con i piani che limitano S per $t \geq 0$, e, tanto per fissare le ipotesi, supponiamo che S_α si formi dalla parte del piano $x = 0$. Sia poi $f(x)$, $0 < x < s_0$, la temperatura iniziale delle particelle P che all'istante $t = 0$ hanno ascissa x e indichiamo con $\varphi(t)$ e $\psi(t)$, $t > 0$, le temperature, rispettivamente sui piani $x = 0$ e $x = s(t)$, per $t > 0$. Supposto che il processo sia regolare, vedremo poi sotto quali condizioni ciò accadde, indichiamo con $h(t)$, $t \geq 0$, $h(0) = 0$, l'ascissa del piano mobile, normale all'asse x, fronte di separazione tra le due fasi.

Precisiamo adesso il tipo di dipendenza di $u(P)$ da P. Fissata la particella P di S sia $\mu = \mu(P)$ la quantità di materia contenuta in un cilindro di base unitaria sul piano $x = 0$, con le generatrici parallele all'asse x e di altezza uguale all'ascissa x della particella P. Manifestamente pur potendo variare nel tempo la x della particella P, a causa delle variazioni di volume sopra specificate, la μ relativa a P resta costante nel tempo, quindi se x_0 è l'ascissa di P per $t = 0$ avremo, ricordando che per $t = 0$ è $S \equiv S_\beta$:

$$\mu = \mu(P) = \rho_\beta x_0$$

qualunque sia $t \geq 0$. In conseguenza dell'ipotesi 4) si avrà perciò:

$$u(P) = u(\mu(P)) = u(\mu).$$

Sia ora $t \geq 0$, se in tale istante è $P \in S_\alpha$, con che per l'ascissa x di P in tale istante avremo $0 \leq x < h(t)$, sarà:

$$\mu = \rho_\alpha x, \tag{1.2$_1$}$$

mentre se in tale istante è $P \in S_\beta$, con che avremo $h(t) < x \leq s(t)$, sarà:

$$\mu = \rho_\alpha h(t) + \rho_\beta(x - h(t)), \tag{1.2$_2$}$$

perciò, nel riferimento Ω, u si esprime mediante una forma del tipo:

$$\begin{aligned} u &= u(\rho_\alpha x), \quad x \in [o,\ h(t)], \\ u &= u(\rho_\alpha h(t) + \rho_\beta(x - h(t))), \quad x \in [h(t),\ s(t)]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Quindi, poichè all'istante $t = 0$ $S \equiv S_\beta$, dovremo avere in forza delle (1.1), tenuto conto della seconda delle (1.3) e che $h(0) = 0$, $s(0) = s_0$:

$$f(x) > u(\rho_\beta x), \quad 0 < x < s_0. \tag{1.4}$$

Inoltre, sempre in forza delle (1.1) e tenuto conto che S_α si trova dalla parte del piano $x = 0$ ed S_β dalla parte del piano $x = s(t)$, dovrà essere:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &< u(o), \\ \psi(t) &> u(\rho_\alpha h(t) + \rho_\beta(s(t) - h(t))) = u(\mu_0), \end{aligned} \tag{1.5}$$

avendo indicato con $\mu_0 = \rho_\alpha h(t) + \rho_\beta (s(t) - h(t))$ la μ relativa alle particelle che si trovano sul piano $x = s(t)$ [4].

Indichiamo infine con $l = \text{cost.} > 0$ la quantità di calore emesso, od assorbito, dall'unità di massa nel cambiamento di fase e poniamo:

$$d_\alpha = \frac{k_\alpha}{c_\alpha \rho_\alpha}, \quad d_\beta = \frac{k_\beta}{c_\beta \rho_\beta}. \tag{1.6}$$

Nelle nostre posizioni l'ascissa $h(t)$ del fronte di avanzamento, che pensiamo essere una funzione assolutamente continua di t, e la temperatura $v(x, t)$ che supponiamo continua per $t > 0$ e per $0 < x < s(t)$, derivabile almeno una volta rispetto a t e due volte rispetto ad x per $x \neq h(t)$, con derivate continue, soddisfano, supponendo trascurabile il lavoro necessario a spostare S_β rispetto ad Ω, al sistema di equazioni:

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} & d_\alpha \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}, \quad 0 < t, \ \ 0 < x < h(t), \\ & d_\beta \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\rho_\beta - \rho_\alpha}{\rho_\beta} \dot{h}(t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}, \quad 0 < t, \ \ h(t) < x < s(t), \\ & k_\alpha \lim_{x \to h(t)-} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} - k_\beta \lim_{x \to h(t)+} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = l \rho_\alpha \dot{h}(t), \ \ t > 0, \\ & h(0) = 0, \\ & \lim_{t \to 0} v(x, t) = f(x), \ \ 0 < x < s_0 \\ & \lim_{x \to 0} v(x, t) = \varphi(t), \ \ t > 0, \\ & v(h(t), t) = u(\rho_\alpha h(t)), \ \ t > 0, \\ & \lim_{x \to s(t)} v(x, t) = \psi(t), \ \ t > 0. \end{aligned} \right.$$

Infatti S_α è fisso rispetto ad Ω e perciò nella prima di (I) non compare il termine di spostamento che compare invece nella seconda perchè, quando il fronte di separazione si muove, S_β trasla rispetto ad Ω con la velocità, parallela all'asse x:

$$\dot{s}(t) = \frac{\rho_\beta - \rho_\alpha}{\rho_\beta} \dot{h}(t), \tag{1.7}$$

---

[4] Manifestamente è $\mu_0 = \text{cost.}$

come si ottiene immediatamente per derivazione osservando che è:

$$\rho_\alpha h(t) + \rho_\beta(s(t) - h(t)) = \rho_\beta s_0 = \mu_0 = \text{cost.} \tag{1.8}$$

Per giustificare la terza di (I) osserviamo che in assenza di lavoro esterno in seguito allo spostamento di S_β, essa traduce il bilancio termico attraverso il fronte di separazione. Infatti se nel tempuscolo Δt il fronte passa dalla posizione $h(t)$ alla posizione $h(t+\Delta t)$, dalla parte di S_α si è trasformata, per unità di superficie normale all'asse x, la quantità di materia $\rho_\alpha(h(t+\Delta t) - h(t))$ uguale, in forza della (1.8), alla quantità di materia $\rho_\beta(s(t) - h(t) - s(t+\Delta t) + h(t+\Delta t))$ che si trasforma dalla parte di S_β. Le altre equazioni di (I) si giustificano immediatamente traducendo le condizioni iniziali, sui piani che limitano S e sul fronte di separazione tra le due fasi.

Naturalmente, in forza delle (1.1), la soluzione $\{h(t), v(x, t)\}$ di (I), supposta esistente, regge effettivamente il fenomeno descritto a condizione che risulti:

$$\begin{gathered} v(x, t) < u(\rho_\alpha x), \quad t > 0, \ 0 < x < h(t), \\ v(x, t) > u(\rho_\alpha h(t) + \rho_\beta(x - h(t))), \quad t > 0, \ h(t) < x < s(t). \end{gathered} \tag{1.9}$$

Se la temperatura critica u è costante per tutte le particelle, ed è uguale perciò ad $u(0)$, basta che siano verificate la (1.4) e le (1.5) perchè seguano le (1.9), e ciò in forza del principio di massimo (cfr. [9]) se invece la temperatura critica non è costante le (1.9) non seguono direttamente dalla (1.4) e dalle (1.5). Ad esempio il Prof. G. SESTINI, studiando in un recente lavoro un problema non lineare del tipo di STEFAN con ipotesi per la temperatura critica analoghe alle nostre, ha messo in evidenza come, affinchè il processo abbia regolarmente inizio, il flusso termico debba soddisfare ad opportune condizioni ([10]).

Ha perciò interesse, soprattutto dal punto di vista della tecnica, di determinare, una volta assegnata la funzione u, sotto quali condizioni per $f(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ le soluzioni di (I) soddisfano le (1.9), e ciò perchè le (1.9) sono le condizioni affinchè il fenomeno proceda regolarmente nel senso già precisato, senza che si verifichino, cioè, inclusioni di una fase nell'altra.

Nel § 4 daremo delle condizioni sufficienti affinchè, supposta esistente la soluzione di (I), risultino verificate le (1.9) nella ipotesi che $u(\mu)$ sia una funzione lineare di μ. Supporremo cioè che sia:

$$u(\mu) = a\mu + b, \quad a \text{ e } b \text{ costanti.} \tag{1.10}$$

Il procedimento che seguiremo può essere però facilmente esteso anche a casi più generali, come vedremo brevemente al termine del § 2, dato che una funzione continua può sempre approssimarsi mediante una funzione lineare a tratti.

Prima però nel § 2 si riduce il sistema (I) ad un sistema formalmente identico a quello che si avrebbe ove la densità materiale fosse uguale nelle due fasi e si fa una analisi fisico-matematica del ruolo tenuto dalle varie costanti termiche, giungendo a risultati, che non mi risulta essere noti, e che sono di un certo interesse fisico-matematico. Si costruisce infatti un modello al quale si possono ricondurre, in modo unitario, sia i processi di cambiamento di fase nel quale si hanno variazioni di volume sia i processi nei quali tali variazioni non si verificano, dando anche un esempio di applicazione di tale metodo.

Nel § 3 faremo invece alcune facili premesse analitiche necessarie allo studio che verrà condotto sia nel § 4 che nel § 5. In quest'ultimo paragrafo viene proposto un metodo per calcolare approssimativamente le soluzioni di un problema del tipo di STEFAN mettendone in evidenza le proprietà e verificandone la convergenza in alcuni casi dei quali si conosce per altra via la soluzione teorica. Questa verifica è stata fatta usando il calcolatore I. B. M. 1620 in dotazione all'Istituto Matematico «U. Dini» della Università di Firenze e desidero qui ringraziare il Ch.mo Professor LUIGI MERLI Direttore del Centro di Calcolo, e i suoi collaboratori Dott. ALDO BELLENI MORANTE e Dott. ALDO PASQUALI per l'aiuto prestatomi.

§ 2. - Una analisi fisico-matematica del processo del cambiamento di fase.

Supponiamo che il sistema (I) ammetta la soluzione $\{h(t),\ v(x,\ t)\}$ e che per essa valgano le (1.9). In forza della prima delle (1.2) e posto:

$$e(t) = \rho_\alpha h(t), \quad e(0) = 0,$$

si ha:

$$v(x,\ t) = v\left(\frac{\mu}{\rho_\alpha},\ t\right),\ 0 < t,\ \ 0 < x < h(t),\quad 0 < \mu < e(t).$$

Perciò posto

$$\bar{v}(\mu,\ t) = v\left(\frac{\mu}{\rho_\alpha},\ t\right),\ \ 0 < t,\ \ 0 < \mu < e(t)$$

avremo:

$$\frac{\partial v(x,\ t)}{\partial x} = \rho_\alpha \frac{\partial \bar{v}(\mu,\ t)}{\partial \mu}, \quad 0 < t,\ 0 < x < h(t),\ 0 < \mu < e(t), \tag{2.1}$$

ed anche:

$$\frac{\partial^2 v(x,\ t)}{\partial x^2} = \rho^2_\alpha \frac{\partial^2 \bar{v}(\mu,\ t)}{\partial \mu^2}, \quad \frac{\partial v(x,\ t)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}(\mu,\ t)}{\partial t}, \quad 0 < t,\ 0 < x < h(t),\ 0 < \mu < e(t).$$

Da qui e dalla prima di (I) segue:

$$d_\alpha \rho_\alpha^2 \frac{\partial \bar{v}^2(\mu,\ t)}{\partial \mu^2} = \frac{\partial \bar{v}(\mu,\ t)}{\partial t}, \quad 0 < t,\quad 0 < \mu < e(t). \tag{2.2}$$

Dalla seconda delle (1.2) si ha poi:

$$v(x,\ t) = v\left(\frac{\mu}{\rho_\beta} + \frac{\rho_\beta - \rho_\alpha}{\rho_\beta} h(t),\ t\right), \quad 0 < t,\ h(t) < x < s(t),\quad e(t) < \mu < \mu_0.$$

Posto anche qui:

$$v\left(\frac{\mu}{\rho_\beta} + \frac{\rho_\beta - \rho_\alpha}{\rho_\beta} h(t),\ t\right) = \bar{v}(\mu,\ t), \quad 0 < t,\quad e(t) < \mu < \mu_0,$$

avremo

$$\frac{\partial v(x,\ t)}{\partial x} = \rho_\beta \frac{\partial \bar{v}(\mu,\ t)}{\partial \mu}, \quad 0 < t,\ h(t) < x < s(t),\ e(t) < \mu < \mu_0, \tag{2.3}$$

ed anche:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v(x,\ t)}{\partial x^2} = \rho_\beta^2 \frac{\partial^2 \bar{v}(\mu,\ t)}{\partial \mu^2} \\ &\frac{\partial v(x,\ t)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}(\mu,\ t)}{\partial t} - (\rho_\beta - \rho_\alpha)\dot{h}(t) \frac{\partial \bar{v}(\mu,\ t)}{\partial \mu} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &0 < t, \\ &h(t) < x < s(t), \\ &e(t) < \mu < \mu_0, \end{aligned}$$

Da qui, ricordata anche la (2.3), dalla seconda di (I) segue:

$$d_\beta \rho_\alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{v}(\mu,\ t)}{\partial \mu^2} = \frac{\partial \bar{v}(\mu,\ t)}{\partial t}, \quad 0 < t,\ e(t) < \mu < \mu_0 = \text{cost.}. \tag{2.4}$$

Ricordando infine la (2.1) e la (2.3) dalla terza di (I) si ha:

$$(2.5)\qquad k_\alpha\rho_\alpha \lim_{\mu\to e(t)-} \frac{\partial\bar{v}(\mu,\ t)}{\partial\mu} - k_\beta\rho_\beta \lim_{\mu\to e(t)+} \frac{\partial\bar{v}(\mu,\ t)}{\partial\mu} = l\dot{e}(t),\quad 0<t.$$

La (2.2), (2.4) e (2.5) provano che:

indipendentemente dalle condizioni iniziali, sui piani che limitano S e sul fronte di avanzamento di una fase sull'altra, un problema del tipo di Stefan in un mezzo materiale che occupa uno strato piano indefinito e con densità materiale diversa per le due fasi si può ricondurre ad un modello identico, dal punto di vista formale, a quello dell'analogo problema per un mezzo materiale in cui la densità è la stessa per le due fasi.

Questa osservazione, che non mi risulta essere stata fatta (tanto che in recenti studi si è cercato di integrare, senza la nostra trasformazione, i sistemi di tipo (I), cfr. [3], n. 11.2, pp. 290-291), valorizza tutti gli studi analitici fatti sui problemi del tipo di STEFAN nella ipotesi, fisicamente restrittiva, che la densità materiale sia la stessa per le due fasi, in quanto, salvo un diverso significato per i simboli, tali modelli analitici si prestano a descrivere il fenomeno anche nell'ipotesi che vi siano variazioni di volume in seguito al cambiamento di fase.

Supponiamo adesso che valga la (1.10). Senza alterare la generalità possiamo supporre, a meno di una traslazione nella scala delle temperature, che sia $b=0$. Ciò fatto poniamo:

$$(2.6)\qquad \begin{cases} V(\mu,\ t) = c_\alpha(\bar{v}(\mu,\ t) - a\mu), & 0<t,\ \ 0<\mu<e(t), \\ V(\mu,\ t) = c_\beta(\bar{v}(\mu,\ t) - a\mu), & 0<t,\ \ e(t)<\mu<\mu_0, \\ F(\mu) = c_\beta\left(f\left(\dfrac{\mu}{\rho_\beta}\right) - a\mu\right), & 0<\mu<\mu_0, \\ \Phi(t) = c_\alpha\varphi(t), & 0<t, \\ \Psi(t) = c_\beta(\psi(t) - a\mu_0), & 0<t, \end{cases}$$

e, ricordando anche le (1.6):

$$(2.7)\qquad D_\alpha = d_\alpha\rho_\alpha^2 = \frac{k_\alpha\rho_\alpha}{c_\alpha},\ \ D_\beta = d_\beta\rho_\beta^2 = \frac{k_\beta\rho_\beta}{c_\beta}.$$

In conseguenza delle (2.2), (2.4) e (2.5), tenuto conto delle (2.6) e (2.7), segue che la funzione $e(t)$ e la funzione $V(\mu, t)$ soddisfano al sistema:

$$
\text{(II)}\quad \left\{
\begin{array}{l}
D_\alpha \dfrac{\partial^2 V(\mu, t)}{\partial \mu^2} = \dfrac{\partial V(\mu, t)}{\partial t}, \quad 0 < t, \quad 0 < \mu < e(t), \\[2ex]
D_\beta \dfrac{\partial^2 V(\mu, t)}{\partial \mu^2} = \dfrac{\partial V(\mu, t)}{\partial t}, \quad 0 < t, \quad e(t) < \mu < \mu_0, \\[2ex]
D_\alpha \lim\limits_{\mu \to e(t)-} \dfrac{\partial V(\mu, t)}{\partial \mu} - D_\beta \lim\limits_{\mu \to e(t)+} \dfrac{\partial V(\mu, t)}{\partial \mu} = l\dot{e}(t) - a(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta), \quad 0 < t, \\[2ex]
e(0) = 0, \\[2ex]
\lim\limits_{t \to 0} V(\mu, t) = F(\mu), \quad 0 < \mu < \mu_0, \\[2ex]
\lim\limits_{\mu \to 0} V(\mu, t) = \Phi(t), \quad 0 < t, \\[2ex]
V(e(t), t) = 0, \quad 0 < t, \\[2ex]
\lim\limits_{\mu \to \mu_0} V(\mu, t) = \Psi(t), \quad 0 < t.
\end{array}
\right.
$$

Le (1.4) e le (1.5) assumono poi, rispettivamente, la forma:

$$F(\mu) > 0, \quad 0 < \mu < \mu_0, \tag{2.8}$$

e

$$\Phi(t) < 0, \quad \Psi(t) > 0, \quad 0 < t. \tag{2.9}$$

Infine le condizioni caratteristiche perchè il sistema (II) regga effettivamente, nella ipotesi (1.10), il fenomeno descritto al § 1 sono, ricordando le (1.9):

$$
\begin{aligned}
&V(\mu, t) < 0, \quad 0 < t, \quad 0 < \mu < e(t), \\
&V(\mu, t) > 0, \quad 0 < t, \quad e(t) < \mu < \mu_0.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Nel § 4 studieremo sotto quali condizioni per $F(\mu)$, $\Phi(t)$, e $\Psi(t)$ queste ultime sono verificate.

Diamo qui una analisi del ruolo tenuto, nel modello che abbiamo costruito riferendoci alla coordinata μ, dalle varie costanti termiche. Sia da da prima $a = 0$. In questa ipotesi, e cioè se la temperatura critica è costante, dal sistema (II) si ha che le varie costanti termiche intervengono nelle equazioni soltanto tramite il rapporto $\frac{k\rho}{c}$. Si ha quindi:

un problema del tipo di Stefan con temperatura critica costante in un mezzo materiale che occupa uno strato piano indefinito e in cui il rapporto $k\rho/c$ è uguale per le due fasi, pur potendo essere diverse da fase a fase le singole costanti, è formalmente identico all'analogo problema per un mezzo materiale in cui tutte le costanti termiche sono uguali nelle due fasi.

Acquistano così nuovo significato tutti gli studi fatti nella ipotesi, fisicamente molto restrittiva, che le costanti termiche siano uguali per le due fasi.

Sia ora $a \neq 0$. Se il mezzo materiale è tale che $k_\alpha \rho_\alpha = k_\beta \rho_\beta$ il problema è formalmente identico, come mette in evidenza il sistema (II) (vedasi in in particolare la terza equazione), ad un problema di STEFAN con temperatura critica costante. Perciò per tali sistemi materiali acquistano significato gli studi fatti relativamente a problemi di STEFAN in uno strato piano indefinito nella ipotesi di temperatura critica costante.

Supponiamo adesso che S, anzichè occupare uno strato piano indefinito di spessore finito, occupi tutto un semispazio. Manifestamente si può ancora dare al problema la forma analoga a quella del sistema (II); basta infatti porre in (II) $\mu_0 = \infty$. Perciò valgono ancora tutte le proprietà messe in evidenza per il caso dello strato di spessore finito.

Facciamo qui una applicazione dei risultati trovati nel caso che il sistema S occupi un semispazio.

Poniamo in (II) $a = 0$, $\mu_0 = \infty$, $F(\mu) = F = \text{cost.} > 0$ per $0 < \mu$, $\Phi(t) = \Phi = \text{cost.} < 0$, $\Psi(t) = F$, $0 < t$. In queste posizioni, come si può verificare con semplici calcoli, il sistema (II) ammette la soluzione:

$$e(t) = 2\lambda\sqrt{D_\alpha t}, \qquad 0 \leq t, \tag{2.11}$$

$$V(\mu, t) = \Phi\left(1 - \frac{\operatorname{erf}\dfrac{\mu}{2\sqrt{D_\alpha t}}}{\operatorname{erf}\lambda}\right), \quad 0 < t, \ 0 < \mu < e(t), \tag{2.12}$$

$$V(\mu, t) = F\left(1 - \frac{\operatorname{erfc}\dfrac{\mu}{2\sqrt{D_\beta t}}}{\operatorname{erfc}\lambda\sqrt{D_\alpha}/\sqrt{D_\beta}}\right), \quad 0 < t, \ \ e(t) < \mu, \tag{2.13}$$

essendo $\lambda = \text{cost.} > 0$ soluzione dell'equazione:

$$\frac{\exp - \lambda^2}{\operatorname{erf} \lambda} + \frac{\sqrt{D_\beta} F \exp - \frac{\lambda^2 D_\alpha}{D_\beta}}{\sqrt{D_\alpha}\, \Phi \operatorname{erfc} \lambda \sqrt{D_\alpha} / \sqrt{D_\beta}} = - \frac{l\sqrt{\pi}}{\Phi} \lambda. \tag{2.14}$$

Se ora si suppone che sia $\rho_\alpha = \rho_\beta = \rho$, cioè che la densità materiale sia la stessa per le due fasi, con che non si hanno variazioni di volume in seguito al cambiamento di fase, avremo, tenuto conto delle (1.2):

$$\mu = \rho x, \quad 0 < \mu, \quad 0 < x.$$

Da qui, dalle (2.11), (2.12) e (2.13), tenuto anche conto delle posizioni fatte e delle (2.6) e (2.7), segue la soluzione di NEUMANN per il problema nel semispazio con densità uguale nelle due fasi (cfr. [3], § 11.2, pp. 285-286). Se invece supponiamo che sia $\rho_\alpha \neq \rho_\beta$, con che si hanno variazioni di volume in seguito al cambiamento di fase, avremo, sempre dalle (1.2):

$$\mu = \rho_\alpha x, \quad 0 < \mu < e(t), \quad \mu = e(t) + \rho_\beta \left(x - \frac{e(t)}{\rho_\alpha} \right), \quad e(t) < \mu,$$

e da qui, sostituendo al posto di μ nelle (2.11), (2.12) e (2.13), otteniamo la soluzione, espressa mediante l'ascissa locale x, del problema del cambiamento di stato in un semispazio con densità diversa per le due fasi (cfr. [3], 11.2, pp. 290-291).

Terminando questo paragrafo accenniamo brevemente a come si può procedere quando la funzione $u(\mu)$ anzichè essere del tipo (1.10) è una qualunque funzione di μ continua e derivabile con derivata limitata per ogni valore di $\mu \in [0, \mu_0]$.

Dividiamo l'intervallo $[0, \mu_0]$ in n intervalli di ampiezza $p = \frac{\mu_0}{n}$ con i punti $0, p, 2p, \dots .\ mp, (m+1)p, \dots, np = \mu_0$ e approssimiamo la funzione $u(\mu)$ mediante la funzione:

$$\bar{u}(\mu) = \frac{u((m+1)p) - u(mp)}{p} \mu - mu((m+1)p) + (m+1) u(mp),$$

$$mp \leq \mu < (m+1)p.$$

Se n è sufficientemente grande diventa fisicamente lecito sostituire ad

$u(\mu)$ la funzione $\bar{u}(\mu)$ la quale in ogni intervallo $[mp, (m+1)p)$, $m=0, 1, 2, \ldots, n-1$, è del tipo $a_m\mu + b_m$, a_m, e b_m costanti. Perciò quando $e(t)$, la quale rappresenta l'ascissa sostanziale del fronte di avanzamento, indicando la quantità di materia che si è trasformata allo istante t dalla parte S_α, appartiene all'intervallo $[mp, (m+1)p)$ il fenomeno risulta retto da un sistema del tipo (II) e ciò qualunque sia $m=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Si possono quindi ripetere, per ciascun intervallo, i ragionamenti già fatti deducendo analoghe proprietà. In particolare, ricordando quanto è già stato messo in evidenza, se è $k_\alpha\rho_\alpha = k_\beta\rho_\beta$ il problema può essere trattato in ogni intervallo $[mp, (m+1)p)$ come se la temperatura critica fosse costante ed è in sostanza ciò che abbiamo fatto in [7] per dimostrare il teorema di esistenza, in [7] avevamo infatti supposto che le caratteristiche termiche fossero uguali per le due fasi.

§ 3. - Alcune osservazioni su una particolare equazione differenziale ordinaria.

Sia $v_0(\mu)$ una funzione continua di μ nell'intervallo aperto (μ_1, μ_2) ed ivi uniformemente limitata. Siano poi Δ una costante positiva e del resto arbitraria, f_1 ed f_2 due assegnati valori reali. Come è noto in queste ipotesi esiste una, ed una sola, funzione $v(\mu)$, continua per $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$, derivabile almeno due volte, con derivate continue, tale che:

$$\Delta v''(\mu) = v(\mu) - v_0(\mu), \quad \mu \in (\mu_1, \mu_2), \tag{3.1}$$

$$\lim_{\mu \to \mu_1} v(\mu) = v(\mu_1+) = f_1, \quad \lim_{\mu \to \mu_2} v(\mu) = v(\mu_2-) = f_2. \tag{3.2}$$

Posto:

$$\gamma(\mu, \bar{\mu}, \Delta) = \int_{\bar{\mu}}^{\mu} \frac{v_0(\eta)}{2\sqrt{\Delta}} \left\{ \exp\left(\frac{\mu-\eta}{\sqrt{\Delta}}\right) - \exp\left(-\frac{\mu-\eta}{\sqrt{\Delta}}\right) \right\} d\eta, \tag{3.3}$$

dove $\bar{\mu}$ è un qualunque prefissato valore appartenente all'intervallo chiuso $[\mu_1, \mu_2]$, si ha poi:

$$v(\mu) = C_1 \exp\left(\frac{\mu-\bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{\mu-\bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right) - \gamma(\mu, \bar{\mu}, \Delta) \tag{3.4}$$

dove, soddisfacendo alle (3.2), si ha:

$$C_1 = \frac{[f_2 + \gamma(\mu_2, \bar{\mu}, \Delta)] \exp\left(-\frac{\mu_1 - \bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right) - [f_1 + \gamma(\mu_1, \bar{\mu}, \Delta)] \exp\left(-\frac{\mu_2 - \bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right)}{\exp\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right) - \exp\left(-\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right)},$$

(3.5)

$$C_2 = \frac{[f_1 + \gamma(\mu_1, \bar{\mu}, \Delta)] \exp\left(\frac{\mu_2 - \bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right) - [f_2 + \gamma(\mu_2, \bar{\mu}, \Delta)] \exp\left(\frac{\mu_1 - \bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right)}{\exp\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right) - \exp\left(-\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right)}.$$

Mettiamo adesso in evidenza alcune proprietà delle quali godono gli integrali della (3.1) e che ci sono necessarie nel seguito.

a). 1) *Se è* $v(\mu_1 +) \geq 0$, $v(\mu_2 -) \geq 0$, $v_0(\mu) \geq 0$ *per* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$ *allora è pure* $v(\mu) \geq 0$ *per* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$.

2) *Se poi, ferme restando le altre ipotesi, è* $v(\mu_2 -) > 0$ *è pure* $v(\mu) > 0$ *per* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$.

3) *Se infine, oltre ad essere* $v(\mu_2 -) > 0$, *è* $v(\mu_1 +) = 0$ *allora si ha* $v'(\mu_1 +) = \lim\limits_{\mu \to \mu_1} v'(\mu) > 0$.

Dimostriamo la *a*1). - Supponiamo per assurdo che esista un valore $\mu' \in (\mu_1, \mu_2)$ tale che $v(\mu') < 0$. In tale ipotesi, a causa della continuità di $v(\mu)$ e di $v'(\mu)$ e del fatto che $v(\mu_1 +) \geq 0$, $v(\mu_2 -) \geq 0$, esisterà almeno un valore $\bar{\mu} \in (\mu_1, \mu_2)$ tale che $v(\bar{\mu}) = \bar{v} < 0$ e $v'(\bar{\mu}) = 0$. Perciò, tenuto conto che l'integrale generale della (3.1) è della forma (3.4), soddisfacendo a queste condizioni e ricordando anche la (3.3), otteniamo per $v(\mu)$ l'espressione:

$$v(\mu) = \frac{\bar{v}}{2}\left\{\exp\left(\frac{\mu - \bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right) + \exp\left(-\frac{\mu - \bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right)\right\} - \gamma(\mu, \bar{\mu}, \Delta).$$

Da qui, tenuto conto che $\gamma(\mu, \bar{\mu}, \Delta) \geq 0$ per $\bar{\mu} \leq \mu$, essendo $v_0(\mu) \geq 0$, segue $\lim\limits_{\mu \to \mu_2} v(\mu) < 0$ contro l'ipotesi che sia $v(\mu_2 -) \geq 0$. Siamo perciò caduti in assurdo. Da qui segue poi la *a*1). La dimostrazione della *a*2) è sostanzialmente simile. La *a*3) si dimostra provando da prima la esistenza di $v'(\mu_1 +) = \lim\limits_{\mu \to \mu_1} v'(\mu)$ e successivamente ragionando in modo simile a quanto fatto per provare la *a*1).

Accanto alla proprietà *a*) sussiste la seguente proprietà:

b). 1. *Se è* $v(\mu_1+) \leq 0$, $v(\mu_2-) \leq 0$, $v_0(\mu) \leq 0$ *per* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$ è pure $v(\mu) \leq 0$ *per* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$.

2. *Se poi, ferme restando le altre ipotesi, è* $v(\mu_1+) < 0$ *è pure* $v(\mu) < 0$ *per* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$.

3. *Se infine, oltre ad essere* $v(\mu_1+) < 0$, è $v(\mu_2-) = 0$ *allora è pure* $v'(\mu_2-) = \lim\limits_{\mu \to \mu_2} v'(\mu) > 0$.

Dalla *a*1) e dalla *b*1) segue poi immediatamente:

c) *Se* m *è il minore tra i numeri* $v(\mu_1+)$, $v(\mu_2-)$ *e min* $v_0(\mu)$, *per* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$, *ed* M *è il maggiore tra i numeri* $v(\mu_1+)$, $v(\mu_2-)$ *e max* $v_0(\mu)$, *per* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$, *si ha:*

$$m \leq v(\mu) \leq M, \quad \mu \in (\mu_1, \mu_2).$$

Si ha ancora:

d) 1. *Sia* $v_0(\mu) \leq 0$ *in tutto un intorno destro di* μ_1 *e inoltre* $v_0(\mu)$ *cambi di segno al più una sola volta per* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$. *Se accade che* $v(\mu_1+) = 0$, $v'(\mu_1+) \geq 0$ *e* $v(\mu_2-) \geq 0$ *allora è* $v(\mu) \geq 0$ *per* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$.

2. *Se poi, ferme restando le altre ipotesi, è* $v_0(\mu) < 0$ *in tutto un intorno destro di* μ_1 *ed è* $v'(\mu_1+) > 0$ *e* $v(\mu_2-) > 0$ *allora è pure* $v(\mu) > 0$ *per* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$.

Dimostriamo la *d*1). – Ricordando che l'integrale generale della (3.1) è della forma (3.4), posto $\bar{\mu} = \mu_1$, $v'(\mu_1+) = v' \geq 0$, segue, tenuto conto che $v(\mu_1+) = 0$:

$$v(\mu) = \frac{v'\sqrt{\Delta}}{2}\left\{\exp\left(\frac{\mu-\mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right) - \exp\left(-\frac{\mu-\mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right)\right\} - \gamma(\mu, \mu_1, \Delta). \tag{3.6}$$

Nelle nostre ipotesi su $v_0(\mu)$ si ha poi $v_0(\mu) \leq 0$ per $\mu \in (\mu_1, \mu')$ e $v_0(\mu) \geq 0$ per $\mu \in (\mu', \mu_2)$ dove è $\mu' \in (\mu_1, \mu_2]$. Perciò dalla (3.6) segue $v(\mu) \geq 0$ per $\mu \in (\mu_1, \mu')$ essendo ivi $\gamma(\mu, \mu_1, \Delta) \leq 0$ ed essendo $v' \geq 0$. Inoltre a causa della continuità di $v(\mu)$ è $v(\mu') \geq 0$.

Quindi se $\mu' = \mu_2$ la proprietà è dimostrata, se poi é $\mu' < \mu_2$ basta applicare la proprietà *a*1) all'intervallo (μ', μ_2) per ottenere $v(\mu) \geq 0$ per $\mu \in (\mu', \mu_2)$ e quindi ancora la proprietà *d*1) resta dimostrata.

La dimostrazione della *d*2) è del tutto analoga.

Accanto alla proprietà d) sussiste poi la proprietà:

e) 1. *Sia* $v_0(\mu) \geq 0$ *in tutto un intorno sinistro di* μ_2 *e inoltre* $v_0(\mu)$ *cambi di segno al più una sola volta per* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$. *Se accade che* $v(\mu_1 +) \leq 0$, $v(\mu_2 -) = 0$ *e* $v'(\mu_2 -) \geq 0$ *allora è pure* $v(\mu) \leq 0$ *per* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$.

2. *Se poi, ferme restando le altre ipotesi, è* $v_0(\mu) > 0$ *in tutto un intorno sinistro di* μ_2 *e inoltre è* $v(\mu_1 +) < 0$ *e* $v'(\mu_2 -) > 0$ *è pure* $v(\mu) < 0$ *per* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$.

Sussiste infine la seguente proprietà:

Qualunque sia $\bar{\mu} \in (\mu_1, \mu_2)$ *si ha:*

$$\lim_{\Delta \to 0} v(\bar{\mu}) = v_0(\bar{\mu})$$

Dalla (3.4), ricordando la 3.3) e le (3.5), otteniamo:

$$v(\bar{\mu}) = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4, \tag{3.7}$$

dove:

$$\Theta_1 = f_1 \frac{\exp\left(\dfrac{\mu_2 - \bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right) - \exp\left(-\dfrac{\mu_2 - \bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right)}{\exp\left(\dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right) - \exp\left(-\dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right)},$$

$$\Theta_2 = f_2 \frac{\exp\left(\dfrac{\bar{\mu} - \mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right) - \exp\left(-\dfrac{\bar{\mu} - \mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right)}{\exp\left(\dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right) - \exp\left(-\dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right)},$$

$$\Theta_3 = \frac{\gamma(\mu_1, \bar{\mu}, \Delta)\Theta_1}{f_1}, \quad \Theta_4 = \frac{\gamma(\mu_2, \bar{\mu}, \Delta)\Theta_2}{f_2}.$$

Tenuto conto che $\bar{\mu}$ è un valore fissato in modo che sia $\mu_1 < \bar{\mu} < \mu_2$ si ha immediatamente

$$\lim_{\Delta \to 0} \Theta_1 = 0, \quad \lim_{\Delta \to 0} \Theta_2 = 0 \tag{3.8}$$

Ricordando la (3.3) e l'espressione di Θ_1, otteniamo, dopo aver moltiplicato numeratore e denominatore per $\exp\left(-\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right)$, la seguente espressione per Θ_3:

$$\Theta_3 = \frac{\displaystyle\int_{\mu_1}^{\bar\mu} \frac{v_0(\eta)}{2\sqrt{\Delta}} \exp\left(\frac{\eta-\bar\mu}{\sqrt{\Delta}}\right) d\eta + \int_{\mu_1}^{\bar\mu} \frac{v_0(\eta)}{2\sqrt{\Delta}} \left\{\exp\left(\frac{2\mu_1+\bar\mu-2\mu_2-\eta}{\sqrt{\Delta}}\right) - \exp\left(\frac{2\mu_1-\bar\mu-\eta}{\sqrt{\Delta}}\right) - \exp\left(\frac{\bar\mu-2\mu_2+\eta}{\sqrt{\Delta}}\right)\right\} d\eta}{1-\exp\left(-2\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right)} \tag{3.9}$$

Essendo $\mu_1<\mu_2$ il denominatore del secondo membro della (3.9) tende ad 1 quando $\Delta \to 0$. Si ha poi:

$$\left|\int_{\mu_1}^{\bar\mu} \frac{v_0(\eta)}{2\sqrt{\Delta}} \left\{\exp\left(\frac{2\mu_1+\bar\mu-2\mu_2-\eta}{\sqrt{\Delta}}\right) - \exp\left(\frac{2\mu_1-\bar\mu-\eta}{\sqrt{\Delta}}\right) - \exp\left(\frac{\bar\mu-2\mu_2+\eta}{\sqrt{\Delta}}\right)\right\} d\eta\right| \leq$$

$$\leq M\left[2\exp\left(-2\frac{\mu_2-\bar\mu}{\sqrt{\Delta}}\right) + \exp\left(-\frac{\bar\mu-\mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right)\right],$$

avendo indicato con M il massimo di $|v_0(\mu_0)|$ per $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$.

Da qui, essendo $\mu_1 < \bar\mu < \mu_2$, segue che il secondo integrale a numeratore nel secondo membro nella (3.9) tende a 0 per $\Delta \to 0$. Avremo perciò:

$$\lim_{\Delta\to 0} \Theta_3 = \lim_{\Delta\to 0} \int_{\mu}^{\bar\mu} \frac{v_0(\eta)}{2\sqrt{\Delta}} \exp\left(\frac{\eta-\bar\mu}{\sqrt{\Delta}}\right) d\eta$$

ove il limite a secondo membro esista. Proveremo che tale limite esiste ed è uguale a $v_0(\bar\mu)/2$, in conseguenza avremo quindi:

$$\lim_{\Delta\to 0} \Theta_3 = \frac{v_0(\bar\mu)}{2} \tag{3.10}$$

Infatti scelto σ positivo arbitrario e tenuto conto della continuità di

$v_0(\mu)$ determiniamo $\delta \in (0, \bar{\mu} - \mu_1)$ tale che risulti:

$$\text{(3.11)} \qquad |\, v_0(\bar{\mu}) - v_0(\bar{\mu} - \lambda\delta) \,| < \sigma \quad \text{per} \quad \lambda \in (0, 1).$$

Osserviamo adesso che si ha:

$$\text{(3.12)} \qquad \int_{\mu_1}^{\bar{\mu}} \frac{v_0(\eta)}{2\sqrt{\Delta}} \exp\left(\frac{\eta - \bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right) d\eta - \frac{v_0(\bar{\mu})}{2} = \int_{\mu_1}^{\bar{\mu}-\delta} + \int_{\bar{\mu}-\delta}^{\bar{\mu}} - \frac{v_0(\bar{\mu})}{2}.$$

Ma è

$$\left| \int_{\mu_1}^{\bar{\mu}-\delta} \frac{v_0(\eta)}{2\sqrt{\Delta}} \exp\left(\frac{\eta - \bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right) d\eta \right| \leq \frac{M}{2}\left[\exp\left(-\frac{\delta}{\sqrt{\Delta}}\right) + \exp\left(-\frac{\bar{\mu} - \mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right)\right],$$

con il solito significato per M. Applicando il teorema della media, tenendo conto della continuità di $v_0(\mu)$, è:

$$\int_{\bar{\mu}-\delta}^{\bar{\mu}} \frac{v_0(\eta)}{2\sqrt{\Delta}} \exp\left(\frac{\eta - \bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right) d\eta = \frac{v_0(\bar{\mu} - \lambda\delta)}{2}\left[1 - \exp\left(-\frac{\delta}{\sqrt{\Delta}}\right)\right], \quad \lambda \in (0, 1),$$

perciò dalla (3.12), tenuto conto di queste ultime due, segue

$$\left| \int_{\mu_1}^{\bar{\mu}} \frac{v_0(\eta)}{2\sqrt{\Delta}} \exp\left(\frac{\eta - \bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right) d\eta - \frac{v_0(\bar{\mu})}{2} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\, |\, v_0(\bar{\mu}) - v_0(\bar{\mu} - \lambda\delta) \,| + M \left| \exp\left(-\frac{\delta}{\sqrt{\Delta}}\right) + \exp\left(-\frac{\bar{\mu} - \mu_1}{\sqrt{\Delta}}\right) \right|.$$

Quindi, scelto σ positivo arbitrario è possibile, dopo aver determinato $\delta \in (0, \bar{\mu} - \mu_1)$ in guisa che valga la (3.11), determinare un $\bar{\Delta} > 0$ tale che per $\Delta \in (0, \bar{\Delta})$ risulti:

$$\left| \int_{\mu_1}^{\bar{\mu}} \frac{v_0(\eta)}{2\sqrt{\Delta}} \exp\left(\frac{\eta - \bar{\mu}}{\sqrt{\Delta}}\right) d\eta - \frac{v_0(\bar{\mu})}{2} \right| < \sigma.$$

Da qui segue poi la (3.10). Analogamente si prova che è:

$$\lim_{\Delta \to 0} \Theta_4 = \frac{v_0(\bar{\mu})}{2}$$

Da quest'ultima, dalla (3.10), dalla (3.8) e dalla (3.7) segue infine la asserita proprietà *f*).

§ 4. - Una condizione sufficiente per la regolarità del fenomeno.

Si torni a considerare il sistema (II). Se $a(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta) = 0$ tale sistema, come è stato osservato già nel § 2, è lo schema di un problema ordinario del tipo di STEFAN e. come è noto, verificate la (2.8) e le (2.9), se $F(\mu)$, $\mu \in (0, \mu_0)$, $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$, $0 < t$, sono continue e uniformemente limitate il sistema ammette soluzioni atte a descrivere il fenomeno. Per una abbondante bibliografia su questo argomento vedasi [11].

Sia invece $a(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta) \neq 0$. In questa ipotesi è come se al calore latente $l\dot{e}(t)$ emesso, od assorbito, nel cambiamento di fase sul fronte di separazione si aggiungesse l'emissione, o l'assorbimento, a seconda del segno, della quantità di calore $- a(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)$ (5).

Naturalmente ciò non altera le ipotesi qualitative, come la continuità e l'uniforme limitatezza, da farsi su $F(\mu)$, $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$ affinchè il sistema (II) ammetta soluzioni atte a descrivere il fenomeno, mentre è da attendersi un rafforzamento delle diseguaglianze (2.8) e (2.9) in guisa che la distribuzione di temperatura in S, in particolare $\dfrac{\partial V(\mu, t)}{\partial \mu}$, sia tale da assorbire, o fornire, istante per istante oltre al calore latente normalmente emesso, anche la quantità di calore $- a(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)$; vedasi, ad esempio, il lavoro del Prof. SESTINI ([10]) già citato nel § 1.

In questo paragrafo, ferme restando le ipotesi di continuità e di limitatezza, daremo delle condizioni su $F(\mu)$, $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$, più forti della (2.8) e delle (2.9), atte ad assicurare il regolare inizio e la regolarità in futuro del fenomeno nella ipotesi che sia $a(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta) \neq 0$. Da queste condizioni discendono poi come è ovvio, la (2.8) e le (2.9) per il caso in cui $a(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta) = 0$.

A questo scopo ragioniamo come segue.

---

(5) A causa dell'analogia formale delle equazioni del sistema (II) con quelle che reggono gli ordinari problemi di propagazione del calore parleremo anche qui di temperatura calore latente, diffusività, etcc. ancorchè si tratti di grandezze fisiche diverse come mettono in evidenza le trasformazioni fatte nel § 2.

Supponiamo che il fenomeno sia regolare per ogni valore di t. Fissati $t_0 \geq 0$ e $\delta t > 0$ siano $V(\mu,\ t_0)$, $V(\mu,\ t_0 + \delta t)$, $V(\mu,\ t_0 + 2\delta t)$ le temperature in S rispettivamente negli istanti $t_0,\ t_0 + \delta t$ e $t_0 + 2\delta t$ e siano $e(t_0)$, $e(t_0 + \delta t)$, $e(t_0 + 2\delta t)$ le corrispondenti ascisse, sostanziali, del fronte di separazione. Se è $t_0 = 0$, ricordando la quarta e la quinta equazione di (II), avremo $V(\mu,\ t_0) = F(\mu)$ ed $e(t_0) = 0$.

Siano poi $\Phi(t_0 + \delta t)$, $\Phi(t_0 + 2\delta t)$, $\Psi(t_0 + \delta t))$ e $\Psi(t_0 + 2\delta t)$ le temperature, sulle facce che limitano S, negli istanti $t_0 + \delta t$ e $t_0 + 2\delta t$.

Immaginiamo adesso di determinare $V(\mu,\ t_0 + \delta t)$ ed $e(t_0 + \delta t)$ a partire da $V(\mu,\ t_0)$ e da $e(t_0)$, naturalmente tenendo conto che è:

$$\lim_{\mu \to 0} V(\mu,\ t_0 + \delta t) = \Phi(t_0 + \delta t), \quad \lim_{\mu \to \mu_0} V(\mu,\ t_0 + \delta t) = \Psi(t_0 + \delta t).$$

Essendo il processo regolare all'istante $t_0 + \delta t$, avendosi cioè (cfr. le (2.10)):

$$V(\mu,\ t_0 + \delta t) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < \mu < e(t_0 + \delta t),$$

$$V(\mu,\ t_0 + \delta t) > 0 \quad \text{per} \quad e(t_0 + \delta t) < \mu < \mu_0,$$

$V(\mu,\ t_0)$ dovrà soddisfare, nei confronti di $e(t_0)$, ad opportune condizioni, così come dovranno soddisfare a certe altre condizioni anche $\Phi(t_0 + \delta t)$ e $\Psi(t_0 + \delta t)$.

Analogamente immaginiamo di determinare $V(\mu,\ t_0 + 2\delta t)$ ed $e(t_0 + 2\delta t)$ a partire da $V(\mu,\ t_0 + \delta t)$ e da $e(t_0 + \delta t)$, naturalmente tenendo conto che è:

$$\lim_{\mu \to 0} V(\mu,\ t_0 + 2\delta t) = \Phi(t_0 + 2\delta t), \quad \lim_{\mu \to \mu_0} V(\mu,\ t_0 + 2\delta t) = \Psi(t_0 + 2\delta t).$$

Ovviamente, essendo il processo regolare anche all'istante $t_0 + 2\delta t$, la funzione di μ, $V(\mu,\ t_0 + \delta t)$ dovrà soddisfare, nei confronti di $e(t_0 + \delta t)$, alle stesse condizioni alle quali soddisfa, nei confronti di $e(t_0)$, la funzione $V(\mu,\ t_0)$, mentre $\Phi(t_0 + 2\delta t)$ e $\Psi(t_0 + 2\delta t)$ dovranno soddisfare alle stesse condizioni alle quali soddisfano, rispettivamente, $\Phi(t_0 + \delta t)$ e $\Psi(t_0 + \delta t)$. Avremo perciò risolto il problema di determinare delle condizioni sufficienti ad assicurare la regolarità del fenomeno per $t > t_0$ se troveremo, insieme ad opportune condizioni per $\Phi(t)$, e $\Psi(t)$, $t > t_0$, delle condizioni per $V(\mu,\ t_0)$, nei confronti di $e(t_0)$ tali che, oltre ad assicurare agli istanti t_0 e $t_0 + \delta t$ la regolarità del processo, sono tali che, una volta verificate per $V(\mu,\ t_0)$ nei confronti di $e(t_0)$, sono pure verificate da $V(\mu,\ t_0 + \delta t)$ nei confronti di $e(t_0 + \delta t)$.

Ciò premesso poniamo:

$$V(\mu,\ t_0) = v_0(\mu), \quad V(\mu,\ t_0 + \delta t) = v(\mu),$$

$$e(t_0) = e_0, \qquad e(t_0 + \delta t) = e,$$

$$\Phi(t_0 + \delta t) = \Phi, \quad \Psi(t_0 + \delta t) = \Psi,$$

e inoltre:

$$D_\alpha \delta t = \Delta_\alpha, \quad D_\beta \delta t = \Delta_\beta \qquad a\delta t = A. \tag{4.1}$$

Ricordando il sistema (II) possiamo supporre, per $\delta t > 0$ e sufficientemente piccolo, che la funzione $v(\mu)$ ed il valore e soddisfino, in forza della proprietà $f)$ del § 3, al sistema:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \Delta_\alpha v''(\mu) = v(\mu) - v_0(\mu), \quad 0 < \mu < e, \\ \Delta_\beta v''(\mu) = v(\mu) - v_0(\mu), \quad e < \mu < \mu_0, \\ \Delta_\alpha v'(e-) - \Delta_\beta v'(e+) = l(e - e_0) - A(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta), \\ v(0+) = \Phi, \quad v(e) = 0, \quad v(\mu_0 -) = \Psi, \end{cases}$$

a condizione che esista uno ed un sol valore $e \in (0,\ \mu_0)$, una ed una sola funzione $v(\mu)$, continua per $\mu \in (0,\ \mu_0)$, derivabile almeno due volte per $\mu \neq e$, con derivate, ove esistono, continue, che soddisfano a questo sistema. Indicheremo una tale soluzione del sistema (III) col simbolo $\{e,\ v(\mu)\}$.

A questo proposito sussistono i seguenti teoremi 1 e 2.

Teorema 1. - *Sia* $a(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta) > 0$. *In questa ipotesi condizione sufficiente affinchè il sistema* (III) *ammetta una ed una sola soluzione* $\{e,\ v(\mu)\}$ *è che sia:*

$$\Phi < 0, \quad \Psi > \frac{a}{D_\beta}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)\mu_0, \tag{4.2}$$

$$\text{(4.3)} \quad \begin{cases} v_0(\mu) < 0, & \mu \in (0,\ e_0) \\ v_0(\mu) > \dfrac{a}{D_\beta}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)(\mu - e_0), & \mu \in (e_0,\ \mu_0) \end{cases}$$

e che, comunque fissato $\eta \in [0, \mu_0]$, *la funzione:*

$$v_0(\mu, \eta) = v_0(\mu) - \frac{a}{D_\beta}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)(\mu - \eta) \tag{4.4}$$

cambi di segno al più una sola volta per $\mu \in (e_0, \mu_0)$ [6]. *In tali ipotesi per la soluzione* $\{e, v(\mu)\}$ *di* (III) *si ha:*

$$\begin{cases} v(\mu) < 0, & \mu \in (0, e), \\ v(\mu) > \dfrac{a}{D_\beta}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)(\mu - e), & \mu \in (e, \mu_0), \end{cases} \tag{4.5}$$

e inoltre, comunque si fissi $\eta \in [0, \mu_0]$, *la funzione:*

$$v(\mu, \eta) = v(\mu) - \frac{a}{D_\beta}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)(\mu - \eta) \tag{4.6}$$

cambia di segno al più una sola volta per $\mu \in (e, \mu_0)$.

In modo analogo si ha poi:

TEOREMA 2. - *Sia* $a(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta) < 0$. *In questa ipotesi condizione sufficiente affinchè il sistema* (III) *ammetta una ed una sola soluzione* $\{e, v(\mu)\}$ *è che sia:*

$$\Phi < \frac{a}{D_\alpha}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)\mu_0, \qquad \Psi > 0,$$

$$v_0(\mu) < -\frac{a}{D_\alpha}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)(\mu - e_0), \qquad \mu \in (0, e_0),$$

$$v_0(\mu) > 0, \qquad \mu \in (e_0, \mu_0),$$

e che comunque si fissi $\eta \in [0, \mu_0]$, *la funzione:*

$$v_0(\mu) + \frac{a}{D_\alpha}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)(\mu - \eta)$$

(6) Naturalmente se $e_0 = 0$ la prima delle (4.3) non ha luogo, così come non hanno luogo la seconda delle (4.3) e quest'ultima condizione se $e_0 = \mu_0$. Nel corso della dimostrazione terremo conto di queste eventualità. Analoghe considerazioni debbono farsi per l'enunciato del teorema 2.

cambi di segno al più una sola volta per $\mu \in (0, e_0)$. *In tali ipotesi per la soluzione* $\{e, v(\mu)\}$ *di* (III) *si ha:*

$$v(\mu) < -\frac{a}{D_\alpha}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)(\mu - e), \qquad \mu \in (0, e)$$

$$v(\mu) > 0, \qquad \mu \in (e, \mu_0),$$

e inoltre, comunque si fissi $\eta \in [0, \mu_0]$, *la funzione:*

$$v(\mu) + \frac{a}{D_\alpha}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)(\mu - \eta)$$

cambia di segno al più una sola volta per $\mu \in (0, e)$.

Notiamo per inciso che il caso in cui è $a(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta) = 0$ può farsi rientrare, come risulterà evidente dalla dimostrazione, sia nel teorema 1 che nel teorema 2.

Supponiamo per un momento di avere dimostrato tali teoremi. Tali teoremi, oltre a dare delle condizioni per $v_0(\mu)$ ed e_0 (e quindi per $V(\mu, t_0)$ nei confronti di $e(t_0)$) sufficienti ad assicurare l'esistenza e la unicità delle soluzioni del sistema (III) permettono di trovare immediatamente delle condizioni sufficienti ad assicurare la regolarità del fenomeno per $t > 0$. Infatti tali teoremi ci assicurano che le condizioni alle quali soddisfa $v_0(\mu)$ nei confronti di e_0 sono tali che, oltre a garantire che $v(\mu) < 0$ per $\mu \in (0, e)$ e $v(\mu) > 0$ per $\mu \in (e, \mu_0)$ (e perciò garantiscono la regolarità del fenomeno all'istante $t_0 + \delta t$), si ripetono per $v(\mu)$ nei confronti di e. Perciò tenuto conto del ragionamento fatto all'inizio di questo paragrafo seguono immediamente, ponendo $t_0 = 0$, e quindi $e_0 = 0$ e $v_0(\mu) = F(\mu)$, le ricercate condizioni su $F(\mu)$, $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$ sufficienti ad assicure il regolare inizio e la regolarità in futuro del fenomeno.

Precisamente dal teorema 1 si ha che per $a(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta) > 0$ le condizioni sono:

$$F(\mu) > \frac{a}{D_\beta}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)\mu, \qquad \mu \in (0, \mu_0) \tag{2.8$_1$}$$

$$\Phi(t) < 0, \qquad \Psi(t) > \frac{a}{D_\beta}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)\mu_0, \qquad 0 < t. \tag{2.9$_1$}$$

Analogamente dal teorema 2 seguono le condizioni per $a(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta) < 0$

che sono:

$$(2.8)_2 \qquad F(\mu) > 0, \qquad \mu \in (0,\ \mu_0),$$

$$(2.9)_2 \qquad \Phi(t) < \frac{a}{D_\alpha}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)\,\mu_0, \qquad \Psi(t) > 0, \quad 0 < t.$$

Come si verifica immediatamente, sia dalle $(2.8)_1$ e $(2.9)_1$ che dalle $(2.8)_2$ e $(2.9)_2$, seguono la (2.8) e le (2.9) del § 2 per $a(k_\alpha\rho_\alpha - k_\beta\rho_\beta) = 0$.

Ricordando adesso le (2.6) e le (2.7), tenuto anche conto della (1.8), seguono le condizioni su $f(x)$, $\varphi(t)$, e $\varphi(t)$. Nel caso $a(k_\alpha\rho_\alpha - k_\beta\rho_\beta) > 0$ esse sono:

$$(1.4)_1 \qquad f(x) > \frac{h_\alpha \rho_\alpha}{k_\beta}\, x, \qquad x \in (0,\ s_0),$$

$$(1.5)_1 \qquad \varphi(t) < 0, \qquad \psi(t) > \frac{a k_\alpha \rho_\alpha}{k_\beta} \cdot s_0, \qquad 0 < t,$$

mentre nel caso in cui è $a(k_\alpha\rho_\alpha - k_\beta\rho_\beta) < 0$ esse sono:

$$(1.4)_2 \qquad f(x) > a\rho_\beta x, \qquad x \in (0,\ s_0),$$

$$(1.5)_2 \qquad \varphi(t) < a\left(1 - \frac{k_\beta\rho_\beta}{k_\alpha\rho_\alpha}\right)\rho_\beta s_0, \qquad \psi(t) > a\rho_\beta s_0, \quad 0 < t.$$

Da queste, tenuto conto che $u(\mu) = a\mu$, seguono poi la (1.4) e le (1.5) del § 1 se $a(k_\alpha\rho_\alpha - k_\beta\rho_\beta) = 0$.

Rifacendoci, per comodità, alle $(2.8)_1$, $(2.9)_1$, $(2.8)_2$ e $(2.9)_2$ possiamo dare la seguente interpretazione fisica delle condizioni trovate.

Sia da prima $a(k_\alpha\rho_\alpha - k_\beta\rho_\beta) > 0$. Dalla terza equazione di (II) segue che sul fronte di avanzamento vi è un assorbimento costante di calore per unità di tempo e per unità di area normale all'asse x dato da $-a(k_\alpha\rho_\alpha - k_\beta\rho_\beta)$.

Ovviamente è da attendersi che tale assorbimento venga «pagato» dalla parte «calda» di S e cioè da S_β la quale dovrà essere perciò sufficentemente calda. Ora in effetti la $(2.8)_1$ dice che inizialmente, e cioè quando. nelle nostre ipotesi $S \equiv S_\beta$, il gradiente termico in S deve essere «mediamente» al di sopra del rapporto tra $a(k_\alpha\rho_\alpha - k_\beta\rho_\beta)$ e la «diffusività» D_β; la seconda delle $(2.9)_1$ dice poi che anche per $t > 0$ il gradiente termico in S_β deve mantenersi al di sopra del rapporto già detto. Per la prima delle $(2.9)_1$, infine, basta che in S_α la temperatura sia al di sotto della temperatura critica.

Analoghe considerazioni possono farsi per $a(k_\alpha\rho_\alpha - k_\beta\rho_\beta) < 0$. In tale caso sul fronte di avanzamento si ha l'emissione di calore $-a(k_\alpha\rho_\alpha - k_\beta\rho_\beta)$.

Ovviamente è da attendersi che tale emissione sia assorbita dalla parte «fredda» di S e cioè da S_α la quale dovrà essere perciò sufficientemente fredda. In effetti mentre per la $(2.8)_2$ e la seconda delle $(2.9)_2$ basta che in S_β la temperatura sia superiore a quella critica, dalla prima delle $(2.9)_2$ segue che in S_α il gradiente termico deve mantenersi «mediamente» superiore al rapporto tra $-a(k_\alpha\rho_\alpha - k_\beta\rho_\beta)$ e la «difusività» D_α.

Dimostramo adesso il teorema 1, La dimostrazione del teorema 2 come la analisi del caso in cui $a(k_\alpha\rho_\alpha - k_\beta\rho_\beta) = 0$ sono del tutto analoghe.

Supponiamo di essere nelle ipotesi di cui all'enunciato del teorema 1 e proviamo da prima l'esistenza di almeno una soluzione $\{e, v(\mu)\}$ del sistema (III).

Scelto comunque $e \in (0, \mu_0)$, ricordando la (3.3), la (3,4) e le (3.5), si soddisfa alla prima, alla seconda, alla quarta, alla quinta ed alla sesta equazione di (III) assumendo:

$$v(\mu) = \frac{\left[\gamma(e, 0, \Delta_\alpha) - \Phi \exp\left(-\frac{e}{\sqrt{\Delta_\alpha}}\right)\right] \exp\left(\frac{\mu}{\sqrt{\Delta_\alpha}}\right) - \left[\gamma(e, 0, \Delta_\alpha) - \Phi \exp\left(\frac{e}{\sqrt{\Delta_\alpha}}\right)\right] \exp\left(-\frac{\mu}{\sqrt{\Delta_\alpha}}\right)}{\exp\left(\frac{e}{\sqrt{\Delta_\alpha}}\right) - \exp\left(-\frac{e}{\sqrt{\Delta_\alpha}}\right)} - \gamma(\mu, 0, \Delta_\alpha), \quad \mu \in (0, e),$$

$$v(\mu) = \frac{[\gamma(\mu_0, e, \Delta_\beta) + \Psi] \exp\left(\frac{\mu - e}{\sqrt{\Delta_\beta}}\right) - [\gamma(\mu_0, e, \Delta_\beta) + \Psi] \exp\left(-\frac{\mu - e}{\sqrt{\Delta_\beta}}\right)}{\exp\left(\frac{\mu_0 - e}{\sqrt{\Delta_\beta}}\right) - \exp\left(-\frac{\mu_0 - e}{\sqrt{\Delta_\beta}}\right)} - \gamma(\mu, e, \Delta_\beta), \quad \mu \in (e, \mu_0).$$

Perciò l'esistenza di almeno una soluzione $\{e, v(\mu)\}$ di (III) sarà provata dimostrando che, costruita $v(\mu)$ in questa forma, esiste almeno un valore $e \in (0, \mu)$ per il quale resta soddisfatta la terza di (III). Da queste ultime due, ricordando la (3.3), otteniamo:

$$\Delta_\alpha v'(e-) = \sqrt{\Delta_\alpha}\,\frac{\gamma(e,\,0,\,\Delta_\alpha)\left[\exp\left(\frac{e}{\sqrt{\Delta_\alpha}}\right)+\exp\left(-\frac{e}{\sqrt{\Delta_\alpha}}\right)\right]-2\Phi}{\exp\left(\frac{e}{\sqrt{\Delta_\alpha}}\right)-\exp\left(-\frac{e}{\sqrt{\Delta_\alpha}}\right)} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^e v_0(\eta)\left\{\exp\left(\frac{e-\eta}{\sqrt{\Delta_\alpha}}\right)+\exp\left(-\frac{e-\eta}{\sqrt{\Delta_\alpha}}\right)\right\}d\eta,$$

$$\Delta_\beta v'(e+) = 2\sqrt{\Delta_\beta}\,\frac{\gamma(\mu_0,\,e,\,\Delta_\beta)+\Psi}{\exp\left(\frac{\mu_0-e}{\sqrt{\Delta_\beta}}\right)-\exp\left(-\frac{\mu_0-e}{\sqrt{\Delta_\beta}}\right)}.$$

Da queste, tenuto conto che $\Phi < 0$ e $\Psi > 0$ ed osservato che

$$\lim_{e\to 0}\gamma(e,\,0,\,\Delta_\alpha)=0,\qquad \lim_{e\to\mu_0}\gamma(\mu_0,\,e,\,\Delta_\beta)=0$$

segue:

$$\lim_{e\to 0}\Delta_\alpha v'(e-) = +\infty,\qquad \lim_{e\to 0}\Delta_\beta v'(e+) = \text{quantità finita},$$

$$\lim_{e\to\mu_0}\Delta_\alpha v'(e-) = \text{quantitá finita},\qquad \lim_{e\to\mu_0}\Delta_\beta v'(e+) = +\infty.$$

Da qui e dalla continuità rispetto ad e di $v'(e-)$ e di $v'(e+)$ segue l'esistenza di almeno un valore $e\in(0,\,\mu_0)$ che soddisfa alla terza equazione di (III).

Prima di dimostrare l'unicità di tale soluzione analiziamone il comportamento, dimostriamo cioè che nelle ipotesi fatte nel teorema 1 $\{e,\,v(\mu)\}$ soddisfa alle (4.5) e inoltre, comunque si fissi $\eta\in[0,\,\mu_0]$, la funzione $v(\mu,\,\eta)$ cambia di segno al più una sola volta per $\mu\in(e,\,\mu_0)$.

Si consideri la funzione $v(\mu,\,\eta)$ definita dalla (4.6). Ricordando la seconda di (III) e la (4.4) si ha:

$$\Delta_\beta v''(\mu,\,\eta) = v(\mu,\,\eta) - v_0(\mu,\,\eta),\qquad \mu\in(e,\,\mu_0), \tag{4.7}$$

dove, naturalmente, le derivate sono fatte rispetto a μ. Ricordando poi la quinta e la sesta di (III), oltre alla seconda delle (4.2), si ha:

$$(4.8)\qquad \begin{cases} v(e+,\ \eta) = -\dfrac{a}{D_\beta}(k_\alpha\rho_\alpha - k_\rho\rho_\beta)(e-\eta) \gtreqless 0 \quad \text{per} \quad e \lesseqgtr \eta, \\[2ex] v(\mu_0-,\ \eta) = \Psi - \dfrac{a}{D_\beta}(k_\alpha\rho_\alpha - k_\beta\rho_\beta)(\mu_0-\eta) > 0. \end{cases}$$

Posto infine $\eta = e$ dalla terza di (III) segue:

$$(4.9)\qquad \Delta_\alpha v'(e-) - \Delta_\beta v'(e+,\ e) = \ l(e-e_0).$$

Distinguiamo ora il caso in cui $e \leq e_0$ dal caso $e_0 < e$.

Sia $e \leq e_0$. In questo caso ha certamente senso la prima delle (4.3), infatti essendo, come abbiamo dimostrato, $0 < e < \mu_0$, è certamente $0 < e_0$. Per $e < e_0$ valgono per la funzione $v(\mu)$, relativamente allo intervallo $(0,\ e)$, le proprietà $b2)$ e $b3)$ del § 3. Per rendercene conto basta ricordare la quarta e la quinta equazione di (III) oltre alla prima delle (4.3). Dalla $b2)$ si ha:

$$(4.5)_1\qquad v(\mu) < 0, \qquad \mu \in (0,\ e),$$

mentre dalla $b3)$ segue:

$$v'(e-) > 0.$$

Da quest'ultima e dalla (4.9), ricordando che $l > 0,\ e \leq e_0$, segue:

$$(4.10)\qquad v'(e+,\ e) > 0.$$

Se $e = e_0$ dalla (4.7), dalle (4.8) per $\eta = e$ e dalla seconda delle (4.3), la quale ha certamente senso essendo $e_0 = e < \mu_0$, segue che la funzione $v(\mu,\ e)$ gode, relativamente all'intervallo $(e,\ \mu_0)$, della proprietà $a2)$ e si ha perciò $v(\mu,\ e) > 0$ per $\mu \in (e,\ \mu_0)$. Da qui, ricordando la (4.6), otteniamo:

$$(4.5)_2\qquad v(\mu) > \frac{a}{D_\beta}(k_\alpha\rho_\alpha - k_\beta\rho_\beta)(\mu - e), \qquad \mu \in (e,\ \mu_0).$$

Se poi $e < e_0$ dalla prima delle (4.3) segue $v_0(\mu,\ e) < 0$ in tutto un intorno destro di e comprendente anche e_0. Perciò nelle nostre ipotesi $v_0(\mu,\ e)$ cambia di segno al più una sola volta per $\mu \in (e,\ \mu_0)$.

Quindi la funzione $v(\mu, e)$ gode, relativamente all'intervallo (e, μ_0), della proprietà *d2*) come si verifica immediatamente ricordando anche la (4.7), le (4.8) e la (4.10). Si ha perciò $v(\mu, e) > 0$ per $\mu \in (e, \mu_0)$. Da qui segue ancora la $(4.5)_2$.

Sia ancora $e \leq e_0$ e dimostriamo che, comunque si fissi $\eta \in [0, \mu_0]$, la funzione $v(\mu, \eta)$ cambia di segno al più una sola volta per $\mu \in (e, \mu_0)$. Se $\eta \in [e, \mu_0]$ la dimostrazione è immediata ricordando la $(4.5)_2$. Sia ora $0 \leq \eta < e$. In questa ipotesi, a causa della continuitá rispetto a μ, dalle (4.8) segue che $v(\mu, \eta)$ si annulla almeno una volta per $\mu \in (e, \mu_0)$. Ricordando che $\eta < e$ e tenuto ancora conto della prima delle (4.8), indichiamo con μ' il primo zero di $v(\mu, \eta)$ a destra di e. Sia cioè:

$$v(\mu', \eta) = 0, \quad e < \mu', \quad v(\mu, \eta) < 0, \qquad \mu \in [e, \mu'). \tag{4.11}$$

Da qui, tenuto conto della continuità di $v'(\mu, \eta)$ per $\mu \in (e, \mu_0)$, segue:

$$v'(\mu', \eta) \geq 0. \tag{4.12}$$

Si consideri adesso la funzione $v_0(\mu, \eta)$. Ricordando che $0 \leq \eta < e$, e tenuto conto delle ipotesi fatte sulla funzione $v_0(\mu, \eta)$, si ha che $v_0(\mu, \eta)$ è negativa in tutto un intorno destro di e comprendente anche il valore e_0 e perciò segue, ricordando ancora le nostre ipotesi, che $v_0(\mu, \eta)$ cambia di segno al più una sola volta per $\mu \in (e, \mu_0)$.

Perciò, tenuto conto che $e < \mu'$, possono vericarsi due casi. O si ha si ha $v_0(\mu, \eta) \geq 0$ per $\mu \in (\mu', \mu_0)$ oppure è $v_0(\mu, \eta) \leq 0$ in tutto un intorno destro di μ' e cambia di segno al più una sola volta per $\mu \in (\mu', \mu_0)$.

Nel primo caso applichiamo alla funzione $v(\mu, \eta)$, relativamente allo intervallo (μ', μ_0), la proprietà *a2*), come è lecito in forza della (4.7), della seconda delle (4.8) e della prima delle (4.11). Da qui segue $v(\mu, \eta) > 0$ per $\mu \in (\mu', \mu_0)$ e quindi, ricordando la seconda delle (4.11), segue che $v(\mu, \eta)$ cambia di segno una sola volta per $\mu \in (e, \mu_0)$.

Nel secondo caso la funzione $v(\mu, \eta)$ gode, sempre relativamente allo intervallo (μ', μ_0), della proprietà *d1*) come segue dalla (4.7), dalla seconda delle (4.8), dalla prima delle (4.11) e dalla (4.12). Si ha così $v(\mu, \eta) \geq 0$ per $\mu \in (\mu', \mu_0)$ e perciò ricordando la seconda delle (4.11) si ha di nuovo che $v(\mu, \eta)$ cambia di segno una sola volta per $\mu \in (e, \mu_0)$.

Restano così dimostrate nel caso che sia $e \leq e_0$, le asserite proprietà della funzione $v(\mu)$.

Sia infine $e_0 < e$. In questo caso la funzione $v(\mu, e)$ gode, relativamente all'intervallo (e, μ_0), della proprietà *a2*). Per rendercene conto basta ricordare la (4.7), le (4.8) per $\eta = e$ oltre alla seconda delle (4.3) la quale ha certamente senso avendosi $e_0 < e < \mu_0$.

Si ha perciò $v(\mu, e) > 0$ per $\mu \in (e, \mu_0)$ e da qui segue ancora la $(4.5)_2$. Inoltre, poichè $v(\mu, e)$ gode anche, nell'intervallo (e, μ_0), della proprietà $a3)$, sarà $v'(e+, e) > 0$ e perciò dalla (4.9), tenuto conto che $l > 0$, $e_0 < e$, segue:

$$v'(e-) > 0. \tag{4.13}$$

Essendo poi $0 \leq e_0 < e < \mu_0$, in forza della seconda delle (4.3) è $v_0(\mu) > 0$ in tutto un intorno sinistro di e, di più, ricordando la prima delle (4.3) se $0 < e_0$, $v_0(\mu)$ cambia di segno al più una sola volta per $\mu \in (0, e)$. Perciò la funzione $v(\mu)$ gode, relativamente allo intervallo $(0, e)$, della proprietà $e2)$ come si verifica immediatamente ricordando la prima, la quarta e la quinta equazione di (III), la prima delle (4.2) e la (4.13). Da qui segue ancora la $(4.5)_1$.

Infine, ragionando in modo sostanzialmente analogo a come abbiamo ragionato per il caso $e \leq e_0$, si dimostra che anche per $e_0 < e$ la funzione $v(\mu, \eta)$, $\eta \in [0, \mu_0]$, cambia di segno al più una sola volta per $\mu \in (e, \mu_0)$.

Siamo adesso in grado di dimostrare che il sistema (III) ammette una sola soluzione $\{e, v(\mu)\}$.

Supponiamo per assurdo che il sistema (III) ammetta due soluzioni $\{e_1, v_1(\mu)\}$ ed $\{e_2, v_2(\mu)\}$ tra loro distinte. In questa ipotesi è necessariamente $e_1 \neq e_2$. Se infatti è $e_1 = e_2$, dalla unicità delle soluzioni della (3.1) soddisfacenti alle (3.2), tenuto conto che $v_1(\mu)$ soddisfa alle stesse equazioni alle quali soddisfa $v_2(\mu)$, negli stessi intervalli $(0, e_1 = e_2)$, $(e_1 = e_2, \mu_0)$, ed alle stesse condizioni ai limiti, segue $v_1(\mu) = v_2(\mu)$ e quindi le due soluzioni coincidono.

Se le due soluzioni sono distinte dovrà perciò essere $e_1 \neq e_2$.

Senza alterare la generalità possiamo supporre che sia $e_1 < e_2$. Tenuto adesso conto delle proprietà dimostrate sopra per le soluzioni $\{e, v(\mu)\}$ di (III) si ha:

$$\begin{aligned} &v_1(\mu) < 0 \quad \text{per} \quad \mu \in (0, e_1), \quad v_1(\mu) > 0 \quad \text{per} \quad \mu \in (e_1, \mu_0), \\ &v_2(\mu) < 0 \quad \text{per} \quad \mu \in (0, e_2), \quad v_2(\mu) > 0 \quad \text{per} \quad \mu \in (e_2, \mu_0). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Quindi, essendo $e_1 < e_2$, avremo anche $v_1(e_2) > 0$, $v_2(e_1) < 0$. Perciò la funzione:

$$w(\mu) = v_1(\mu) - v_2(\mu)$$

soddisfa, tenuto conto della prima di (III), alla equazione:

$$\Delta_\alpha w''(\mu) = w(\mu), \qquad \mu \in (0, e_1) \tag{4.15}$$

ed alle condizioni:

$$w(0+) = 0, \quad w(e_1 -) = -v_2(e_1) > 0,$$

ed alla equazione:

$$\Delta_\beta w''(\mu) = w(\mu), \qquad \mu \in (e_2, \mu_0), \tag{4.16}$$

ed alle condizioni:

$$w(e_2 +) = v_1(e_2) > 0, \quad w(\mu_0 -) = 0.$$

Quindi, tenuto conto delle (4.14) per l'intervallo (e_1, e_2), della proprietà $a3)$ per l'intervallo $(0, e_1)$ e della proprietà $b3)$, previo un cambiamento di segno, per l'intervallo (e_2, μ_0), si ha:

$$w(\mu) > 0 \quad \text{per} \quad \mu \in (0, \mu_0) \tag{4.17}$$

$$w'(0+) > 0, \quad w'(\mu_0 -) < 0. \tag{4.18}$$

Dalla (4.17) si ha perciò:

$$0 < \int_0^{\mu_0} w(\mu)\, d\mu. \tag{4.19}$$

Ma è:

$$\int_0^{\mu_0} = \int_0^{e_1} + \int_{e_1}^{e_2} + \int_{e_2}^{\mu_0},$$

e perciò, osservando che può scriversi:

$$\int_{e_1}^{e_2} w(\mu)\, d\mu = \int_{e_1}^{e_1} [(v_1(\mu) - v_0(\mu)) - (v_2(\mu) - v_0(\mu))]\, d\mu,$$

avremo, tenuto conto della (4.15), della (4.16), nonchè della prima e della seconda di (III):

$$\int_0^{\mu_0} w(\mu)\, d\mu = \Delta_\alpha \int_0^{e_1} w''(\mu)\, d\mu + \Delta_\beta \int_{e_1}^{e_2} v_1''(\mu)\, d\mu - \Delta_\alpha \int_{e_1}^{e_2} v_2''(\mu)\, d\mu +$$

$$+ \Delta_\beta \int_{e_2}^{\mu_0} w''(\mu)\, d\mu.$$

Effettuando adesso le integrazioni a secondo membro, tenendo conto della terza equazione di (III) della continuità di $v_1'(\mu)$ per $\mu \neq e_1$ e di $v_2'(\mu)$ per $\mu \neq e_2$, segue:

$$\int_0^{\mu_0} w(\mu)\, d\mu = -\Delta_\alpha w'(0+) + l(e_1 - e_2) + \Delta_\beta w'(\mu_0 -).$$

Da qui, tenuto conto delle (4.18), che $l > 0$ e che $e_1 < e_2$, segue infine:

$$\int_0^{\mu_0} w(\mu)\, d\mu < 0$$

contro la (4.19). Siamo così caduti in assurdo, e poichè l'assurdo proviene dall'avere ammesso che esistano due soluzioni distinte per il sistema (III) segue, nelle ipotesi del teorema 1, l'unicità della soluzione $\{e, v(\mu)\}$ di (III); il teorema 1 resta così dimostrato.

Mentre la dimostrazione del teorema 2 è del tutto analoga la analisi per il caso in cui è $a(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta) = 0$, pur svolgendosi sulle stesse linee generali, è molto più semplice.

§ 5. - Un sistema alle differenze associato al sistema (II).

Assegnata la costante positiva D e le funzioni $F(\mu)$, $\mu \in (0, \mu_0)$, $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$, $t \in (0, T]$, continue e uniformemente limitate, noti teoremi, cfr. esempio [12], assicurano l'esistenza e l'unicità, nella classe delle funzioni continue e derivabili, con derivate continue, per $t \in (0, T]$ e per $\mu \in (0, \mu_0)$, della soluzione $V(\mu, t)$ del sistema:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} D \dfrac{\partial^2 V(\mu, t)}{\partial \mu^2} = \dfrac{\partial V(\mu, t)}{\partial t}, & t \in (0, T], \ \mu \in (0, \mu_0), \\[2ex] \lim\limits_{t \to 0} V(\mu, t) = F(\mu), & \mu \in (0, \mu_0), \\[2ex] \lim\limits_{\mu \to 0} V(\mu, t) = \Phi(t), & t \in (0, T], \\[2ex] \lim\limits_{\mu \to \mu_0} V(\mu, t) = \Psi(t), & t (\in 0, T]. \end{cases}$$

Il problema di determinare tale funzione è stato poi largamente studiato dal punto di vista costruttivo con il metodo delle differenze finite.

Vedasi ad esempio, anche per una abbondante bibliografia, [4] parte 2, pp. 88-139 e [5] pp. 419-425.

In particolare citiamo il metodo, cosidetto implicito, consistente nel sostituire alle equazione alle derivate parziali di (IV) la equazione alle differenze finite:

$$(5.1)\qquad D\frac{U(\mu+\Delta\mu,\ t+\Delta t)-2U(\mu,\ t+\Delta t)+U(\mu-\Delta\mu,\ t+\Delta t)}{(\Delta\mu)^2}=$$

$$=\frac{U(\mu,\ t+\Delta t)-U(\mu,\ t)}{\Delta t}$$

(cfr. [4] n° 13.3, pp. 101-103). Tale metodo presenta su altri il notevole vantaggio di essere convergente comunque si fissi il valore del rapporto $\frac{\Delta t}{(\Delta\mu)^2}$. Ciò deriva essenzialmente dal fatto che, posto:

$$m=\min\,[F(\mu),\ \Phi(t),\ \Psi(t)],\quad M=\max\,[F(\mu),\ \Phi(t),\ \Psi(t)],$$

$$t\in(0,\ T],\quad \mu\in(0,\ \mu_0),$$

si ha:

$$(5.2)\qquad m\leq U(\mu,\ t),\leq M,\quad t\in(0,\ T],\quad \mu\in(0,\ \mu_0),$$

qualunque sia $\frac{\Delta t}{(\Delta\mu)^2}>0$.

Questo fatto suggerisce di sostituire alla equazione alle derivate parziali di (IV), anzichè l'equazione (5.1) alle differenze finite sia nei confronti di μ che nei confronti di t, l'equazione:

$$D\,\frac{d^2v(\mu,\ t+\Delta t)}{d\mu^2}=\frac{v(\mu,\ t+\Delta t)-v(\mu,\ t)}{\Delta t},\ \Delta t>0,$$

ai differenziali nei confronti della variabile μ ed alle differenze finite nei confronti della variabile t. Ciò equivale, diviso l'intervallo $0,\ t$, $t\in(0,\ T)$, in n intervalli di ampiezza

$$(5.3)\qquad \delta=\frac{t}{n}$$

e posto

$$\Delta=D\delta,\quad \Phi_s=\Phi(s\delta),\quad \Psi_s=\Psi(s\delta),\qquad s=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

ad associare, sostituendolo agli effetti dei calcoli, al sistema (IV) il sistema:

$$\text{(V)}\qquad \begin{cases} \Delta v_s''(\mu) = v_s(\mu) - v_{s-1}(\mu), & \mu \in (0,\ \mu_0), \\ v_s(0+) = \Phi_s,\quad v_s(\mu_0 -) = \Psi_s, & s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \\ v_0(\mu) = F(\mu), \quad \mu \in (0,\ \mu_0). \end{cases}$$

nelle incognite funzioni $v_s(\mu) = v(\mu,\ s\delta)$, $s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, da ricercare nella classe delle funzioni continue e derivabili, almeno due volte, con derivate continue, per $\mu \in (0,\ \mu_0)$.

L'esistenza e l'unicità della soluzione di (V), nonchè la proprietà del tipo (5.2), si dimostrano immediatamente ricordando i risultati del § 3. In particolare basta ricordare quanto osservato a proposito della esistenza e dell'unicità della soluzione dell'equazione (3.1) soddisfacente alle (3.2) e tenere poi conto della proprietà *c*) conducendo il procedimento dimostrativo per induzione completa. Sussiste perciò il seguente

TEOREMA 3 - *Esiste una ed una sola ennupla ordinata di funzioni* $v_s(\mu)$, $s = 1,\ 2,\ \ldots,$ *continue e derivabili almeno due volte, con derivata prima continua che soddisfano al sistema* (V). *Si ha inoltre:*

$$m \leq v_s(\mu) \leq M, \quad \mu \in (0,\ \mu_0), \qquad\qquad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Non ci occupiamo qui dei problemi di convergenza del procedimento rimandando per questo a [4], n. 13.5, pp. 105-107, limitandoci a dare, al termine di questo paragrafo, un esempio, trattato numericamente con l'elaboratore I.B.M. 1620 in dotazione all'Istituto Matematico «U. DINI» della Università di Firenze, per un problema di cui è nota la soluzione per altra via effettuando così un confronto.

Il metodo schematizzato nel sistema (V) mi sembra che presenti, sugli ordinari metodi alle differenze finite, il vantaggio che la soluzione può essere facilmente elaborata al fine di giungere ad una forma, la più conveniente possibile per il calcolo mediante un elaboratore elettronico, questo aspetto verrà messo in evidenza dall'esempio che daremo.

Tale metodo si presta inoltre per i problemi analoghi a quello di STEFAN e schematizzati in un sistema del tipo (II) [7].

---

[7] Altri autori hanno risolto il problema di determinare la soluzione di (IV) mediante una successione di funzioni della sola μ, e cioè con un metodo simile a quello qui esposto (cfr. [13]). Non mi risulta però che tale metodo sia stato usato per i problemi del tipo di STEFAN.

Precisamente, diviso ancora l'intervallo $(0, t)$ in n intervalli di ampiezza $\delta t = \frac{t}{n}$ e posto al solito (cfr. le (4.1)):

$$\Delta_\alpha = D_\alpha \delta t, \qquad \Delta_\beta = D_\beta \delta t, \quad A = a\delta t, \quad \Phi_s = \Phi(s\delta t), \quad \Psi_s = \Psi(s\delta t),$$

il sistema, analogo a (V), da associare, sostituendolo agli effetti dei calcoli, al sistema (II), è:

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} \Delta_\alpha v_s''(\mu) = v_s(\mu) - v_{s-1}(\mu), & \mu \in (0, e_s) \\ \Delta_\beta v_s''(\mu) = v_s(\mu) - v_{s-1}(\mu), & \mu \in (e_s, \mu_0), \\ \Delta_\alpha v_s'(e_s -) - \Delta_\beta v_s'(e_s +) = l(e_s - e_{s-1}) - A(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta), & \\ v_s(0+) = \Phi_s, \quad v_s(e_s) = 0, \quad v_s(\mu_0 -) = \Psi_s, & s = 1, 2, \ldots, n, \\ e_0 = 0, \quad v_0(\mu) = F(\mu), & \mu \in (0, \mu_0), \end{cases}$$

dove l'incognita è costituita dall'ennupla ordinata $\{e_s, v_s(\mu)\}$, $s = 1, 2, \ldots, n$, (per il significato del simbolo $\{e_s, v_s(\mu)\}$, cfr. § 4). Ricordando i teoremi dimostrati nel § 4 (tenendo anche conto della osservazione fatta per il caso $a(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta) = 0$) si ha immediatamente, procedendo per induzione completa:

TEOREMA 4. - *Se è:*

$$A(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta) \geq 0, \quad \Phi_s < 0, \quad \Psi_s > \frac{a}{D_\beta}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)\mu_0, \qquad s = 1, 2, \ldots, n,$$

$$F(\mu) = v_0(\mu) > \frac{a}{D_\beta}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)\mu, \qquad \mu \in (0, \mu_0),$$

oppure se è:

$$A(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta) < 0, \quad \Phi_s < \frac{a}{D_\alpha}(k_\alpha \rho_\alpha - k_\beta \rho_\beta)\mu_0, \quad \Psi_s > 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, n,$$

$$F(\mu) = v_0(\mu) > 0, \qquad \mu \in (0, \mu_0),$$

esiste una ed una sola ennupla ordinata $\{e_s, v_s(\mu)\}$, $s = 1, 2, \ldots, n$, *soluzione* *del sistema* (VI) *ed è*:

$$m \leq v_s(\mu) < 0 \quad \text{per} \quad \mu \in (0,\ e_s), \quad 0 < v_s(\mu) \leq M \quad \text{per} \quad \mu \in (e_s,\ \mu_0).$$

Per completare la prova di quest'ultima parte del teorema 4, e cioè delle limitazioni, basta applicare la proprietà c.

Anche per il caso del sistema (VI) non ci occupiamo della convergenza del metodo limitandoci a dare anche qui un esempio numerico per un problema di cui è nota la soluzione, effettuando così un confronto.

Diamo da prima l'esempio relativo all'applicazione del metodo schematizzato in (V) per il calcolo della soluzione di (IV).

Si consideri il seguente problema:

$$(\mathrm{IV})_1 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V(\mu,\ t)}{\partial \mu^2} = \dfrac{\partial V(\mu,\ t)}{\partial t}, \quad t \in (0,\ T), \quad \mu > 0, \\[2ex] \lim\limits_{t \to 0} V(\mu,\ t) = 0, \quad \mu > 0, \\[2ex] \lim\limits_{\mu \to 0} V(\mu,\ t) = 1, \quad t \in (0,\ T). \end{cases}$$

Volendo valutare $V(\mu,\ t)$ ad un istante $t \in (0,\ T)$ con il metodo (V) dovremo integrare il sistema (cfr. la (5.3)):

$$(\mathrm{V})_1 \qquad \begin{cases} \delta v_s''(\mu) = v_s(\mu) - v_{s-1}(\mu), \quad \mu > 0, \\[1ex] v_s(0) = 1, \quad v_s(\infty) = 0, \qquad\qquad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \\[1ex] v_0(\mu) = 0, \quad \mu > 0, \end{cases}$$

ed assumere come soluzione approssimata la funzione $v_n(\mu)$.

Posto:

$$z = \frac{\mu}{\sqrt{\delta}} \tag{5.4}$$

la soluzione di $(\mathrm{V})_1$ è del tipo:

$$v_s(z) = P_s(z) \exp(-z), \qquad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{5.5}$$

dove $P_s(z)$ è un polinomio in z di grado $s-1$ tale che:

$$\left.\begin{aligned} &P_s''(z) - 2P_s'(z) + P_{s-1}(z) = 0, \\ &P_s(0) = 1, \end{aligned}\right\} \qquad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

da determinare tenendo conto che $P_0(z) = 0$. Posto:

$$P_s(z) = \sum_k^{1-s} p_{s,\,k} z^{s-k}$$

si ha, tenuto conto delle formule sopra scritte:

$$p_{s,\,s} = 1, \qquad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

$$p_{s,\,1} = \frac{1}{2(s-1)} p_{s-1,\,1} \qquad s = 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

$$p_{s,\,k} = \frac{1}{2(s-k)} p_{s-1,\,k} + \frac{s-k+1}{2} p_{s,\,k-1}, \qquad s = 3,\ 4,\ \ldots,\ n, \quad k = 2,\ 3,\ \ldots,\ s-1.$$

Come si vede, avendo a disposizione formule ricorrenti, la determinazione delle funzioni $v_s(z)$ è molto semplice mediante l'uso di un elaboratore elettronico.

Supponiamo adesso di avere determinato $v_n(z)$ e quindi, tenuto conto della (5.4), $v_n\left(\frac{\mu}{\sqrt{\delta}}\right)$. Poichè (cfr. [3], n. 2.5, p. 62) la soluzione del sistema $(IV)_1$ è:

$$V(\mu,\ t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\mu}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\mu}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \exp(-\eta^2)\, d\eta,$$

l'errore che si commette assumendo $v_n\left(\frac{\mu}{\sqrt{\delta}}\right)$ al posto di $V(\mu,\ t)$ è, passando di nuovo alla variabile z con la (5.4) e tenendo conto della (5.3):

$$E_n(z) = v_n(2\sqrt{n}\ z) - \operatorname{erfc}(z).$$

Nella tavola che segue sono riportati i valori di erfc (z), $v_1(2z) = \exp(-2z)$, $v_4(4z)$, $v_9(6z)$, $v_{16}(8z)$ e di $v_{25}(10z)$ per z che varia di 0.05 in 0.05 tra 0 ed 1 e di 0.1 in 0.1 tra 1 e 3. I valori di erfc (z) sono tratti da [3] pag. 485 e i valori di $v_1(2z) = \exp(-2z)$ sono tratti da [**6**] pag. 217 e seg.ti. Invece i valori delle altre funzioni sono stati calcolati direttamente. Avendo operato in precisione semplice abbiamo preso soltanto le prime quattro cifre delle otto fornite dal calcolatore e inoltre non può neppure dirsi che siano esatte essendo praticamente impossibile seguire come si propagano gli errori di trocamento commessi nella esecuzione dei calcoli. In ogni modo procederemo nel confronto come se esse fossero esatte.

Osserviamo infine che sia erf (z) che $v_n(z)$ sono funzioni positive decrescenti. Questa proprietà è immediata per erfc (z) e per $v_1(z)$ mentre per $v_n(z)$, $n = 2, 3, \ldots$, può dedursi facilmente osservando che $v_s'''(z) = v'_s(z) - v'_{s-1}(z)$, che $v'_s(0+) < 0$, essendo $v_s(0+) = 1$ e $v_s(z) < 1$ per $z > 0$, che $\lim\limits_{z \to \infty} v'_s(z) = 0$, ed applicando la proprietà *b*2) alla funzione $v'_s(z)$.

z	$erfc(z)$	$v_1(2z)$	$v_4(4z)$	$v_9(6z)$	$v_{16}(8z)$	$v_{25}(10z)$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.05	0.9436	0.9048	0.9375	0.9411	0.9422	0.9427
0.10	0.8875	0.8187	0.8756	0.8826	0.8848	0.8858
0.15	0.8320	0.7408	0.8147	0.8248	0.8280	0.8295
0.20	0.7772	0.6703	0.7551	0.7680	0.7722	0.7740
0.25	0.7236	0.6065	0.6974	0.7126	0.7175	0.7198
0.30	0.6713	0.5488	0.6418	0.6587	0.6644	0.6669
0.35	0.6206	0.4965	0.5886	0.6068	0.6129	0.6157
0.40	0.5716	0.4493	0.5381	0.5569	0.5634	0.5664
0.45	0.5245	0.4065	0.4903	0.5093	0.5160	0.5191
0.50	0.4795	0.3678	0.4454	0.4641	0.4708	0.4739
0.55	0.4366	0.3328	0.4035	0.4215	0.4281	0.4311
0.60	0.3961	0.3011	0.3645	0.3814	0.3878	0.3907
0.65	0.3579	0.2725	0.3283	0.3440	0.3500	0.3528
0.70	0.3221	0.2465	0.2950	0.3092	0.3147	0.3173
0.75	0.2888	0.2231	0.2644	0.2770	0.2820	0.2844
0.80	0.2578	0.2018	0.2365	0.2473	0.2517	0.2539
0.85	0.2293	0.1826	0.2110	0.2201	0.2239	0.2258
0.90	0.2030	0.1652	0.1879	0.1953	0.1985	0.2000
0.95	0.1791	0.1495	0.1669	0.1728	0.1753	0.1766
1.00	0.1572	0.1353	0.1480	0.1523	0.1543	0.1553
1.10	0.1197	0.1108	0.1157	0.1174	0.1183	0.1188
1.20	0.0896	0.0977	0.0899	0.0895	0.0895	0.0895
1.30	0.0659	0.0742	0.0693	0.0675	0.0668	0.0665
1.40	0.0477	0.0608	0.0532	0.0504	0.0492	0.0487
1.50	0.0338	0.0497	0.0405	0.0372	0.0358	0.0351

z	$erfc(z)$	$v_1(2z)$	$v_4(4z)$	$v_9(6z)$	$v_{16}(8z)$	$v_{25}(10z)$
1.60	0.0236	0.0407	0.0308	0.0272	0.0258	0.0250
1.70	0.0162	0.0333	0.0232	0.0198	0.0183	0.0176
1.80	0.0109	0.0273	0.0175	0.0142	0.0129	0.0122
1.90	0.0072	0.0223	0.0131	0.0101	0.0089	0.0083
2.00	0.0046	0.0183	0.0097	0.0072	0.0061	0.0056
2.10	0.0029	0.0149	0.0072	0.0050	0.0042	0.0037
2.20	0.0018	0.0122	0.0053	0.0035	0.0028	0.0024
2.30	0.0011	0.0100	0.0039	0.0024	0.0019	0.0016
2.40	0.0006	0.0082	0.0029	0.0017	0.0012	0.0010
2.50	0.0004	0.0067	0.0021	0.0011	0.0008	0.0006
2.60	0.0002	0.0055	0.0015	0.0007	0.0005	0.0004
2.70	0.0001	0.0045	0.0011	0.0005	0.0003	0.0002
2.80	0.00007	0.0036	0.0008	0.0003	0.0002	0.00016
2.90	0.00004	0.0030	0.0006	0.0002	0.0001	0.00010
3.00	0.00002	0.0024	0.0004	0.0001	0.00008	0.00006

Come si può vedere dalla tavola l'andamento è molto regolare confortando così, in un certo senso, sul significato delle cifre riportate, (cfr. erfc (2) e $v_{25}(10z)$).

Dall'ultima osservazione fatta e dai valori riportati nella tavola per $z = 3$, valori che, come abbiamo detto, prendiamo come se fossero esatti, segue per $z > 3$:

$$| E_1(z) | < 25.10^{-4}, \quad | E_4(z) | < 4.10^{-4}, \quad | E_9(z) | < 2.10^{-4}$$

$$| E_{16}(z) | < 10^{-4}, \quad | E_{25}(z) | < 7.10^{-5}.$$

Effettuiamo adesso il confronto per $0 \leq z \leq 3$.

Dalla tavola si ha che $E_n(z)$, $n = 1, 4, 9, 16, 25$, decresce dal valore 0 per $z = 0$ ad un valore minimo che è, rispettivamente, dell'ordine di -1250.10^{-4}, -345.10^{-4}, -155.10^{-4}, -90.10^{-4}, -60.10^{-4}, ed è raggiunto, rispettivamente, per z nell'intorno di 0.35, 0.45, 0.50, 0.50, 0.50. Successivamente $E_n(z)$ cresce annullandosi nell'intorno di 1.20 seguitando a crescere fino a raggiungere un massimo dell'ordine, rispettivamente, di 175.10^{-4}, 75.10^{-4}, 40.10^{-4}, 25.10^{-4}, 15.10^{-4}, per z nell'intorno di 1.60, 1.70.

Come si vede l'andamento dell'approssimazione è regolarissimo confortando quindi sulla validità del procedimento.

Diamo adesso un esempio relativo all'applicazione del metodo di cui al sistema (VI). Si consideri il seguente problema (del tipo di STEFAN):

$$
(\mathrm{II})_1 \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 V(\mu, t)}{\partial \mu^2} = \dfrac{\partial V(\mu, t)}{\partial t}, \quad t \in (0, T), \quad 0 < \mu < e(t), \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 V(\mu, t)}{\partial \mu^2} = \dfrac{\partial V(\mu, t)}{\partial t}, \quad t \in (0, T), \quad e(t) < \mu, \\[2ex]
\lim\limits_{\mu \to e(t)-} \dfrac{\partial V(\mu, t)}{\partial \mu} - \lim\limits_{\mu \to e(t)} \dfrac{\partial V(\mu, t)}{\partial \mu} = \dot{e}(t), \quad t \in (0, T), \\[2ex]
e(0) = 0, \ \lim\limits_{t \to 0} V(\mu, t) = 0, \quad 0 < \mu, \\[2ex]
\lim\limits_{\mu \to 0} V(\mu, t) = -1, \quad V(e(t), t) = 0, \quad \lim\limits_{\mu \to \infty} V(\mu, t) = 0, \quad t \in (0, T)
\end{cases}
$$

Posto al solito (cfr. (5.3)) $\delta = \dfrac{t}{n}$ il sistema di tipo (VI) associato è:

$$
(\mathrm{VI})_1 \quad \begin{cases}
\delta v''_s(\mu) = v_s(\mu) - v_{s-1}(\mu), \quad 0 < \mu < e_s, \\[1ex]
\delta v''_s(\mu) = v_s(\mu) - v_{s-1}(\mu) \quad e_s < \mu, \\[1ex]
\sqrt{\delta} v'_s(e_s-) - \sqrt{\delta} v'_s(e_s+) = \dfrac{e_s - e_{s-1}}{\sqrt{\delta}} \\[1ex]
v_s(0+) = -1, \ v_s(e_s) = 0, \ v_s(\infty) = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, n, \\[1ex]
e_0 = 0, \ v_0(\mu) = 0, \ 0 < \mu,
\end{cases}
$$

Come si verifica facilmente, posto

$$
(5.4) \qquad z = \frac{\mu}{\sqrt{\delta}},
$$

$$
(5.4)_1 \qquad a_s = \frac{e_s}{\sqrt{\delta}}, \qquad s = 1, 2, \ldots, n,
$$

la soluzione $\{e_s, v_s(\mu)\}$, $s = 1, 2, \ldots, n$, la quale esiste ed è unica in forza del teorema 4, può scriversi nella forma:

$$
(5.6)\quad \begin{cases}
a_s = a_{s-1} + \dfrac{2 - \displaystyle\int_0^{a_s} v_{s-1}(\xi)\,[\exp(\xi) - \exp(-\xi)]\,d\xi}{\exp(a_s) - \exp(-a_s)}\,, \\[2ex]
v_s(z) = \dfrac{\exp(z - a_s) - \exp(a_s - z) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{a_s} v_{s-1}(\xi)[\exp(a_s - \xi) - \exp(\xi - a_s)]d\xi\,[\exp(z) - \exp(-z)]}{\exp(a_s) - \exp(-a_s)} \\[2ex]
\qquad - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{z} v_{s-1}(\xi)[\exp(z - \xi) - \exp(\xi - z)]\,d\xi, \\
\qquad\qquad 0 < z < a_s. \\
v_s(z) = 0, \quad a_s < z,
\end{cases}
$$

$$
a_0 = 0, \quad v_0(z) = 0, \quad 0 < z.
$$

Poichè, per il teorema 4, è $v_s(z) < 0$ per $0 < z < a_s$, dalla prima delle (5.6), tenuto conto anche della terza, segue $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Perciò si ha:

$$
(5.7)\qquad (a_s - a_{s-1})(\exp(a_s) - \exp(-a_s)) = 2 - \int_0^{a_{s-1}} v_{s-1}(\xi)[\exp(\xi) - \exp(-\xi)]\,d\xi.
$$

Come si vede a_s si determina conoscendo a_{s-1} e $v_{s-1}(z)$. Determinato poi a_s dalla (5.7), la seconda e la terza delle (5.6) ci permettono di valutare $v_s(z)$ per ogni valore di z.

Supponiamo adesso di avere valutato a_n e $v_n(z)$ e quindi, tenuto conto della (5.4) e della $(5.4)_1$, e_n e $v_n\left(\dfrac{\mu}{\sqrt{\delta}}\right)$. Poichè la soluzione di $(\mathrm{II})_1$ è (cfr. [3] n. 11.2, I, pp. 285-287):

$$
e(t) = 2\lambda\sqrt{t}
$$

$$
V(\mu, t) = \frac{\operatorname{erf}\dfrac{\mu}{2\sqrt{t}}}{\operatorname{erf}\lambda} - 1, \qquad 0 < \mu < e(t),
$$

$$
V(\mu, t) = 0, \qquad e(t) < \mu,
$$

dove $\lambda = \text{cost.} < 0$ è la soluzione dell'equazione:

$$2\lambda \exp(\lambda^2) \int_0^\lambda \exp(-\eta^2)\, d\eta = 1 \tag{5.8}$$

dalla (5.3) e dalla (5.4) segue che ove risulti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2\sqrt{n}} = \lambda$$

avremo pure $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e(t)$. Basterà perciò, calcolato a_n, fare il confronto fra $\dfrac{a_n}{2\sqrt{n}}$ e λ.

Dalla (5.8) si ha:

$$0.6200 < \lambda < 0.6201.$$

Il calcolo di a_n per $n = 1, 2, 3, \ldots, 25$ è stato fatto mediante il calcolatore elettronico approssimando gli integrali con il metodo dei trapezi e con passo $z = 10^{-1}$. Riportiamo qui di seguito tali valori prendendo soltanto le prime quattro cifre decimali delle otto fornite dal calcolatore. Essi sono, nell'ordine per $n = 1, 2, 3, \ldots, 25$:

0.9320	1.4767	1.8948	2.2441	2.5490	2.8273	3.0852
3.3212	3.5460	3.7564	3.9604	4.1498	4.3332	4.5116
4.6928	4.8640	5.0300	5.1922	5.3516	5.5005	5.6450
5.7874	5.9266	6.0617	6.1961.			

In conseguenza si hanno per $\dfrac{a_n}{2\sqrt{n}}$ i seguenti valori:

0.4660	0.5219	0.5469	0.5610	0.5700	0.5770	0.5829
0.5869	0.5910	0.5939	0.5969	0.5989	0.6010	0.6029
0.6059	0.6080	0.6100	0.6119	0.6139	0.6150	0.6159
0.6170	0.6180	0.6187	0.6196.			

Pur non potendo garantire sulla esattezza dei valori trovati per $\dfrac{a_n}{2\sqrt{n}}$, sia perchè non abbiamo seguito gli errori di troncamento connessi sia, principalmente, perchè il metodo seguito per valutare gli integrali che compaiono nella (5.7) e nella seconda delle (5.6) è poco preciso, dalla tavola riportata si vede che l'andamento di $\frac{a_n}{2\sqrt{n}}$ è sufficientemente regolare in quanto l'incremento tra un valore e il successivo decresce regolarmente al crescere di n confortando così sulla validità dei calcoli.

Confrontando poi con il valore trovato per λ siano indotti a credere nella validità del metodo.

Purtroppo non è stato possibile eseguire calcoli più accurati, diminuendo il passo di integrazione per il calcolo degli integrali sopra detti, a causa delle limitate capacità di memoria dell'elaboratore I.B.M. 1620.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. PERUCCA, *Fisica Generale e Sperimentale.* Vol. I°, 7 ed. Torino 1960.
[2] P. PASCAL, *Nouveau Traité de Chemie Minérale* Parigi 1960.
[3] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids,* 2 ed. Oxford 1959.
[4] G. E. FORSYTE and W. R. WASOW, *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations.* New York 1960.
[5] J. TODD, *Survey of Numerical Analysis.* New York 1962.
[6] L. J. COMRIE, *Mathematical Tables.* Vol. II°, London 1949.
[7] D. QUILGHINI, *Su di un nuovo problema del tipo di Stefan.* Ann. di Mat. pura e appl. (IV) vol. LXII, pp. 59-98 (1963).
[8] —— *Sul comportamento asintotico delle soluzioni di un problema del tipo di Stefan.* Atti del Sem. Mat. e Fis. di Modena, vol. XII, pp. 107-120 (1963).
[9] L. NIREMBERG, *A strong maximum principle for parabolic equations.* Comm. Pure Appl. Math. (6) pp. 167-177 (1953).
[10] G. SESTINI, *Su un problema non lineare del tipo di Stefan.* Lincei. Rend. Sc. fis. mat. e nat. Vol. XXXV, pp. 518-523 (1963).
[11] —— *Problemi di diffusione lineari e non lineari analoghi a quello di Stefan.* Conf. Sem. Univ. Bari 55-56, (1960).
[12] M. GEVREY, *Equations aux dérivées partielles du type parabolique.* J. Math. Pures Appl. (6), 9, pp. 306-471 (1913).
[13] D. R. HARTREE and J. R. WOMERSLEY *A method for the numerical or mechanical solution of certain types of partial differential equations.* Proc. Roy. Soc. London A 161, pp. 353-366. (1937).